Procesos Gaussianos, Estacionarios en Covarianza, Densidad Espectral

Grupo 6 - AR(1) Binomial Negativa

Ana María López - Pedro Pablo Villegas

September, 2017

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo presenta un análisis de una serie de primer orden auto-regresiva (AR1) con binomial negativa y marginales geométricas propuesta por Alosh and Ali (1992).

DESARROLLO

Definición del modelo

Se tiene una variable aleatoria $N \in \{0, 1, ...\}$ que se distribuye $BinomialNegativa(BN)$ con parámetros $(prob = p, size = v)$ si su densidad esta dada por:

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\Gamma(k + v)}{\Gamma(v)k!} p^v (1 - p)^k$$

donde $v > 0, 0 < p < 1$ y $\Gamma(z)$ es la función Gamma. La distribución Geométrica de parámetro p corresponde a una $BN(p, 1)$.

Suponga que para cada valor $x > 0$, la variable aleatoria $N(x)$ se distribuye $Binomial$, $N(x) \sim Bin(x, \alpha p)$ donde $0 < \alpha < 1$ es otro parámetro. El proceso $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se define por Alosh and Ali (1992)

$$X_n = \sum_{j=1}^{N(X_{n-1})} W_j + Z_n$$

donde

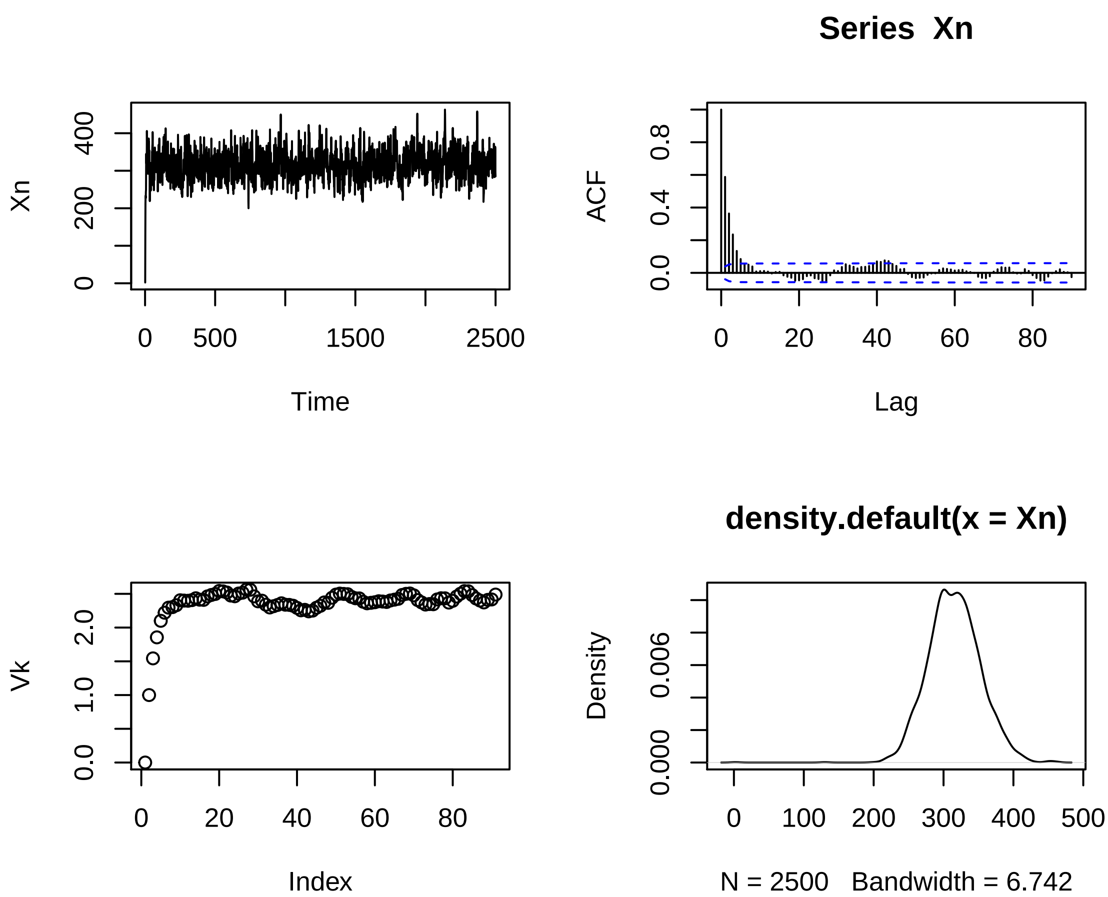
$$W_j \sim iidGeo(\alpha/(\alpha + 1))$$
$$Z_n \sim iidBN(\alpha/(\alpha + 1), v)$$

Simulación del modelo

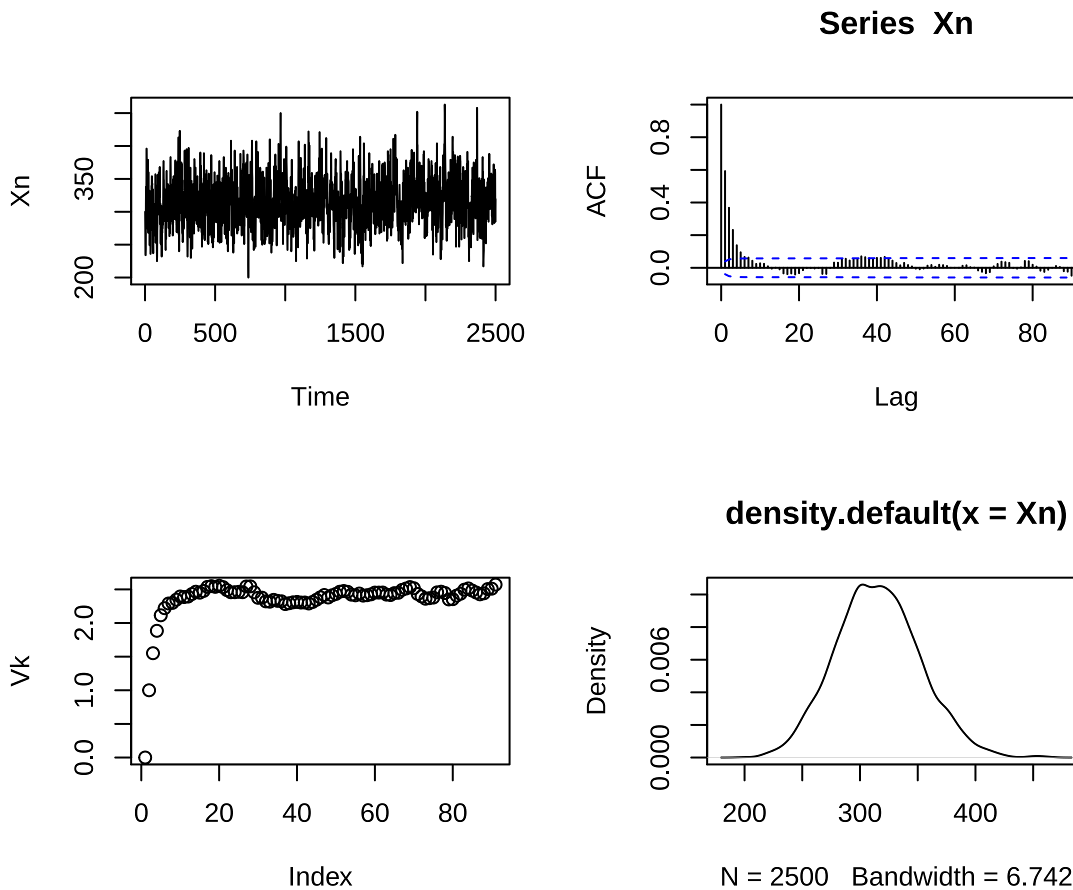
Se realizo simulaciones del proceso con diferentes parámetros y condiciones iniciales, en el primer caso se definieron los parámetros de la siguiente manera:

$$v = 100, p = 0.6, \alpha = 0.8, X_0 = 2$$

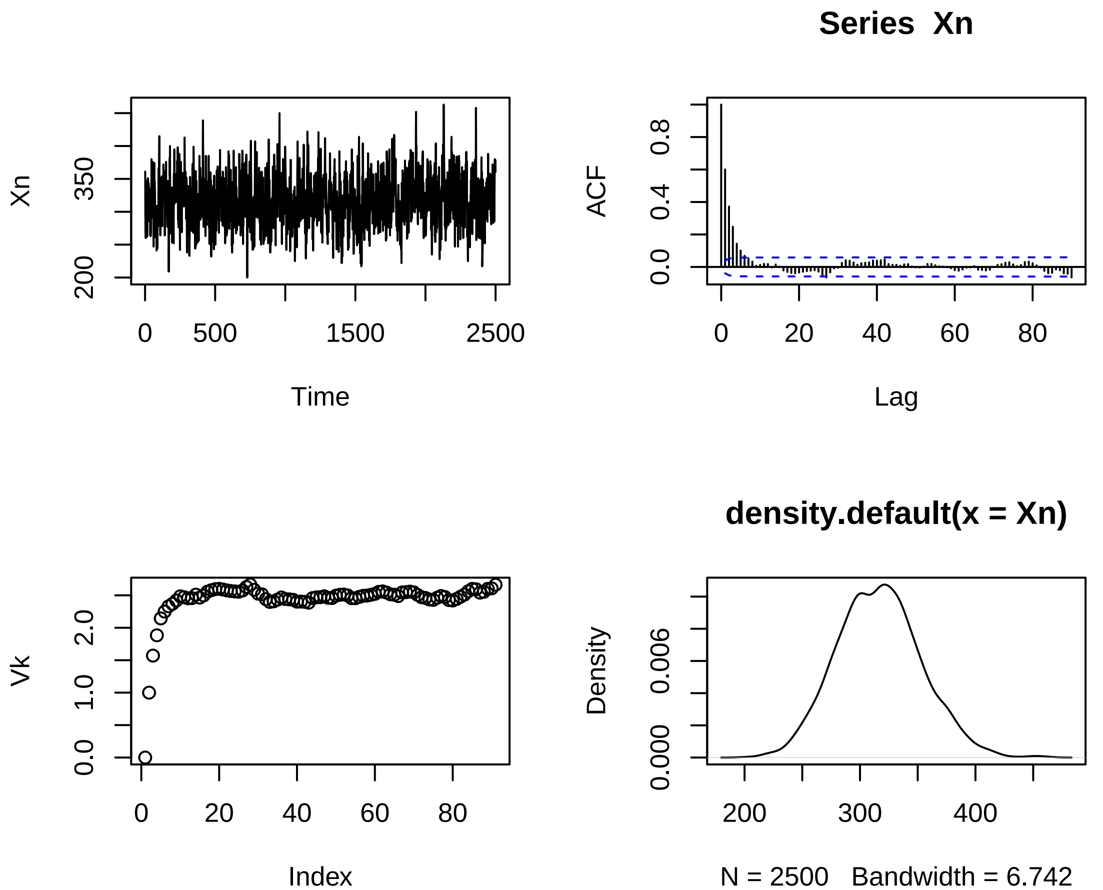
A continuación se ilustra el resultado de esta primera simulación:



Al definir $X_0 = 2$ se ilustra en la gráfica X_n un cambio brusco en la gráfica del X_0 al X_1, lo cual nos indica que estamos tomando un valor X_0 muy pequeño, sin embargo el proceso se estabiliza al instante, oscilando aproximadamente entre 200 y 400, teniendo en cuenta que el proceso en su gráfica de densidad e incluso en la gráfica de X_n nos indica que la media se encuentra aproximadamente en 300, también se evidencia que este valor inicial nos genera un dato atípico generando una función de densidad normal con simetría negativa.
Ahora vamos a realizar nuevamente la simulación para validar el comportamiento del proceso si definimos esta punto inicial $X_0 = 300$, el resultado de la simulación se ilustra a continuación:



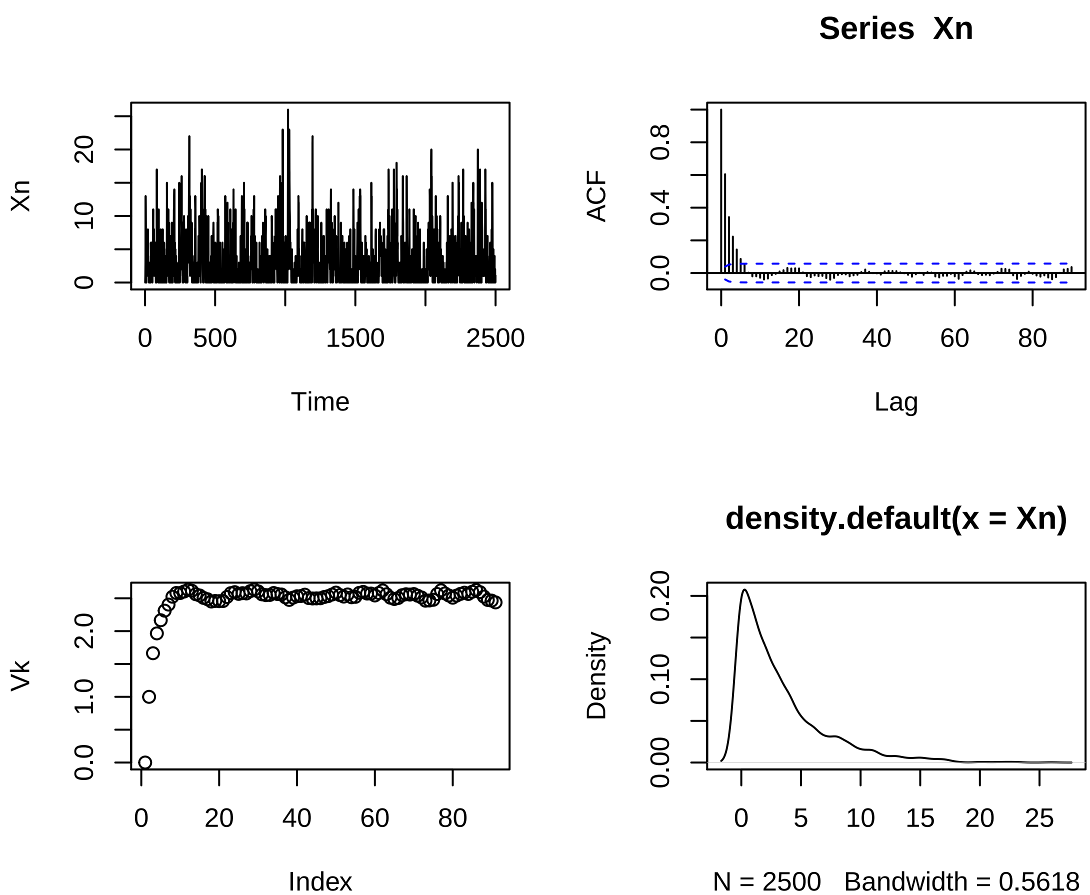
En este resultado nos encontramos una función de densidad más parecida a la normal, X_n no evidencia cambios bruscos y sigue oscilando aproximadamente entre 200 y 400. Ahora bien se desea demostrar que sucede si se define el comportamiento de $X_0 \sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$, el resultado obtenido para esta simulación es el siguiente:



Realizando esta simulación podemos decir que el X_n tiene la misma distribución de nuestro proceso, es decir el proceso tiene una distribución invariante. Teniendo ya estabilizado el proceso en el momento de definir nuestro valor inicial, vamos a validar que sucede con el proceso cuando se realiza modificaciones en los parámetros que usa.
Vamos a iniciar realizando cambios con el parámetro v el cual se encuentra definido de la siguiente manera: $v > 0$, para la simulación se tomo este valor en 100, sin embargo se desea identificar que sucede si se toma un valor muy cercano a cero y que sucede a medida que este va creciendo.

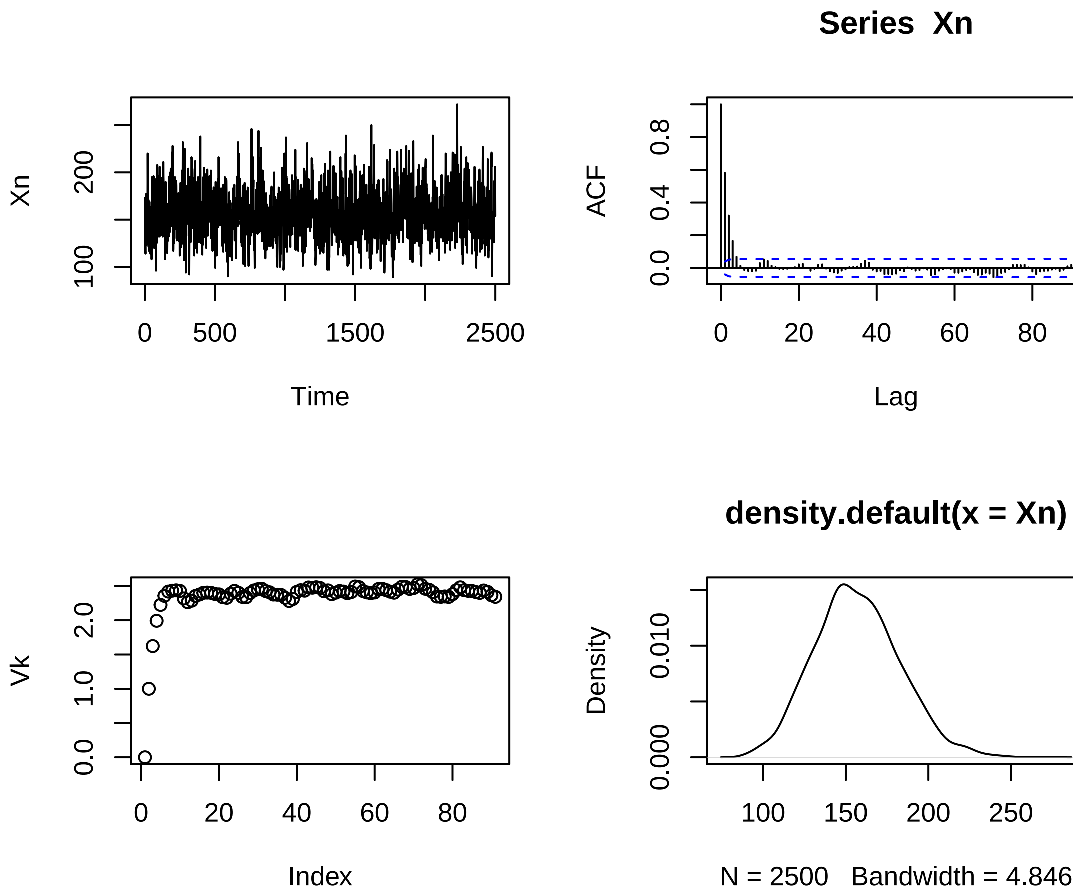
A continuación se ilustra el comportamiento del proceso cuando se trabaja con los siguientes parámetros:

$$v = 1, p = 0.6, \alpha = 0.8, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



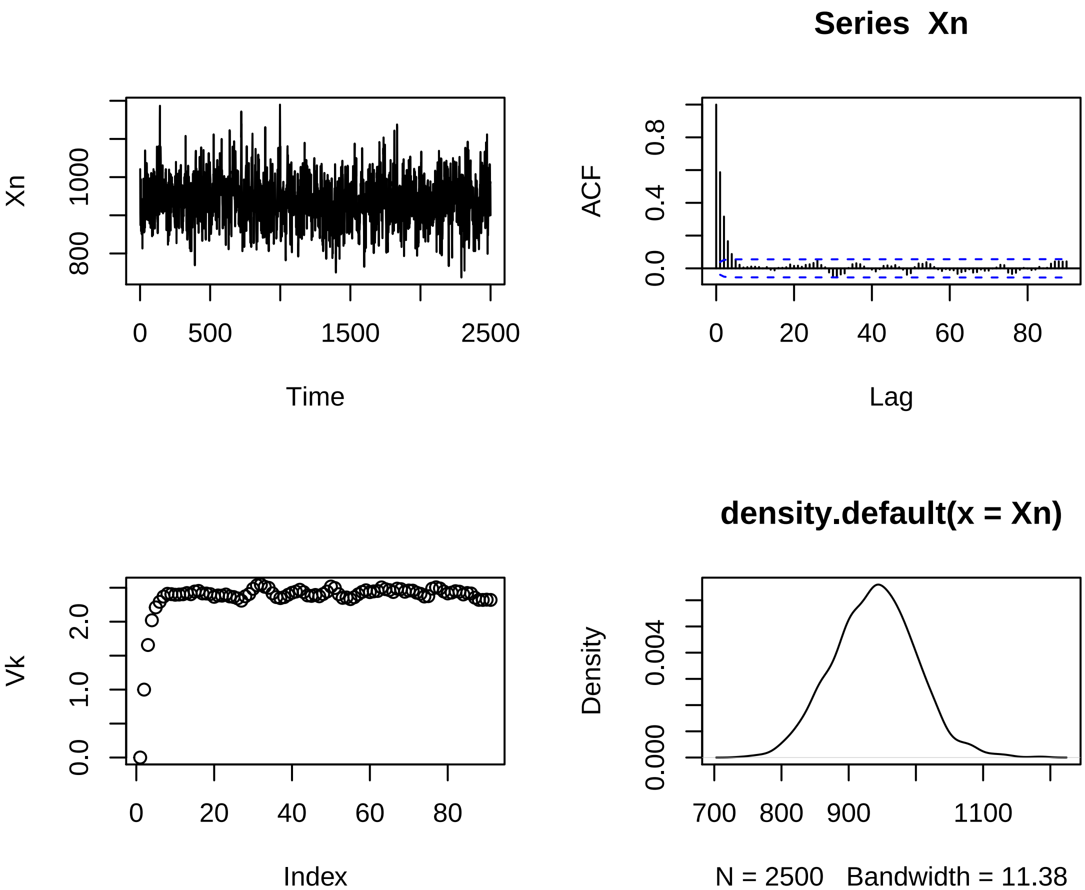
Modificando el parámetro v se evidencia que se mueve la media de nuestro proceso, siendo esta muy cercana a cero, sin embargo la varianza sigue siendo constante en el tiempo, adicionan en la densidad validamos que nuestra media es cercana a cero y nos genera una normal con simetría positiva. Ahora realizaremos la simulación del proceso con los siguiente parámetros.

$$v = 50, p = 0.6, \alpha = 0.8, X_0 = \sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



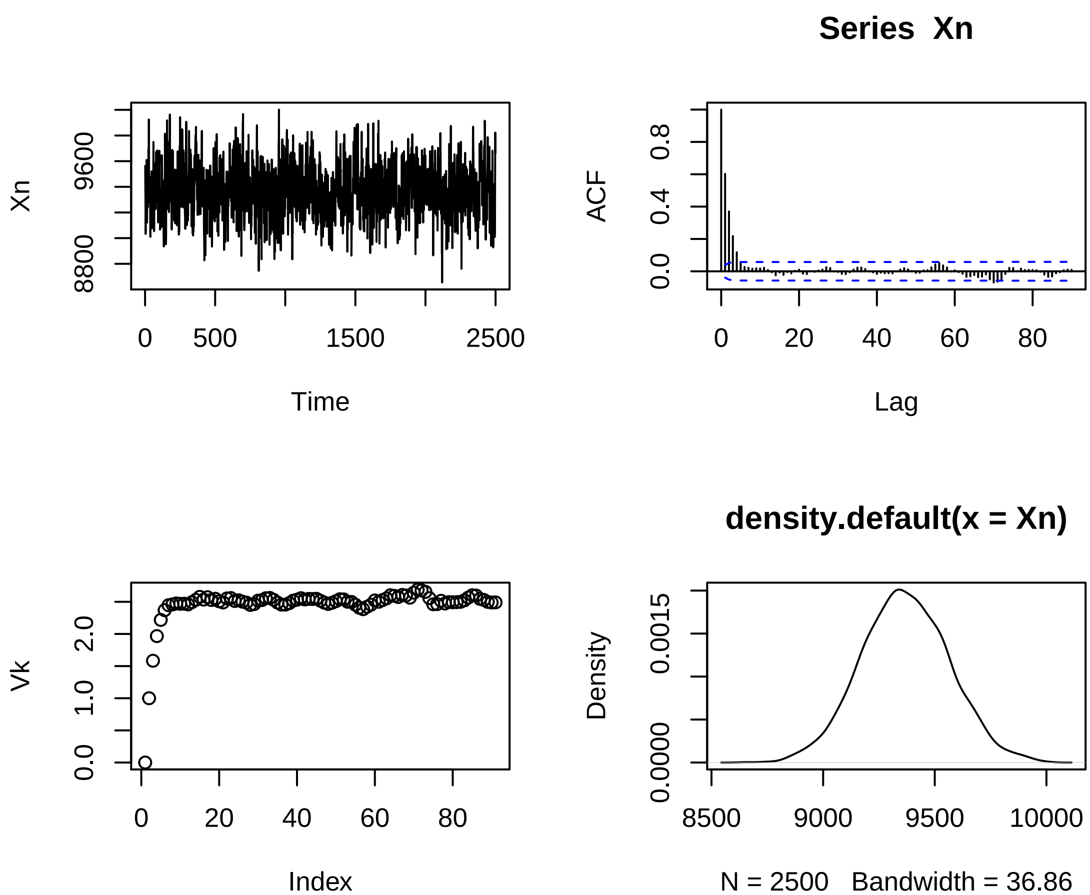
Tomando $v = 10$ ya podemos ver la serie de tiempo con sus bandas, en la anterior al estar tan cercana la media a cero no se evidenciaba la oscilación entre dos bandas. Por lo cual a medida que vamos aumentando el valor de v la media aumenta. A continuación tomamos un valor mucho mas grande que el usado inicialmente ($v = 100$):

$$v = 300, p = 0.6, \alpha = 0.8, X_0 = \sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



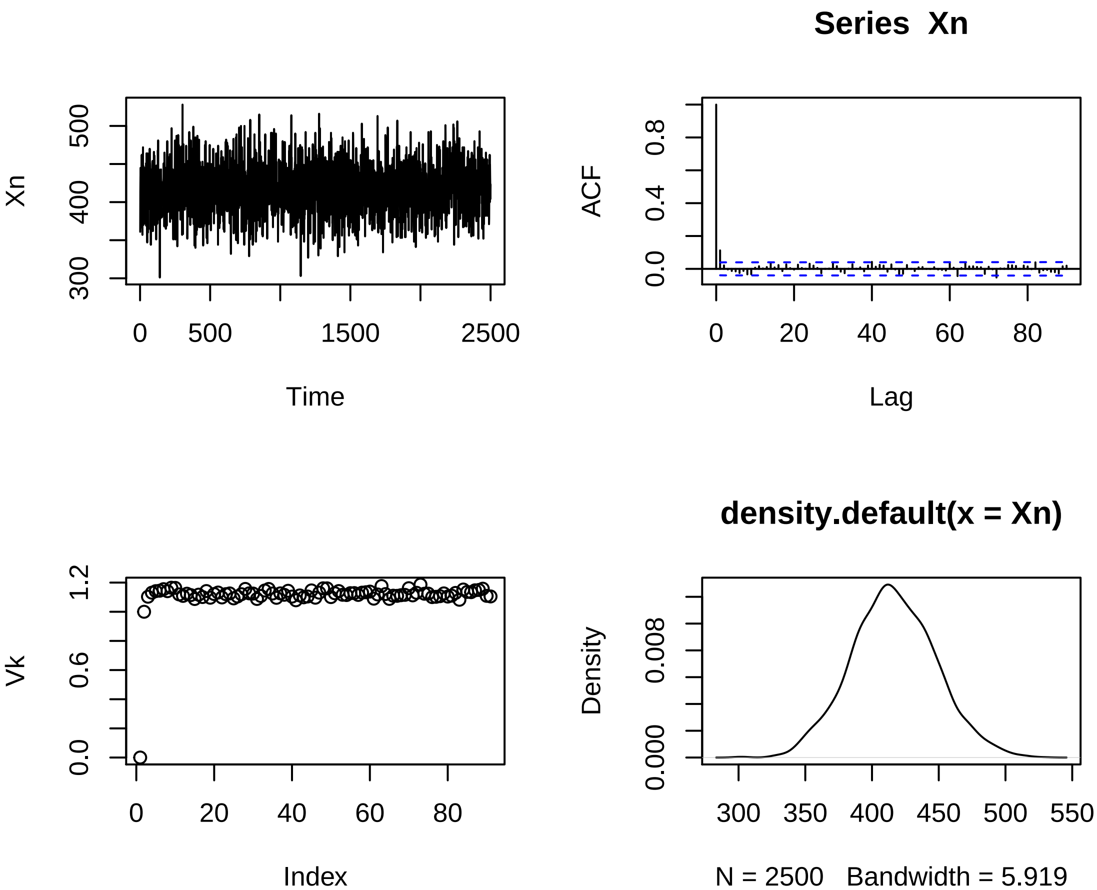
De tal manera modificar este parámetro v nos modifica la media del proceso, valores muy cercanos a 0 nos muestra una función de densidad con simetría fuerte, ahora bien valores mas grandes, nos va evidenciando una función de densidad mas simétrica. A continuación un valor de v mayor;

$$v = 3000, p = 0.6, \alpha = 0.8, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



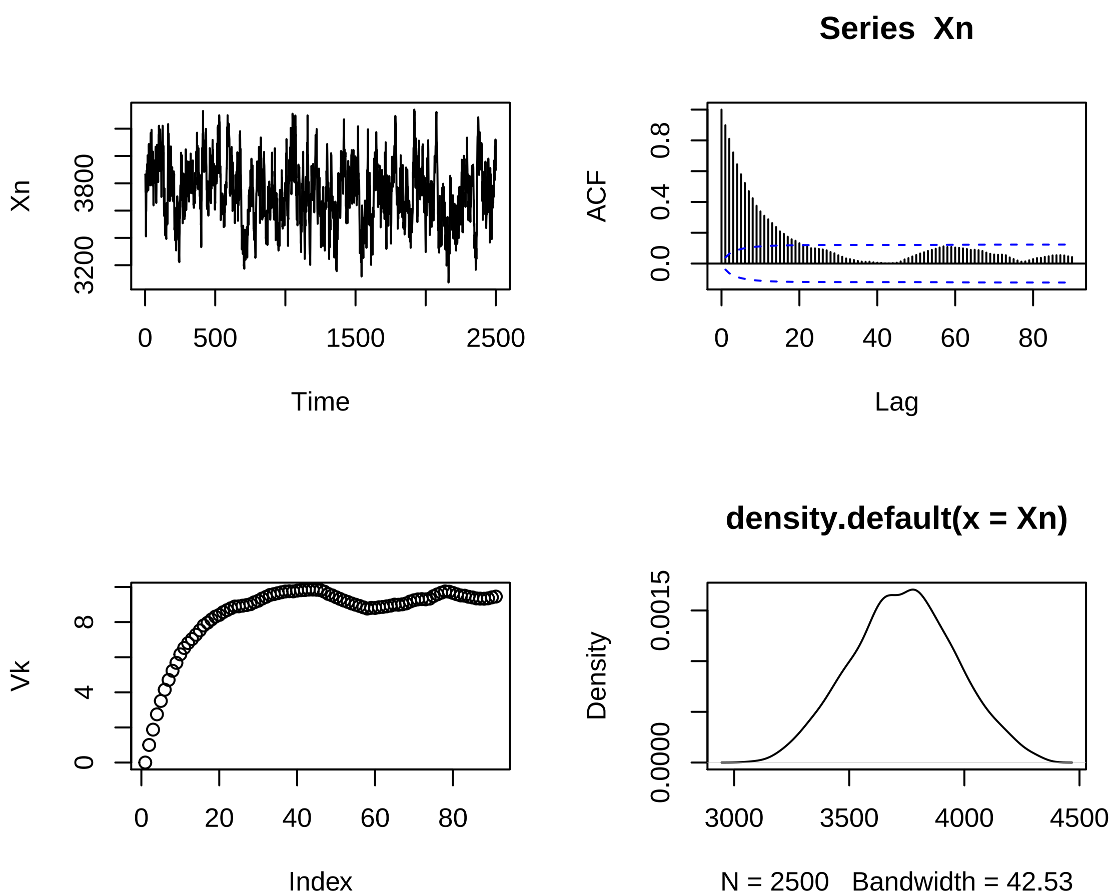
En los diferentes valores de v simulados, notamos que este solo nos modifica la media, acorde a esta la función de densidad puede tener una simetría positiva fuerte (cuando v es cercano a cero) o tender a ser simétrica cuando la media es mucho mayor a cero, modificando este parámetro el proceso muestra una reversión a la media dentro de unas bandas, la varianza sigue tendiendo a una constante lo cual nos indica que hay evidencia que es estacional en covarianza. Adicional se evidencia que en todos los casos 6 rezagos significativos positivos lo cual indica que el proceso esta muy correlacionado.
Ahora el parámetro a analizar es el p, este parámetro esta definido así: $0 < p < 1$, por lo cual vamos a validar que sucede cuando tiende a cero y cuando tiende a 1. A continuación el resultado de la simulación del proceso:

$$v = 300, p = 0.1, \alpha = 0.8, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



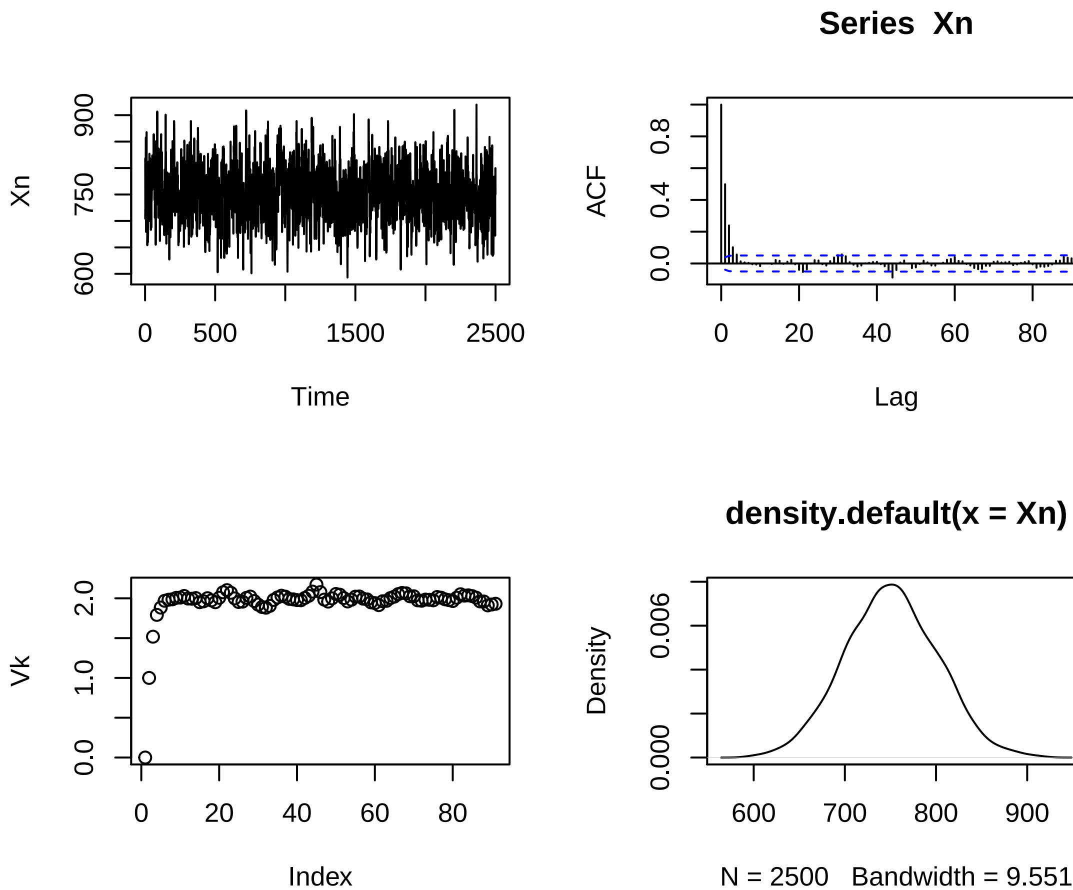
Al modificar este parámetro p a un valor muy cercano a cero, notamos que los rezagos significativos disminuyen y el proceso tiene mas oscilación, la varianza sigue tendiendo a una constante. Ahora miremos que sucede con un valor p más grande:

$$v = 300, p = 0.9, \alpha = 0.8, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



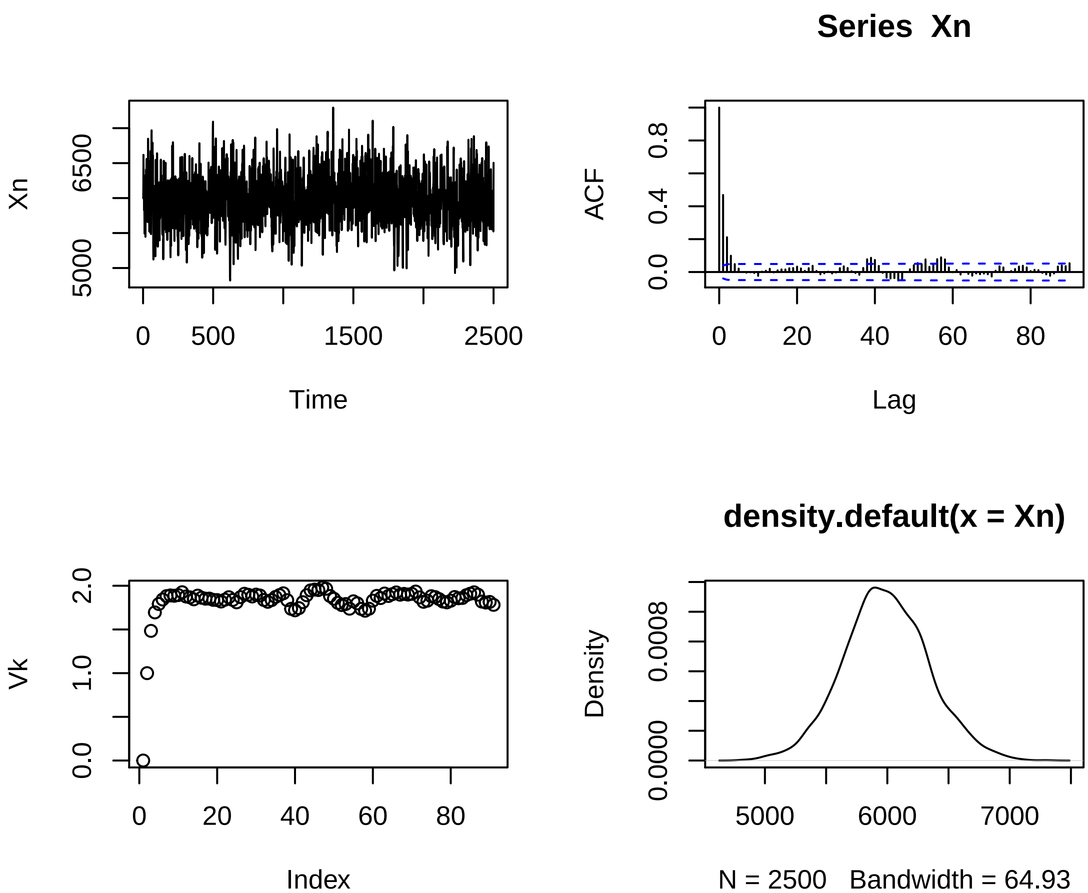
Al tener un valor de p mas cercano a uno, muestra un proceso con menos oscilaciones, la varianza se demora mas para estabilizarse y los rezagos positivos aumentan. Teniendo un valor intermedio el resultado es el siguiente:

$$v = 300, p = 0.5, \alpha = 0.8, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



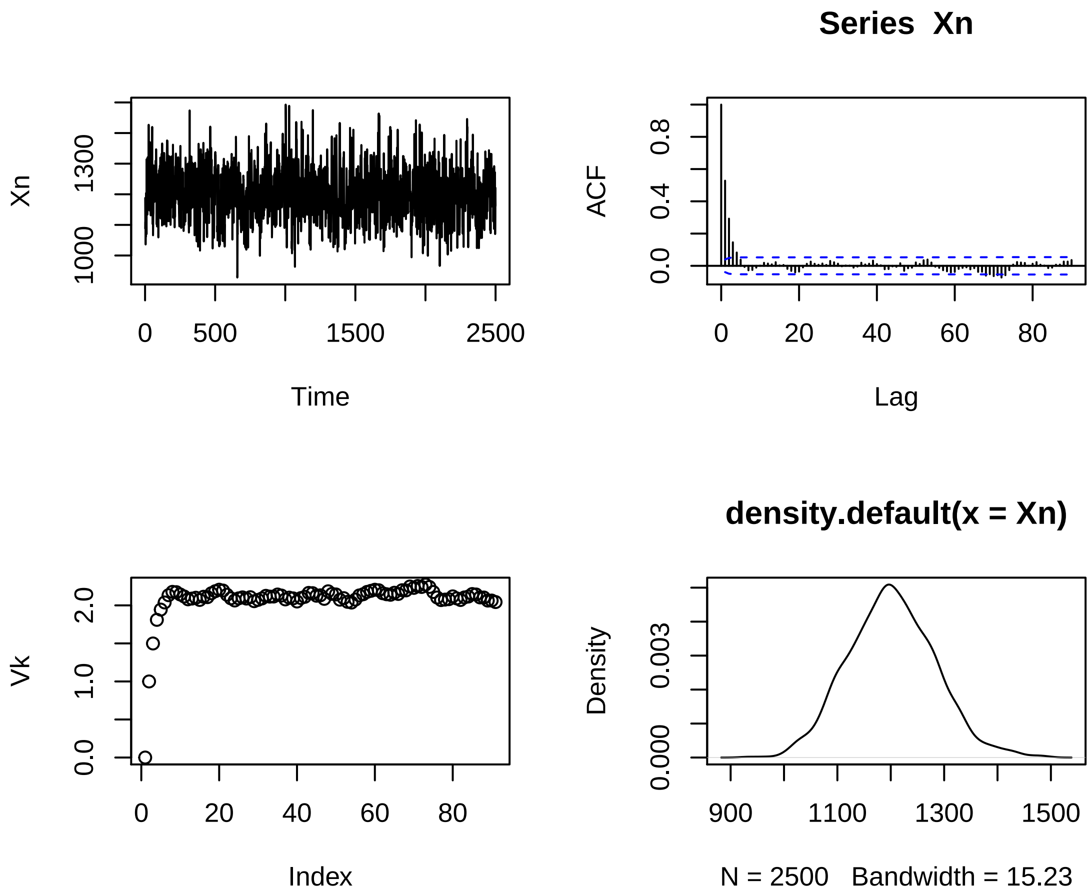
Por lo tanto el parámetro p es el parámetro que nos permite modificar las oscilaciones de nuestro proceso, entre más cercano a cero oscila mas rápido y la varianza tiende a una constante rápidamente, en valores que tienden a 1 oscila mas lento y la varianza tiende a una constante mas lento. En todos los casos sigue mostrando una reversión a la media entre dos bandas.
Ahora vamos a mirar que sucede moviendo el α, este parámetro esta definido así: $0 < \alpha < 1$, así que vamos a validar como varía el proceso con un valor muy cercano a cero, el resultado obtenido es el siguiente:

$$v = 300, p = 0.5, \alpha = 0.1, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



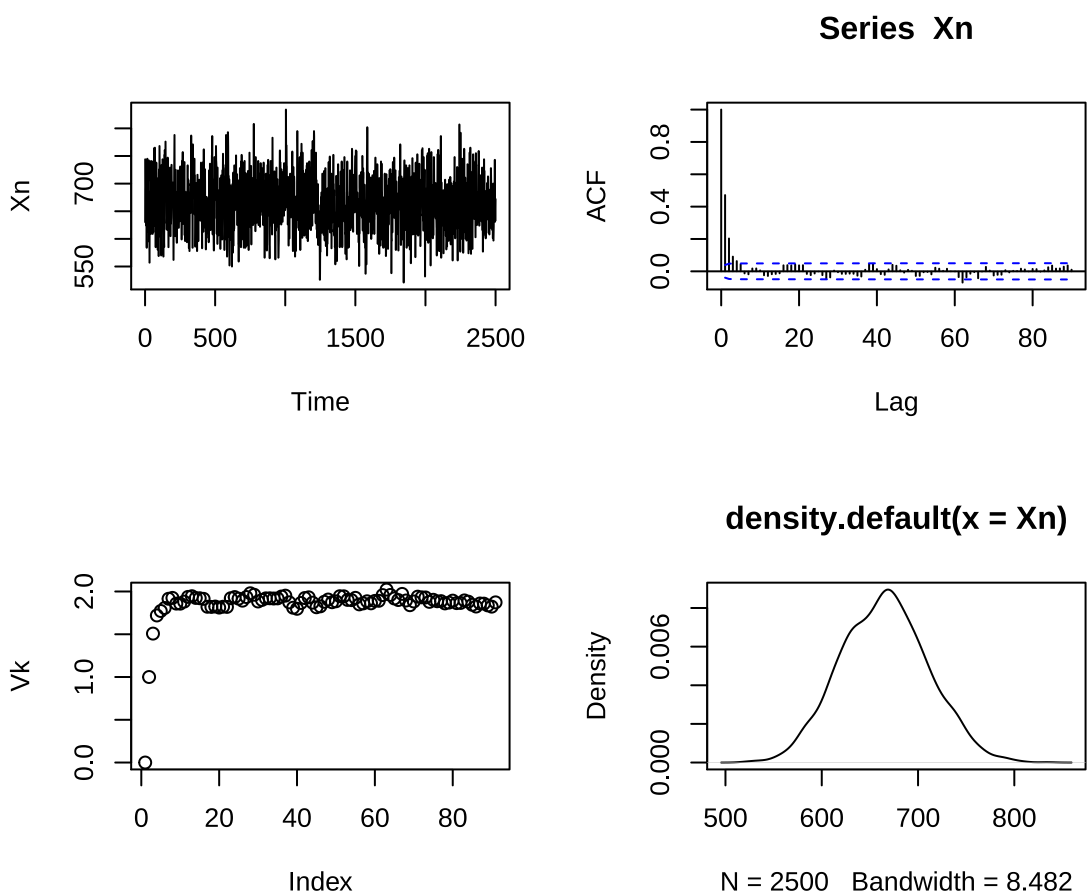
Al modificar este parámetro α, el proceso continua mostrando estacionario en covarianza, ahora evidenciamos que las bandas en las que oscila nuestro proceso son mas amplias, ahora realizaremos el mismo proceso pero tomando un valor de α intermedio:

$$v = 300, p = 0.5, \alpha = 0.5, X_0 = \sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



Las bandas van estrechándose, por lo cual esperamos que para un valor de α cercano a uno nuestro proceso oscilara entre unas bandas mas cercanas:

$$v = 300, p = 0.5, \alpha = 0.9, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



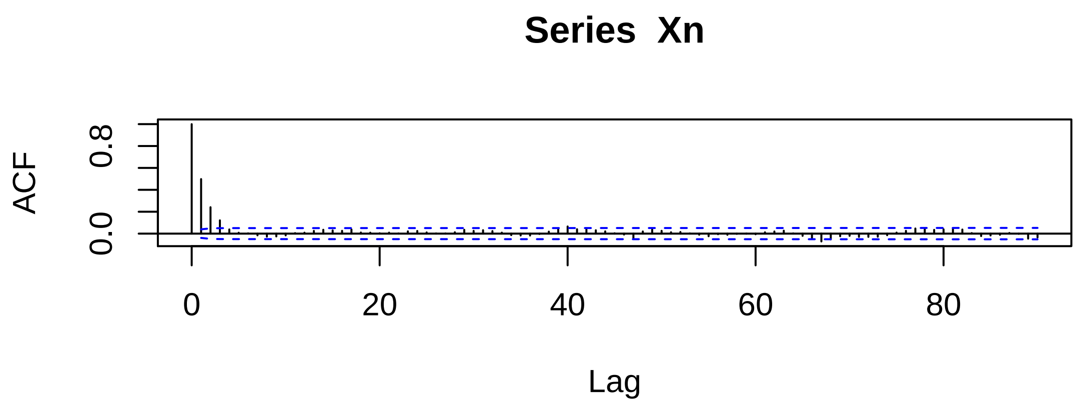
El proceso sigue mostrando estacionario en covarianza, las varianzas tienden a una constante y nuestro parámetro evaluado nos evidencia que es el que nos permite manejar el ancho de las bandas de oscilación.

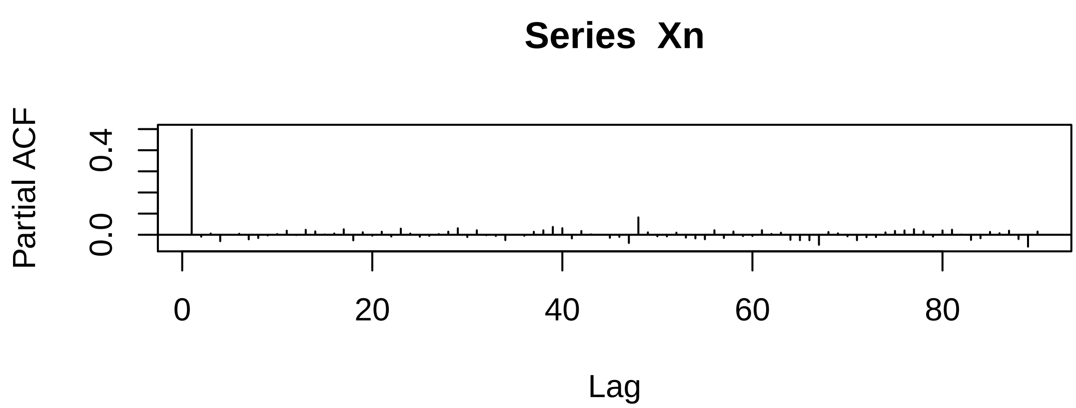
Análisis de autocovarianza

Estimar la autocovarianza (fac). Sobresalen algunas autocorrelaciones de las bandas de Bartlett (en azul)?. Por el contrario, es ruido blanco?. Estimar a fac del cuadrado para el caso en el cual la serie aparente ser un ruido blanco. Si se sale de las bandas entonces es ruido blanco tipo ARCH o GARCH.

Los parámetros que se definieron para simular el proceso son los siguientes:

$$v = 300, p = 0.5, \alpha = 0.5, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$





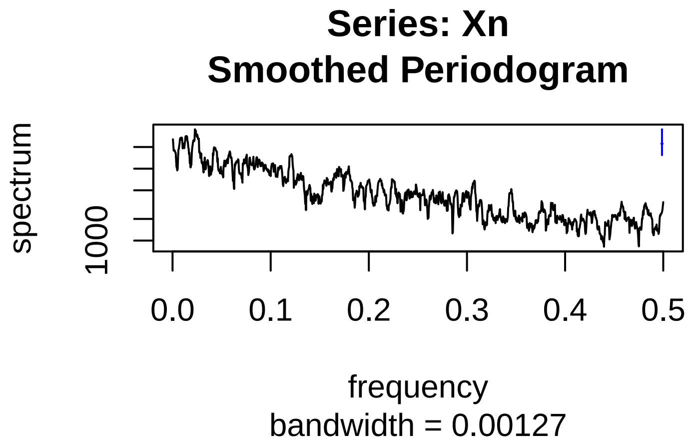
La gráfica de autocorrelación FAC nos muestra que es una serie autocorrelacionada, no podemos decir que el residuo estructural es ruido blanco, se evidencia una dinámica autorregresiva que se debe modelar, por ejemplo mediante un proceso ARMA, para aprovechar ta dinámica con el fin de mejorar los pronósticos estructurales.
En la FACP se observa p valores significativos, en este caso 1, por fuera de las bandas de Bartlett, y un patrón decreciente en la FAC lo cual indica que puede tratarse de una $AR(p)$.

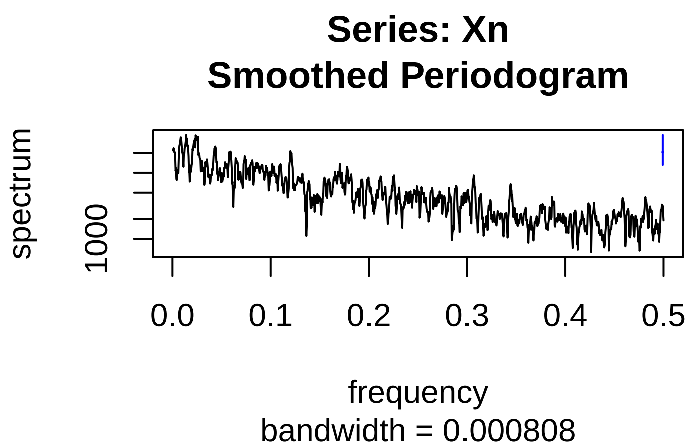
Densidad espectral

Estimar la densidad espectral. Conclusiones posibles: ruido blanco (densidad constante). Unas frecuencias bajas dominantes visibles (caen en el intervalo de confianza, situado en azul a la derecha de la gráfica), puede significar una dinámica autoregresiva.

Los parámetros que se definieron para simular el proceso son los siguientes:

$$v = 300, p = 0.5, \alpha = 0.5, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



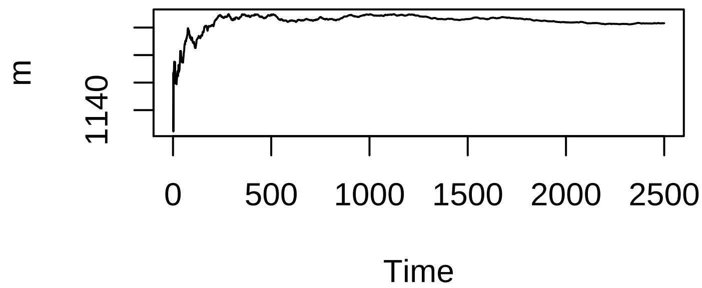


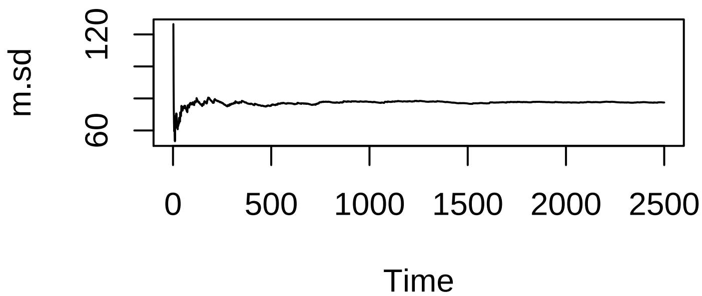
Se evidencia que el proceso tiene un comportamiento de filtro pasabajo y se tiene el intervalo de confianza, alcanza a mostrar unas frecuencias menores y unas mayores. (Giraldo (2017))

Media y varianza en una muestra creciente

Estimar la media y la varianza en una muestra creciente. Si las gráficas se estabilizan alrededor de un valor, puede ser evidencia de estacionariedad. Por el contrario, si no se estabilizan, es porque el proceso no es estacionario en covarianza.
Los parámetros que se definieron para simular el proceso son los siguientes:

$$v = 300, p = 0.5, \alpha = 0.5, X_0 = \sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



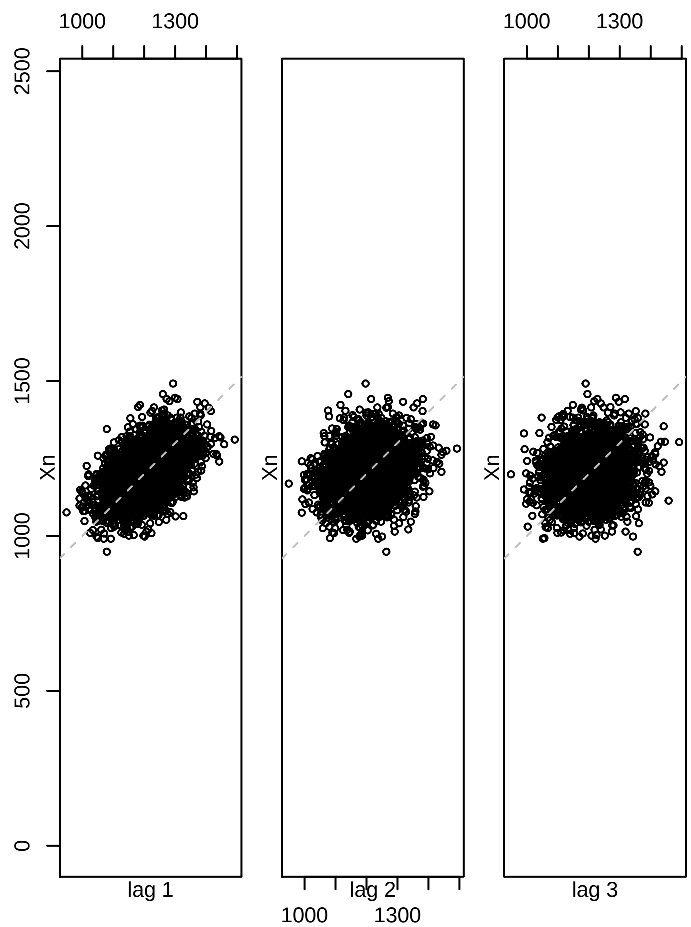


Se evidencia que el proceso es estacionario en covarianza ya que la media tiende a una constante.

Análisis Gaussiano

Es Gaussiano?. Si el proceso es gaussiano las parejas $(X_n, X_{n-j}), j = 1, 2, 3$ deben mostrar una gráfica con forma de elipsoide. No habría normalidad bivariada si aparece por ejemplo, un hueco en el centro de la "nube", o se forma una recta o rectas. Los datos extremos que se salen de la "nube" también contradicen la normalidad.
Los parámetros que se definieron para simular el proceso son los siguientes:

$$v = 300, p = 0.5, \alpha = 0.5, X_0 =\sim BN(\frac{\alpha(1-p)}{(1+\alpha(1-p))}, v)$$



Se evidencia que son normales bivariadas, ya que las gráficas de una normal bivariada es similar a una elipse, y estas elipses se ven en las 3 parejas.

CONCLUSIONES

El comportamiento de la serie es un proceso estacionario en covarianza, al realizar modificaciones a los parámetros del modelo, el proceso no deja de ser estacionario en covarianza. También se pudo observar que este es un proceso gaussiano, es decir que hay normalidad bivariada.

REFERENCIAS

Alosh, M., and E. Ali. 1992. "First Order Autoregressive Time Series with Negative Binomial and Geometric Marginals." *Commun. Statist. - Theory Meth.* 21 (9): 2483–92.

Giraldo, N. 2017. *Notas de Clase - Econometría Financiera Aplicada a Series de Tiempo*. Medellin, Colombia: Universidad Nacional.