HOOFDSTUK III

§ 54. Eigenschappen van bolfiguren

B e p a l i n g e n. *Een bol is de figuur, die ontstaat door een halve cirkel te laten wentelen om de middellijn die zijn uiteinden verbindt.*

Het middelpunt van de halve cirkel is tevens middelpunt van de bol.

De lijn, die het middelpunt met een punt van de bol verbindt, heet bolstraal.

De lijn, die twee punten van de bol verbindt, heet koorde.

Een middellijn is een koorde, die door het middelpunt gaat.

Uiteinden van eenzelfde middellijn noemt men tegenpunten.

O p m e r k i n g. Een bol wordt opgevat als een oppervlak, niet als een lichaam.

S t e l l i n g 1. *De doorsnede van een bol met een plat vlak is een cirkel.*

B e w ij s.

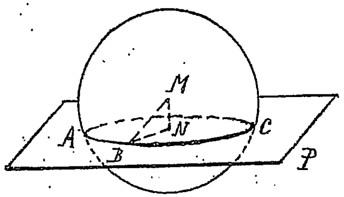

Fig. 41.

Zij P een plat vlak, dat de bol snijdt volgens de kromme lijn ABC. Laat uit het bolmiddelpunt M een loodlijn MN op het vlak P neer en verbindt het voetpunt N met een willekeurig punt B van de doorsnede. Nu is $\triangle BNM$ rechthoekig in N, en $NB^2 = MB^2 - MN^2$. MB is de bolstraal en MN de afstand van het punt M tot het vlak P; beide zijn constant, dus NB is ook constant, d.w.z. alle punten van de doorsnede liggen op gelijke afstand van het punt N en omdat ze ook in hetzelfde platte vlak P liggen, is de doorsnede een cirkel.

B e p a l i n g e n. *Een cirkel op een bol, waarvan het vlak door 't bolmiddelpunt gaat, noemt men een grote cirkel of grootcirkel.* Het middelpunt van een grootcirkel valt dus samen met het middelpunt van de bol.

Cirkels op de bol, waarvan het middelpunt niet samenvalt met het middelpunt van de bol, noemt men kleine cirkels of *kleincirkels.*

S t e l l i n g 2. *Twee grootcirkels op een bol delen elkaar steeds middendoor.*

B e w ij s.

Twee grootcirkels hebben een gemeenschappelijk middelpunt. De snijlijn van hun vlakken, die *al* hun gemeenschappelijke punten bevat, moet dus door 't bolmiddelpunt gaan en is een bolmiddellijn. Hierdoor worden beide cirkels dus in twee gelijke delen verdeeld.

O p m e r k i n g. Een grootcirkel is bepaald door twee punten op de bol, mits geen tegenpunten. Een kleincirkel is door drie punten bepaald.

Door twee tegenpunten kan men een oneindig aantal grootcirkels brengen.

B e p a l i n g e n. *Onder de sferische afstand tussen twee punten op een bol verstaat men de kleinste boog van de grootcirkel over die twee punten.*

De bolmiddellijn, die loodrecht op het vlak van een groot- of kleincirkel staat, heet de as van die cirkel.

De snijpunten van de as van een cirkel met de bol noemt men polen van die cirkel.

§ 55. Vijf voorname eigenschappen van de polen van grootcirkels

S t e l l i n g 3. *Een pool van een grootcirkel is altijd 90° van elk punt van die grootcirkel verwijderd.*

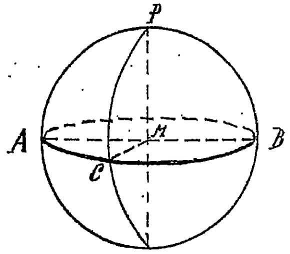

Fig. 42.

B e w ij s.

Zij P de pool van grootcirkel ABC, dan is volgens de bepaling van pool en as $\angle PMC = 90°$. $\angle PMC$ is een middelpuntshoek in de grootcirkel door P en C, dus boog $PC = \angle PMC = 90°$.

S t e l l i n g 4. *Als een punt op een bol van twee punten (mits geen tegenpunten) 90° verwijderd is, is dat punt een pool van de grootcirkel door die twee punten.*

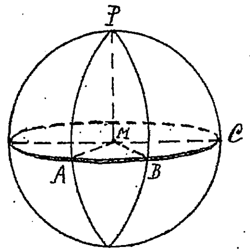

Fig. 43.

B e w ij s.

Bogen PA en PB zijn 90°. Verbinden we P, A en B met 't bolmiddelpunt M, dan ontstaan de hoeken PMA en PMB, die ieder 90° zijn als middelpuntshoeken op bogen van 90°. PM staat nu loodrecht op twee elkaar snijdende lijnen, dus loodrecht op 't *vlak* ABC en gaat tevens door 't bolmiddelpunt, dus is een as, en P is de pool van grootcirkel ABC als snijpunt van as met boloppervlak.

B e p a l i n g. *Onder de hoek tussen twee elkaar snijdende kromme lijnen verstaat men de hoek tussen de raaklijnen aan die kromme lijnen in hun snijpunt.*

S t e l l i n g 5. *De hoek tussen twee grootcirkels wordt gemeten door een boog van de grootcirkel, waarvan het hoekpunt een pool is.*

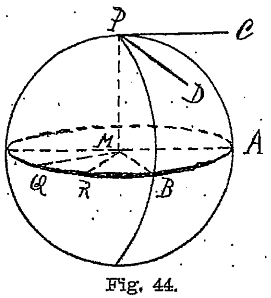

Fig. 44.

B e w ij s.

Zij P een pool van cirkel AB. Volgens de vorige bepaling wordt $\angle APB$ gemeten door de hoek tussen de raaklijnen d.i. $\angle CPD$. Nu is $CP \parallel AM$ en $DP \parallel BM$, zodat $\angle CPD = \angle AMB$ = boog AB is.

O p m e r k i n g 1. Men kan de stelling ook als volgt lezen: de hoek tussen twee grootcirkels wordt gemeten door de grootcirkelboog tussen de middens van de halve cirkels die de hoek begrenzen.

O p m e r k i n g 2. Trekt men straal $MR \perp$ vlak MPA en straal $MQ \perp$ vlak MPB, dan is R de pool van cirkel PA en Q de pool van cirkel PB. Nu is: $\angle APB$ = boog $AB = \angle AMB = \angle RMQ$ = boog QR. Immers, de benen van $\angle RMQ$ staan $\perp$ op de benen van $\angle AMB$.

Hieruit volgt, dat de hoek tussen twee groot-cirkels ook gemeten wordt door de sferische afstand van hun polen.

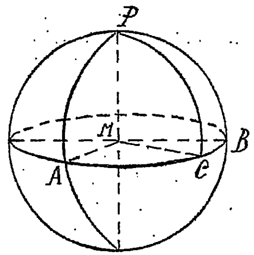

Fig. 45.

S t e l l i n g 6. *Grootcirkels, die door een pool van een andere grootcirkel gaan, snijden die grootcirkel rechthoekig.*

B e w ij s.

Zij P een pool van grootcirkel AB; kiezen we op AB een punt C zodanig, dat boog $AC = 90°$ is. $PA = 90°$, $AC = 90°$, dus A is een pool van de grootcirkel door P en C. $\angle PAC$ wordt dus gemeten door boog PC en deze is $90°$, omdat P pool is van cirkel AB. $\angle PAC$ is dus $90°$.

S t e l l i n g 7. *Als een grootcirkel een andere grootcirkel rechthoekig snijdt, gaat de eerste grootcirkel door de polen van de laatste.*

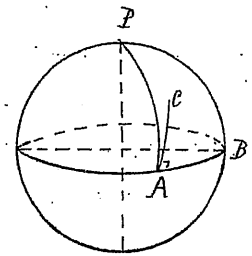

Fig. 46.

B e w ij s.

Zij P een pool van cirkel AB en laat AC de boog van een grootcirkel zijn, welke AB loodrecht snijdt. Indien AC niet door P ging, zou men P met A door een groot-cirkelboog kunnen verbinden en zou volgens stelling 6 $PA \perp AB$ staan. Dan hadden we in A twee groot-cirkels $\perp AB$, wat onmogelijk is. Dus gaat AC door pool P.

O p m e r k i n g. Bij een kleincirkel bedoelt men met *de* pool het uiteinde van de as, 't welk het dichtst bij 't vlak van de cirkel ligt. Men noemt de pool ook

wel „sferisch middelpunt" en de boogvormige afstand van de pool tot een punt van de cirkelomtrek „sferische straal".

Bij een grootcirkel is de sferische straal $= 90°$.

§ 56. De boltweehoek

B e p a l i n g e n. *Een boltweehoek is een deel van de bol, dat begrensd wordt door twee halve grootcirkels, die de uiteinden gemeen hebben.*

De hoeken van de boltweehoek zijn de hoeken die de cirkels in hun snijpunten vormen.

De begrenzende halve cirkels noemt men de zijden van de boltweehoek.

Uit opmerking 1 bij stelling 5 volgt, dat de hoeken van een boltweehoek gelijk zijn.

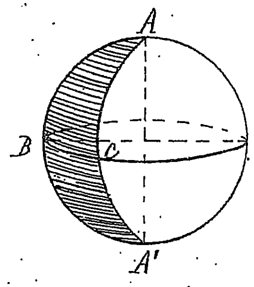

Fig. 47.

S t e l l i n g 8. *Als A de hoek van een boltweehoek is, wordt het oppervlak van de boltweehoek voorgesteld door de formule:*

$$\frac{A}{360} \times \textit{boloppervlakte.}$$

B e w ij s.

Zij BC de grootcirkel, die door de middens van de zijden van boltweehoek $ABCA'$ gaat. Men kan zich die cirkel in $360°$ verdeeld denken en door die deelpunten en A grootcirkels getrokken. Er ontstaan dan 360 boltweehoeken, die allen volkomen gelijk aan elkaar zijn, en ieder dus gelijk aan $\frac{1}{360} \times$ de boloppervlakte. Een boltweehoek met een hoek van $A°$ kan in A zulke boltweehoeken verdeeld worden, dus is zijn oppervlak $\frac{A}{360} \times$ boloppervlakte.

§ 57. De boldriehoek

B e p a l i n g e n. *Een boldriehoek is een deel van een bol, dat begrensd wordt door drie bogen van grootcirkels, ieder kleiner dan* $180°$.

De bogen van de begrenzende cirkels noemt men de zijden van de boldriehoek.

De hoeken tussen de zijden noemt men de hoeken van de boldriehoek.

Een buitenhoek is de hoek gevormd door een zijde en het verlengde van een andere zijde.

Een boldriehoek met twee gelijke zijden heet gelijkbenig; gelijkzijdig wanneer de drie zijden gelijk zijn. Een boldriehoek met een zijde van 90° heet rechtzijdig. Een boldriehoek met drie zijden van 90° heet recht-gelijkzijdig of kwadrantendriehoek. Een boldriehoek met een hoek van 90° heet rechthoekig. Een boldriehoek met twee rechte hoeken heet dubbel-rechthoekig.

Uit een boldriehoek kunnen *vier* andere boldriehoeken worden afgeleid, waarvan de elementen afhankelijk zijn van de elementen van de eerste driehoek.

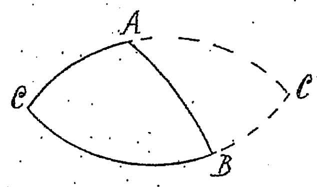

Fig. 48.

1°. De nevendriehoek. *Een nevendriehoek is een boldriehoek, die ontstaat door twee zijden van een boldriehoek te verlengen tot ze elkaar snijden in het tegenpunt van hun eerste snijpunt.*

Zij ABC de gegeven boldriehoek dan is ABC' zijn nevendriehoek. Gemakkelijk valt op te merken dat $\angle C = \angle C'$ is, $AC' = 180° - AC$, $BC' = 180° - BC$,

$$\angle ABC' = 180° - \angle ABC \text{ en}$$
$$\angle BAC' = 180° - \angle BAC.$$

De nevendriehoek vormt het „aanvulsel" van de boldriehoek tot een boltweehoek.

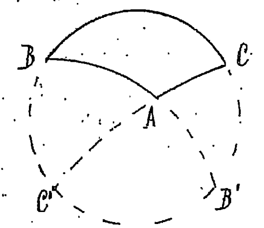

Fig. 49.

2°. De topdriehoek. *De topdriehoek is een boldriehoek welke ontstaat door twee zijden door hun gemeenschappelijk hoekpunt te verlengen, tot ze het verlengde van de derde zijde ontmoeten.*

Zij ABC de gegeven boldriehoek, dan is $AB'C'$ een topdriehoek. Verder ziet men:

$$\angle AC'B' = \angle ACB' = 180° - \angle ACB,$$
$$\angle AB'C' = \angle ABC' = 180° - \angle ABC,$$

$AB' = 180° - AB$, $AC' = 180° - AC$ en $B'C' = BC$, want ze hebben hetzelfde supplement $B'C$.

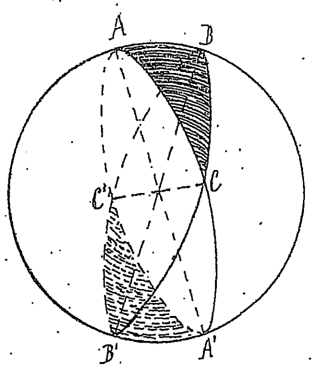

Fig. 50.

3°. De tegendriehoek. *De tegendriehoek van een boldriehoek is een boldriehoek, die tot hoekpunten heeft de tegenpunten van de hoekpunten van de oorspronkelijke.*

Zij ABC de gegeven driehoek, dan is $A'B'C'$ de tegendriehoek. De zijden en de hoeken van de één zijn gelijk aan die van de ander. Zo is b.v. zijde $BC = B'C'$ want ze hebben 't zelfde supplement $B'C$, en

$$\angle ACB = \angle AC'B = \angle A'C'B'.$$

In 't algemeen kunnen een boldriehoek en zijn tegendriehoek elkaar niet bedekken, omdat de elementen in tegengestelde volgorde voorkomen. Zie fig. 51.

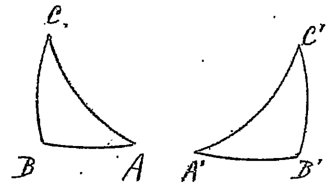

Fig. 51.

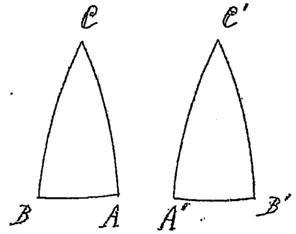

Fig. 52.

Alleen een gelijkbenige boldriehoek kan met zijn tegendriehoek samenvallen. Zie fig. 52.

Bepaling. *Een boldriehoek en zijn tegendriehoek hebben dezelfde oppervlakte.*

Bepaling. *Als twee driehoeken de elementen twee aan twee gelijk hebben, doch in tegengestelde volgorde, noemt men ze symmetrisch.*

§ 58 4°. De pooldriehoek. *De pooldriehoek van een boldriehoek is een boldriehoek, die tot hoekpunten heeft de polen van de zijden van de oorspronkelijke, en wel die polen, welke aan dezelfde kant van de zijden liggen als het derde hoekpunt.*

Zij ABC de gegeven driehoek, en stellen de gestippelde bogen ieder 90° voor, dan is A' de pool van BC, B' de pool van AC en C' de pool van AB. $\triangle A'B'C'$ is dan de pooldriehoek.

Stelling 9. *Een boldriehoek is de pooldriehoek van zijn pooldriehoek.*

Bewijs.

Zie fig. 53. A ligt zowel 90° van B' als van C'; A is dus de pool van $B'C'$. Evenzo is B de pool van $A'C'$ en C de pool van $A'B'$. $\triangle ABC$ is dus de pooldriehoek $\triangle A'B'C'$.

Stelling 10. *Een hoek van een boldriehoek is het supplement van een zijde van de pooldriehoek en*
een hoek van de pooldriehoek is het supplement van een zijde van de boldriehoek.

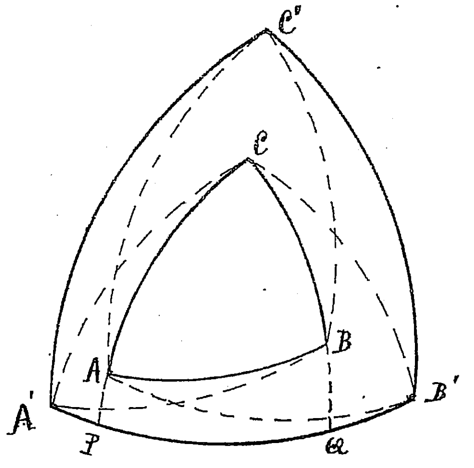

Fig. 53.

B e w ij s.

Verlengen we (zie fig. 53) CA tot hij $A'B'$ in P snijdt en duiden we 't snijpunt van CB met $A'B'$ aan met Q, dan is $\angle C =$ boog PQ (stelling 5).

$$\angle C + \text{boog } A'B' = \text{boog } PQ + \text{boog } A'B'$$
$$= \text{boog } PQ + \text{boog } B'Q + \text{boog } QA'$$
$$= \text{boog } PB' + \text{boog } QA'$$
$$= 90° + 90° = 180°.$$

Omdat ABC de pooldriehoek van $A'B'C'$ is, zal $\angle C' +$ boog $AB =$ $= 180°$ zijn.

Duiden we de elementen van een driehoek aan met A, B, C, a, b en c en die van de pooldriehoek met A', B', C', a', b' en c', dan hebben we de volgende betrekkingen:

$A' = 180° - a$, $B' = 180° - b$, $C' = 180° - c$, $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$ en $c' = 180° - C$. Uit $c' = 180° - C$ volgt, dat $\angle C$ kleiner dan 180° moet **zijn.**

In de bepaling van boldriehoek was opgenomen dat de zijden kleiner dan 180° moesten zijn, zodat we besluiten dat *alle elementen van een boldriehoek kleiner dan 180° zijn.*

O p g a v e. Teken de sfeer voor 50° NB, 16ᵘ sterretijd en oostpunt O voor. Noem een van de snijpunten van de ecliptica met de ware horizon A. De boldriehoek AO ♎ is de pooldriehoek van de boldriehoek $TP_n \pi_n$.

Bewijs in deze figuur stelling 10.

§ 59. De oppervlakte van de boldriehoek

S t e l l i n g 11. *Als A. B en C respectievelijk het aantal graden van de hoeken van de boldriehoek voorstellen, wordt het oppervlak voorgesteld door de formule:*

$$\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{180}}{\mathbf{720}} \times \textbf{bolopppervlakte.}$$

Zie fig. 50.

B e w ij s.

Boltweehoek	$ABCA' = \frac{A}{360} \times$ bolopppervlakte	Stelling 8.
„	$BACB' = \frac{B}{360} \times$ „	„ „
„	$CA'B'C' = \frac{C}{360} \times$ „	„ „

op

$$\tfrac{1}{2}\text{ bolopp.} + \triangle ABC + \triangle A'B'C' = \frac{A+B+C}{360} \times \text{bolopppervlakte}$$

$$\frac{180}{360} \times \text{bolopppervlakte} + 2 \triangle ABC = \frac{A+B+C}{360} \times \text{bolopppervlakte}$$

$$2 \triangle ABC = \frac{A+B+C-180}{360} \times \text{bolopppervl.}$$

$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-180}{720} \times \text{bolopppervl.}$$

Hetgeen de som van de hoeken van een boldriehoek groter is dan 180°, noemt men het *sferisch exces* en het aantal graden wordt aangeduid door de letter E. We hebben dus:

$$E = A + B + C - 180.$$

§ 60. Eigenschappen van de zijden van een boldriehoek

S t e l l i n g 12. *De som van de hoeken van een boldriehoek is groter dan 180°.*

B e w ij s.

Het oppervlak van een boldriehoek is altijd een positieve waarde, zodat in de formule:

Oppervlakte boldriehoek $= \dfrac{A+B+C-180}{720} \times$ bolopppervlakte,

$A+B+C-180>0$ moet zijn, dus $A+B+C>180$.

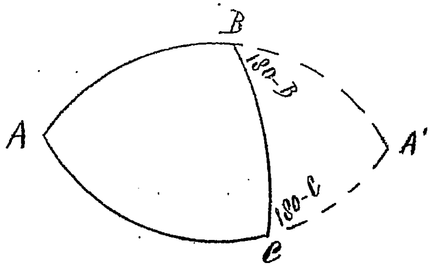

Fig. 54.

Stelling 13. *De som van twee hoeken verminderd met de derde is kleiner dan 180°.*

Bewijs.

Zij ABC de boldriehoek met zijn nevendriehoek $A'BC$. Nu geldt stelling 12 voor elke boldriehoek, dus ook voor $\triangle A'BC$.

Dan is

$$180° < \angle A' + \angle A'BC + \angle A'CB$$
$$180 < A + 180 - B + 180 - C$$
$$B + C - A < 180.$$

Stelling 14. *De som van de hoeken van een boldriehoek is kleiner dan* 540°.

Bewijs.

$$\begin{array}{rl} A+B-C<180 & \text{(stelling 13)} \\ A-B+C<180 & (\quad ,, \quad 13) \\ -A+B+C<180 & (\quad ,, \quad 13) \\ \hline A+B+C<540. & \end{array} \text{ opgeteld.}$$

Opmerking. Uit $A+B+C>180$ (12) en $A+B-C<180$ (13) volgt: $B+C>180-A$ en $B-C<180-A$.

Nu is $180-A$ de buitenhoek van $\angle A$. We hebben dus:

een buitenhoek is kleiner dan de som en groter dan het verschil van de niet aanliggende binnenhoeken.

§ 61. Eigenschappen van de hoeken van een boldriehoek

Stelling 15. *De som van de zijden van een boldriehoek is kleiner dan* 360°.

Bewijs.

Volgens stelling 12 hebben we in de pooldriehoek:

$$A' + B' + C' > 180.$$

Door toepassing van stelling 10 leiden we hieruit af:

$$180 - a + 180 - b + 180 - c > 180$$
$$a + b + c < 360.$$

Stelling 16. *Een zijde van een boldriehoek is groter dan het verschil en kleiner dan de som van de beide andere zijden.*

Bewijs.

Volgens stelling 13 is in de pooldriehoek:

$$B' + C' - A' < 180.$$

Door toepassing van stelling 10 leiden we hieruit af:

$$180 - b + 180 - c - (180 - a) < 180$$
$$b + c - a > 0$$
$$b + c > a$$
$$c > a - b.$$

Opmerking. Als de zijden van een boldriehoek a, b en c zijn, zijn de zijden van de nevendriehoek a, $180 - b$ en $180 - c$. Passen we op deze nevendriehoeken stelling 16 toe, dan vinden we:

$$a < 180 - b + 180 - c$$
$$a + b + c < 360, \text{'t welk in stelling 15 met behulp}$$

van de pooldriehoek is afgeleid.

§ 62. Gelijk- en gelijkvormigheid van boldriehoeken

Bepaling. *Wanneer twee boldriehoeken alle elementen twee aan twee gelijk hebben, noemt men ze gelijk en gelijkvormig.*

Hierbij doen zich twee gevallen voor: de elementen kunnen in dezelfde volgorde voorkomen of in tegengestelde volgorde.

Komen de elementen in dezelfde volgorde voor, dan heten de driehoeken *congruent*; komen ze in tegengestelde volgorde voor, dan noemt men ze *symmetrisch*.

In het eerste geval kunnen de twee driehoeken samenvallen, in het laatste geval kan de ene driehoek samenvallen met de tegendriehoek van de andere.

Stelling 17. *Twee boldriehoeken zijn gelijk en gelijkvormig als ze twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben.*

Bewijs.

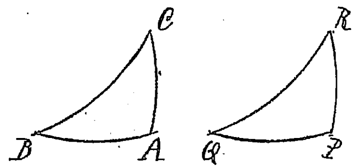

Fig. 55.

Zij gegeven:

$$\angle C = \angle R,\ BC = QR,$$
$$\text{en } AC = PR.$$

I. Volgen de gelijke elementen in dezelfde volgorde op elkaar, zie fig. 55, dan plaatst men driehoek ABC zodanig op driehoek PQR, dat het punt C op R valt en BC langs QR, dan moet AC op PR vallen omdat $\angle C = \angle R$.

Aangezien $BC = QR$, zal B in Q moeten komen, en daar $AC = PR$, komt A in P. Dus zal BA de boog QP geheel bedekken. De driehoeken vallen nu geheel samen en zijn dus congruent.

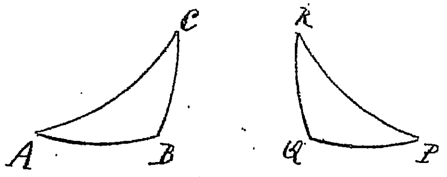

Fig. 56.

II. Volgen de elementen elkaar in tegengestelde volgorde op, zie fig. 56, dan kan men ABC laten samenvallen als in I met de tegendriehoek $P'Q'R'$ van driehoek PQR, daar de elementen van ABC en $P'Q'R'$ elkaar dan in dezelfde volgorde opvolgen. ABC en PQR zijn dan symmetrisch.

S t e l l i n g 18. *Twee boldriehoeken zijn gelijk en gelijkvormig als ze een zijde en de beide aanliggende hoeken gelijk hebben.*

B e w ij s.

Als twee boldriehoeken een zijde en twee aanliggende hoeken gelijk hebben, hebben hun pooldriehoeken twee zijden en een ingesloten hoek gelijk. De pooldriehoeken zijn volgens stelling 17 gelijk en gelijkvormig, dus de oorspronkelijke driehoeken ook.

O p m e r k i n g. Het bewijs kan ook geheel overeenkomstig dat van stelling 17 gegeven worden.

S t e l l i n g 19. *In een gelijkbenige boldriehoek zijn de hoeken aan de basis gelijk* en omgekeerd.

B e w ij s.

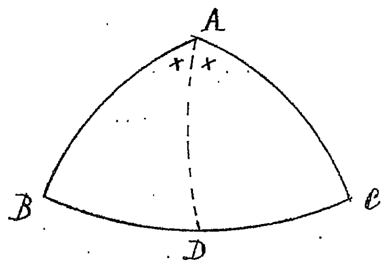

Fig. 57.

Zij in driehoek ABC zijde $AB = AC$. Deel nu $\angle A$ door een grootcirkelboog middendoor, dan is volgens stelling 17 $\triangle BAD \cong \triangle CAD$, want $\angle BAD = \angle DAC$; $BA = CA$ en AD hebben ze gemeen. Dan is ook $\angle B = \angle C$.

B e w ij s v a n 't o m g e k e e r d e. Zij in $\triangle ABC$ (fig. 57) $\angle B = \angle C$, dan is in de pooldriehoek $b' = c'$, dus volgens 't eerste deel van stelling 19 $B' = C'$, waaruit weer volgt, dat in de oorspronkelijke driehoek $b = c$ is.

S t e l l i n g 20. *Twee boldriehoeken zijn gelijk en gelijkvormig als ze drie zijden gelijk hebben.*

B e w ij s.

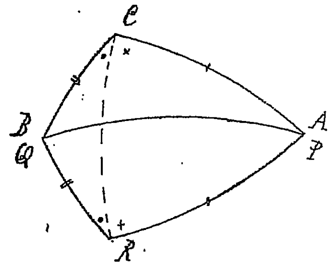

Fig. 58.

I. Komen de elementen in tegengestelde volgorde voor, dan kan men ze zo plaatsen, dat een zijde van de ene driehoek samenvalt met een zijde van de andere, terwijl de toppen ter weerszijden van die zijde liggen. Trekken we nu CR, dan zijn de $\triangle\triangle$ CBR en CAR gelijkbenig. Dus is:

$$\angle BCR = \angle BRC$$
$$\angle ACR = \angle CRA$$
$$\overline{\angle BCA = \angle QRP}$$

De driehoeken ABC en PQR hebben nu twee zijden en de ingesloten hoek gelijk, terwijl de elementen elkaar in tegengestelde volgorde opvolgen. De driehoeken zijn dus symmetrisch.

II. Komen de elementen in de twee driehoeken in dezelfde volgorde voor, dan liggen de elementen van $\triangle ABC$ en $\triangle P'Q'R'$ (de tegendriehoek van $\triangle PQR$) in tegengestelde volgorde. ABC en $P'Q'R'$ zijn dus symmetrisch, waaruit volgt dat ABC en PQR congruent zijn.

S t e l l i n g 21. *Twee boldriehoeken zijn gelijk en gelijkvormig als ze de drie hoeken gelijk hebben.*

B e w ij s.

Als de boldriehoeken de drie hoeken gelijk hebben, hebben hun pooldriehoeken de drie zijden gelijk en zijn dus gelijk en gelijkvormig, waaruit weer volgt dat de oorspronkelijke driehoeken ook gelijk en gelijkvormig zijn.

S t e l l i n g 22. *Twee boldriehoeken zijn gelijk en gelijkvormig als ze twee zijden gelijk hebben en de hoek tegenover een van die zijden, mits de hoeken tegenover het andere paar gelijke zijden van dezelfde soort zijn.*

B e w ij s.

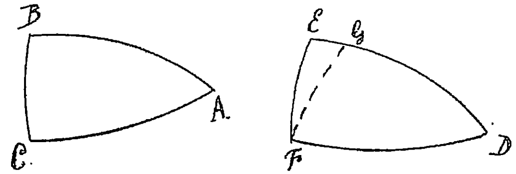

Fig. 59.

I. Zij gegeven: $AC = DF$, $BC = EF$, $\angle A = \angle D$ met $\angle B$ en $\angle E$ beide scherp. Elementen in gelijke volgorde. Plaatst men nu $\triangle ABC$ zodanig op $\triangle DEF$, dat $\angle A$ de hoek D volkomen bedekt, dan zal C in F komen;

omdat $AC = FD$, en verder valt AB langs DE; onderstelt men daarbij nu, dat CB niet langs FE valt, maar b.v. langs FG, zodat

$$FG = CB \text{ en}$$
$$\angle FGD = \angle B.$$

Volgens 't gegeven is $CB = FE$, dus dan zou ook $FG = FE$ zijn en volgens stelling 19

$$\angle FEG = \angle FGE.$$

Nu is echter gegeven, dat $\angle B$ scherp is, dus ook $\angle FGD$ scherp en $\angle FGE$ stomp. terwijl $\angle FED$ scherp gegeven is. De hoeken FEG en FGE kunnen dus onmogelijk gelijk zijn.

Door dus te onderstellen dat CB niet langs FE valt, komt men tot iets dat onmogelijk is.

CB valt dus wel langs FE en de driehoeken zijn congruent.

II. Komen de elementen in tegengestelde volgorde voor, dan is ABC congruent met $D'E'F'$, de tegendriehoek van DEF. ABC is dus symmetrisch met DEF zelf.

S t e l l i n g 23. *Als twee boldriehoeken twee hoeken gelijk hebben en een zijde tegenover een van die hoeken, zijn zij gelijk en gelijkvormig, mits de zijden tegenover het andere paar gelijke hoeken van dezelfde soort zijn.*

B e w ij s.

De pooldriehoeken van deze driehoeken hebben dezelfde gegevens als de driehoeken in stelling 22. De pooldriehoeken zijn nu gelijk en gelijkvormig, dus de oorspronkelijke driehoeken eveneens.

S t e l l i n g 24. *Als twee boldriehoeken twee zijden gelijk hebben en de ingesloten hoek bij de een groter is dan bij de andere, dan is ook de derde zijde in de eerste driehoek groter dan de derde zijde van de tweede.*

B e w ij s.

I. Zij gegeven: $AC = PR$, $AB = PQ$, $\angle A > \angle P$ en de elementen in tegengestelde volgorde.

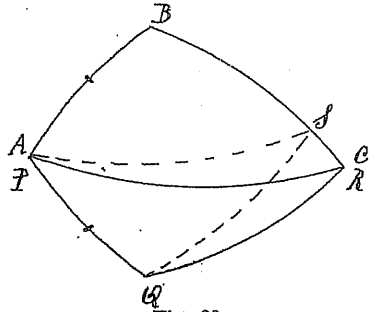

Fig. 60.

Plaatsen we de $\triangle\triangle$ ABC en PQR zo met een gelijke zijde tegen elkaar, dat B en Q ter weerszijden van die zijde komen. Deelt men nu $\angle BAQ$ middendoor, dan valt de deellijn AS binnen $\triangle BAC$, omdat $\angle A > \angle P$. $\triangle\triangle$ QAS en BAS zijn nu congruent volgens stelling 17, zodat $QS = BS$.

In $\triangle QSC$ is verder:

$$QS + SC > QC \text{ waaruit:}$$
$$BS + SC > QC \text{ of}$$
$$BC > QR.$$

II. Volgen de elementen van $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ elkaar in gelijke volgorde op, dan bewijst men op gelijke manier als boven, dat $BC > Q'R'$ uit de tegendriehoek van $\triangle PQR$, dus ook $BC > QR$ omdat $Q'R' = QR$.

S t e l l i n g 25. *Als twee boldriehoeken twee zijden gelijk hebben, maar de derde zijde van de eerste is groter dan de derde zijde van de tweede, dan zal de hoek over die derde zijde in de eerste driehoek groter zijn dan de hoek over de derde zijde in de tweede.*

Het bewijs van deze stelling wordt *indirect* gevoerd, woordelijk gelijk aan de overeenkomstige stelling uit de vlakke meetkunde.

S t e l l i n g 26. *In elke boldriehoek staat tegenover een grotere zijde een grotere hoek* en omgekeerd.

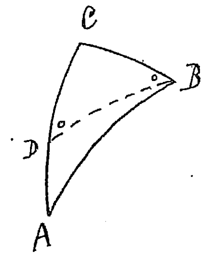

Fig. 61.

B e w ij s.

Zij $AC > CB$, dan kunnen we $CD = CB$ op CA afpassen, en D met B door een grootcirkelboog verbinden. Nu is:

$\angle BDC > \angle A - \angle ABD$ (zie de opmerking bij stelling 14).

Verder is $CB = CD$, dus $\angle BDC = \angle CBD$ en dus

$$\angle CBD > \angle A - \angle ABD$$
$$\angle CBD + \angle ABD > \angle A$$
$$\angle B > \angle A.$$

Het bewijs van 't *omgekeerde* wordt *indirect* gevoerd, woordelijk gelijk aan de overeenkomstige stelling uit de vlakke meetkunde.

Een ander bewijs van stelling 16.

In fig. 61 is $\angle ABC < \angle ADC$ (een gestrekte hoek)

$$\angle DBC = \angle CDB$$
$$\overline{\phantom{\angle ABD < \angle ADB}} \text{ af}$$
$$\angle ABD < \angle ADB$$
$$AD < AB$$
$$AC - DC < AB$$
$$AC - BC < AB.$$

S t e l l i n g 27. *De grootcirkelboog uit een willekeurig punt van het boloppervlak loodrecht op een grootcirkel getrokken is* (*mits* $< 90°$) *kleiner dan alle andere grootcirkelbogen uit dat punt naar die grootcirkel. Is de loodrechte boog echter* $> 90°$, *dan is hij groter dan alle andere grootcirkelbogen.*

B e w ij s.

Alle grootcirkels die de grootcirkel ABA' loodrecht snijden gaan door de pool P van cirkel ABA'.

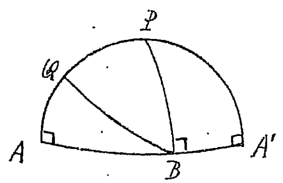

Fig. 62.

Zij Q een willekeurig punt op de bol, dan gaat de loodlijn QA door P. Verbinden we P en Q nu met een willekeurig punt B van de cirkel, dan is:

$$\angle ABQ < \angle ABP, \text{ maar daar}$$
$$\angle ABP = \angle PAB = 90°, \text{ is}$$
$$\angle ABQ < \angle PAB \text{ en } QA < QB.$$

In $\triangle QBA'$ is $\angle QBA' > 90°$, dus $> \angle PA'B$, waaruit volgt: $QA' > QB$.

B e p a l i n g. *De afstand van een punt tot een grootcirkel is de loodrechte boog uit dat punt op die grootcirkel, en wel die, welke kleiner dan 90° is.*

Volgens stelling 27 is deze boog de *kleinste*, dus inderdaad de afstand.

S t e l l i n g 28. *In een boldriehoek is de som van twee zijden tegelijk groter dan, gelijk aan of kleiner dan 180° met de som van hun overstaande hoeken en omgekeerd.*

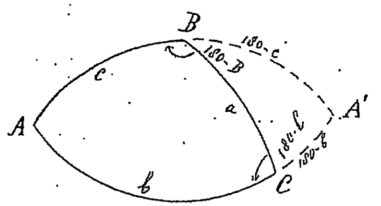

Fig. 63.

B e w ij s.

Zij b.v. gegeven

$$a + b > 180°, \text{ dan is}$$
$$a > 180° - b \text{ en}$$

daarom is in de nevendriehoek

$$A' > 180° - B$$

en dus $A > 180° - B$

en $A + B > 180°$.

Ware gegeven $A + B < 180°$ dan was

$$A < 180° - B$$

en $A' < 180° - B$, dus in de nevendriehoek

$$a < 180° - b \text{ of}$$
$$a + b < 180°.$$

HOOFDSTUK IV

Boldriehoeksmeting

§ 63. De formules van de rechthoekige boldriehoeken

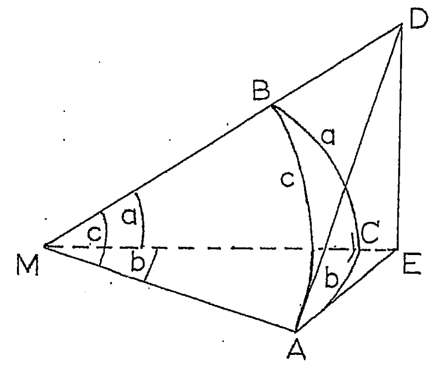

Fig. 64.

Zij ABC een boldriehoek rechthoeking in C. Verbindt men het bolmiddelpunt M met A, B en C, dan is $\angle CMB = a$ (middelpuntshoek) en evenzo $\angle CMA = b$ en $\angle AMB = c$.

Het vlak MAC staat $\perp$ het vlak MBC. Trek nu de raaklijn AD aan boog AB en richt in 't vlak MCB de loodlijn DE op. MA staat nu $\perp$ AD en $\perp$ DE, dus $\perp$ 't vlak ADE, d.w.z. ook $\perp$ AE, zodat AE een raaklijn aan boog AC is, en $\angle EAD = \angle A$ van de boldriehoek.

De drie zijden

S t e l l i n g 29. *De cosinus van de schuine zijde van een rechthoekige boldriehoek is gelijk aan het product van de cosinussen der rechthoekszijden.* **cos c = cos a cos b.**

B e w ij s.

Zie fig. 64.

$$\cos a \cos b = \frac{ME}{MD} \cdot \frac{MA}{ME} = \frac{MA}{MD} = \cos c.$$

O p m e r k i n g. In dit bewijs is aangenomen, dat zowel a als $b < 90$ is. Niettemin geldt de stelling ook voor andere waarden van a en b.

(1) Gesteld $a > 90°$ en $b > 90°$.

In de nevendriehoek $BC'A$ zijn nu BC' en AC' scherp, dus (zie fig. 65)

$$\cos AB = \cos AC' \cos BC'$$
$$\cos c = \cos (180 - b) \cos (180 - a)$$
$$= \cos a \cos b.$$

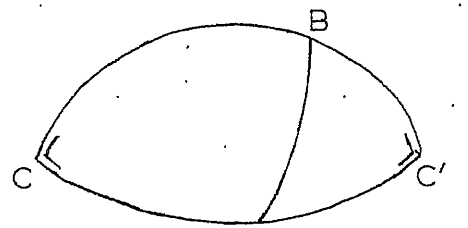

Fig. 65.

(2) Gesteld $a > 90$ en $b < 90$. Zie fig. 66.

In de nevendriehoek $AB'C$ is $\cos AB' = \cos AC \cos B'C$

$$\cos(180 - c) = \cos b \cos(180 - a)$$
$$\cos c = \cos a \cos b.$$

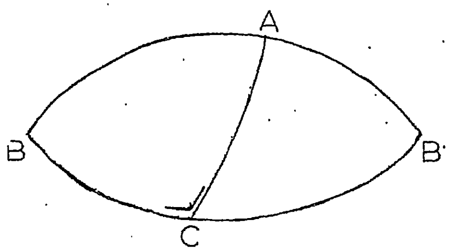

Fig. 66.

(3) Een der rechthoekszijden b.v. $b = 90°$. Nu is A de pool van CB en $c = 90°$. Van $\cos c = \cos a \cos b$ worden nu beide leden 0. Stelling 29 is dus waar voor alle waarden der zijden.

Voor de volgende stellingen zal het bewijs, dat ze *algemeen geldig* zijn, niet gegeven worden, omdat het op dezelfde wijze gevoerd worden als bij stelling 29.

Rechthoekszijde, overstaande hoek en schuine zijde

S t e l l i n g 30. *In elke rechthoekige boldriehoek is de sinus van een scheve hoek gelijk aan het quotient van de sinus der overstaande rechthoekszijde en de sinus van de schuine zijde.*

$$\sin \mathbf{A} = \frac{\sin \mathbf{a}}{\sin \mathbf{c}}$$

B e w ij s.

Zie fig. 64.

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{DE}{MD} : \frac{AD}{MD} = \frac{DE}{AD} = \sin A.$$

Rechthoekszijde, ingesloten hoek en schuine zijde

S t e l l i n g 31. *In elke rechthoekige boldriehoek is de cosinus van een scheve hoek gelijk aan het quotient van de tangens van de aanliggende rechthoekszijde en de tangens van de schuine zijde.*

$$\cos \mathbf{A} = \frac{\operatorname{tg} \mathbf{b}}{\operatorname{tg} \mathbf{c}}.$$

B e w ij s.

Zie fig. 64.

$$\frac{tg\, b}{tg\, c} = \frac{AE}{AM} : \frac{AD}{AM} = \frac{AE}{AD} = \cos A.$$

Twee rechthoekszijden en een scheve hoek

S t e l l i n g 32. *De tangens van een scheve hoek is gelijk aan het quotient van de tangens van de overstaande rechthoekszijde en de sinus van de andere rechthoekszijde.*

$$\operatorname{tg} \mathbf{A} = \frac{\operatorname{tg} \mathbf{a}}{\sin \mathbf{b}}$$

B e w ij s.

Zie fig. 64.

$$\frac{tg\, a}{\sin b} = \frac{DE}{EM} : \frac{AE}{EM} = \frac{DE}{AE} = tg\, A.$$

O p m e r k i n g. *Stelling* 29, 30, 31 en 32 zijn uit de figuur bewezen, terwijl het bewijs steeds met het *tweede* lid begon.

Twee scheve hoeken en een rechthoekszijde

S t e l l i n g 33. *In elke rechthoekige boldriehoek is de cosinus van de ene scheve hoek gelijk aan de sinus van de andere scheve hoek, vermenigvuldigd met de cosinus van de overstaande rechthoekszijde van de eerste.*

$$\cos \mathbf{A} = \sin \mathbf{B} \cos \mathbf{a}.$$

B e w ij s.

$$\sin B \cdot \cos a = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos b}\ (30.29) = \frac{tg\, b}{tg\, c} = \cos A\ (31)$$

De schuine zijde en twee scheve hoeken

§ 64.

S t e l l i n g 34. *In elke rechthoekige boldriehoek is de cosinus van de schuine zijde gelijk aan het product van de cotangenten van de scheve hoeken.*

$$\cos \mathbf{c} = \operatorname{cotg} \mathbf{A} \times \operatorname{cotg} \mathbf{B}.$$

Bewijs.

$$cotg\,A \times cotg\,B = \frac{cos\,A}{sin\,A} \times \frac{cos\,B}{sin\,B} = \frac{cos\,A}{sin\,B} \times \frac{cos\,B}{sin\,A}$$
$$= cos\,a \times cos\,b \;(33) = cos\,c \;(29).$$

Opmerking I. De formules van de rechthoekige boldriehoek tonen veel overeenkomst met die van de platte rechthoekige driehoek. Men vergelijke:

$c^2 = a^2 + b^2$	$cos\,c = cos\,a\,cos\,b$
$sin\,A = \frac{a}{c}$	$sin\,A = \frac{sin\,a}{sin\,c}$
$cos\,A = \frac{b}{c}$	$cos\,A = \frac{tg\,b}{tg\,c}$
$tg\,A = \frac{a}{b}$	$tg\,A = \frac{tg\,a}{sin\,b}$
$cos\,A = sin\,B$	$cos\,A = sin\,B \times cos\,a$

De betrekkingen tussen de elementen van een rechthoekige boldriehoek kan men in één algemene regel samenvatten, n.l. de regel van Neper:

de cosinus van een element van een rechthoekige boldriehoek is gelijk aan het product van de cotangenten van de aanliggende elementen of het product van de sinussen van de afliggende elementen, mits de rechte hoek niet meetelle en de rechthoekszijden door hun co-functies worden vervangen.

Door toepassing van deze regel vinden we:

$$cos\,c = sin\,(90 - a)\,sin\,(90 - b).$$
$$cos\,c = cotg\,A\,cotg\,B.$$
$$cos\,(90 - a) = cotg\,B\,cotg\,(90 - b).$$
$$cos\,(90 - a) = sin\,A\,sin\,c.$$
$$cos\,A = cotg\,c\,cotg\,(90 - b).$$
$$cos\,A = sin\,B\,sin\,(90 - a).$$

Na herleiding geven deze betrekkingen dezelfde uitkomsten als hierboven zijn gevonden.

Opmerking II. Uit $cos\,A = sin\,B\,cos\,a$ volgt, daar $sin\,B$ altijd positief is, dat $cos\,A$ en $cos\,a$ hetzelfde positieve of negatieve teken moeten hebben, dus A en a *gelijksoortig* zijn.

Schrijven we de formule in deze vorm: $sin\,B = \frac{cos\,A}{cos\,a}$ en nemen we in aanmerking dat $sin\,B < 1$ is, dan moet (*in absolute waarde*) $cos\,A < cos\,a$ zijn en daar we weten dat A en a gelijksoortig zijn, volgt hieruit dat A tussen a en 90 moet liggen.

Opgave. Laat dit laatste zien in een tekening van goniometrische krommen.

Opmerking III. $cos\,c = cos\,a\,cos\,b$. Zijn nu a en b beide scherp of beide stomp, dan is het tweede lid positief, dus $cos\,c$ positief en c scherp.

Is b.v. b stomp en a scherp, dan is het tweede lid negatief, dus $cos\,c$ negatief en c stomp.

Hieruit volgt:

rechthoekszijden gelijksoortig, schuine zijde scherp;
rechthoekszijden ongelijksoortig, schuine zijde stomp.

Opmerking IV. $sin\,A = \frac{sin\,a}{sin\,c}$. Omdat $sin\,A < 1$, moet $sin\,c > sin\,a$, waaruit volgt dat c tussen a en 't supplement van a moet liggen.

Opgave. Verklaar dit laatste uit een tekening van goniometrische krommen.

Opmerking V. $cos\,c = cotg\,A\,cotg\,B$. $cos\,c$ ligt steeds tussen $+1$ en -1, dus

1°. $cotg\,A\,cotg\,B < +1$
$cos\,A\,cos\,B < sin\,A\,sin\,B$
$cos\,A\,cos\,B - sin\,A\,sin\,B < 0.$
$cos\,(A + B) < 0$, d.w.z. *negatief*.
$A + B > 90$ en $A + B < 270.$

2°. $cotg\,A\,cotg\,B > -1$
$cos\,A\,cos\,B > -sin\,A\,sin\,B$
$cos\,A\,cos\,B + sin\,A\,sin\,B > 0$
$cos\,(A - B) > 0$, d.w.z. *positief*.
$A - B < 90°.$

Opmerking VI. $cos\,c = cotg\,A\,cotg\,B$.

Is de schuine zijde c scherp dan is $cos\,c$ positief dus $cotg\,A\,cotg\,B$ ook positief. Dit kan alleen als A en B beide scherp of beide stomp zijn.

Als c stomp is, zal $cos\,c$ dus ook $cotg\,A\,cotg\,B$ negatief zijn. Daaruit volgt dat de scheve hoeken ongelijksoortig zijn. In het kort:

scheve hoeken gelijksoortig, schuine zijde scherp
scheve hoeken ongelijksoortig, schuine zijde stomp.

Dit is in overeenstemming met opmerking III als we bedenken dat de scheve hoek en de overstaande rechthoekszijde steeds gelijksoortig zijn (opmerking II).

De formules van de scheefhoekige boldriehoeken

§ 65. Eerste cosinusregel

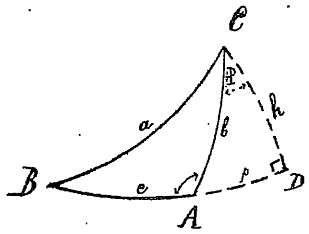

Fig. 67.

S t e l l i n g 35. *In elke boldriehoek is de cosinus van een zijde gelijk aan het product van de cosinussen van de beide andere zijden, vermeerderd met het gedurig product van de sinussen van die zijden en de cosinus van de ingesloten hoek.*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

B e w ij s.

Laat uit C de sferische loodlijn CD op BA neer, dan is in de rechthoekige driehoek BCD:

$$\cos BC = \cos DC \times \cos DB$$
$$\cos a = \cos h \times \cos (c + p)$$
$$= \frac{\cos b}{\cos p} \times (\cos c \cos p - \sin c \sin p)$$
$$= \frac{\cos b}{\cos p} \times \cos c \cos p - \frac{\cos b}{\cos p} \times \sin c \sin p$$
$$= \cos b \cos c - \cos b \sin c \operatorname{tg} p$$
$$= \cos b \cos c - \cos b \sin c \operatorname{tg} b \cos (180 \quad - A)$$
$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

O p m e r k i n g I. Omdat h zowel in $\triangle BCD$ als in $\triangle ACD$ gelijksoortig met de overstaande hoek moet zijn, zal h binnen de driehoek komen als $\angle A$ en $\angle B$ gelijksoortig zijn, doch er buiten als $\angle A$ en $\angle B$ ongelijksoortig zijn.

Uit C had men nog een andere loodlijn op AB kunnen neerlaten, n.l. het supplement van h, met h op de zelfde groot-cirkel gelegen. Zie stelling 27.

Bewijs stelling 35 als de loodlijn binnen de driehoek ligt.

Stelling 16 *uit de eerste cosinusregel afgeleid.*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Vergelijken we nu $\cos b \cos c + \sin b \sin c$ met $\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, dan moet de eerste som groter zijn dan de laatste, omdat $\cos A < 1$.

Hieruit volgt:

$$\cos a < \cos b \cos c + \sin b \sin c$$
$$\cos a < \cos (b - c)$$
$$a > b - c$$

O p m e r k i n g II. Voor praktische toepassing kan de eerste cosinusregel tot eenvoudiger gedaante worden herleid.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c \,(1 - \operatorname{sinv} A)$$
$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c - \sin b \sin c \operatorname{sinv} A$$
$$= \cos (b - c) - \sin b \sin c \operatorname{sinv} A.$$

Omdat $\sin b \sin c \operatorname{sinv} A$ altijd positief is, volgt ook hieruit:

$$\cos a < \cos (b - c)$$
$$a > b - c.$$

§ 66. Tweede cosinusregel

S t e l l i n g 36. In elke boldriehoek is

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b.$$

Zie fig. 67. B e w ij s.

$$\cos B = \sin DCB \times \cos h$$
$$= \sin (C + P) \times \cos h$$
$$= (\sin C \cos P + \cos C \sin P) \times \cos h$$
$$= \cos C \sin P \cos h + \sin C \cos P \cos h$$
$$= \cos C \cos (180° - A) + \sin C \sin (180° - A) \cos p \cos h$$
$$= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b.$$

A n d e r b e w ij s. Door de eerste cosinusregel op de pooldriehoek toe te passen vinden we:

$$\cos b' = \cos a' \cos c' + \sin a' \sin c' \cos B'$$
$$\cos (180 - B) = \cos (180 - A) \cos (180 - C) + \sin (180 - A) \sin (180 - C) \cos (180 - b)$$
$$-\cos B = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b.$$

Stelling 12 *uit de tweede cosinusregel afgeleid.*

$$-\cos B = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b$$
$$\cos (180 - B) = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b$$
$$\cos (180 - B) > \cos A \cos C - \sin A \sin C$$
$$\cos (180 - B) > \cos (A + C)$$
$$180 - B < A + C$$
$$180 < A + B + C.$$

§ 67. Sinus- of Modulusregel

S t e l l i n g 37. *De sinussen van de hoeken van een boldriehoek zijn evenredig met de sinussen van de overstaande zijden.*

Zie fig. 66. **B e w ij s.**

In $\triangle DBC$ is $\sin h = \sin B \times \sin a$.
In $\triangle DCA$ is $\sin h = \sin (180° - A) \times \sin b = \sin A \times \sin b$

$$\sin A \times \sin b = \sin B \times \sin a$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}.$$

De verhouding $\dfrac{\sin A}{\sin a}$ noemt men de *modulus* van de driehoek.

§ 67a. Tangensregel

S t e l l i n g 38. $\qquad \dfrac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{tg\,\frac{1}{2}(A-B)} = \dfrac{tg\,\frac{1}{2}(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}(a-b)}$

B e w ij s.

Uit $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b}$ volgt door toepassing van een eigenschap van de evenredigheden:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$$

waaruit volgt: $\qquad \dfrac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{tg\,\frac{1}{2}(A-B)} = \dfrac{tg\,\frac{1}{2}(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}(a-b)}.$

O p g a v e. Leid stelling 28 uit de tangensregel af.

§ 68. De formules van Euler

S t e l l i n g 39.

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots \quad (1).$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots \quad (2).$$

$$tg\,\tfrac{1}{2} A = \frac{1}{\sin (s-a)} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}} \quad \ldots \quad (3).$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}} \quad \ldots \quad (4).$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}} \quad \ldots \quad (5).$$

$$tg\,\tfrac{1}{2} a = \cos (S-A) \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}} \quad \ldots \quad (6).$$

B e w ij s (1).

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c\,(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A)$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c - 2 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A$$
$$\cos a = \cos (b-c) - 2 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A$$
$$\cos a - \cos (b-c) = -2 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A.$$

$$-2 \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2} = -2 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2} = \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A$$

Stellen we $a+b+c = 2s$, dus $a+b-c = 2(s-c)$ enz.
$\sin (s-c) \sin (s-b) = \sin b \sin c \sin^2 \frac{1}{2} A$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}$$

B e w ij s (2).

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c\,(2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A - 1)$$
$$\cos a = \cos b \cos c + 2 \sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2} A - \sin b \sin c$$
$$\cos a = \cos (b+c) + 2 \sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2} A$$
$$\cos a - \cos (b+c) = 2 \sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$2 \sin \frac{b+c+a}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} = 2 \sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\sin s \sin (s-a) = \sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Formule (3) bewijst men door (2) op (1) te delen.

B e w ij s (4).

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C\,(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a)$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C - 2 \sin B \sin C \sin^2 \tfrac{1}{2} a$$
$$\cos A = -\cos (B+C) - 2 \sin B \sin C \sin^2 \tfrac{1}{2} a$$
$$\cos A + \cos (B+C) = -2 \sin B \sin C \sin^2 \tfrac{1}{2} a$$

$$2 \cos \frac{A+B+C}{2} \cos \frac{B+C-A}{2} = -2 \sin B \sin C \sin^2 \tfrac{1}{2} a$$

Stel $A + B + C = 2S$, dus $A + B - C = 2\,(S - C)$ enz.

$$\cos S \cos (S - A) = -\sin B \sin C \sin^2 \tfrac{1}{2} a$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}}.$$

Formule (5) wordt op dezelfde manier bewezen, door voor $\cos a$ te subsitueren $2 \cos^2 \frac{1}{2} a - 1$.
Deelt men (4) door (5) dan verkrijgt men formule (6).

O p m e r k i n g e n. I. Bij de formules van Euler moet men altijd de positieve vierkantswortel nemen, omdat een halve zijde en een halve hoek steeds scherp zijn.

II. Het minteken onder de wortel bij (4) en (6) maakt deze juist bestaanbaar, want omdat $A + B + C > 180$, is $S > 90$ en $-\cos S$ dus positief.

§ 69. **De analogieën van Neper**

S t e l l i n g 40. $$\mathbf{tg \tfrac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (a - b)}{\cos \tfrac{1}{2} (a + b)} cotg \tfrac{1}{2} C} \quad . \; . \; . \; . \quad (1).$$

$$\mathbf{tg \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (a - b)}{\sin \tfrac{1}{2} (a + b)} cotg \tfrac{1}{2} C} \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

$$\mathbf{tg \tfrac{1}{2} (a + b) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (A - B)}{\cos \tfrac{1}{2} (A + B)} tg \tfrac{1}{2} c} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

$$\mathbf{tg \tfrac{1}{2} (a - b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (A - B)}{\sin \tfrac{1}{2} (A + B)} tg \tfrac{1}{2} c} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

B e w ij s (1).

Uit stelling 39 (6) volgt:

$$\frac{tg \tfrac{1}{2} a \times tg \tfrac{1}{2} b}{1} = \frac{-\cos S}{\cos (S - C)}.$$

Door toepassing van een eigenschap van de evenredigheden vinden we verder:

$$\frac{1 - tg \tfrac{1}{2} a\, tg \tfrac{1}{2} b}{1 + tg \tfrac{1}{2} a\, tg \tfrac{1}{2} b} = \frac{\cos (S - C) + \cos S}{\cos (S - C) - \cos S}$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b - \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b}{\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b + \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b} = \frac{2 \cos \tfrac{1}{2} (2S - C) \cos \tfrac{1}{2} C}{2 \sin \tfrac{1}{2} (2S - C) \sin \tfrac{1}{2} C}$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2} (a + b)}{\cos \tfrac{1}{2} (a - b)} = cotg \tfrac{1}{2} (A + B)\, cotg \tfrac{1}{2} C$$

$$tg \tfrac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (a - b)}{\cos \tfrac{1}{2} (a + b)}\, cotg \tfrac{1}{2} C.$$

B e w ij s (2).

Uit stelling 39 (6) kan men afleiden:

$$\frac{tg \tfrac{1}{2} a}{tg \tfrac{1}{2} b} = \frac{\cos (S - A)}{\cos (S - B)}$$

$$\frac{tg \tfrac{1}{2} a - tg \tfrac{1}{2} b}{tg \tfrac{1}{2} a + tg \tfrac{1}{2} b} = \frac{\cos (S - A) - \cos (S - B)}{\cos (S - A) + \cos (S - B)}$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b - \cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b}{\sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b + \cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b} = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2} (A - B)}{2 \cos \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} (A - B)}$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2} (a - b)}{\sin \tfrac{1}{2} (a + b)} = tg \tfrac{1}{2} (A - B)\, tg \tfrac{1}{2} C$$

$$tg \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (a - b)}{\sin \tfrac{1}{2} (a + b)} cotg \tfrac{1}{2} C.$$

B e w ij s (3).

Uit stelling 39 (3) volgt:

$$\frac{tg \tfrac{1}{2} A\, tg \tfrac{1}{2} B}{1} = \frac{\sin (s - c)}{\sin s}$$

$$\frac{1 - tg \tfrac{1}{2} A\, tg \tfrac{1}{2} B}{1 + tg \tfrac{1}{2} A\, tg \tfrac{1}{2} B} = \frac{\sin s - \sin (s - c)}{\sin s + \sin (s - c)}$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B - \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B}{\cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B} = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} (a + b)}{2 \cos \tfrac{1}{2} c \sin \tfrac{1}{2} (a + b)}$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2} (A + B)}{\cos \tfrac{1}{2} (A - B)} = tg \tfrac{1}{2} c\, cotg \tfrac{1}{2} (a + b)$$

$$tg \tfrac{1}{2} a + b) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (A - B)}{\cos \tfrac{1}{2} (A + B)} tg \tfrac{1}{2} c.$$

B e w ij s (4).

Uit stelling 39 (3) kan men afleiden:

$$\frac{tg \tfrac{1}{2} A}{tg \tfrac{1}{2} B} = \frac{\sin (s - b)}{\sin (s - a)}$$

$$\frac{tg \tfrac{1}{2} A - tg \tfrac{1}{2} B}{tg \tfrac{1}{2} A + tg \tfrac{1}{2} B} = \frac{\sin (s - b) - \sin (s - a)}{\sin (s - b) + \sin (s - a)}$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B - \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B}{\sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B + \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B} = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} (a - b) \cos \tfrac{1}{2} c}{2 \cos \tfrac{1}{2} (a - b) \sin \tfrac{1}{2} c}$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2} (A - B)}{\sin \tfrac{1}{2} (A + B)} = tg \tfrac{1}{2} (a - b)\, cotg \tfrac{1}{2} c$$

$$tg \tfrac{1}{2} (a - b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (A - B)}{\sin \tfrac{1}{2} (A + B)} tg \tfrac{1}{2} c.$$

§ 70. De cotangentenregel

S t e l l i n g 41. *De cotangens van een hoek maal de sinus van een andere hoek, is gelijk aan het product van de cotangens van de overstaande zijde van de eerste en de sinus van de zijde tussen die twee hoeken, verminderd met het product van de cosinussen van de elementen, waarvan men reeds de sinussen genomen heeft.*

$$\mathbf{cotg\ C \sin A = cotg\ c \sin b - \cos b \cos A.}$$

B e w ij s.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Substitueer voor $\cos c$ de waarde $\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

$$\cos a = \cos b\ (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos a - \cos a \cos^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos a\ (1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos a \sin^2 b = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Beide leden delen door $\sin a \sin b$

$$\text{cotg}\ a \sin b = \cos b \cos C + \frac{\sin c}{\sin a} \cos A$$

$$\text{cotg}\ a \sin b = \cos b \cos C + \frac{\sin C}{\sin A} \cos A$$

$$\text{cotg}\ a \sin b = \cos b \cos C + \text{cotg}\ A \sin C$$
$$\text{cotg}\ A \sin C = \text{cotg}\ a \sin b - \cos b \cos C.$$

T w e e d e b e w ij s v o o r d e c o t a n g e n t e n r e g e l.

In fig. 67 is:

$$tg\ h = tg\ (180 - A) \sin p = tg\ B \sin (c + p)$$
$$tg\ (180 - A)\ \text{cotg}\ B \sin p = \sin c \cos p + \cos c \sin p$$
$$tg\ (180 - A)\ \text{cotg}\ B\ tg\ p = \sin c + \cos c\ tg\ p$$
$$tg\ (180 - A)\ \text{cotg}\ B\ tg\ b \cos (180 - A) = \sin c + \cos c\ tg\ b \cos (180 - A)$$
$$\text{cotg}\ B \sin A\ tg\ b = \sin c - \cos c\ tg\ b \cos A$$
$$\text{cotg}\ B \sin A = \text{cotg}\ b \sin c - \cos c \cos A.$$

§ 71. Veranderen van de formules van de scheefhoekige boldriehoek in die voor de rechthoekige

Uit de eerste cosinusregel:

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ volgt voor $C = 90°$
$\cos c = \cos a \cos b.$

Uit de tweede cosinusregel:

$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$ volgt voor $C = 90°$
$\cos c = \text{cotg}\ A\ \text{cotg}\ B.$

Uit $\cos A = -\cos C \cos B + \sin C \sin B \cos a$ volgt voor $C = 90°$
$\cos A = \sin B \cos a.$

Uit de sinusregel:

$\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ volgt voor $C = 90$

$\sin a = \sin A \sin c$ dus: $\sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c}.$

Uit de cotangentenregel:

$\text{cotg}\ C \sin A = \text{cotg}\ c \sin b - \cos A \cos b$ volgt voor $C = 90$

$$tg\ b = \cos A\ tg\ c \text{ dus: } \cos A = \frac{tg\ b}{tg\ c}.$$

Uit $\text{cotg}\ A \sin C = \text{cotg}\ a \sin b - \cos C \cos b$ volgt voor $C = 90$

$$tg\ a = tg\ A \sin b \text{ dus: } tg\ A = \frac{tg\ a}{\sin b}.$$

§ 72. Algemeen overzicht

Rechthoekige boldriehoeken.

$$\cos c = \cos a \cos b$$

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$$
$$\cos B = \frac{tg\ a}{tg\ c} \qquad \cos A = \frac{tg\ b}{tg\ c}$$
$$tg\ A = \frac{tg\ a}{\sin b} \qquad tg\ B = \frac{tg\ b}{\sin a}$$
$$\cos A = \sin B \cos a \qquad \cos B = \sin A \cos b$$
$$\cos c = \text{cotg}\ A\ \text{cotg}\ B.$$

Scheefhoekige boldriehoeken.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos (b - c) - \sin b \sin c \sin v\ A$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B = \cos (a - c) - \sin a \sin c \sin v\ B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C = \cos (a - b) - \sin a \sin b \sin v\ C.$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

$$\frac{tg\ \frac{1}{2}\ (a - b)}{tg\ \frac{1}{2}\ (a + b)} = \frac{tg\ \frac{1}{2}\ (A - B)}{tg\ \frac{1}{2}\ (A + B)}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}} \qquad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin c}} \qquad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}} \qquad \cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} A = \frac{1}{\sin (s-a)} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} B = \frac{1}{\sin (s-b)} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} C = \frac{1}{\sin (s-c)} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}} \qquad \cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-B)}{\sin A \sin C}} \qquad \cos \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-C)}{\sin A \sin C}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-C)}{\sin A \sin B}} \qquad \cos \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-B)}{\sin A \sin B}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} a = \cos (S-A) \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} b = \cos (S-B) \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} c = \cos (S-C) \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}$$

$$\begin{aligned}
cotg\, A \sin B &= cotg\, a \sin c - \cos B \cos c \\
cotg\, A \sin C &= cotg\, a \sin b - \cos C \cos b \\
cotg\, B \sin C &= cotg\, b \sin a - \cos C \cos a \\
cotg\, B \sin A &= cotg\, b \sin c - \cos A \cos c \\
cotg\, C \sin B &= cotg\, c \sin a - \cos B \cos a \\
cotg\, C \sin A &= cotg\, c \sin b - \cos A \cos b.
\end{aligned}$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} (a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}\ tg\, \tfrac{1}{2} c$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} (a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}\ tg\, \tfrac{1}{2} c$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} (A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}\ cotg\, \tfrac{1}{2} C$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} (A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}\ cotg\, \tfrac{1}{2} C.$$

HOOFDSTUK V

Het oplossen van de boldriehoeken

§ 73. Rechthoekige boldriehoeken

1e geval: G e g e v e n: de twee rechthoekszijden waarvan $a = 122°17'$ en $b = 58°40'$.

G e v r a a g d: c, A en B.

C o n c l u s i e s: a en b ongelijksoortig dus c stomp (§ 71, opm. III)
a stomp dus ook A stomp, b scherp dus ook B scherp (§ 71, opm. II).

F o r m u l e s:

$$\cos c = \cos a \cos b = \cos 122°17' \cos 58°40'$$
$$\cos c = -\sin 32°17' \cos 58°40'$$

$$\sin a = cotg\, B\, tg\, b \rightarrow cotg\, B = \sin a\, cotg\, b$$
$$cotg\, B = \sin 122°17'\, cotg\, 58°40' = \cos 32°17'\, cotg\, 58°40'$$

$$\sin b = cotg\, A\, tg\, a \rightarrow cotg\, A = \sin b\, cotg\, a$$
$$cotg\, A = cotg\, 122°17' \sin 58°40' = -tg\, 32°17' \sin 58°40'$$

B e r e k e n i n g e n:

$lg \sin 32°17'$	9,72763—10
$lg \cos 58°40'$	9,71602—10 (+)
$lg \mid \cos c \mid$	9,44365—10
Tafelwaarde	73°52',5
c	106°07',5

$lg \cos 32°17'$	9,92707—10
$lg\, cotg\, 58°40'$	9,78448—10 (+)
$lg\, cotg\, B$	9,71155—10
$\angle B$	62°46'

$lg\, tg\, 32°17'$	9,80056—10
$lg \sin 58°40'$	9,93154—10 (+)
$lg \mid cotg\, A \mid$	9,73210—10
Tafelwaarde	61°39'
$\angle A$	118°21'

O p m e r k i n g. Door eerst het schema van de berekeningen te maken kan men de drie logaritmen om de goniometrische verhoudingen van a en b ieder van een regel van tafel 8 van de zeevaartkundige tafels overnemen.

Bij sommige berekeningen kan men uit het teken van de goniometrische verhouding al het scherp of stomp zijn van het element bepalen. Wanneer echter het element met een sinus of cosecans moet worden opgezocht is het soms nodig de opmerkingen II, III, en VI uit § 64 te gebruiken.

2e geval: Gegeven: de schuine zijde $c = 93°57',5$ en een rechthoekzijde $a = 60°17'$.

Gevraagd: b, A en B.

Conclusies: de schuine zijde is stomp, dus a en b maar ook $\angle A$ en $\angle B$ zijn ongelijksoortig (§ 64, opm. III en VI)

a scherp, dus $\angle A$ scherp en b en $\angle B$ stomp (§ 64, opm. II):

Formules:

$\cos c = \cos a \cos b \rightarrow \cos b = \cos c \sec a$
$\cos b = \cos 93°57',5 \sec 60°17' = -\sin 3°57',5 \sec 60°17'$

$\cos B = \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} a = \operatorname{cotg} 93°57',5 \operatorname{tg} 60°17'$
$\cos B = -\operatorname{tg} 3°57',5 \operatorname{tg} 60°17'$

$\sin a = \sin c \sin A \rightarrow \sin A = \operatorname{cosec} c \sin a$
$\sin A = \operatorname{cosec} 93°57',5 \sin 60°17' = \sec 3°57',5 \sin 60°17'$

Berekeningen:

$lg \sin 3°57',5$	8,83904
$lg \sec 60°17'$	10,30477 +
$lg \mid \cos b \mid$	9,14381
Tafelwaarde	81°59',5
b	98°00',5

$lg \operatorname{tg} 3°57',5$	8,84008
$lg \operatorname{tg} 60°17'$	10,24353 +
$lg \mid \cos B \mid$	9,08361
Tafelwaarde	83°02'
$\angle B$	96°58'

$lg \sec 3°57',5$	10,00104
$lg \sin 60°17'$	9,93876 +
$lg \sin A$	9,93980
$\angle A$	60°31',5

Opmerking. Bij deze gegevens is de driehoek niet altijd bestaanbaar. De schuine zijde c moet liggen tussen de rechthoekzijde a en zijn supplement $180° - a$. Is dit niet het geval, dan is de driehoek onbestaanbaar. Men bemerkt dit in de berekening doordat men voor $lg \mid \cos b \mid$ een waarde groter dan 10 vindt.

3e geval: Gegeven: de rechthoekzijde $b = 154°36'$ en de aanliggende scheve hoek $A = 167°11',5$.

Gevraagd: c, a en B.

Conclusies: rechthoekzijde b stomp $\rightarrow \angle B$ stomp; scheve hoek A stomp $\rightarrow a$ stomp } (§ 64, opm. II).
Nu a en b stomp zijn moet c scherp zijn (§ 64, opm. III).

Formules:

$\cos A = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} c \rightarrow \operatorname{cotg} c = \cos A \operatorname{cotg} c$
$\operatorname{cotg} c = \cos 167°11',5 \operatorname{cotg} 154°36'$
$\operatorname{cotg} c = -\sin 77°11',5 \times -\operatorname{tg} 64°36'$

$\sin b = \operatorname{cotg} A \operatorname{tg} a \rightarrow \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \sin b$
$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 167°11',5 \sin 154°36' = -\operatorname{cotg} 77°11',5 \cos 64°36'$

$\cos B = \sin A \cos b = \sin 167°11',5 \cos 154°36'$
$\cos B = \cos 77°11',5 \times -\sin 64°36'$

Berekeningen:

$lg \sin 77°11',5$	9,98906—10
$lg \operatorname{tg} 64°36'$	10,32346—10 +
$lg \operatorname{cotg} c$	10,31252—10
c	25°58'

$lg \operatorname{cotg} 77°11',5$	9,35669—10
$lg \cos 64°36'$	9,63239—10 +
$lg \mid \operatorname{tg} a \mid$	8,98908—10
Tafelwaarde	5°34'
a	174°26'

$lg \cos 77°11',5$	9,34575—10
$lg \sin 64°36'$	9,95585—10 +
$lg \mid \cos B \mid$	9,30160—10
Tafelwaarde	78°27'
$\angle B$	101°33'

4e geval: Gegeven: de schuine zijde $c = 65°53'$ en een scheve hoek $B = 94°37',5$.

Gevraagd: a, b en A.

Conclusies: Hoek B is stomp dus ook b (§ 64, opm. II)
de schuine zijde c is scherp dus B en A zijn gelijksoortig.
Nu B stomp is zal ook A en a stomp zijn (§ 64, opm. III en VI).

F o r m u l e s:

$\cos B = \cot c \,\mathrm{tg}\, a \rightarrow \mathrm{tg}\, a = \cos B \,\mathrm{tg}\, c$
$\mathrm{tg}\, a = \cos 94°37',5 \,\mathrm{tg}\, 65°53' = -\sin 4°37',5 \,\mathrm{tg}\, 65°53'$

$\cos c = \cot A \cot B \rightarrow \cot A = \mathrm{tg}\, B \cos c$
$\cot A = \mathrm{tg}\, 94°37',5 \cos 65°53' = -\cot 4°37',5 \cos 65°53'$

$\sin b = \sin B \sin c = \sin 94°37',5 \sin 65°53'$
$\sin b = \cos 4°37',5 \sin 65°53'$

B e r e k e n i n g e n:

lg sin 4°37',5	8,90652—10
lg tg 65°53'	10,34904—10
lg | tg a |	9,25556—10
Tafelwaarde	10°12',5
a	169°47',5

lg cotg 4°37',5	11,09207—10
lg cos 65°53'	9,61129—10
lg | cotg A |	10,70336—10
Tafelwaarde	11°12'
∠A	168°48'

lg cos 4°37',5	9,99858—10
lg sin 65°53'	9,96034—10
lg sin b	9,95892—10
b	114°32' (zie conclusies)

5e geval: G e g e v e n: de twee scheve hoeken $A = 52°26',5$ en $B = 124°07'$.

G e v r a a g d: c, a en b.

C o n c l u s i e s: hoek A scherp dus ook zijde a, hoek B stomp dus ook zijde b (§ 64, opm. II)

A en B zijn ongelijksoortig dus de schuine zijde c is stomp (§ 64, opm. VI).

F o r m u l e s:

$\cos c = \cot A \cot B = \cot 52°26',5 \cot 124°07'$
$\cos c = \cot 52°26',5 \times -\mathrm{tg}\, 34°07'$

$\cos A = \cos a \sin B \rightarrow \cos a = \cos A \,\mathrm{cosec}\, B$
$\cos a = \cos 52°26',5 \,\mathrm{cosec}\, 124°07' = \cos 52°26',5 \sec 34°07'$

$\cos B = \sin A \cos b \rightarrow \cos b = \mathrm{cosec}\, A \cos B$
$\cos b = \mathrm{cosec}\, 52°26',5 \cos 124°07' = \mathrm{cosec}\, 52°26',5 \times -\sin 34°07'$

B e r e k e n i n g e n:

lg cotg 52°26',5	9,88590—10
lg tg 34°07'	9,83089—10
lg | cos c |	9,71679—10
Tafelwaarde	58°36',5
c	121°23',5

lg cos 52°26',5	9,78502—10
lg sec 34°07'	10,08202—10
lg cos a	9,86704—10
a	42°35'

lg cosec 52°26',5	10,10087—10
lg sin 34°07'	9,74887—10
lg | cos b |	9,84974—10
Tafelwaarde	44°58'
b	135°02'

O p m e r k i n g: De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarden van § 64, opmerking V.

6e geval: G e g e v e n: een rechthoekzijde $b = 120°10'$ en de overstaande hoek $B = 102°18'$ (twijfelachtig geval).

G e v r a a g d: c, a en A.

C o n c l u s i e s: Een hoek en overstaande rechthoekzijde zijn gelijksoortig, dus de schuine zijde c kan scherp zijn → a en A ook stomp of stomp zijn → a en A zijn scherp (§ 64, opm. III en VI)

F o r m u l e s:

$\sin a = \cot B \,\mathrm{tg}\, b = \cot 102°18' \,\mathrm{tg}\, 120°10'$
$\sin a = -\mathrm{tg}\, 12°18' \times -\cot 30°10'$

$\sin b = \sin c \sin B \rightarrow \sin c = \mathrm{cosec}\, B \sin b$
$\sin c = \mathrm{cosec}\, 102°18' \sin 120°10' =$
$\sin c = \sec 12°18' \sec 30°10'$

$\cos B = \sin A \cos b \rightarrow \sin A = \cos B \sec b$
$\sin A = \cos 102°18' \sec 120°10' =$
$\sin A = -\sin 12°18' \times -\mathrm{cosec}\, 30°10$

Berekeningen:

lg tg 12°18′	9,33822—10
lg cotg 30°10′	10,23565—10
lg sin a	9,57387—10
a_1	22°01′
a_2	157°59′

lg sec 12°18′	10,01007—10
lg sin 30°10′	9,93680—10
lg sin c	9,94687—10
c_1	117°46′
c_2	62°14′

lg sin 12°18′	9,32815—10
lg cosec 30°10′	10,29885—10
lg sin A	9,62700—10
A_1	25°04′
A_2	154°56′

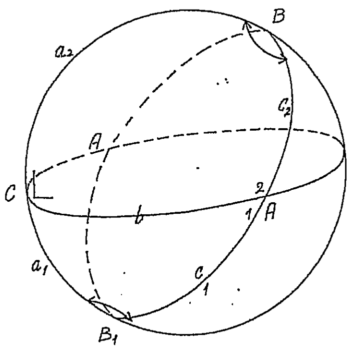

Fig. 69.

In figuur 69 zijn beide boldriehoeken AB_1C met de stompe schuine zijde B_1A en ABC met de scherpe schuine zijde getekend.

§ 74. **Scheefhoekige boldriehoeken**

1e *geval.* Gegeven: twee zijden a en b met de ingesloten hoek C.

Gevraagd: alleen de derde zijde c.

Formule: $\cos c = \cos (a - b) - \sin a \sin b \,\mathrm{sinv}\, C$.

Voorbeeld. $a = 18°12'$, $b = 124°17'$ en $\angle C = 111°19'$.

a	18°12′
b	124°17′
$b - a$	106° 5′
$\cos (b - a)$	—0,27704
prod.	0,35188
$\cos c$	—0,62892

log sin a	9,49462—10
log sin b	9,91712—10
log sinv C	0,13466
log prod.	0,54640—1
prod.	0,35188
c	128°58′,3

Gegeven: $a = 46°8'$, $b = 63°58'$ en $\angle C = 35°31'$.

Gevraagd: alle elementen.

Formules: $tg\, \tfrac{1}{2} (B + A) = \dfrac{\cos \frac{1}{2} (b - a)}{\cos \frac{1}{2} (b + a)} \,\mathrm{cotg}\, \tfrac{1}{2} C$

$$tg\, \tfrac{1}{2} (B - A) = \dfrac{\sin \frac{1}{2} (b - a)}{\sin \frac{1}{2} (b + a)} \,\mathrm{cotg}\, \tfrac{1}{2} C$$

$$tg\, \tfrac{1}{2} c = \dfrac{\cos \frac{1}{2} (B + A)}{\cos \frac{1}{2} (B - A)} \, tg\, \tfrac{1}{2} (b + a).$$

b	63°58′
a	46°08′
$b + a$	110°06′
$b - a$	17°50′
$\frac{1}{2} (b + a)$	55°03′
$\frac{1}{2} (b - a)$	8°55′
$\frac{1}{2} C$	17°45′,5

$\log \cos \frac{1}{2} (B + A)$	9,26131—10
$\log \sec \frac{1}{2} (B - A)$	10,06494—10
$\log tg\, \frac{1}{2} (b + a)$	10,15558—10
$\log tg\, \frac{1}{2} c$	9,48183—10
$\frac{1}{2} c$	16°52′,5
c	33°45′

$\log \cos \frac{1}{2} (b - a)$	9,99472—10
$\log \sec \frac{1}{2} (b + a)$	10,24195—10
$\log \mathrm{cotg}\, \frac{1}{2} C$	10,49449—10
$\log tg\, \frac{1}{2} (B + A)$	10,73116—10
$\frac{1}{2} (B + A)$	79°29′
$\log \sin \frac{1}{2} (b - a)$	9,19033—10
$\log \mathrm{cosec}\, \frac{1}{2} (b + a)$	10,08637—10
$\log \mathrm{cotg}\, \frac{1}{2} C$	10,49449—10
$\log tg\, \frac{1}{2} (B - A)$	9,77119—10
$\frac{1}{2} (B - A)$	30°33′,5
$\frac{1}{2} (B + A)$	79°29′
B	110°02′,5
A	48°55′,5

$\triangle ABC$

$a = 46°08'$	$A = 48°55',5$
$b = 63°58'$	$B = 110°02',5$
$c = 33°45'$	$C = 35°31'$

Opmerking. Men had, na A en B bepaald te hebben, zijde c ook met de sinusregel kunnen vinden, doch verkeerde dan in 't onzekere of c scherp dan wel stomp moest zijn.

§ 75.

2e *geval.* Gegeven: twee hoeken B en C met de tussenliggende zijde a.

Gevraagd: alleen de derde hoek A.

Formule: $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$.

V o o r b e e l d. $B = 148°10'$, $C = 12°9',5$ en $a = 52°14',5$.

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$= -\cos 148°10' \cos 12°09',5 + \sin 148°10' \sin 12°09',5 \cos 52°14',5$$
$$= \cos 31°50' \cos 12°09',5 + \sin 31°50' \sin 12°09',5 \cos 52°14',5$$

$\log \cos 31°50'$	9,92921—10
$\log \cos 12°09',5$	9,99015—10
$\log t_1$	9,91936—10
t_1	0,83054
t_2	0,06802
$\cos A$	0,89856
A	26°02'

$\log \sin 31°50'$	9,72218—10
$\log \sin 12°09',5$	9,32349—10
$\log \cos 52°14',5$	9,78699—10
$\log t_2$	8,83266—10

G e g e v e n: B, C en a.
G e v r a a g d: alle elementen.
F o r m u l e s:

$$tg \tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)}\, tg \tfrac{1}{2} a$$

$$tg \tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}(B+C)}\, tg \tfrac{1}{2} a$$

$$cotg \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\sin \frac{1}{2}(b-c)}\, tg \tfrac{1}{2}(B-C).$$

3e *geval.* G e g e v e n: de drie zijden a, b en c.
G e v r a a g d: de drie hoeken.
F o r m u l e s:

$$tg \tfrac{1}{2} A = \frac{1}{\sin (s-a)} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}.$$

V o o r b e e l d. $a = 44°58'$ $b = 78°14',5$ en $c = 85°48'$.

a	44°58'
b	78°14',5
c	85°48'
$2s$	209°00',5
s	104°30',5

s	104°30',5
c	85°48'
$s-c$	18°42',5

s	104°30',5
a	44°58'
$s-a$	59°32',5

s	104°30',5
b	78°14',5
$s-b$	26°16'

$\log \sin (s-a)$	9,93551—10
$\log \sin (s-b)$	9,64596—10
$\log \sin (s-c)$	9,50617—10
$\log cosec\, s$	10,01407—10
$2 \log w$	9,10171—10
$\log w$	9,55086—10
$\log \sin (s-a)$	9,93551
$\log tg \frac{1}{2} A$	9,61535—10
$\frac{1}{2} A$	22°25'
A	44°50'

$\log w$	9,55086—10
$\log \sin (s-b)$	9,64596—10
$\log tg \frac{1}{2} B$	9,90490—10
$\frac{1}{2} B$	38°46',5
B	77°33'

$\log w$	9,55086—10
$\log \sin (s-c)$	9,50617—10
$\log tg \frac{1}{2} C$	10,04469—10
$\frac{1}{2} C$	47°56',5
C	95°53'

△ ABC	
$a = 44°58'$	$A = 44°50'$
$b = 78°14',5$	$B = 77°33'$
$c = 85°48'$	$C = 95°53'$

O p m e r k i n g. De drie zijden moeten voldoen aan de voorwaarden van stelling 15 en 16 van § 61.

4e *geval.* G e g e v e n: de drie hoeken A, B en C.
G e v r a a g d: de drie zijden.
F o r m u l e s:

$$tg \tfrac{1}{2} a = \cos (S-A) \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}$$

O p m e r k i n g. De hoeken moeten voldoen aan de voorwaarden van stelling 12, 13 en 14 van § 60.

§ 76.

5e *geval.* G e g e v e n: de zijden $a = 52°28'$ en $b = 64°07',5$ en een hoek tegenover een van die zijden, $A = 40°53'$ (twijfelachtig geval).

G e v r a a g d: C, B en c.

C o n c l u s i e s: Met behulp van de sinusregel vindt men voor hoek B twee supplementoire waarden. Of beide waarden al dan niet voldoen kan op 2 manieren worden gevonden:

1e manier: met het berekenen van de hoogtelijn uit C.

In fig 70 zijn twee driehoeken ABC getekend omdat $h_c < a < b$.

h_c berekent men met de formule:

$$\sin h_c = \sin b \sin A$$
$$\sin h_c = \sin 64°07',5 \sin 40°53'$$

en AD met

$$tg\, AD = tg\, 64°07',5 \cos 40°53'$$

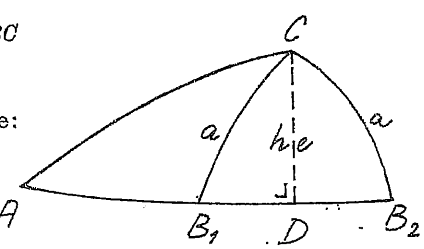

Fig. 70.

$\log \sin 64°07',5$	9,95412—10	
$\log \sin 40°53'$	9,81592—10	+
$\log \sin hc$	9,77004—10	
hc	36°04',5	

$\log tg\ 64°07',5$	10,31423—10	
$\log \cos 40°53'$	9,87855—10	+
$\log tg\ AD$	10,19278—10	
AD	57°19'	

$\cos b = \cot g\ A \cot g\ ACD \rightarrow \cot g\ ACD = \cos b\ tg\ A$
$\cot g\ ACD = \cos 64°07',5\ tg\ 40°53'$

$\log \cos 64°07',5$	9,63989—10	
$\log tg\ 40°53'$	9,93738—10	+
$\log \cot g\ ACD$	9,57727—10	
$\angle ACD$	69°18'	

Uit de waarde van a, en hc en b blijkt dat hier twee oplossingen mogelijk zijn. In het algemeen vindt men:

$a < hc$	geen oplossing
$a = hc$	een oplossing ($B = D$)
$b > a > hc$	twee oplossingen
$a > b > hc$	een oplossing

B e r e k e n i n g: 1e manier: In de driehoek BDC is

$\sin hc = \sin B_2 \sin a \rightarrow \sin B_2 = \sin hc\ \mathrm{cosec}\ a$
$\sin B_2 = \sin 36°04',5\ \mathrm{cosec}\ 52°28'$

$\cos a = \cos hc \cos BD \rightarrow \cos BD = \sec hc \cos a$
$\cos BD = \sec 36°04',5 \cos 52°28'$

$\cos C = tg\ hc \cot g\ a = tg\ 36°04',5 \cot g\ 52°28'$

$\log \sin 36°04',5$	9,77000—10	
$\log \mathrm{cosec}\ 52°28'$	10,10073—10	+
$\log \sin B_2$	9,87073—10	
$\angle B_2$	47°57'	
$\angle B_1$	132°03'	

$\log \sec 36°04',5$	10,09246—10	
$\log \cos 52°28'$	9,78478—10	+
$\log \cos BD$	9,87724—10	
BD	41°05'	
AD	57°19'	
$AB_2 = c_2$	98°24' (+)	
$AB_1 = c_1$	16°14' (—)	

$\log tg\ 36°04',5$	9,86246—10	
$\log \cot g\ 52°28'$	9,88550—10	+
$\log \cos C$	9,74796—10	
C	55°58'	
$\angle ACD$	69°18'	
$\angle C_2$	125°16' (+)	
$\angle C_1$	13°20' (—)	

Oplossingen:

$\triangle AB_1c$		$\triangle AB_2c$	
C_1	13°20'	C_2	125°16'
B_1	132°03'	B_2	47°57'
c_1	16°14'	c_2	98°24'

2e manier: met de tangesregel.

$$\frac{tg\ \frac{1}{2}(A+B)}{tg\ \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{tg\ \frac{1}{2}(a+b)}{tg\ \frac{1}{2}(a-b)}$$

Zowel $\frac{1}{2}(A-B)$ als $\frac{1}{2}(a-b)$ zijn kleiner dan 90°, zodat beide noemers positief zijn. Dan moeten beide tellers hetzelfde teken hebben, dus

of $\frac{1}{2}(A+B)$ en $\frac{1}{2}(a+b) < 90° \rightarrow A+B$ en $a+b < 180°$
of $\frac{1}{2}(A+B)$ en $\frac{1}{2}(a+b) > 90° \rightarrow A+B$ en $a+b > 180°$.

In de gegeven opgave is $a+b = 105°00',5$ dus $< 180°$.

Nu moet ook $A+B < 180° \rightarrow B < 180° - 40°53'$
of $B < 139°07'$.

Vindt men met de sinusregel voor B de waarden 60° en 120° dan voldoen beiden. Zijn deze 30° en 150° dan voldoet alleen 30°.

B e r e k e n i n g. 2e manier. Met de sinusregel vindt men

$$\sin B = \frac{\sin A}{\sin a} \sin b = \sin A \sin b\ \mathrm{cosec}\ a.$$

Uit de analogieën van Neper volgt:

$$\cot g\ \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(b+a)}{\cos \frac{1}{2}(b-a)}\ tg\ \tfrac{1}{2}(A+B) \text{ en}$$

$$tg\ \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+A)}{\cos \frac{1}{2}(B-A)}\ tg\ \tfrac{1}{2}(a+b)$$

$\log \sin 40°53'$	9,81592—10
$\log \sin 64°07',5$	9,95412—10
$\log \mathrm{cosec}\ 52°28'$	10,10073—10
$\log \sin B$	9,87077—10
B_1	47°57',5
B_2	132°02',5 kleiner dan 139°07' dus 2 oplossingen

B_1	$47°57',5$
A	$40°53'$ ±
$\frac{1}{2}(B_1 + A)$	$44°25'$
$\frac{1}{2}(B_1 - A)$	$3°32'$
$log\ cos\ \frac{1}{2}(b + a)$	9,72055—10
$log\ sec\ \frac{1}{2}(b - a)$	10,00225—10
$log\ tg\ \frac{1}{2}(B_1 + A)$	9,99116—10 +
$log\ cotg\ \frac{1}{2}C_1$	9,71396—10
$\frac{1}{2}C_1$	$62°38'$
$\angle C_1$	$125°16'$

B_2	$132°02',5$
A	$40°53'$ ±
$\frac{1}{2}(B_2 + A)$	$86°28'$
$\frac{1}{2}(B_2 - A)$	$45°35'$
$log\ cos\ (b + a)$	9,72055—10
$log\ sec\ (b - a)$	10,00225—10
$log\ tg\ \frac{1}{2}(B_2 + a)$	11,20939—10 +
$log\ cotg\ \frac{1}{2}C_2$	10,93219—10
$\frac{1}{2}C_2$	$6°40'$
$\angle C_2$	$13°20'$

b	$64°07',5$
a	$52°28'$ ±
$\frac{1}{2}(b + a)$	$58°18'$
$\frac{1}{2}(b - a)$	$5°50'$
$log\ cos\ \frac{1}{2}(B_1 + A)$	9,85386—10
$log\ sec\ \frac{1}{2}(B_1 - A)$	10,00083—10
$log\ tg\ \frac{1}{2}(a + b)$	10,20928—10 +
$log\ tg\ \frac{1}{2}c_1$	10,06397—10
$\frac{1}{2}c_1$	$49°12',5$
c_1	$98°25'$

$log\ cos\ \frac{1}{2}(B_2 + A)$	8,78979—10
$log\ sec\ \frac{1}{2}(B_2 - A)$	10,15498—10
$log\ tg\ \frac{1}{2}(a + b)$	10,20928—10 +
$log\ tg\ \frac{1}{2}c_2$	9,15405—10
$\frac{1}{2}c_2$	$8°07'$
c_2	$16°14'$

§ 77. De oppervlakte van de boldriehoek

G e g e v e n: $a = 128°10'$, $b = 74°18'$ en $c = 54°54'$, terwijl de bolstraal 487,3 cm bedraagt.

G e v r a a g d: 't oppervlak van die boldriehoek.

O p l o s s i n g: Met behulp van de formules voor $tg\ \frac{1}{2}A$, $tg\ \frac{1}{2}B$ en $tg\ \frac{1}{2}C$ vinden we:

$A = 170°2',5$, $B = 12°13',5$ en $C = 10°20',5$.
$E = A + B + C - 180° = 12°36',5 = 756',5$.

Opp. boldrieh. $\frac{756,5}{43200} \times 4 \times \pi \times 487,3^2$.

$$\begin{aligned} log\ 756,5 &= 2,87881 \\ log\ 4 &= 0,60206 \\ log\ \pi &= 0,49715 \\ 2\ log\ 487,3 &= 5,37560 \\ \hline &= 9,35362 \\ log\ 43200 &= 4,63548 \\ log\ \text{opp.} &= 4,71814 \\ \text{Opp.} &= 52256\ \text{cm}^2. \end{aligned}$$

§ 78. Vraagstukken

Indien in het volgende een driehoek met de gegeven elementen onbestaanbaar is, moet worden nagegaan, *waarom* dit het geval is.

1. Ga eerst na of de driehoek bestaanbaar is en zo ja bereken dan de overige elementen als $\angle C = 90°$.

$c = 60°10'$,	$b = 40°12'$	(1)
$c = 82°49'$,	$a = 108°44'$	(2)
$a = 78°36'$,	$b = 132°26'$	(3)
$a = 95°48'$,	$b = 158°\ 6'$	(4)
$A = 128°46'$,	$b = 54°48'$	(5)
$a = 0°57'$,	$b = 1°42'$	(6)
$b = 76°47'$,	$B = 80°36'$	(7)
$c = 32°\ 7'$,	$b = 31°\ 5'$	(8)
$c = 116°12'$,	$a = 151°38'$	(9)
$b = 57°18'$,	$B = 42°52'$	(10)
$c = 20°14'$,	$B = 25°29'$	(11)
$a = 120°10'$,	$A = 101°48'$	(12)
$b = 0°,59'$,	$A = 88°39'$	(13)
$c = 0°59'$,	$b = 0°49'$	(14)
$b = 105°39'$,	$B = 136°14'$	(15)
$a = 143°31'$,	$A = 118°18'$	(16)
$A = 52°26'$,	$B = 124°\ 7'$	(17)
$A = 167°11'$,	$b = 154°35'$	(18)
$c = 65°53'$,	$B = 94°37'$	(19)
$b = 62°56'$,	$B = 115°\ 9'$	(20)

2. *a*. Van een hemellichaam in de eerste vertikaal is gegeven:

b	d	P	h	Vul de ontbrekende waarden in
—	13°17′ N	54°51′	—	(1)
—	35°16′ Z	47°49′	—	(2)
22°11′ N	—	—	43°59′	(3)
03°47′ Z	—	—	26°13′	(4)
52°04′ N	—	26°19′	—	(5)
48°23′ Z	—	56°13′	—	(6)
11°22′ N	—	—	41°26′	(7)
29°13′ Z	—	—	23°44′	(8)
—	4°58′ N	—	11°37′	(9)
—	20°08′ Z	—	21°03′	(10)
—	16°21′	44°45′	—	(11)
—	8°52′	59°13′	—	(12)

b.

b	d	T	h	Vul de ontbrekende

waarden in als het hemellichaam in de zesuurcirkel staat.

3. Bepaal het maximale azimut en de plaatselijke ware tijd als:

$b = 10°17',5$ N ⊙ decl. $= 18°49',5$N (1)
$b = 17°11'$ Z ⊙ decl. $= 23°04'$ Z (2)
$b = 43°45'$ N $*$ decl. $= 51°57'$ N (3)
$b = 38°19',5$ Z $*$ decl. $= 62°41',5$ Z (4)
$b = 51°49',5$ N $*$ decl. $= 89°06'$ N (5)

4. Bereken alleen de derde zijde.

$a = 62°48'$, $b = 76°10'$, $C = 52°18'$ . . (1)
$b = 64°11'$, $c = 104°38'$, $A = 110°48'$ . . (2)
$b = 64°26'$, $c = 43°\ 8'$, $A = 93°12'$ . . (3)

5. Bereken alleen de derde hoek.

$A = 94°47'$, $B = 75°14'$, $c = 33°36'$ . . (1)
$B = 139°28'$, $C = 102°13'$, $a = 139°59'$ . . (2)
$A = 45°19'$, $C = 41°46'$, $b = 148°46'$ . . (3)

6. Bereken de hoeken.

$a = 118°10'$, $b = 71°18'$, $c = 87°48'$ . . (1)
$a = 128°40'$, $b = 123°47'$, $c = 148°18'$ . . (2)
$a = 67°39'$, $b = 138°38'$, $c = 119°46'$ . . (3)

7. Bereken de drie zijden.

$A = 120°16'$, $B = 60°12'$, $C = 80°12'$ . . (1)
$A = 68°18'$, $B = 90°14'$, $C = 71°38'$ . . (2)

8. Bereken de onbekende elementen.

$a = 156°10'$, $c = 47°57'$, $B = 113°\ 9'$ . . (1)
$A = 90°52'$, $B = 137°37'$, $c = 74°12'$ . . (2)
$B = 102°12'$, $C = 161°11'$, $a = 57°34'$ . . (3)
$a = 93°43'$, $c = 144°52'$, $B = 131°\ 1'$ . . (4)
$B = 10°19'$, $C = 173°53'$, $a = 100°18'$ . . (5)
$a = 118°11'$, $b = 54°10'$, $C = 36°18'$ . . (6)
$b = 124°\ 9'$, $c = 58°17'$, $A = 154°54'$ . . (7)
$B = 68°12'$, $C = 128°18'$, $a = 117°18'$ . . (8)
$a = 13°11'$, $b = 120°10'$, $C = 68°18'$ . . (9)
$A = 178°11'$, $C = 12°13'$, $b = 121°10'$ . . (10)

9. Bereken de onbekende elementen.

$a = 126°10'$, $b = 87°39'$, $A = 144°12'$ . . (1)
$B = 12°14'$, $C = 17°54'$, $b = 10°13'$ . . (2)
$b = 54°17'$, $c = 68°32'$, $B = 38°52'$ . . (3)
$A = 124°18'$, $B = 78°29'$, $a = 136°12'$ . . (4)
$B = 76°16'$, $C = 86°39'$, $b = 44°10'$ . . (5)
$a = 138°11'$, $c = 74°10'$, $A = 144°43'$ . . (6)
$b = 168°10'$, $a = 54°38'$, $B = 172°14'$ . . (7)

10. Van een boldriehoek is $A = 44°49'$, $B = 95°52'$ en $C = 78°14'$. Bereken het oppervlak, als de bolstraal 17,34 cm is.

11. Van een boldriehoek is $a = 128°9'$, $b = 74°17'$ en $c = 54°43'$. Bereken het oppervlak als de bolstraal 48,73 cm is.

12. Van een boldriehoek zijn de zijden $a = 68°10'$, $b = 57°14'$ en $c = 110°32'$. Bereken het oppervlak als de bolstraal 4,21 cm bedraagt.

13. De zijden van een boldriehoek zijn $a = 13$, $b = 14$ en $c = 15$ cm. De straal van de bol is 19 cm. Hoeveel verschilt het oppervlak van deze boldriehoek met dat van de platte driehoek met dezelfde zijden?

14. Als in een boldriehoek $\angle C = 90°$ is, bewijs dan:

$$tg\ \tfrac{1}{2}\, c = \sqrt{-\frac{\cos\,(A+B)}{\cos\,(A-B)}}.$$

15. Van een boldriehoek is gegeven: $\angle A = \angle B$.

Bewijs:

$$\cos c + tg\ a \sin c \cos A = 1$$
$$\cos c = \cos^2 a + \sin^2 a \cos C$$
$$1 + \cos C = tg\ A \sin C \cos a.$$

16. Als $\angle C = \angle A + \angle B$, bewijs dan, dat in de boldriehoek ABC

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B.$$

17. Als van een boldriehoek $\angle C = 90°$, h de sferische hoogtelijn op AB is en p en q de stukken zijn, waarin die hoogtelijn AB verdeelt, bewijs dan:

$$\sin^2 h = \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q.$$

§ 79. **De hulpstellingen**

Laat men uit de top van een boldriehoek de sferische loodlijn neer, dan noemt men de bogen van het voetpunt van de loodlijn tot de basishoeken, *basisdelen* en de hoeken, welke de loodlijn met de opstaande zijden maakt, *tophoekdelen*.

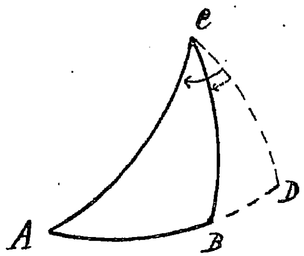

Fig. 71.

Zo zijn in fig. 71 DA en DB basisdelen en $\angle DCB$ en $\angle DCA$ tophoekdelen.

Verder spreken we af, een basisdeel of een tophoekdeel negatief te noemen, als het *geheel buiten* de driehoek ligt. DB is negatief en $\angle DCB$ is negatief.

Tussen deze basis- en tophoekdelen en de elementen van de driehoek bestaan enige betrekkingen, welke men *hulpstellingen* noemt n.l.:

1. *De cosinussen van de basisdelen zijn evenredig met de cosinussen van de aanliggende opstaande zijden.*

2. *De cotangenten van de basishoeken zijn evenredig met de sinussen van de basisdelen.*

3. *De cosinussen van de basishoeken zijn evenredig met de sinussen van de tophoekdelen.*

4. *De cotangenten van de opstaande zijden zijn evenredig met de cosinussen van de tophoekdelen.*

Het bewijs van deze hulpstellingen wordt aan de lezer overgelaten.

Het is ook niet nodig deze vier stellingen te memoriseren.

De hulpstellingen worden gebruikt, wanneer van een driehoek niet alle elementen, doch een of twee worden gevraagd. Men kieze de loodlijn zo, dat hij *tegenover* een gegeven hoek valt, terwijl het gevraagde element niet als tophoek- of basisdeel optreedt.

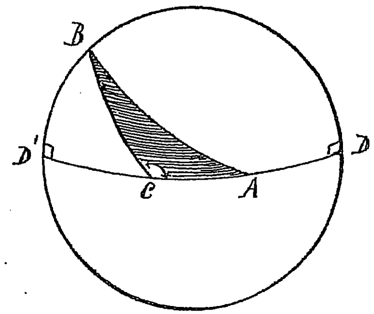

Fig. 72.

Voorbeeld.

Zij van $\triangle ABC$ gegeven:

$$a = 64°12',\ b = 104°08',5$$
$$\text{en } \angle C = 110°48'.$$

We laten uit B een loodlijn op AC neer; van de twee loodlijnen, die men op AC kan neerlaten kiezen we BD, omdat deze *tegenover* hoek C ligt. (BD' ligt over het supplement van C). Daarna berekenen we het basisdeel DC.

$$\cos C = \operatorname{cotg} a \times \operatorname{tg} CD$$
$$\operatorname{tg} CD = \cos C \times \operatorname{tg} a = \cos 110°48' \times \operatorname{tg} 64°12'$$
$$= -\cos 69°12' \times \operatorname{tg} 64°12'$$

$\log \cos 69°12'$	9,55036—10
$\log \operatorname{tg} 64°12'$	9,31568—10
$\log \operatorname{tg} \lvert CD \rvert$	9,86604—10
Tafelwaarde	36°18'
CD	143°42' $\rightarrow AD = 39°33',5$

$\operatorname{tg} DC$ was negatief, daarom namen we de stompe waarde. Omdat $DC > AC$ blijkt te zijn, moet het punt D in fig. 72 op 't verlengde van CA komen.

Verder hebben we voor zijde c

$$\cos BA : \cos BC = \cos DA : \cos DC$$
$$\cos BA = \cos BC \times \cos DA \times \sec DC$$
$$= \cos 64°12' \times \cos 39°33',5 \times -\sec 36°18'$$
$$\cos BA = -\cos 64°12' \times \cos 39°33',5 \times \sec 36°18'$$

$\log \cos BC$	9,63872—10
$\log \cos DA$	9,88704—10
$\log \sec DC$	10,09370—10
$\log \lvert \cos BA \rvert$	9,61946—10
Tafelwaarde	65°23',5
BA	114°36',5

$$\operatorname{cotg} A : \operatorname{cotg} C = \sin DA : \sin DC$$
$$\operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} C \times \sin DA \times \operatorname{cosec} DC$$
$$= \operatorname{cotg} 110°48' \times \sin -39°33',5 \times \operatorname{cosec} 143°42'$$
$$\operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} 69°12' \times \sin 39°33',5 \times \operatorname{cosec} 36°18'$$

$\log \operatorname{cotg} 69°12'$	9,57963—10
$\log \sin 39°33',5$	9,80405—10
$\log \operatorname{cosec} 36°18'$	10,22767—10
$\log \operatorname{cotg} A$	9,61135—10
A	67°46',5

(Zie nog eens § 74, 1e geval)

§ 80. Formules voor de merkwaardige lijnen

I. *De hoogtelijn.* $\sin h_a = \frac{2}{\sin a} \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}$.

B e w ij s.

Zij AD in $\triangle ABC$ de hoogtelijn op a, dan is in $\triangle ADB$

$$\sin h_a = \sin c \sin B$$
$$= 2 \sin c \sin \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} B$$
$$= 2 \sin c \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin c}} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}}$$
$$= \frac{2}{\sin a} \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}.$$

II. *De mediaan,* $\cos z_c = \dfrac{\cos a + \cos b}{2 \cos \frac{1}{2} c} = \dfrac{\cos \frac{1}{2} (a + b \cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c}$.

B e w ij s.

Zij $CD = z_c$ de mediaan in $\triangle ABC$, dan is in $\triangle ACD$:

$$\cos b = \cos \tfrac{1}{2} c \cos z_c + \sin \tfrac{1}{2} c \sin z_c \cos ADC \text{ en in } \triangle BCD:$$
$$\cos a = \cos \tfrac{1}{2} c \cos z_c + \sin \tfrac{1}{2} c \sin z_c \cos (180° - ADC).$$

Opgeteld geeft dit:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \tfrac{1}{2} c \cos z_c$$
$$\cos z_c = \frac{\cos a + \cos b}{2 \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a+b) \cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c}$$

III. *De bissectrice.* $\operatorname{tg} d_c = \dfrac{2 \sin a \sin b}{\sin (a+b)} \cos \tfrac{1}{2} C$

$$= \frac{2}{\sin (a+b)} \sqrt{\sin a \sin b \sin s \sin (s-c)}.$$

B e w ij s.

Zij CE de bissectrice van $\angle C$ in $\triangle ABC$, dan is in $\triangle ACE$:

$$\operatorname{cotg} \angle AEC \sin \tfrac{1}{2} C = \operatorname{cotg} b \sin d_c - \cos \tfrac{1}{2} C \cos d_c \text{ en in } \triangle CEB:$$
$$\operatorname{cotg} (180° - \angle AEC) \sin \tfrac{1}{2} C = \operatorname{cotg} a \sin d_c - \cos \tfrac{1}{2} C \cos d_c. \text{ Opgeteld:}$$

$$0 = \sin d_c (\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b) - 2 \cos \tfrac{1}{2} C \cos d_c$$
$$0 = \operatorname{tg} d \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} - 2 \cos \tfrac{1}{2} C.$$
$$\operatorname{tg} d_c = \frac{2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$= \frac{2 \sin a \sin b}{\sin (a+b)} \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$= \frac{2}{\sin (a+b)} \sqrt{\sin a \sin b \sin s \sin (s-c)}.$$

§ 81. Het varen langs de grootcirkel

Wenst men langs de kortste weg van een punt A naar een punt B te stomen, dan moet men de grootcirkel over die twee punten volgen. Verbindt men de punten A en B met de naastbijliggende pool van A, dan ontstaat een boldriehoek, waarvan men twee zijden met de ingesloten hoek kent. Wordt alleen de afstand langs de grootcirkel gevraagd, dan is deze met de eerste cosinusregel te vinden. Wenst men daarenboven de hoeken van afvaart en aankomst te weten, dan past men de analogieën van Neper toe.

Duidt men steeds de afgevaren plaats met A aan, en verbindt men altijd A met de naastbijliggende pool, dan zijn de koersen van afvaart en aankomst gelijknamig met die pool en de veranderde lengte. A stelt de koers van afvaart voor, en het *supplement van* B de koers bij *aankomst*.

V o o r b e e l d. Gevraagd: afstand en koersen van afvaart en aankomst langs de grootcirkel van Nagasaki (A) naar San-Francisco (B).

Nagasaki	A	32°43′ N.	129°49′ O.
San-Francisco	B	37°48′ N.	122°20′ W.

$BP = a$	52°12′
$AP = b$	57°17′
$\frac{1}{2}(b+a)$	54°44′,5
$\frac{1}{2}(b-a)$	02°32′,5

$\triangle L = 252°09'$ W.
$= 107°51'$ O $= \angle P$
$\frac{1}{2} P = 53°55',5$

$\log \cos \frac{1}{2}(b-a)$	9,99957—10
$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} P$	9,86246—10
$\log \sec \frac{1}{2}(b+a)$	10,23863—10 +
$\log tg \frac{1}{2}(B+A)$	10,10066—10
$\frac{1}{2}(B+A)$	51°35′
$\frac{1}{2}(B-A)$	02°16′
A	49°19′
B	53°51′
supplement B	126°09′

$\log \sin \frac{1}{2}(b-a)$	8,64685—10
$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} P$	9,86246—10
$\log \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(b+a)$	10,08801—10
$\log tg \frac{1}{2}(B-A)$	8,59732—10
$\frac{1}{2}(B-A)$	02°16′
$\log \cos \frac{1}{2}(B+A)$	9,79335—10
$\log tg \frac{1}{2}(b+a)$	10,15061—10
$\log \sec \frac{1}{2}(b-a)$	10,00043—10
$\log tg \frac{1}{2}$ a.	9,94439—10
$\frac{1}{2}$ a.	41°20′,5
a.	82°41′
a.	4961 mijl

koers van afvaart = N. 49°19′ O.
koers van aankomst = N. 126°09′ O.
afstand langs grootcirkel: 4961 mijl.

Gedurende de reis moet de koers dus 77° toenemen.

Om de hoogste breedte van die boog van de grootcirkel te vinden, laat men uit P een loodlijn PC op die grootcirkel neer.

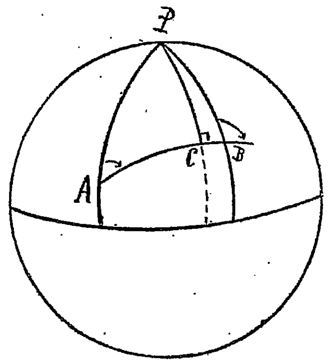

Fig. 73.

Het voetpunt van deze loodlijn noemt men *vertex*. De koers is in dit punt juist 90°. De breedte van dit punt $C = 90° - PC$.

In $\triangle PAC$ is $\sin PC = \sin A \sin b$

$$\cos \text{breedte vertex} = \sin A \sin b.$$

De lengte van C is $\angle CPA$ oostelijker dan de lengte van A. Nu is in dezelfde driehoek

$$\cos b = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} CPA,$$

waaruit volgt:

$$\operatorname{cotg} CPA = \cos b \; tg\, A.$$

Denkt men zich in fig. 76 op de grootcirkel tussen A en C een punt D, en verbindt men dit punt met P, dan ontstaat een rechthoekige boldriehoek PDC, waarvan $\angle PDC$ de koers in D is. We hebben dan:

$$tg\, A = \frac{tg\, PC}{\sin AC} \text{ en } tg\, D = \frac{tg\, PC}{\sin DC}.$$

Omdat $\sin DC$ kleiner is dan $\sin AC$, is $tg\, D > tg\, A$ en bijgevolg $\angle D > \angle A$. Hieruit volgt de belangrijke regel:

neemt men de koersen steeds gelijknamig met de naastbijliggende pool en de veranderde lengte, dan *wordt de koershoek bij het varen langs de grootcirkel steeds groter.*

Men ga dit zelf na voor een punt E tussen C en B.

Noemen we de breedte van de afgevaren plaats b_1 en die van de bekomen plaats b_2, dan is $AP = 90° - b_1$ en $BP = 90° - b_2$.

De cosinusregel:

$\cos AB = \cos PA \cos PB + \sin PA \sin PB \cos P$ wordt dan:

$$\cos a = \sin b_1 \sin b_2 + \cos b_1 \cos b_2 \cos P$$
$$\cos a = \sin b_1 \sin b_2 + \cos b_1 \cos b_2 (1 - \operatorname{sinv} P)$$
$$\cos a = \cos (b_1 - b_2) - \cos b_1 \cos b_2 \operatorname{sinv} P.$$

Wanneer b_2 ongelijkmatig met b_1 is, noemt men b_2 negatief en wordt de formule:

$$\cos a = \cos (b_1 + b_2) - \cos b_1 \cos b_2 \operatorname{sinv} P.$$

De term $\cos b_1 \cos b_2 \operatorname{sinv} P$ kan nooit van teken veranderen. (Ga dit zelf na).

In bovenstaand voorbeeld wordt de afstand nu als volgt gevonden:

b_1	32°43′ N.	129°49′ O.
b_2	37°48′ N.	122°20′ W.
$b_1 - b_2$	5°05′	107°51′ O. = $\angle P$.
$\log \cos b_1$	9,92498—10	
$\log \cos b_2$	9,89771—10	
$\log \operatorname{sinv} P$	10,11612—10 +	
$\log$ prod.	9,93881—10	
prod.	0,86860	

$\cos (b_1 - b_2)$	0,99607
prod.	0,86860
$\cos a$	0,12747
a	82°40′,5
a	4960,5 mijl

Heeft men op deze wijze de afstand bepaald, dan vindt men de breedte vertex met de formule

$$\cos \text{breedte vertex} = \cos b_1 \cos b_2 \sin P \operatorname{cosec} a.$$

Om dit aan te tonen, bewijzen we eerst, dat in elke boldriehoek

$$\sin c \sin h_c = \sin a \sin b \sin C.$$

In fig. 67 hebben we, CD aanduidende als h,

$$\sin h_c = \sin b \sin A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Uit de sinusregel volgt:

$$\sin A = \frac{\sin a \sin C}{\sin c}.$$

Dit voor $\sin A$ in (1) subsituerende, vinden we:

$$\sin c \sin h_c = \sin a \sin b \sin C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Passen we (2) toe op fig. 73 dan geeft dit:

$$\sin AB \sin PC = \sin AP \sin BP \sin P \text{ of:}$$

$$\sin a \cos \text{breedte vertex} = \cos b_1 \cos b_2 \sin P$$

$$\cos \text{breedte vertex} = \cos b_1 \cos b_2 \sin P \operatorname{cosec} a.$$

In ons voorbeeld is:

$\log \cos b_1$	9,92502—10
$\log \cos b_2$	9,89771—10
$\log \sin P$	9,97857—10
$\log \operatorname{cosec} a$	10,00355—10
$\log \cos$ br. vertex	9,80485—10
breedte vertex	50°21′ N.

§ 82. Formules in de parallaktische driehoek

De parallaktische driehoek is een driehoek aan de sfeer, welke tot hoekpunten heeft: het toppunt van de waarnemer (T), het hemellichaam (S) en de bovenliggende pool (P).

De elementen van deze driehoek PTS zijn:

$\angle P =$ uurhoek	$PT = 90° - b$
$\angle T =$ azimuth	$TS = 90° - h$
$\angle S =$ parallaktische hoek	$PS =$ poolsafstand $= 90° - d.$

Ongelijknamige declinatie wordt negatief genomen.

Door de formules van de boldriehoeksmeting op de parallaktische driehoek toe te passen, verkrijgt men de volgende betrekkingen.

Eerste cosinusregel

$$\cos TS = \cos PT \cos PS + \sin PT \sin PS \cos P$$
$$\cos(90°-h) = \cos(90°-b)\cos(90°-d) + \sin(90°-b)\sin(90°-d)\cos P$$
$$\sin h = \sin b \sin d + \cos b \cos d \cos P$$

(*eerste grondformule van de Zeevaartkunde*).

$$\cos PS = \cos TS \cos TP + \sin TS \sin TP \cos T$$
$$\cos(90°-d) = \cos(90°-h)\cos(90°-b) + \sin(90°-h)\sin(90°-b)\cos T$$
$$\sin d = \sin h \sin b + \cos h \cos b \cos T$$

(*tweede grondformule van de Zeevaartkunde*).

$$\cos TP = \cos ST \cos SP + \sin ST \sin SP \cos S$$
$$\cos(90°-b) = \cos(90°-h)\cos(90°-d) + \sin(90°-h)\sin(90°-d)\cos S$$
$$\sin b = \sin h \sin d + \cos h \cos d \cos S$$

(*derde grondformule van de Zeevaartkunde*).

Contangentenregel

$$\operatorname{cotg} T \sin P = \operatorname{cotg} PS \sin PT - \cos P \cos PT$$
$$\operatorname{cotg} T \sin P = \operatorname{cotg}(90°-d)\sin(90°-b) - \cos P \cos(90°-b)$$
$$\operatorname{cotg} T \sin P = \operatorname{tg} d \cos b - \cos P \sin b.$$

Sinusregel

$$\sin T : \sin P = \sin PS : \sin TS$$
$$\sin T : \sin P = \sin(90°-d) : \sin(90°-h)$$
$$\sin T : \sin P = \cos d : \cos h.$$

§ 83. Vervolg goniometrische vergelijkingen

Vraagstukken van de boldriehoeksmeting en plaatsbepaling kunnen dikwijls op gelijke wijze worden opgelost als goniometrische vergelijkingen. Een paar voorbeelden en enige toepassingen mogen dit toelichten.

V o o r b e e l d. Men bevindt zich op 68°30′ W.L. en peilt Cape May 236°. Op welke breedte bevindt men zich? Cape May: 38°56′,5 N en 74°56′ W.

O p l o s s i n g. In de boldriehoek P (pool), T (waarnemer), R (radiostation Cape May) is nu bekend $\angle P = 6°26'$.

$\angle T = 360° - 236° = 124°$ en zijde PR (compl. breedte R).

Noemen we de breedte van den waarnemer β en de breedte van het peilstation d, dan geeft de cotangentenregel:

$$\operatorname{cotg} T \sin P = \operatorname{cotg} PR \sin PT - \cos P \cos PT$$
$$\operatorname{cotg} T \sin P = \operatorname{tg} d \cos \beta - \cos P \sin \beta$$
$$\cos P \sin \beta - \operatorname{tg} d \cos \beta = -\operatorname{cotg} T \sin P$$
$$\sin \beta - \operatorname{tg} d \sec P \cos \beta = -\operatorname{cotg} T \operatorname{tg} P \qquad \text{stel } \operatorname{tg} d \sec P = \operatorname{tg} \phi$$
$$\sin \beta - \operatorname{tg} \phi \cos \beta = -\operatorname{cotg} T \operatorname{tg} P$$
$$\sin \beta \cos \phi - \cos \beta \sin \phi = -\operatorname{cotg} T \operatorname{tg} P \cos \phi$$
$$\sin(\beta - \phi) = -\operatorname{cotg} T \operatorname{tg} P \cos \phi.$$

$\log \operatorname{tg} d =$	9,90746—10	$\log(-\operatorname{cotg} T) =$	9,82899—10
$\log \sec P =$	10,00274—10	$\log \operatorname{tg} P =$	9,05214—10
		$\log \cos \phi =$	9,88978—10
$\log \operatorname{tg} \phi =$	9,91020—10	$\log \sin(\beta-\phi) =$	8,77091—10
$\phi =$	39°07′	en $(\beta-\phi) =$	$176°37' + k \times 360°$
$\beta - \phi =$	$3°23' + k \times 360°$	$\phi =$	39°07′
$\phi =$	39°07′		
$\beta =$	$42°30' + k \times 360°$	en $\beta =$	$215°44' + k \times 360°$

Uit de aard van de opgave volgt dat alleen maar 42°30′ mogelijk is.