ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

Sessionsprüfung

Zürich, 3. Februar 2015

Aufgabe 1

(a) Entwerfen Sie einen deterministischen endlichen Automaten für die Sprache

$$L = \{x01y \mid x \in \{0,1\}^* \text{ und } y \in \{0,1\}\}\,.$$

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres Automaten aus Aufgabenteil (a) die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

(c) **Bonusaufgabe:** Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat A mit $L(A) = L$ mindestens 5 Zustände hat.

Hinweis: Diese Bonusaufgabe ist nicht ganz einfach, wir empfehlen Ihnen, sie erst am Ende der Klausur zu bearbeiten.

6+4 Punkte + 4 Bonuspunkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$,

(b) $L_2 = \{0^{3n^2+5} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas, oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die aufsteigend sortierte Folge aller Primzahlen. Zeigen Sie, dass eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass

$$K(p_n) < \log_2(p_n) - 2\,.$$

Hinweis: Aus dem Primzahlsatz folgt, dass $p_n \in \Theta(n \cdot \ln n)$. **10 Punkte**

Aufgabe 4

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid k \leq \min\{i, j\}\}$$

nicht kontextfrei ist.

2+8 Punkte

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\mathrm{Kod}(M)\#\mathrm{Kod}(M') \mid L(M) \not\subseteq L(M')\}$$

nicht rekursiv ist. **10 Punkte**

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie, dass 3-SAT $\leq_p$ VC gilt, indem Sie explizit eine Polynomzeitreduktion angeben und deren Korrektheit nachweisen.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf die Formel $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_4})$ an.

8+2 Punkte