Wprowadzenie do miar neutralnych

Dariusz Kalociński

Instytut Podstaw Informatyki PAN

ITaR Seminar, 25.03.2021

MOTYWACJE

1. Znaczna część AIT dotyczy:
   * przestrzeni (nie)skończonych ciągów
   * rozkładu prawdopodobieństwa jednorodnego / obliczalnego
2. Przestrzeń Cantora jest zwarta
   * znaczna część teorii prawdop. dzieje się na przestrzeniach, które nie są nawet LOKALNIE ZWARTE
3. Ograniczenie do obliczalnych miar również jest dalekoidące.

CHCEMY WYJŚĆ POZA TE OGRANICZENIA

→ miary pstwa / losowości na (odpowiedniej) przestrzeni topologicznej / metrycznej ←

4. Związek z ekstraktorami

LITERATURA

1. Gacs 'Lecture notes on descriptional complexity and randomness' (2013)
2. Levin 'Uniform tests of randomness' (1976)
3. Klaus Weihrauch 'Computable Analysis' (2000)
4. Hoyrup & Rojas 'Computability of probability measures and Martin-Löf randomness over metric spaces' (2009)

...

PLAN

I WPROWADZENIE

- elementy konstruktywnej topologii, teorii miary, analizy
- jednorodne testy na losowość
- uniwersalny jednorodny test na losowość

II MIARY NEUTRALNE

- twierdzenie Levina o istnieniu miary neutralnej na każdej zwartej przestrzeni topologicznej
- przykład niezwartej przestrzeni, na której nie ma miary neutralnej
- trudność miar neutralnych

III PODSUMOWANIE

KONSTRUKTYWNA PRZESTRZEŃ METRYCZNA

DEF (konstruktywna przestrzeń metryczna) Jest to krotka
$\mathbb{X}=(X, d, D, \alpha)$, gdzie (X,d) przestrzeń metryczna,
D przeliczalny podzbiór gęsty, α przeliczenie D,
funkcja $d(\alpha(v), \alpha(w))$ jest obliczalna.

PRZYKŁAD. Niech X będzie zbiorem wszystkich ograniczonych
ciągłych funkcji $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $d(f,g)=\sup_x d(f(x), g(x))$.
Wówczas (X,d) jest metryką.
Niech D będzie zbiorem wszystkich kawałkami liniowych
funkcji $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, których graf ma skończenie wiele węzłów
w punktach wymiernych.
D jest przeliczalnym gęstym podzbiorem X.
Istnieje naturalne przeliczenie $\alpha:\mathbb{N}\to D$.
$d(\alpha(v), \alpha(w))$ jest obliczalna.
Zatem (X, d, D, α) to konstruktywna przestrzeń metryczna. $\boxtimes$

KONSTRUKTYWNA PRZESTRZEŃ TOPOLOGICZNA

<u>Def.</u> $X = (X, \sigma, \nu)$ nazywamy konstruktywną przestrzenią topologiczną, jeśli X jest przestrzenią topologiczną o podbazie σ,

X jest T_0,

$\sigma = \{\nu(1), \nu(2), \ldots\}$ i ν obliczalna.

$\sigma^\cap$:= baza konstruktywnej przestrzeni topologicznej (X, σ, ν), tj. zbiór wszystkich skończonych przecięć elementów σ.

$\nu^\cap$ - efektywne przeliczenie bazy $\sigma^\cap$.

<u>PRZYKŁAD 1</u>. Dyskretna przestrzeń topologiczna na przeliczalnym zbiorze z ustalonym efektywnym przeliczeniem.

Np. $(\mathbb{N}, \{\{i\}\}_{i \in \mathbb{N}}, id)$.

<u>PRZYKŁAD 2</u>. $\mathbb{R}$ z bazą otwartych przedziałów o wymiernych końcach, z naturalnym efektywnym przeliczeniem.

<u>UWAGA</u>. Niech (X, d, D, α) konstr. przestrzeń metryczna. Wówczas dostaniemy (X, σ, ν) konstr. przestrzeń topologiczną (generowaną przez d), jeśli $\sigma = \{B(x, r) : x \in D, r \in \mathbb{Q}_+\}$, ν naturalne przeliczenie σ.

$\boxtimes$

ZBIORY KONSTRUKTYWNIE OTWARTE

<u>Def.</u> Niech $X=(X,\sigma,\nu)$ konstruktywna przestrzeń topologiczna. $G\subseteq X$ jest konstruktywnie otwarty (też: „lower semicomputable open" = otwarty semiobliczanie od dołu), jeśli istnieje rekurencyjnie przeliczalny E taki, że $G=\bigcup_{w\in E}\nu^{\cap}(w)$. ⌟

<u>PRZYKŁAD.</u> Niech $(2^{\omega},\sigma,\nu)$ przestrzeń Cantora z bazą $\sigma=\{[J] : J\in 2^{<\omega}\}$ i efektywnym przeliczeniem $\sigma=\{\nu(1),\nu(2),\dots\}$.

To konstruktywna przestrzeń topologiczna.

Zbiory konstruktywnie otwarte w przestrzeni Cantora są postaci

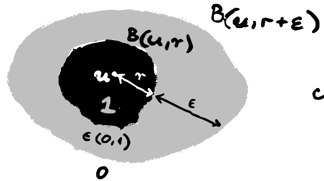
$\bigcup_{J\in E}[J]$, gdzie $E\subseteq 2^{<\omega}$ rekurencyjnie przeliczalny.

MIARY PSTWA NA PRZESTRZENI METRYCZNEJ

Def. (funkcje kapeluszowe) Niech (X, d) przestrzeń metryczna.

$$g_{u,r,\varepsilon}(x) = \big|1 - |d(x,u) - r|^+/\varepsilon\big|^+ ,$$ gdzie

$|\cdot|^+ := \max(\cdot, 0)$.



ciągła

Niech $D \subseteq X$ przeliczalny gęsty.

$$\mathcal{F}_0(D) := \{ g_{u,r,1/n} : u \in D,\ r \in \mathbb{Q}_+,\ n \in \mathbb{N} \}$$

$\mathcal{E} := \mathcal{E}(D) := \{g_1, g_2, \dots\}$ najmniejszy zbiór funkcji $\supseteq \mathcal{F}_0$, domknięty na $\vee$, $\wedge$ i wymierne kombinacje liniowe.

$\mathcal{F}_1(D) :=$ maksima po skończenie wielu elementach $\mathcal{F}_0(D)$

MIARY PSTWA NA PRZESTRZENI METRYCZNEJ

- Ograniczamy się do przestrzeni polskich (zupełnych i separowalnych)
- Niech (X, d) przestrzeń polska.

$\Rightarrow$ $(X, \mathcal{J})$ przestrzeń mierzalna dla σ-ciała $\mathcal{J}$ generowanego przez zbiory otwarte w X.

$\Rightarrow$ można pokazać, że miara jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości na elementach dowolnej <u>bazy</u> zbiorów otwartych domkniętej na przecięcia.

- $\mathcal{M}(X)$:= zbiór miar probabilistycznych na przestrzeni X.

<u>Def.</u> (przestrzeń topologiczna na $\mathcal{M}(X)$) Wybieramy jako podbazę

$\llcorner\, \sigma_\mathcal{M}$:= zbiory $\{\mu : \mu f < r\}$, $\{\mu : \mu f > r\}$ dla $f \in \mathcal{F}_1$, $r \in \mathbb{Q}$. $\lrcorner$

$\mu f = \int f \, d\mu$

SEMIOBLICZALNOŚĆ

<u>Def.</u> Niech X konstruktywna przestrzeń metryczna. $f : X \to \overline{\mathbb{R}_+}$ jest semiobliczalna od dołu (lower semicomputable) jeśli zbiór $\{(x, r) : f(x) > r\}$ jest konstruktywnie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathrm{dom}(f) \times \overline{\mathbb{R}_+}$.

<u>PRZYKŁAD.</u> $1_G(x)$ dla konstruktywnie otwartego G jest semiobliczalna od dołu.

Pojęcia obliczalności (semiobliczalności) można zrelatywizować i np. określić pojęcie μ-semiobliczalności od dołu.

W pierwszym przybliżeniu μ można traktować jako wyrocznię.

(reprezentacje, funkcjonały Turinga, ...)

TESTY NA LOSOWOŚĆ

<u>Def.</u> (μ-test) Niech (X, d, D, α) konstruktywna przestrzeń metryczna, $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

μ-test losowości to μ-semiobliczalna od dołu $f: X \to \overline{\mathbb{R}_+}$ taka, że $\mu f \leq 1$.

Def. (jednorodny test losowości) semiobliczalna od dołu $f: X \times \mathcal{M}(X) \to \overline{\mathbb{R}_+}$, $(x, \mu) \mapsto f_\mu(x)$, taka że $f_\mu(\cdot)$ jest μ-testem losowości dla dowolnej $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

TESTY NA LOSOWOŚĆ

<u>Def.</u> (uniwersalny test) Jednorodny test losowości u jest uniwersalny, jeśli dla dowolnego jednorodnego testu t istnieje stała $c_t > 0$ taka, że dla dow. x, μ:

$$t_\mu(x) \le c_t \, u_\mu(x)$$

<u>TWIERDZENIE</u> (Hoyrup & Rojas 2009)

Dla dowolnej konstruktywnej przestrzeni metrycznej istnieje test uniwersalny,

μ - Losowość

Def. Element $x \in X$ jest μ-losowy, jeśli $f(x) < \infty$ dla każdego μ-testu f.

Równoważnie: jeśli $\underline{t}_\mu(x) < \infty$ dla dow. $\mu \in \mathcal{M}(X)$, gdzie $\underline{t}$ test uniwersalny.

Def. (niedobór losowości, ang. deficiency of randomness)

$$d_\mu(x) = \log \underline{t}_\mu(x) .$$

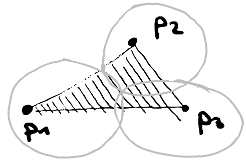
MIARA NEUTRALNA

Def. Miarę M nazywamy neutralną, jeśli

$$t_M(x) \leq 1 \quad \text{dla dow. } x.$$

Stawnomorzycznie: względem miary neutralnej wszystko jest losowe.

TWIERDZENIE (Levin) Jeśli X jest zwarta, to istnieje miara neutralna na X.



Lemat Spernera. Niech $p_1, \dots, p_k$ punkty pewnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że istnieją domknięte $F_1, \dots, F_k$ takie, że dla dow. podzbioru $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k$ indeksów sympleks $S(p_{i_1}, \dots, p_{i_j}) \subseteq F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_j}$.
Wówczas $\bigcap_{i=1}^{k} F_i \neq \phi$.

Lemat. Dla dowolnego domkniętego $A \subseteq X$ i miary μ, jeśli $\mu(A) = 1$, to istnieje $x \in A$ takie, że $t_\mu(x) \leq 1$.

DOWÓD TW. LEVINA

Dla $x \in X$, $F_x := \{\mu \in M(X) : t_\mu(x) \leq 1\}$, F_x domknięty.

UWAGA!
- zwartość X $\Rightarrow$ zwartość $M(X)$
- zwartość $M(X)$ $\equiv$ dow. kolekcja domkniętych podzb. $M(X)$ o własności skończonego przecięcia ma $\neq \emptyset$ przecięcie.

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego skończonego zbioru punktów $x_1, \ldots, x_k$ zachodzi $F_{x_1} \cap \ldots \cap F_{x_k} \neq \emptyset$.

Niech $S(x_1, \ldots, x_k)$ zbiór miar pstwa skoncentrowanych na $x_1, \ldots, x_k$. Niech $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$. $\mu(A) = 1$ dla $\mu \in S(x_1, \ldots, x_k)$.

Z lematu, istnieje $x_i \in A$ t.ż. $t_\mu(x_i) \leq 1$, czyli $x_i \in F_{x_i}$.

Zatem $S(x_1, \ldots, x_k) \subseteq F_{x_1} \cup \ldots \cup F_{x_k}$, podobnie dla podzb. indeksów $\{1, \ldots, k\}$.

Z lematu Spernera, $F_{x_1} \cap \ldots \cap F_{x_k} \neq \emptyset$.

Czyli $\bigcap_{x \in X} F_x \neq \emptyset$. Dla $\mu \in \bigcap_{x \in X} F_x$: $\forall x \in X \; t_\mu(x) \leq 1$. $\boxtimes$

A CO Z PRZESTRZENIAMI NIEZWARTYMI?

TWIERDZENIE. Nie istnieje miara neutralna na przestrzeni dyskretnej $X = \mathbb{N}$.

DW. Skonstruujemy jednorodny test $t_\mu(x)$ taki, że dla dowolnej miary μ: $\sup_x t_\mu(x) = \infty$.

DLACZEGO TO WYSTARCZY: jeśli μ byłaby neutralna, to $\underline{t}_\mu(x) \leq 1$ dla każdego $x \in \mathbb{N}$, ale $t_\mu(x) \leq c\,\underline{t}_\mu(x)$, czyli $\sup_x t_\mu(x) < \infty$ ↯.

$$t_\mu(x) := \sup\Big\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{y<x} \mu(y) > 1 - 2^{-k} \Big\}$$

t_μ semiobliczalna od dołu oraz $\sup_x t_\mu(x) = \infty$.

Pozostaje wykazać, że: $\mu t \leq 1$, dla dow. μ.

$$\mu t = \sum_x \mu(x) t_\mu(x) = \sum_{k>0} \sum_{t_\mu(x) \geq k} \mu(x) < \sum_{k>0} 2^{-k} \leq 1.$$

$\boxtimes$

PODSUMOWANIE

- na każdej zwartej przestrzeni jest miara neutralna
- jeśli przestrzeń nie jest zwarta, to na ogół miara neutralne nie istnieje
- przestrzeń niezwartą można „uzwarcić" (rozszerzenie Alexandroffa) i wtedy miara neutralna istnieje
  - ale obcięcie tej miary neutralnej do wyjściowej przestrzeni daje semimiarę (niezerowa subaddytywna).

...

Wprowadzenie do miar neutralnych

Dariusz Kalociński

Instytut Podstaw Informatyki PAN

ITaR Seminar, 25.03.2021