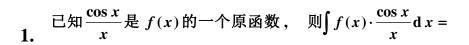
扫描二维码1.7秒即可获取

## 高数期末考试

一、填空题(本大题有4小题,每小题4分,共16分)





$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}(\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos^2\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos^2\frac{n-1}{n}\pi)=$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$$

二、单项选择题 (本大题有4小题,每小题4分,共16分)

设
$$\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x}$$
,  $\beta(x) = 3-3\sqrt[3]{x}$ , 则当 $x \to 1$ 时 ( )

(A)  $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$  是同阶无穷小,但不是等价无穷小; (B)  $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$  是等价无穷小;

(C)  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  高阶的无穷小; (D)  $\beta(x)$  是比  $\alpha(x)$  高阶的无穷小.

6. 若  $F(x) = \int_0^x (2t - x) f(t) dt$  , 其中 f(x) 在区间上 (-1,1) 二阶可导且 f'(x) > 0 , 则 ( ) .

- (A) 函数 F(x) 必在 x=0 处取得极大值;
- (B) 函数 F(x) 必在 x=0 处取得极小值;
- (C) 函数 F(x) 在 x = 0 处没有极值,但点 (0, F(0)) 为曲线 y = F(x) 的拐点;
- (**D**)函数 F(x) 在 x = 0 处没有极值,点(0,F(0)) 也不是曲线 y = F(x) 的拐点。

7. 设f(x)是连续函数,且  $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)dt$ ,则 f(x) = (

(A) 
$$\frac{x^2}{2}$$
 (B)  $\frac{x^2}{2} + 2$  (C)  $x-1$  (D)  $x+2$ .

8.

三、解答题(本大题有5小题,每小题8分,共40分)

- A 为常数. 求g'(x) 并讨论g'(x) 在 x=0 处的连续性.
- 13. 求微分方程  $xy' + 2y = x \ln x$  满足  $y(1) = -\frac{1}{9}$  的解.
- 四、解答题(本大题10分)
- **14.** 已知上半平面内一曲线 y = y(x)  $(x \ge 0)$ , 过点 (0,1), 且曲线上任一点  $M(x_0, y_0)$  处切线斜率数值上等于此曲线与x轴、y轴、直线 $x = x_0$  所围成 面积的 2 倍与该点纵坐标之和, 求此曲线方程.
- 五、解答题(本大题10分)
  - 15. 过坐标原点作曲线  $y = \ln x$  的切线,该切线与曲线  $y = \ln x$  及 x 轴围 成平面图形 D.
    - 求 D 的面积 A; (2) 求 D 绕直线 x = e 旋转一周所得旋转体的体积
  - 六、证明题(本大题有2小题,每小题4分,共8分)
  - **16.** 设函数 f(x) 在 [0,1] 上连续且单调递减,证明对任意的  $q \in [0,1]$ ,  $\int_{0}^{q} f(x) dx \ge q \int_{0}^{1} f(x) dx$
  - 17. 设函数 f(x) 在  $[0,\pi]$  上连续,且  $\int_{0}^{\pi} f(x) dx = 0$  .  $\int_{0}^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(x)dx$$
 示: 设

- 一、单项选择题(本大题有 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)
- 1, D 2, A 3, C 4, C
- 二、填空题(本大题有4小题,每小题4分,共16分)
- $\frac{1}{2}(\frac{\cos x}{x})^2 + c \frac{\pi}{2} \cdot 8 \cdot \frac{\pi}{3}$
- 三、解答题(本大题有5小题,每小题8分,共40分)
- 9. 解:方程两边求导

$$e^{x+y}(1+y') + \cos(xy) + y =$$

扫描一维码1.7秒即可获取

$$y'(x) = -\frac{e^{x+y} + y\cos(xy)}{e^{x+y} + x\cos(xy)}$$
$$x = 0, y = 0, y'(0) = -1$$

10. **A**:  $u = x^7$   $7x^6 dx = du$ 

原式 = 
$$\frac{1}{7} \int \frac{(1-u)}{u(1+u)} du = \frac{1}{7} \int (\frac{1}{u} - \frac{2}{u+1}) du$$
  
=  $\frac{1}{7} (\ln|u| - 2\ln|u+1|) + c$   
=  $\frac{1}{7} \ln|x^7| - \frac{2}{7} \ln|1+x^7| + C$ 

11. 
$$\mathbf{M}: \int_{-3}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{0} xe^{-x}dx + \int_{0}^{1} \sqrt{2x - x^{2}}dx$$

$$= \int_{-3}^{0} xd(-e^{-x}) + \int_{0}^{1} \sqrt{1 - (x - 1)^{2}}dx$$

$$= \left[ -xe^{-x} - e^{-x} \right]_{-3}^{0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2}\theta d\theta \, (x - 1) = \sin\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2e^{3} - 1$$

12.  $\mathbf{M}$ :  $\mathbf{H} f(0) = 0$ ,  $\mathbf{M} g(0) = 0$ .

$$g(x) = \int_{0}^{1} f(xt)dt = \frac{\int_{0}^{x} f(u)du}{x}$$

$$(x \neq 0)$$

$$g'(x) = \frac{xf(x) - \int_{0}^{x} f(u)du}{x^{2}} \qquad (x \neq 0)$$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_{0}^{x} f(u)du}{x^{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

四、 解答题 (本大题 10 分)



二维码1.7秒即可获取

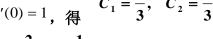
14. 解: 由已知且  $y' = 2 \int_0^x y \, dx + y$ 

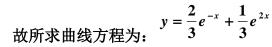
将此方程关于x求导得y'' = 2y + y'

特征方程:  $r^2-r-2=0$  解出特征根:  $r_1=-1$ ,  $r_2=2$ .

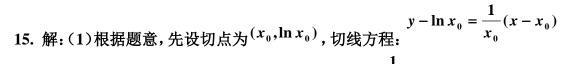
其通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ 

代入初始条件 y(0) = y'(0) = 1, 得  $C_1 = \frac{2}{3}$ ,  $C_2 = \frac{1}{3}$ 





五、解答题(本大题10分)



由于切线过原点,解出 $x_0 = e$ ,从而切线方程为:  $y = \frac{1}{e}x$ 

$$A = \int_{0}^{1} (e^{y} - ey) dy = \frac{1}{2}e - 1$$
则平面图形面积

 $V_1 = \frac{1}{3}\pi e^2$ (2) 三角形绕直线 x = e 一周所得圆锥体体积记为  $V_1$ ,则 曲线 $y = \ln x$  与 x 轴及直线 x = e 所用成的图形绕直线 x = e 一周所得旋转体体积 为 V<sub>2</sub>

$$V_2 = \int_0^1 \pi (e - e^y)^2 dy$$

 $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6} (5e^2 - 12e + 3)$  D 绕直线 x = e 旋转一周所得旋转体的体积 六、证明题(大士联节), 六、证明题(本大题有2小题,每小题4分,共12分)

16. 证明: 
$$\int_{0}^{q} f(x) dx - q \int_{0}^{1} f(x) dx = \int_{0}^{q} f(x) dx - q (\int_{0}^{q} f(x) dx + \int_{q}^{1} f(x) dx)$$

$$= (1 - q) \int_{0}^{q} f(x) dx - q \int_{q}^{1} f(x) dx$$

$$\stackrel{\xi_1 \in [0,q]}{=} q(1-q)f(\xi_1) - q(1-q)f(\xi_2) \stackrel{f(\xi_1) \geq f(\xi_2)}{\geq} 0$$

$$\int_{0}^{q} f(x) dx \ge q \int_{0}^{1} f(x) dx$$
证毕。

 $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$  ,  $0 \le x \le \pi$  。其满足在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $[0,\pi)$ 证: 构造辅助函数: 上可导。F'(x) = f(x),且 $F(0) = F(\pi) = 0$ 



## 6小时通关高数秘籍

扫描二维码1.7秒即可获取

由 题 设 , 有  $0 = \int_{0}^{\pi} f(x)\cos x dx = \int_{0}^{\pi} \cos x dF(x) = F(x)\cos x \Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \sin x \cdot F(x) dx$ ,

 $\int_{0}^{\pi} F(x) \sin x dx = 0$  有 0 ,由积分中值定理,存在  $\xi \in (0,\pi)$  ,使  $F(\xi) \sin \xi = 0$  即  $F(\xi) = 0$ 

综上可知  $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0$ ,  $\xi \in (0,\pi)$ .在区间  $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔定理,知存在

