ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf17`

Sessionsprüfung

Zürich, 30. Januar 2018

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \bmod 2 = 1 \text{ oder } w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie mit einer der drei in der Vorlesung vorgestellten Methoden (Lemma 3.3, Pumping-Lemma oder Kolmogorov-Komplexität), dass die Sprache

$$L_1 = \{0^{\binom{2n}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der die Sprache

$$L_2 = \{aaw \mid w \in \{a,b\}^* \text{ und } (|w|_a - |w|_b) \bmod 3 = 0\}$$

akzeptiert, mindestens 6 Zustände hat.

5+5 Punkte

Aufgabe 3

(a) Entwerfen Sie eine kontextfreie Grammatik über dem Terminalalphabet $\{a, b, \#\}$, die die Sprache

$$L_1 = \{u\#v \mid u, v \in \{a,b\}^* \text{ und } |u|_a = 2 \cdot |v|_b\}$$

erzeugt und beschreiben Sie informell die Idee Ihrer Konstruktion.

(b) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(c) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L_2 = \{s\#t \mid s, t \in \{a,b\}^* \text{ und } s = tt\}$$

über dem Alphabet $\{a, b, \#\}$ nicht kontextfrei ist.

3+2+5 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(a) Wir betrachten die Sprache

$$L_{2,\mathrm{U},\lambda} = \{\mathrm{Kod}(M')\#\mathrm{Kod}(M'') \mid \lambda \in L(M') \cap L(M'')\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_{2,\mathrm{U},\lambda} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ gilt. Sie dürfen hierfür alle aus der Vorlesung bekannten Resultate verwenden.

(b) Wir betrachten die Sprache

$$L_{\exists,\mathrm{H}} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid \text{es gibt ein Wort } w\text{, auf dem } M \text{ hält}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{R}} L_{\exists,\mathrm{H}}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und die Korrektheit Ihrer Reduktion begründen.

(c) Zeigen Sie, dass $L_{\exists,\mathrm{H}} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$ gilt.

2+4+4 Punkte

Aufgabe 5

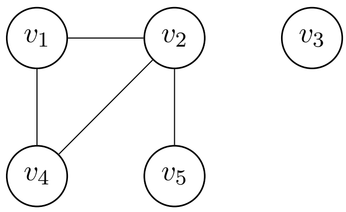
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *dominierende Menge* (*dominating set*) ist eine Teilmenge $D \subseteq V$ der Knoten, so dass jeder Knoten von G in D liegt oder mindestens einen Nachbarn in D hat. Das *Dominating-Set-Problem* (DS) als Entscheidungsproblem wird beschrieben durch die Sprache aller Paare (G, k), bestehend aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer natürlichen Zahl k, so dass G eine dominierende Menge der Grösse k hat.

(a) Geben Sie eine Polynomzeit-Reduktion vom Vertex-Cover-Problem VC auf DS an, die für jede VC-Instanz (G, k) mit $G = (V, E)$ eine DS-Instanz (G', k') konstruiert, so dass

$$(G, k) \in \mathrm{VC} \iff (G', k') \in \mathrm{DS}\,.$$

Hinweis: Es ist hilfreich, in G' alle Knoten aus V zu übernehmen und zusätzlich für jede Kante $e \in E$ einen neuen Knoten hinzuzufügen und geeignet zu verbinden.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf den folgenden Graphen G und $k = 2$ an. Stellen Sie dabei G' graphisch dar.



(c) Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktion.

4+2+4 Punkte

Aufgabe 6

Sei s eine platzkonstruierbare Funktion mit $s(n) \geq \log_2 n$. Zeigen Sie

$$\mathrm{NSPACE}(s(n)) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(c^{s(n)})\,.$$

10 Punkte