

2020 年全国高等院校数学能力挑战赛初赛真题

一、判断题：1-16 题，每小题 3 分，共 48 分。

1. 定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx = 0$ 。

参考答案：错

2. 若 x_0 点为 $y = f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0) = 0$ 。

参考答案：错

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+6)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$

参考答案：对

4. 若 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的两个一阶偏导数存在，则函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微。

参考答案：错

5. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积， $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积，则 $f(x) + g(x)$ 在 $[a, b]$ 上必不可积。

参考答案：对

6. $(y'')^2 = -2xy' - e^x y$ 的通解中含有两个独立任意常数。

参考答案：对

7. 函数 $\ln \ln x$ 在 $[1, e]$ 满足拉格朗日中值定理条件。

参考答案：错

8. 设 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则曲线积分 $\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ 与 L 取向无关，与 a, b 大小有关。

参考答案：错

9. 设 $f(x)$ 在 I 内可积，那么 $f'(x)$ 在 I 内也可积。

参考答案：错

10. 曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在两点关于直线 $l: y = k(x - x_0)$ 对称的充要条件

是 $x_0^2 \leq \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2 k^2}$ 。

参考答案：对

11. 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 点的拉格朗日型余项为 0。

参考答案：错

12. 方程 $xy' = y \ln y$ 满足 $y|_{x=1} = e^2$ 的特解是 $y = e^{2x}$ 。

参考答案：对

13. 曲线 $\rho^2 = 5 \cos 2\theta$ 所围成的区域面积等于 5。

参考答案：对

14. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 $n! [f(x)]^{n+1}$ 。

参考答案：错

15. 已知微分方程为 $y'' - 5y' + 6y = e^x \sin x + 6$, 则其特解形式为

$e^x (a \cos x + b \sin x) + c$ 。

参考答案：对

16. 设 $f(x)$ 是可微函数, 导函数 $f'(x)$ 严格单调递增, 若 $f(a) = f(b) (a < b)$, 则对一切 $x \in (a, b)$ 有 $f(x) < f(a) = f(b)$ 。

参考答案：对

二、单选题：17-29 题，每小题 4 分，共 52 分。

17. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = (\quad)$

- A. 0 B. 不存在 C. $\frac{1}{2}$ D. 0 或 $\frac{1}{2}$

参考答案：B

18. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} + a \sin x, & x < 0 \\ bx + c, & x \geq 0 \end{cases}$ ，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 (\quad)

- A. $a = -b, c = 0$ B. $a = b, c = 0$ C. $a = -b, c$ 任意 D. $a = b, c$ 任意

参考答案：B

19. 与原点距离为 6，且在坐标轴上的截距之比为 $a:b:c=1:3:2$ 的平面方程是 (\quad)

- A. $6x + 2y + 3z + 42 = 0$ B. $6x + 2y + 3z \pm 42 = 0$
C. $6x + 2y + 3z - 42 = 0$ D. $3x + 4y + z + 7 = 0$

参考答案：B

20. $\frac{\pi}{3} \int_0^{2R} (4(\rho-1)R^3 + 3Rx^2 - x^3) dx = (\quad)$

- A. $\frac{2\pi R^4}{3}(2\rho-1)$
B. $\frac{4\pi R^4}{3}(\rho-1)$
C. $\frac{\pi R^4}{3}(\rho-1)$
D. $\frac{4\pi R^4}{3}(2\rho-1)$

参考答案：D

21. 将 $f(x) = \ln(1+x)$ 按照麦克劳林公式展开后的 x^2 项的系数是 ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 1

参考答案: C

22. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = (\quad)$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 不存在

参考答案: D

23. 函数 $f(x) = (x+1)|x^2 - 2x - 3|$ 的不可导点的个数是 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

参考答案: C

24. 设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于 ()

- A.1 B.2 C.3 D.4

参考答案: C

25. 下列关于多元函数的最大值、最小值说法正确的是 ()

- A. 多元函数在其定义域上至少可取得它的最大值、最小值各一次;
B. 连续的多元函数, 在闭区域 D 上至少可取得最大、最小值各一次;
C. 在有界闭区域 D 上的多元函数, 在该区域上一定可取得最大值和最小值各一次;
D. 在有界闭区域 D 上连续的多元函数, 在该区域上至少取得最大值、最小值各一次

参考答案: D

26. 定积分所表示的和式极限是 ()

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left[\frac{i}{n}(b-a)\right]$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left[\frac{i-1}{n}(b-a)\right]$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i (\xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$

D. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i (\lambda = \max\{\Delta x_i | i=1, 2, \dots, n\}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$

参考答案: D

27. 设 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, 而 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续但不可导, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 ()

A. 连续但不可导

B. 可能可导, 也可能不可导

C. 仅有一阶导数

D. 可能有二阶导数

参考答案: C

28. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = ()$

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. ∞

参考答案: A

29. 从原点向 $y=1-\ln x$ 作切线 (不是 y 轴) 求由曲线, 切线和 x 轴所围成的图形面积时, 以 y 为积分变量, 则面积元素 dA 为 ()

A. $(e^{y-1} - ey)dy$

B. $(e^{1-y} - ey)dy$

C. $(e^{-y} - e^2 y)dy$

D. $(e^{1-y} + e^2 y)dy$

参考答案: D