Štátnicová téma: S2 Numerické riešenie diferenciálnych rovníc, Eulerova metóda, MidPoint metóda, Runge-Kutta metóda, podmienka stability na voľbu časového kroku, sily odozvy (response forces).

Michal Janáčik, Milan Darjanin

23. januára 2016

1 Numerické riešenie diferenciálnych rovníc

1.1 Obyčajná diferenciálna rovnica

Obyčajná diferenciálna rovnica je rovnica, ktorá obsahuje funkciu o jednej nezávislej premennej a jednu alebo viacero jej derivácií. Rád najvyššej derivácie s nenulovým koeficientom nám určuje rád diferenciálnej rovnice.

Metóny na numerické riešenie diferenciálnych rovníc:

- Eulerova metóda
- MidPoint metóda
- Runge-Kuta metóda

1.2 Explicitná Eulerova metóda

Myšlienka: Máme zadanú počiatočnú hodnotu $p(t_0)$ fukcie p v čase t_0, vieme nájsť $p(t_0 + h)$ použitím Taylorovho rozvoja:

$$p(t_0 + h) = p(t_0) + hp'(t_0) + O(h^2); p'(t_0) = F(p(t_0); t_0)$$

Numerický algoritmus, kde p_0 je nejaká počiatočná hodnota:

$$p_{n+1} = p_n + hF(p_n; t_n)$$

Plusy a mínusy:

- Veľmi jednoduchý, rýchly a ľahký na implementáciu
- Veľká chyba - $O(h^2)$
- Môže byť nestabilný, chyba môže rásť do nekonečna

1.3 MidPoint metóda

Myšlienka: Použiť približnú deriváciu $p'(t + h/2)$ funkcie $p(t)$ v čase $t + h/2$ namiesto jednoduchej $p'(t)$. Numerický algoritmus:

$$p_{n+1} = p_n + hF(p_n + (h/2)F(p_n, t_n), t_n + h/2)$$

Plusy a mínusy:

- Veľmi jednoduchý, rýchly a ľahký na implementáciu
- Menšia chyba ako pri Eulerovej metóde - $O(h^3)$
- Potreba vyčísliť funkciu F dvakrát - viac počítania

1.4 Runge-Kutta metóda

Numerické riešenie:

$$k_1 = hF(p(t_0), t_0)$$

$$k_2 = hF(p(t_0) + \frac{k_1}{2}, t_0 + \frac{h}{2})$$

$$k3 = hF(p(t_0) + \frac{k_2}{2}, t_0 + \frac{h}{2})$$

$$k4 = hF(p(t_0) + k_3, t_0 + h)$$

$$p(t_0 + h) = p(t_0) + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)$$

Plusy a mínusy:

- Ešte menšia chyba ako pri Midpoint metóde - $O(h^5)$
- Ešte viac počítania

1.5 Podmienka stability na voľbu časového kroku

Pre Eulerovu a Runge-Kutta metódu vieme určiť krok h aby výpočet bol stabilný.

Majme diferenciálnu rovnicu tvaru $p'(t) = \lambda p(t)$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$.

Eulerova metóda je na danej rovnici stabilná, ak $|1 + h\lambda| \leq 1$.

Runge-Kutta metóda je na danej rovnici stabilná, ak

$$|1 + h\lambda \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{6} + \frac{h^4\lambda^4}{24}| \leq 1$$

2 Sily odozvy (response forces)

V prípade kolízie dvoch pevných telies ich kinetické vlastnosti prechádzajú instantnou zmenou, typicky končiacou odrazom od seba, líznutím sa, alebo relatívne statickým kontaktom, v závislosti na elasticite materiálu a smere kolízie. Pri tejto kolíizií narozdiel od ideálnych pevných telies dochádza k deformácií, najskôr sa teleso splošťuje (dochádza ku kompresii), a následne ku expanzii telesa pri prípadnom oddelení sa. Kompresná fáza mení kinetickú energiu na potenciálnu (plus navyše teplo), expanzná zase naspäť.

Koľko potenciálnej energie sa zmení na kinetickú závisí od elasticity materiálu. Na jeho určenie máme koeficient e_n, pre ktorý platí $0 \leq e_n \leq 1$. Čím bližšie k hodnote 1, tým je objekt eleastickejší a skôr sa vráti do pôvodného stavu. Relatívnu rýchlosť objektu pred kolíziou si označme ako $u_n(t^-)$, rýchlosť po kolízií ako $u_n(t^+)$.
Potom platí vzťah:

$$u_n(t^+) = -e_n u_n(t^-).$$

Kolízny impulz: Intergrál času a odpudivých síl pôsobobiacich na teleso v momente kolízie.

$$j(t) = \int_t^{t+h} f(a)dt.$$