高等数学（上）试题及答案

一、 填空题（每小题 3 分，本题共 15 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} =$ ______ .。

2、当 k______时，$f(x)=\begin{cases} e^{x} & x\le 0 \\ x^{2}+k & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

3、设 $y=x+\ln x$,则 $\dfrac{dx}{dy}=$ ______

4、曲线 $y=e^{x}-x$ 在点（0，1）处的切线方程是__________

5、若 $\int f(x)dx=\sin 2x+C$，C 为常数，则 $f(x)=$ ________。

二、 单项选择题（每小题 3 分，本题共 15 分）

1、若函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$（　　）

A、0　　B、-1　　C、1　　D、不存在

2、下列变量中，是无穷小量的为（　　）

A. $\ln\dfrac{1}{x}(x\to 0^{+})$　　B. $\ln x(x\to 1)$　　C. $\cos x\ (x\to 0)$　　D. $\dfrac{x-2}{x^{2}-4}(x\to 2)$

3、满足方程 $f'(x)=0$ 的 x 是函数 $y=f(x)$ 的（　　）.

A. 极大值点　　B. 极小值点　　C. 驻点　　D. 间断点

4、下列无穷积分收敛的是（　　）

A、$\int_0^{+\infty}\sin x dx$　　B、$\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx$　　C、$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$　　D、$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

5、设空间三点的坐标分别为 M（1，1，1）、A（2，2，1）、B（2，1，2）。则 $\angle AMB =$___

A、$\frac{\pi}{3}$　　B、$\frac{\pi}{4}$　　C、$\frac{\pi}{2}$　　D、π

三、 计算题（每小题 7 分，本题共 56 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}$ 。

2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

3、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt}{x^2}$

4、设 $y=e^5+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'

5、设 $f=y(x)$ 由已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

6、求不定积分 $\int\frac{1}{x^2}\sin(\frac{2}{x}+3)dx$

7、求不定积分 $\int e^x\cos x dx$

8、设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+e^x} & x<0 \\ \frac{1}{1+x} & x\ge 0 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$

四、 应用题（本题 7 分）

求曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成图形的面积 A 以及 A 饶 y 轴旋转所产生的旋转体的体积。

五、 证明题（本题 7 分）

若 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，证明：

在(0,1)内至少有一点 ξ，使 $f'(\xi)=1$。

参考答案

一。填空题（每小题 3 分，本题共 15 分）

1、e^6　2、$k=1$.　3、$\dfrac{x}{1+x}$　4、$y=1$　5、$f(x)=2\cos 2x$

二．单项选择题（每小题 3 分，本题共 15 分）

1、D　2、B　3、C　4、B　5、A

三．计算题（本题共 56 分，每小题 7 分）

1.解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)}=\dfrac{1}{8}$　7 分

2. 解　：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$

7 分

3、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin xe^{-\cos^2 x}}{2x}=-\dfrac{1}{2e}$　7

分

4、解：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}})$ ………………………　…...4 分

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ………………………………………　…...7 分

5、解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$　（4 分）

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\Big/\,{}^{dx}\!/_{dt}=\dfrac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$　（7 分）

6、解：$\int\dfrac{1}{x^2}\sin(\dfrac{2}{x}+3)dx=-\dfrac{1}{2}\int\sin(\dfrac{2}{x}+3)d(\dfrac{2}{3}+3)=\dfrac{1}{2}\cos(\dfrac{2}{x}+3)+C$　（7 分）

7、　解：　$\int e^x\cos x dx=\int\cos x de^x$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$ ……………………

…….2 分

$$= e^x \cos x + \int \sin x de^x$$ ..………………… …

…….3 分

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$ ………

……5 分

$$= e^x(\sin x + \cos x) + C$$ ……………… ……… …7 分

8、解：

$$\int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$ … …2 分

$$= \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$ ……… …

……3 分

$$= \int_{-1}^0 (1 - \frac{e^x}{1+e^x})dx + \ln(1+x)\Big|_0^1$$ ……

……5 分

$$= 1 - \ln(1+e^x)\Big|_{-1}^0 + \ln 2$$ ………………

…6 分

$$= 1 + \ln(1+e^{-1}) = \ln(1+e)$$ …………

……7 分

四.　应用题（本题 7 分）

解：曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 的交点为（1，1），　1

于是曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围成图形的面积 A 为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^2]_0^1 = \frac{1}{3}$$

A 绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积为：

$$V=\pi\int_0^1\left((\sqrt{y})^2-y^4\right)dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{3}{10}\pi$$

五、证明题（本题 7 分）

证明： 设 $F(x)=f(x)-x$， 2 分

显然 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 内可导，

且 $F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$， $F(1)=-1<0$.

零点定理知存在 $x_1\in[\frac{1}{2},1]$，使 $F(x_1)=0$. 4 分

由 $F(0)=0$，在 $[0,x_1]$ 上应用罗尔定理知，至少存在一点

$\xi\in(0,x_1)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$，即 $f'(\xi)=1$ … …7 分

2006-2007 第一学期高数试题

一、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1）函数 $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}+\arcsin\frac{x-1}{3}$ 的定义域为 $\underline{2\le x\le 4或x=0}$。

2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\underline{\frac{9}{2}}$。

3）设 $y=\pi^x+x^e$，则 $y'=\underline{\pi^x\ln\pi+ex^{e-1}}$。

4）设 $y=\frac{x}{a^2+x^2}\ (a\ne0)$，$dy=\underline{\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx}$。

5）若 $a<0$，$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\underline{-\arcsin\frac{x}{a}+C}$。

二、选择题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x+1}}{2x+3}=$（ D ）

A、2 B、-2 C、±2 D、不存在

2）下列函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上适合罗尔中值定理条件的是（ B ）

A、 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ B、 $f(x)=x^2|x|$

C、 $f(x)=\arccos x$　　D、 $f(x)=\cot\dfrac{\pi x}{2}$

3）下列函数中，哪一个不是 $\sin 2x$ 的原函数（　C　）

A、 $\sin^2 x$　　B、 $-\cos^2 x$

C、 $-\cos 2x$　　D、 $5\sin^2 x+4\cos^2 x$

4）设 $P=\int_1^2 \ln x dx$ ， $Q=\int_1^2 \ln^2 x dx$ ， $R=\int_1^2 \sqrt{1+x^2}dx$ ，则下列不等式正确的是（　D　）

A、 $P<Q<R$　　B、 $Q<R<P$

C、 $R<Q<P$　　D、 $Q<P<R$

5）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\dfrac{d}{dx}\left[x\int_a^b f(x)dx\right]=$（　A　）

A、 $\int_a^b f(x)dx$　　B、 $bf(b)-af(a)$

C、 $x\left[f(b)-f(a)\right]+\int_a^b f(x)dx$　　D、 $\int_a^b f(x)dx+xf(x)$

三、计算下列各题（共 4 题，每小题 6 分，共 24 分）

1）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x\cos x}}{x^3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{x\cos x}\dfrac{e^{\sin x-x\cos x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

2）设参数方程 $\begin{cases}x=\ln\left(\sin t+\sqrt{1+\sin^2 t}\right)\\ y=\sqrt{1+\sin^2 t}\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{2\sin t\cos t}{2\sqrt{1+\sin^2 t}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\cos t}=\sin t$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\cos t}=\sqrt{1+\sin^2 t}$ 。

3）计算不定积分 $\int 2x\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx \quad \left(|x|<1\right)$

解：原式 $=x^2\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\int x^2\dfrac{1-x}{1+x}\dfrac{-2x}{(1-x)^2}dx=x^2\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\int\dfrac{2x^3}{(1+x)(1-x)}dx$

$$= x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(\frac{2x^2+2x+2}{1+x} + \frac{2}{(1+x)(1-x)} \right) dx$$

$$= x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(2x + \frac{3}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

$$= x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + x^2 3\ln(1+x) - \ln(1-x) + C$$

四、解答下列各题（共 2 题，每小题 7 分，共 14 分）

1）在曲线 $y = x^2 + 1$ 上求一点 M，使它到点 $M_0(5, 0)$ 的距离最小。

解：设曲线 $y = x^2 + 1$ 上一点坐标为 $(a, \ a^2+1)$，它到点 $M_0(5, 0)$ 的距离的平方为

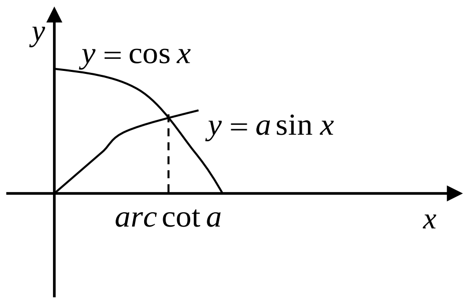
$f(a) = (a-5)^2 + (a^2+1)^2$，我们只须在 $(-\infty, +\infty)$ 求 $f(a)$ 得最小值

$$f'(a) = 2(a-5) + 4a(a^2+1) = 4a^3 + 6a - 10 = (a-1)(4a^2+4a+10)$$

当 $a = 1$ 时，$f'(a) = 0$，此时，$f(a)$ 取最小值。所求点为 $(1, \ 2)$

2）设由 $y = \cos x$，$y = 0$，$x = 0$ 在第一象限围成的图形为 D，其面积为 S_0。又曲线 $y = a\sin x \ (a > 0)$ 将 D 分为左右两部分 D_1，D_2，其面积分别为 S_1，S_2，求 a 的值使 $S_1 : S_2 = 2:1$。

解：$S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$



又因为 $S_1 + S_2 = S_0 = 1$，$S_1 : S_2 = 2:1$

所以 $S_1 = \frac{2}{3}$，$S_2 = \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{3} = S_1 = \int_0^{\operatorname{arccot} a} (\cos x - a\sin x) dx$$

$$= [\sin x + a\cos x]_0^{arc\cot a} = \sin(arc\cot a) + a\cos(arc\cot a) - a$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} - a = \sqrt{1+a^2} - a \Rightarrow a = \frac{5}{12}$$

五、（本题 8 分）设 $f(x) = \dfrac{(\sqrt{1+3x} - b)(x-b)}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x_1 = 0$，有可去间断点 $x_2 = 1$，求 a, b 之值。

解：因为 $x_1 = 0$ 是无穷间断点，所以 $x \to 0$ 时，$f(x) \to \infty$，因此 $a = 0$，$b \neq 0$，$b \neq 1$

又因为 $x_2=1$ 是可去间断点，而 $x\to 1$ 时，$(x-a)(x-1)\to 0$，

所以，当 $x\to 1$ 时，

有 $\left(\sqrt{1+3x}-b\right)(x-b)\to 0$，因此 $b=2$。

六、（本题 9 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续。

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{e^{2h}-1}{h}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1-2h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-2}{2h}=2$$

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x^2} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$，又因为 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x^2}=2$，

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

（本题 10 分）设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，可导且 $f'(x)$ 单调增，$x_0\in(a,b)$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x\neq x_0\\ f'(x_0) & x=x_0\end{cases}$$

试证明：$\varphi(x)$ 在 (a,b) 内也单调增。

证明：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=\varphi(x_0)$，所以 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)(x-x_0)-\left(f(x)-f(x_0)\right)}{(x-x_0)^2}$

在以 x，x_0 为端点的闭区间上对函数 $\varphi(x)$ 运用拉格朗日中值定理，至少存在 x，x_0 之间的一点 ξ 使得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)\Rightarrow f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-x_0}$，当 $x\in(a,x_0)$ 时，$f'(x)\leq f'(\xi)$，即 $\varphi'(x)>0$；当 $x\in(x_0,b)$ 时，$f'(x)\geq f'(\xi)$，即 $\varphi'(x)>0$，又因为 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。所以 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内也单调增。

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分).

（1） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ =_____ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ________.

（2）曲线 $y=x\ln x$ 上与直线 $x-y+1=0$ 平行的切线方程为 ___ $y=x-1$ ______.

（3）已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ ______ $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ _____.

（4）曲线 $y=\frac{x^2}{3x+1}$ 的斜渐近线方程为 _________ $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$.

（5）微分方程 $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解为_________ $y=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}+C(x+1)^2$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

（1）下列积分结果正确的是（ D ）

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=0$　　(B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-2$

(C) $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx=+\infty$　　(D) $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=+\infty$

（2）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有定义，其导数 $f'(x)$ 的图形如图 1-1 所示，则（ D ）.

(A) x_1, x_2 都是极值点.

(B) $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 都是拐点.

(C) x_1 是极值点.，$(x_2, f(x_2))$ 是拐点.

(D) $(x_1, f(x_1))$ 是拐点，x_2 是极值点.

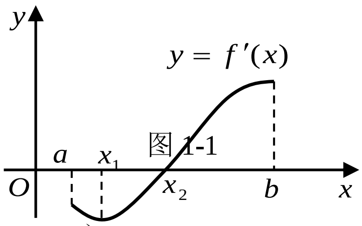


图 1-1

（3）函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是（ D ）.

（A） $y''-y'-2y=3xe^x$.　　（B） $y''-y'-2y=3e^x$.

（C） $y''+y'-2y=3xe^x$.　　（D） $y''+y'-2y=3e^x$.

（4）设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ 为（ A ）.

(A) $f'(x_0)$.　(B) $-f'(x_0)$.　(C) 0.　(D)不存在 .

（5）下列等式中正确的结果是 （ A ）.

(A) $(\int f(x)dx)'=f(x)$.　　(B) $\int df(x)=f(x)$.

(C) $d[\int f(x)dx]=f(x)$.　　(D) $\int f'(x)dx=f(x)$.

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）.

1．求极限 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$.

解 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ -------1 分

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$ -------2 分

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}$ -------1 分

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\ln x}{1+\ln x+1}=\frac{1}{2}$ -------2 分

2.方程 $\begin{cases}x=\ln\sin t\\ y=\cos t+t\sin t\end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=t\sin t,$ ----------------------------（3 分）

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(t\sin t)'}{x'(t)}=\sin t\tan t+t\sin t.$ ---------------------（6 分）

3．4. 计算不定积分 $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

解: $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)}d\sqrt{x}$ －－－－－－－－－－－－2分

$=2\int\arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}$ －－－－－－－－2分

$=(\arctan\sqrt{x})^2+C$ －－－－－－－－－－2分

4.计算定积分 $\int_0^3\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}dx$.

解 $\int_0^3\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}dx=\int_0^3\frac{x(1-\sqrt{1+x})}{-x}dx=-\int_0^3(1-\sqrt{1+x})dx$ --------- ---------------（3 分）

$=-3+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{5}{3}$ -- ---------------------（6 分）

（或令 $\sqrt{1+x}=t$ ）

四、解答题（本题共 4 小题，共 29 分）.

1.（本题 6 分）解微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$.

解：特征方程$r^2-5r+6=0$ ———————————1分

特征解$r_1=2, r_2=3.$———————————1分

次方程的通解$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$————————1分

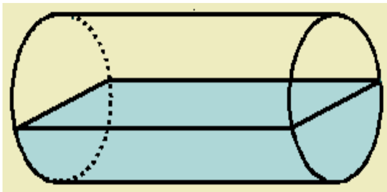
令$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$ ————————————1分

代入解得$b_0=-\frac{1}{2}$，$b_1=-1.$

所以$y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$ ————————————1分

所以所求通解$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(\frac{1}{2}x+1)e^{2x}.$————1分

2.（本题 7 分）一个横放着的圆柱形水桶（如图 4-1），桶内盛有半桶水，设桶的底半径为R，水的比重为γ，计算桶的一端面上所受的压力.



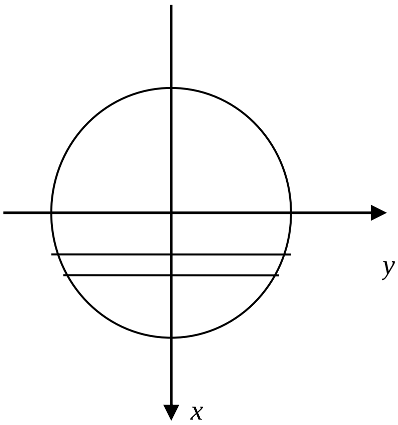
解：建立坐标系如图

$P=\int_0^R 2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}dx$ —————————— 4分

$=-\rho g\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}d(R^2-x^2)$ ——————1分

$=-\rho g[\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{3/2}]_0^R$ ——————1分

$=\frac{2\rho g}{3}R^3$ —————————————————1分



3. （本题 8 分）设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，$f(a)=f(b)=0$，且$\int_a^b f^2(x)dx=1$，试求$\int_a^b xf(x)f'(x)dx$.

解：$\int_a^b xf(x)f'(x)dx=\int_a^b xf(x)df(x)$——————2分

$=\frac{1}{2}\int_a^b xdf^2(x)$——————2分

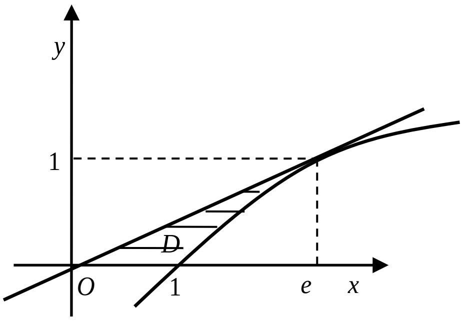
$=[xf^2(x)]_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$——2分

$=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$—————————— 2分

4. （本题 8 分）过坐标原点作曲线$y=\ln x$的切线，该切线与曲线$y=\ln x$及x轴围成平面图形 D.

(1) (3) 求 D 的面积 A;

(2) (4) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.



解：(1) 设切点的横坐标为 x_0，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

----1 分

由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=e.$ 所以该切线的方程为 $y=\frac{1}{e}x.$

----1 分

平面图形 D 的面积 $A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{1}{2}e-1.$ ----2 分

（2）切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的圆锥体积为

$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2.$ ----2 分

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的图形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体体积为

$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy$， ----1 分因此所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi e^2-\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3).$$

----1 分

五、证明题（本题共 1 小题，共 7 分）.

1. 证明对于任意的实数 x，$e^x\geq 1+x$.

解法一：$e^x=1+x+\frac{e^{\xi}}{2}x^2\geq 1+x$

解法二：设 $f(x)=e^x-x-1.$ 则 $f(0)=0.$ ________________________--1 分

因为 $f'(x)=e^x-1.$ ______________________________ 1 分

当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)\geq 0.$ $f(x)$ 单调增加，$f(x)\geq f(0)=0.$ ________________________--2 分

当 $x\leq 0$ 时，$f'(x)\leq 0.$ $f(x)$ 单调增加，$f(x)\geq f(0)=0.$ ________________________--2 分

所以对于任意的实数 x，$f(x)\geq 0.$ 即 $e^x\geq 1+x$。________________________--1 分

解法三：由微分中值定理得，

$e^x-1=e^x-e^0=e^{\xi}(x-0)=e^{\xi}x$，其中 ξ 位于 0 到 x 之间。________________________--2 分

当 $x\geq 0$ 时，$e^{\xi}>1$，$e^x-1\geq x$。________________________--2 分

当 $x\leq 0$ 时，$e^{\xi}<1$，$e^x-1\geq x$。________________________--2 分

所以对于任意的实数x， $e^x \ge 1+x$ 。-------------------------1 分