高等数学 A(下册)期末考试试题

大题	一	二					三	四	五	六	七
小题		1	2	3	4	5					
得分											

一、填空题：（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分，把答案直接填在题中横线上 ）

1、已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=2$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________.

2、设 $z=x\ln(xy)$，则 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=$__________.

3、曲面 $x^2+y^2+z=9$ 在点 $(1,2,4)$ 处的切平面方程为 ____________________________.

4、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数

在 $x=3$ 处收敛于 _________，在 $x=\pi$ 处收敛于 ________.

5、设 L 为连接 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 两点的直线段，则 $\int_L (x+y)\,ds=$________.

※以下各题在答题纸上作答 ，答题时必须写出详细的解答过程 ，并在每张答题纸写上 ：姓名 、学号、班级.

二、解下列各题：（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

1、求曲线 $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处的切线及法平面方程.

2、求由曲面 $z=2x^2+2y^2$ 及 $z=6-x^2-y^2$ 所围成的立体体积.

3、判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$ 是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

4、设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{dS}{z}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ $(0<h<a)$ 截出的顶部.

三、（本题满分 9 分） 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

高数

（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $\int_L (e^x \sin y - m)dx + (e^x \cos y - mx)dy$，

其中 m 为常数， L 为由点 A(a,0) 至原点 O(0,0) 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax \ (a > 0)$.

四、（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n}$ 的收敛域及和函数.

五、（本题满分 10 分）

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy$，

其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

六、（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 为连续函数， $f(0) = a$， $F(t) = \iiint_{\Omega} [z + f(x^2 + y^2 + z^2)]dv$，其中 Ω_t 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

与 $z = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$ 所围成的闭区域，求 $\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{t^3}$.

备注：①考试时间为 2 小时；

②考试结束时，请每位考生按卷面 → 答题纸 → 草稿纸由表及里依序对折上交；

不得带走试卷。

高等数学 A(下册) 期末考试试题 【A 卷】

参考解答与评分标准

2009 年 6 月

高数

一、填空题【每小题 4 分，共 20 分】 1、-4；2、$-\frac{1}{y^2}$；3、$2x+4y+z=14$；4、3，0；5、$\sqrt{2}$.

二、试解下列各题【 每小题 7 分，共 35 分】

1、解：方程两边对 x 求导，得 $\begin{cases} 3y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=-2x \\ y\frac{dy}{dx}-z\frac{dz}{dx}=-3x \end{cases}$， 从而 $\frac{dy}{dx}=-\frac{5x}{4y}$，$\frac{dz}{dx}=\frac{7x}{4z}$ …………..【4】

该曲线在 $(1,-1,2)$ 处的切向量为 $\vec{T}=(1,\frac{5}{4},\frac{7}{8})=\frac{1}{8}(8,10,7)$. …………..【5】

故所求的切线方程为 $\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$ ………………..【6】

法平面方程为 $8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$ 即 $8x+10y+7z=12$……..【7】

2、解：$\begin{cases} z=2x^2+2y^2 \\ z=6-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2$，该立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$. …..【2】

故所求的体积为 $V=\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{2\rho^2}^{6-\rho^2}dz=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho(6-3\rho^2)d\rho=6\pi$ ……..【7】

3、解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}n|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n=1>0$，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散 …………………【3】

又 $|u_n|=\ln(1+\frac{1}{n})>\ln(1+\frac{1}{n+1})=|u_{n+1}|$，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=0$.故所给级数收敛且条件收敛. 【7】

4、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y})+0=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$， ……………………………………【3】

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$.【7】

5、解：Σ 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2-h^2\}$.

又 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=a/\sqrt{a^2-x^2-y^2}$， ….. ………【3】

故 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{adxdy}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho d\rho}{a^2-\rho^2}=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$ ..【7】

高数

三、【9 分】解：设 $M(x,y,z)$ 为该椭圆上的任一点，则点 M 到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ …… 【1】

令 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1)$，

则由 $\begin{cases} L_x=2x-2\lambda x+\mu=0 \\ L_y=2y-2\lambda y+\mu=0 \\ L_z=2z+\lambda+\mu=0 \\ z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$，解得 $x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$， $z=2\mp\sqrt{3}$. 于是得到两个可能极值点

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right),\quad M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right).\cdots\cdots\cdots\cdots \text{【7】}$$

又由题意知，距离的最大值和最小值一定存在，所以距离的最大值与最小值分别在这两点处取得.

故 $d_{max}=|OM_2|=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, $d_{min}=|OM_1|=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$. …… 【9】

四、【10 分】 解：记 L 与直线段 $\overline{OA}$ 所围成的闭区域为 D，则由格林公式，得

$$I_2=\oint_{L+\overline{OA}}(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=-m\iint_D d\sigma=-\frac{\pi}{8}ma^2.\cdots\cdots\cdots\cdots \text{【5】}$$

而 $I_1=\int_{OA}(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=-m\int_0^a dx=-ma$ ………… 【8】

$$\therefore \int_L(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy=I_2-I_1=ma-\frac{\pi}{8}ma^2.\cdots\cdots\cdots\cdots \text{【10】}$$

五、【10 分】解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$ ………… 【2】

又当 $x=3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散；当 $x=-3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛. …… 【4】

故该幂级数的收敛域为 $[-3,3)$ ……… 【5】

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$ （$-3\le x<3$），则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3}=\frac{1}{3-x},\ (|x|<3)\ \cdots\cdots \text{【8】}$$

于是 $s(x)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\dfrac{dx}{3-x}=-\ln(3-x)\Big|_0^x=\ln 3-\ln(3-x)$，（$-3\le x<3$）…………………. 【10】

高数

六、【10 分】解：取 Σ_1 为 $z=0(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，记 Σ 与 Σ_1 所围成的空间闭区域为 Ω，则由高斯公式，

有 $I_2=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega} 6(x^2+y^2+z)dv$ ………… . … 【5】

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\rho dz=2\pi$$ ……………………… . …【7】

而 $I_1=\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1} 3(z^2-1)dxdy=3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy=3\pi$ … . … 【9】

$\therefore\quad I=I_2-I_1=2\pi-3\pi=-\pi$. ……………………… . …【10】

七、【6 分】解：$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t\left[r\cos\varphi+f(r^2)\right]r^2dr$ … . … 【2】

$$=2\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^t r^3dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2dr\right]$$

$$=\pi\left[\frac{t^4}{8}+(2-\sqrt{2})\int_0^t r^2f(r^2)dr\right]$$ … . … 【4】

故 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\pi\left[\frac{t^3}{2}+(2-\sqrt{2})t^2f(t^2)\right]}{3t^2}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi\lim\limits_{t\to 0^+}f(t^2)=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a.$ 【6】