高等数学

一、计算题：（每题 8 分，共 56 分）

1．设 $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{1-t^2} \\ y=1+t^2 \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\dfrac{dy}{dt}=2t,\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-t}{\sqrt{t^2}\sqrt{1-t^2}},\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\bigg/\dfrac{dx}{dt}=-2\sqrt{t^2}\sqrt{1-t^2}$。

记 $p=\dfrac{dy}{dx}$。

$\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{1-t^2} \\ p=-2\sqrt{t^2}\sqrt{1-t^2} \end{cases}$。$\dfrac{dp}{dt}=-2\dfrac{t}{\sqrt{t^2}}\sqrt{1-t^2}-2\sqrt{t^2}\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{t^2}\sqrt{1-t^2}}\left(2t^3-t\right)$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dt}\bigg/\dfrac{dx}{dt}=2\left(1-2t^2\right)(t\neq 0)$。

2．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{\left(x+x^2\right)\ln(1+x)\arcsin x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{\left(x+x^2\right)\ln(1+x)\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}\left(e^{x-\sin x}-1\right)}{xxx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{6x^2}=\frac{1}{6}。$$

3．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\displaystyle\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}dx$，求 a 的值。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}\cdot\frac{-2a}{x+a}x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}}\right\}^{\frac{-2a}{x+a}x}=e^{-2a}$，

$\displaystyle\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}dx=-\int_a^{+\infty}xe^{-2x}d\left(-2x\right)=-\int_a^{+\infty}xd\left(e^{-2x}\right)=-\left[xe^{-2x}\right]_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx$

$$=ae^{-2a}-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}=\left(a+\frac{1}{2}\right)e^{-2a}。$$

$a+\dfrac{1}{2}=1$，$a=\dfrac{1}{2}$。

4．计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{ax+b}+d}dx(a\neq 0)$。

解：$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{ax+b}+d}dx\overset{\sqrt{ax+b}=t}{=}\int\frac{1}{t+d}\frac{2}{a}tdt=\frac{2}{a}\int\frac{t+d-d}{t+d}dt=\frac{2}{a}\int\left(1-\frac{d}{t+d}\right)dt$

$$= \frac{2}{a}\left(\sqrt{ax+b} - d\ln\left|\sqrt{ax+b}+d\right|\right)+C \text{ 。}$$

5．求定积分 $\int_0^1 x\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}}dx$ 。

解：

$$\int_0^1 x\left(1- \quad ^4\right)^{\frac{3}{2}} \quad = \frac{1}{2}\int \left(\; - \quad \right)^{-} \quad \overset{x^2=}{=} -\int \left(\; - \quad \right)^{-} \quad \overset{=\mathrm{s}}{=} -\int^{\frac{\pi}{2}} \quad x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1+\cos 2u\right)^2}{4}du = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos^2 2u + 2\cos 2u\right)du$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4u + 2\cos 2u\right)du = \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}u+\frac{1}{8}\sin 4u + \sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{32}$$

6．求解常微分方程 $\frac{dy}{dx} = x^3y^3 - xy$ 。

解：$\frac{dy}{dx}+xy = x^3y^3$ 。$y^{-3}\frac{dy}{dx}+xy^{-2} = x^3$ 。令 $y^{-2}=u$ 。$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ 。

$$\frac{du}{dx} - 2xu = -2x^3 \text{ 。}$$

$$P(x) = -2x, Q(x) = -2x^3, \int P(x)dx = -x^2$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = -2\int x^3 e^{-x^2}dx = \int x^2 de^{-x^2}$$

$$= x^2e^{-x^2} - 2\int xe^{-x^2}dx = x^2e^{-x^2} + \int de^{-x^2} = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}$$

$$u = e^{x^2}\left(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C\right)$$

原方程的通解：$y^{-2} = e^{x^2}\left(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C\right)$ 。

7．设 $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_x^{2x} e^{t^2}dt}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$，求 a 的值使得 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并用导数定义求 $\varphi'(0)$ 。

解：$a = \varphi(0) = \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{2x} e^{t^2}dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{4x^2} - e^{x^2}\right) = 1$ 时 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\int_x^{2x}e^{t^2}dt}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x}e^{t^2}dt-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{4x^2}-e^{x^2}-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(16xe^{4x^2}-2xe^{x^2}\right)=0$$

二、（5 分）设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$，证明 $\{a_n\}$ 没有极限。

证：$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}0=0\neq 1=\lim\limits_{k\to\infty}a_{4k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4k+1}\right)$。故 $\{a_n\}$ 没有极限。

三、（10 分）设 $y=y(x)$ 满足方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点处的切线重合，求 $y=y(x)$。

解：$\left(x^2-x+1\right)'\Big|_{x=0}=-1$。

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2e^x \\ y\big|_{x=0}=1 \\ y'\big|_{x=0}=-1 \end{cases}$$

特征方程 $t^2-3t+2=0$ 的根：$\lambda_1=1,\lambda_2=2$。$y''-3y'+2y=0$ 的通解

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

$m=0$，$\lambda=1$ 是特征方程的单根。设 $y''-3y'+2y=2e^x$ 的特解为 $y^*=Axe^x$。

$$\begin{aligned}&y^{*\prime}=Ae^x+Axe^x,\ y^{*\prime\prime}=2Ae^x+Axe^x\\&2Ae^x+Axe^x-3Ae^x-3Axe^x+2Axe^x=2e^x\\&A=-2\\&y^*=-2xe^x\end{aligned}$$

$y''-3y'+2y=2e^x$ 的通解：$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$。

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x$$

$$\begin{cases} 1 = C_1e + C_2e^2 - 2e \\ -1 = C_1e + 2C_2e^2 - 4e \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{3}{e} \\ C_2 = \dfrac{2e-2}{e^2} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{3}{e}e^x + \frac{2e-2}{e^2}e^{2x} - 2xe^x$$

四、（11 分）已知函数 $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$，求函数的增减区间、凸凹区间、极值、拐点和渐近线。

解：求导

$$y' = \frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1+2x}{(x^2+1)^2}\begin{cases} =0, & x = 1\pm\sqrt{2} \\ >0, & x < 1-\sqrt{2} \\ <0, & 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \\ >0, & x > 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y' = \frac{2(1-x)}{(x^2+1)^2} - \frac{4x(-x^2+1+2x)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}\begin{cases} =0, & x = -1, 2\pm\sqrt{3} \\ <0, & x < -1 \\ >0, & -1 < x < 2-\sqrt{3} \\ <0, & 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3} \\ >0, & x > 2+\sqrt{3} \end{cases}$$

故，函数的增区间：$(-\infty, 1-\sqrt{2}], [1+\sqrt{2}, +\infty)$；减区间：$[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$；上凸区间：$(-\infty, -1], [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$；下凸区间：$[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}], [2+\sqrt{3}, +\infty)$；极大值：$y(1-\sqrt{2}) = \dfrac{-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$；极小值：$y(1+\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$；拐点：$(-1,-1), \left(2+\sqrt{3}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right), \left(2-\sqrt{3}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\right)$。

$y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ 无垂直渐近线。

$a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x-1}{x^2+1}}{x} = 0, b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2+1} = 0$。$y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ 只有一条渐近线：$y = 0$。

五、（10 分）求曲线 $y = e^x, y = \sin x, x = 0, x = 1$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该平面

图形绕 x 轴转一周所得的旋转体的体积。

解：$S=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 \sin x dx=e-2+\cos 1$。

$$V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx-\pi\int_0^1 \sin^2 x dx=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)-\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\left(e^2-2+\frac{1}{2}\sin 2\right)$$

六、（8 分）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''\xi$。

证：记 $F(x)=f(x)-g(x)$。则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数。

设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内相等最大值的最大值点分别是 $c_1,c_2\in(a,b)$。如果 $g(c_1)=f(c_1)$，取 $c=c_1$；如果 $g(c_2)=f(c_2)$，取 $c=c_2$。则 $F(c)=0$。设 $g(c_1)\neq f(c_1)$ 且 $g(c_2)\neq f(c_2)$。则，$F(c_1)>0,F(c_2)<0$。由于 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据零点存在定理，存在 $c\in(a,b)$ 使得 $F(c)=0$。任意情况下都存在 $c\in(a,b)$ 使得 $F(c)=0$。

$F(a)=F(b)=0$。根据罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$。$F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续。又根据罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$。