高数期末考试

一、填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

1. 已知 $\dfrac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\cdot\dfrac{\cos x}{x}\,dx=$ ________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\cos^2\dfrac{\pi}{n}+\cos^2\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\cos^2\dfrac{n-1}{n}\pi\right)=$ ________.

3. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ ________.

二、单项选择题 (本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

4. 设 $\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\beta(x)=3-3\sqrt[3]{x}$，则当 $x\to 1$ 时（　　）.

（A）$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，但不是等价无穷小；
（B）$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小；
（C）$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小；　　（D）$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小.

5. 设 $f(x)=\cos x(x+|\sin x|)$，则在 $x=0$ 处有(　　).

（A）$f'(0)=2$　（B）$f'(0)=1$　（C）$f'(0)=0$　（D）$f(x)$ 不可导.

6. 若 $F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 在区间上 $(-1,1)$ 二阶可导且 $f'(x)>0$，则（　　）.

（A）函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极大值；
（B）函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极小值；
（C）函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值，但点 $(0,F(0))$ 为曲线 $y=F(x)$ 的拐点；
（D）函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值，点 $(0,F(0))$ 也不是曲线 $y=F(x)$ 的拐点。

7. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x)=$(　　)

（A）$\dfrac{x^2}{2}$　（B）$\dfrac{x^2}{2}+2$　（C）$x-1$　（D）$x+2$.

8.

三、解答题（本大题有 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

9. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\sin(xy)=1$ 确定，求 $y'(x)$ 以及 $y'(0)$.

10. 求 $\displaystyle\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\le 0\\ \sqrt{2x-x^2}, & 0<x\le 1\end{cases}$　求 $\int_{-3}^1 f(x)dx$.

12. 设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数. 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解.

四、 解答题（本大题 10 分）

14. 已知上半平面内一曲线 $y=y(x)\ (x\ge 0)$，过点 $(0,1)$，且曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率数值上等于此曲线与 x 轴、y 轴、直线 $x=x_0$ 所围成面积的 2 倍与该点纵坐标之和，求此曲线方程.

五、解答题（本大题 10 分）

15. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A; (2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

六、证明题（本大题有 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减，证明对任意的 $q\in[0,1]$，$\displaystyle\int_0^q f(x)\,dx\ge q\int_0^1 f(x)dx$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx=0$，$\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx=0$. 证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.（提示：设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(x)dx$）

解答

一、单项选择题(本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1、D　2、A　3、C　4、C

二、填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

5. e^6 .　6. $\frac{1}{2}(\frac{\cos x}{x})^2+c$ .7. $\frac{\pi}{2}$.

8. $\frac{\pi}{3}$.

三、解答题（本大题有 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

9. 解：方程两边求导

$$e^{x+y}(1+y')+\cos(xy)(xy'+y)=$$

$$y'(x)=-\frac{e^{x+y}+y\cos(xy)}{e^{x+y}+x\cos(xy)}$$

$x=0,y=0$，　$y'(0)=-1$

10. 解：$u=x^7$　$7x^6dx=du$

$$\text{原式}=\frac{1}{7}\int\frac{(1-u)}{u(1+u)}du=\frac{1}{7}\int(\frac{1}{u}-\frac{2}{u+1})du$$

$$=\frac{1}{7}(\ln|u|-2\ln|u+1|)+c$$

$$=\frac{1}{7}\ln|x^7|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$$

11. 解：$\int_{-3}^{1}f(x)dx=\int_{-3}^{0}xe^{-x}dx+\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx$

$$=\int_{-3}^{0}xd(-e^{-x})+\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx$$

$$=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_{-3}^{0}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta d\theta(\text{令}x-1=\sin\theta)$$

$$=\frac{\pi}{4}-2e^3-1$$

12. 解：由 $f(0)=0$，知 $g(0)=0$。

$$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt\overset{xt=u}{=}\frac{\int_0^x f(u)du}{x}\quad(x\neq 0$$

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad(x\neq 0)$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}$$，$g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

13. 解：$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\ln x$

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}\ln xdx+C)$$

$$=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+Cx^{-2}$$

$y(1)=-\frac{1}{9}$，$C=$　，$y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$

四、 解答题（本大题 10 分）

14. 解：由已知且 $y'=2\int_0^x y\,\mathrm{d}x+y$，

将此方程关于 x 求导得 $y''=2y+y'$

特征方程：$r^2-r-2=0$　解出特征根：$r_1=-1,\ r_2=2.$

其通解为　$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

代入初始条件 $y(0)=y'(0)=1$，得 $C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=\frac{1}{3}$

故所求曲线方程为：$y=\frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$

五、解答题（本大题 10 分）

15. 解：（1）根据题意，先设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，切线方程：$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$

由于切线过原点，解出 $x_0=e$，从而切线方程为：$y=\frac{1}{e}x$

则平面图形面积 $A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{1}{2}e-1$

（2）三角形绕直线 $x=e$ 一周所得圆锥体体积记为 V_1，则 $V_1=\frac{1}{3}\pi e^2$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的图形绕直线 $x=e$ 一周所得旋转体体积为 V_2

$$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy$$

D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$

六、证明题（本大题有 2 小题，每小题 4 分，共 12 分）

16. 证明：

$$\int_0^q f(x)\,d\,x-q\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^q f(x)\,d\,x-q(\int_0^q f(x)\,d\,x+\int_q^1 f(x)dx)$$

$$=(1-q)\int_0^q f(x)\,d\,x-q\int_q^1 f(x)dx$$

$$\overset{\xi_1\in[0,q]\ \xi_2\in[q,1]}{=}q(1-q)f(\xi_1)-q(1-q)f(\xi_2)\overset{f(\xi_1)\geq f(\xi_2)}{\geq}0$$

故有：

$$\int_0^q f(x)\,d\,x\geq q\int_0^1 f(x)dx$$ 证毕。

17.

证：构造辅助函数：$F(x)=\int_0^x f(t)dt\quad,0\leq x\leq\pi$。其满足在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 上可导。$F'(x)=f(x)$，且 $F(0)=F(\pi)=0$

由题设，有

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi\cos xdF(x)=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\sin x\cdot F(x)dx$$，

有 $\int_0^\pi F(x)\sin xdx=0$，由积分中值定理，存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi=0$ 即 $F(\xi)=0$

综上可知 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0,\ \xi\in(0,\pi)$. 在区间 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔定理，知存在 $\xi_1\in(0,\xi)$ 和 $\xi_2\in(\xi,\pi)$，使 $F'(\xi_1)=0$ 及 $F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.