ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. E. Welzl

Sessionsprüfungs-Klausur

Zürich, 17. März 2006

Aufgabe 1

(a) Geben Sie eine unendliche Folge von Wörtern $y_1, y_2, y_3, \ldots$ über Σ_{bool} mit folgenden Eigenschaften an:

- $|y_i| < |y_{i+1}|$ für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, und
- es existiert eine Konstante c, so dass

$$K(y_i) \leq \lceil \log_2 \log_2 \log_2 |y_i| \rceil + c$$

für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ gilt.

(b) Beweisen Sie mittels Kolmogorov-Komplexität, dass die Sprache $L = \{0^{n^2}1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine reguläre Sprache ist.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Betrachten Sie $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \mod 3 \in \{0,2\}\}$ und $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = x011y \text{ und } x, y \in \{0,1\}^*\}$.

(a) Geben Sie für L_1 und L_2 EA in Form eines Diagramms an. (Beachten Sie, dass damit deterministische Automaten gemeint sind.)

(b) Konstruieren Sie aus den Automaten aus Teil (a) einen EA M mit $L(M) = L_1 \cap L_2$.

(c) Geben Sie für den Anfangszustand und alle Endzustände von M die zugehörigen Wortklassen genau an.

3+4+3 Punkte

Aufgabe 3

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$S_1 := \{a^k b^\ell a^m b^n \mid k \geq \ell \text{ und } m \geq n, \text{ sowie } k, \ell, m, n \in \mathbb{N}\}$$

an.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$S_2 := \{a^k b^\ell a^m b^n \mid k \geq \ell \geq m \geq n, \text{ sowie } k, \ell, m, n \in \mathbb{N}\}$$

nicht kontextfrei ist.

4+6 Punkte

Aufgabe 4

(a) Gegeben seien die Grammatiken

$$G' = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aaA, A \to bB, B \to bB, B \to aaa\}, A)$$

und

$$G'' = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{B \to bbB, B \to aA, A \to aA, A \to bbb\}, B).$$

Konstruieren Sie hieraus eine reguläre Grammatik für die Sprache

$$L(G') \cdot \{abba, baaa\} \cdot L(G'').$$

(b) Zu folgender kontextfreien Grammatik

$$G = (\{A, B, S\}, \{a, b\}, P, S)$$

mit

$$P = \{S \to aB, S \to bA, A \to a, A \to aS, A \to bAA, B \to b, B \to bS, B \to aBB\}$$

konstruieren Sie einen äquivalenten NPdA.

5+5 Punkte

Aufgabe 5

Beweisen Sie $L_U \leq_R L_H$, in dem Sie eine Reduktion von L_U auf L_H angeben. **10 Punkte**

Aufgabe 6

Sei M eine 1-Band-Turingmaschine mit Speicherplatzbedarf $\text{Space}_M(n) \in O(n)$, die immer hält. Das Arbeitsalphabet von M enthält nebst Randsymbol ¢ und Blanksymbol ␣ nur ein weiteres Symbol 1, und der Inhalt des Arbeitsbandes ist in allen Berechnungen von M stets von der Form $¢1^i␣␣␣\ldots$ für $i \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $L(M) \in \text{TIME}(n^c)$ für ein $c \in \mathbb{N}$ (d.h. $L(M) \in \mathbf{P}$). Geben Sie ein explizites c an, für das die Aussage auf Grund Ihres geführten Arguments gilt. **10 Punkte**

Zusatzaufgabe 7

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von SAT auf VC (vertex cover) an. **10 Punkte**