ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

Sessionsprüfung

Zürich, 29. Januar 2021

NAME: .... VORNAME: ....

LEGINUMMER: ....

Lesen Sie die folgenden Hinweise aufmerksam durch, bevor Sie fortfahren.

- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, nur ein dokumentenechter Stift in blauer oder schwarzer Farbe.
- Versehen Sie jedes Blatt oben mit Ihrem vollständigen Namen.
- Die Prüfung besteht aus diesem Deckblatt und 14 nummerierten Seiten mit 7 Aufgaben sowie einem Extrablatt, das Sie verwenden können, wenn der Platz auf den Aufgabenblättern nicht ausreicht. Weitere Extrablätter können jederzeit während der Prüfung angefordert werden.
- Falls Sie die Extrablätter verwenden, verweisen Sie auf dem entsprechenden Aufgabenblatt deutlich darauf und geben Sie auf den Extrablättern klar an, welche Aufgabe Sie hier bearbeiten.
- Sie haben 180 Minuten zur Bearbeitung der Aufgaben.
- Unterschreiben Sie die folgende Eigenständigkeitserklärung:

  Ich versichere, die Prüfung selbstständig bearbeitet zu haben und dass mir bekannt ist, dass bei einem Täuschungsversuch die Klausur als "nicht bestanden" bewertet werden wird.

....
(Unterschrift)

Aufgabe	1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)
Punkte	4	4	4	4	4	4	4
erreicht							

Aufgabe	4	5(a)	5(b)	6(a)	6(b)	7(a)	7(b)
Punkte	8	6	2	4	4	4	4
erreicht							

Punkte: ...... Note: ......

Name:

Aufgabe 1

4 + 4 + 4 Punkte

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten in graphischer Darstellung, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \geq 2 \text{ und } w \text{ endet mit } aa\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

Aufgabe 1 **4 + 4 + 4 Punkte**

(c) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2 \text{ und } w \text{ endet mit } aa\}$$

aus Aufgabenteil (a) akzeptiert, mindestens 5 Zustände hat.

Aufgabe 2

4 + 4 Punkte

(a) Geben Sie eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$ an, so dass eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $i \geq 1$

$$K(y_i) \leq \log_2 \log_2 \log_2(y_i) + c$$

eine obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität ist.

Aufgabe 2

4 + 4 Punkte

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $i < n$ mindestens $2^n - 2^{n-i}$ unterschiedliche Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gibt mit $K(x) \geq n - i$.

Aufgabe 3

4 + 4 Punkte

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{0^i 1^j 0^{i \cdot j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}\,.$$

(a) Verwenden Sie die Methode der Kolmogorov-Komplexität, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 3

4 + 4 Punkte

(b) Verwenden Sie eine der anderen in der Vorlesung vorgestellten Methoden, um zu zeigen, dass

$$L = \{0^i 1^j 0^{i \cdot j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Aufgabe 4 **8 Punkte**

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{\mathrm{Kod}(M_1)\#\mathrm{Kod}(M_2)\#k \mid M_1 \text{ und } M_2 \text{ sind TM über dem Eingabealphabet } \Sigma \\ \text{und } \Sigma^k \not\subseteq L(M_1) \cup L(M_2)\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L \notin \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$ gilt.

Aufgabe 5

6 + 2 Punkte

(a) Sei s eine platzkonstruierbare Funktion mit $s(n) \geq \log_2 n$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathrm{SPACE}(s(n)) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(c^{s(n)})\,.$$

Aufgabe 5

6 + 2 Punkte

(b) Zeigen Sie, dass DLOG $\subseteq$ P $\subseteq$ PSPACE gilt.

Aufgabe 6

4 + 4 Punkte

(a) Sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Problem kSAT definiert als das Teilproblem von SAT eingeschränkt auf KNF-Formeln, die nur Klauseln der Länge höchstens k enthalten.

Zeigen Sie, dass 3SAT NP-schwer ist. Sie dürfen für den Beweis verwenden, dass 4SAT NP-schwer ist.

Aufgabe 6

4 + 4 Punkte

(b) Wir nennen eine Klausel einer KNF-Formel *monoton*, wenn sie entweder keine negierten Variablen oder nur negierte Variablen enthält. Wir betrachten die Menge monotone-3SAT aller erfüllbaren KNF-Formeln, die ausschliesslich aus monotonen Klauseln der Länge höchstens 3 bestehen.

Zeigen Sie, dass monotone-3SAT NP-vollständig ist.

Sie dürfen für Ihren Beweis voraussetzen, dass das in Aufgabenteil (a) betrachtete Problem 3SAT NP-schwer ist.

Aufgabe 7

4 + 4 Punkte

(a) Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, X_0, X_1, X_2\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to X_0aa, \\
X_0 &\to aX_0 \mid bX_1, \\
X_1 &\to aX_1 \mid bX_2, \\
X_2 &\to aX_2 \mid bX_0 \mid \lambda\}\,.
\end{aligned}
$$

Geben Sie die von G erzeugte Sprache an und begründen Sie ihre Behauptung informell.

Aufgabe 7 **4 + 4 Punkte**

(b) Geben Sie eine reguläre Grammatik für die Sprache

$$L = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^* \text{ und } |x|_a + |y|_a \bmod 2 = 1\}$$

an und begründen Sie informell die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Weiterer Raum für Lösungen

Bitte Aufgabennummer angeben und von der entsprechenden Aufgabe hierher verweisen.

Weiterer Raum für Lösungen

Bitte Aufgabennummer angeben und von der entsprechenden Aufgabe hierher verweisen.