高等数学上册
期末复习题(试题库)

一. 填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-\cos 2x}{\sin 2x}=$________ $\dfrac{3}{2}$

2. 曲线 $y=xe^{-x}$ 的拐点是__________ $(2,2e^{-2})$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$________ $f'(0)$

4. 曲线 $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+x$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线方程为________ $y=x+1$

5. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ 有垂直渐近线_______ $x=\pm 1$ 和水平渐近线______ $y=1$

6. 设 $f(u)$ 可导, $y=\sin^2[f(e^x)]$, 则 $dy=$________ $\sin 2[f(e^x)]\cdot f'(e^x)\cdot e^x dx$

#7. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=$________ $2(e^2+1)$

8. 若 $f'(x_0)=-3$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-3h)}{h}=$_________ -12

9. 若 $\int_1^{+\infty}x^p dx$ 收敛, 则 p 的范围是_______ $p<-1$

#10. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x+1}=$_______ e

11. 设 $\int f(x)dx=F(x)+c$, 则 $\int f(2x)dx=$_______ $\dfrac{1}{2}F(2x)+c$

#12. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$, 则 $\int xf(x)dx=$______ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}\ln x+c$

13. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ x, x\le 0\end{cases}$, 则 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=$_______ $-\dfrac{1}{6}$

#14. 过点 $(1,3)$ 且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程为________ $y=x^2+1$

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\ne 0\\ a, x=0\end{cases}$, 则当 $x\to$______ ∞ 时, 函数 $f(x)$ 是无穷小; 当

$a=$_____ 1 时, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 否则 $x=0$ 为函数的第_____ (一) 类间断点。

16. 已 知 $\int f(x)dx = F(x)+c$ ， 则 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(\arcsin x)dx =$

$F(\arcsin x)+c$

17.当 $x \to 0$ 时， $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则 $a =$

$\frac{3}{2}$

#18. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^{x^3}\frac{\sin t}{t}dt}{x^3}, x \neq 0 \\ a, x=0 \end{cases}$ 是连续函数，则 $a =$____ 1

19. $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $f(1)=0, \int_0^1 [f(x)]^2 dx = 1$，则 $\int_0^1 xf(x)f'(x)dx =$____ $-\frac{1}{2}$

提示： $\int_0^1 xf(x)f'(x)dx = \int_0^1 xf(x)df(x) = xf^2(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)d(xf(x))$

$= -\int_0^1 f(x)[f(x)+xf'(x)]dx = -\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 xf(x)f'(x)dx$，移项便得。

#20. $\Phi(x) = \int_0^x xe^{x^2}dx$，则 $\Phi(1) =$_____ $\frac{1}{2}(e-1)$， $\Phi'(1) =$______ e

21. $\frac{df(x^2)}{dx} = \frac{1}{x}$，则 $f'(x) =$_____ $\frac{1}{2x}$

提示： $f'(x^2)\cdot 2x = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x^2) = \frac{1}{2x^2}$

22. 曲 线 $y = f(x)$ 在 点 $(2, f(2))$ 处 的 切 线 平 行 于 直 线 $y = 3x+1$， 则 $f'(2) =$

3

#23.设 $f(x) = \arctan\sqrt{x}$，则 $x_0 > 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x} =$________ $\frac{1}{2\sqrt{x_0}(1+x_0)}$

24. $y = 2\ln\frac{x+3}{x} - 3$ 的水平渐近线是_______ $y = -3$

25.函数 $y = x^x$ 的导数为______ $x^x(\ln x+1)$

26. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx =$______ $\frac{1}{2}$

#27. $\int_{-1}^1 (|x| + \frac{x^2\sin x}{1+x^2})dx =$_______ 1

28.广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx =$________ $\frac{1}{2}$

29. $f(x)=x$ 的积分曲线中过 $(1,-\frac{1}{2})$ 的那条曲线的方程______ $\frac{x^2}{2}-1$

#30. 设 s 为曲线 $y=x\ln x$ 与 $x=1,x=e$ 及 x 轴所围成的面积，则 $s=$_____ $\frac{1}{4}(e^2+1)$

31. $\int f'(2x)dx=$________ $\frac{1}{2}f(2x)+c$

32. 曲线 $y=\ln(e-\frac{1}{x})$ 的全部渐近线为_______ $y=1,x=0,x=\frac{1}{e}$

#33. 曲线 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体体积 $\frac{3}{10}\pi$

34. 点 $(0,1,1)$ 到平面 $2x+y-2z+2=0$ 的距离为________ $\frac{5}{3}$

35. 设向量 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j}+\lambda\vec{k}$，则当 $\lambda=$____ -10 时，$\vec{a}\perp\vec{b}$；当 $\lambda=2,\vec{a}//\vec{b}$ 。

本题不作要求 **36.** 空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z^2=3(x^2+y^2)\end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{4}\\ z=0\end{cases}$

37. 设 $|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=2,(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$，则 $|2\vec{a}-3\vec{b}|=$______ $2\sqrt{19}$

38. 设向量 $\vec{a}=\{2,1,-2\},\vec{b}=\{3,4,-5\}$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为______ $2\sqrt{2}$

39. 已知向量 $\vec{a}=m\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ 和向量 $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+n\vec{k}$ 共线，则 $m=$_____ $15,n=-\frac{1}{5}$

40. 设平行四边形二边为向量 $\vec{a}=\{1,-3,1\},\vec{b}=\{2,-1,3\}$，则其面积为_____ $3\sqrt{10}$

41. 设点 $A(4,0,5),|\vec{AB}|=2\sqrt{14}$，向量 $\vec{AB}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}}$，$\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{14}}$，则 B 点坐标为_______ $(10,2,1)$

本题不作要求 **42.**曲线$\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为________

$3x^2+3z^2+2y^2=12$

43. 设 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3,$ 且 $\vec{a}//\vec{b}$ ，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ________ $\pm 6, \vec{a}\times\vec{b}=$

$\vec{0}$

44.设 $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases} \mathrm{x}+1, \mathrm{x}<0 \\ 0, \mathrm{x}=0 \\ \mathrm{x}^2, \mathrm{x}>0 \end{cases}$, $\int_{-2}^{0}\mathrm{f}(\mathrm{x}+1)\mathrm{dx}=$__________ $\underline{\frac{5}{6}}$

#45. $\phi(\mathrm{x})=\int_0^{\mathrm{x}}\sin(\mathrm{x}-\mathrm{t})\mathrm{dt}, \phi'(\mathrm{x})=$________ $\underline{\sin x}$

二. 选择题

1.设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\beta}-n^{\beta}}=2005$，则 α,β 的值为（　　）　C

$A.-2004,\dfrac{1}{2005}$　　$B.\dfrac{1}{2005},-\dfrac{2004}{2005}$　　$C.-\dfrac{2004}{2005},\dfrac{1}{2005}$　　$D.\dfrac{2004}{2005},-\dfrac{1}{2005}$

#2.设 $f(x)=\begin{cases}x^{2}\cos\dfrac{1}{x},0<x<1\\ x,-1<x\le 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处(　　)　A

$A.$连续，不可导　　$B.$连续，可导　　$C.$可导，导数不连续　　$D.$为间断点

3.曲线 $y=\dfrac{\pi}{2}+\sin x$ 在 $x=0$ 处的切线与 x 轴正方向的夹角为（　）　B

$A.\dfrac{\pi}{2}$　　$B.\dfrac{\pi}{4}$　　$C.0$　　$D.1$

4.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f(0)=1, f(1)=0$，则至少存在一点

$\xi\in(0,1)$，有　　A　　设 $F(x)=xf(x)$ 利用 Rolle 定理

$A.f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$　　$B.\ f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$　　$C.\ f(\xi)=-\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$　　$D.\ f(\xi)=\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$

#5.若 $a^{2}-3b<0$，则 $f(x)=x^{3}+ax^{2}+bx+c=0$（　　）　B

$A.$无实根　　$B.$有唯一实根　　$C.$三个单实根　　$D.$重根

#6.函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，则（　　）　D

$A.f'(x_0)=0$　　$B.f''(x_0)<0$　　$C.\ f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$　　$D.\ f'(x_0)=0$ 或不存在

7.设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为（　　）　D

$A.1+\sin x$　　$B.x+\sin x$　　$C.1+\cos x$　　$D.x-\sin x$

#8.设 $\ln f(t)=\cos t$,则 $\int\dfrac{tf'(t)}{f(t)}dt=$（　　）　A

$A.t\cos t-\sin t+c$　　$B.t\sin t-\cos t+c$　　$C.t(\cos t+\sin t)+c$

$D.t\sin t+c$

9. 设 $f(x)$ 连续， $F(x)=\int_0^{x^2} f(t^2)dt$ ， 则 $F'(x)=$ （　　　） C

$A.f(x^4)$　　$B.x^2 f(x^4)$　　$C.2xf(x^4)$　　$D.2xf(x^2)$

10.下列广义积分收敛的是（　　）　C

$A.\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　　$B.\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　　$C.\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$　　$D.\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

#11.广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=$ （　　）　C

$A.\frac{\pi}{2}$　　$B.\pi$　　$C.\frac{\pi}{4}$　　$D.$发散

12.下列函数中在区间 $[0,3]$ 上不满足拉格朗日定理条件的是（　　）　C

$A.2x^2+x+1$　　$B.\cos(1+x)$　　$C.\frac{x^2}{(1-x^2)}$　　$C.\ln(1+x)$

13.求由曲线 $y=\ln x$,直线 $x=0, y=\ln a, y=\ln b(b>a>0)$ 所围图形的面积为（　　） C

$A.a-b$　　$B.b^2-a^2$　　$C.b-a$　　$D.b+a$

#14.若 $\int f(x)e^{-\frac{1}{x}}dx=e^{-\frac{1}{x}}+c$ ，则 $f(x)=$ （　　）　B

$A.-\frac{1}{x}$　　$B.\frac{1}{x^2}$　　$C.\frac{1}{x}$　　$D.-\frac{1}{x^2}$

15.点 $M(3,-2,1)$ 关于坐标原点的对称点是（　　）　A

$A.(-3,2,-1)$　　$B.(-3,-2,-1)$　　$C.(3,-2,-1)$　　$D.(-3,2,1)$

16.向量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}$ 的位置关系是（　　）　C

$A.$共面　　$B.$平行　　$C.$垂直　　$D.$斜交

17.设平面方程为 $Ax+Cz+D=0$ ，其中 A,C,D 均不为零，则平面（　　）

B

$A.$平行于 x 轴　　$B.$平行于 y 轴　　$C.$经过 x 轴　　$D.$经过 y 轴

18.设直线方程为 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ B_2y+D_2=0\end{cases}$ 且 $A_1,B_1,C_1,D_1,B_2,D_2\neq 0$，则直线(　　)

C

$A.$过原点　　$B.$平行于 x 轴　　$C.$垂直于 y 轴　　$D.$平行于 z 轴

19.直线 $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 和平面 $4x-2y-2z=3$ 的位置关系为（　　）　　C

$A.$斜交　　$B.$垂直　　$C.$平行　　$D.$直线在平面上

20.已知 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处　　（**B**）

A. $f(x)$ 导数存在且 $f'(a)\neq 0$　　B. $f(x)$ 取极大值　　C. $f(x)$ 取极小值

D. $f(x)$ 导数不存在

三. 计算题

#1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln\cos x}{x^2}+x^2\sin\frac{1}{x})$　　$-\frac{1}{2}$　　**# 2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}t\ln t\,dt}{x^4}$　　$-\frac{1}{8}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$　　0　　**4.** $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$　　$e^{-\frac{1}{2}}$

#5. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$　　$\frac{2}{\pi}$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x\ln x}$ **=1**

解：一）原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^x(1+\ln x)}{\ln x+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$，

二）原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}$,$\because \lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0,\therefore e^{x\ln x}-1\sim x\ln x, x\to 0$

$=1$。

7.设 $f(x)$ 为连续函数，计算 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)dt$　　$a^2f(a)$

8. $\int\sin(\ln x)dx$　　$\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+c$

9. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$　　$2\sqrt{2}$　　**10.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

$\frac{\pi}{16}a^4$

11. 设 $y=(\sin x)^{\cos x}$，求 y'

$(\sin x)^{\cos x}[-\sin x\ln(\sin x)+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}]$

#12. 设 $\int_0^{\ln y} e^t dt+\int_0^{x^2}\cos t dt=0$，求 dy $\qquad -2x\cos x^2 dx$

13. 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求积分

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(\cos x)\cos x-f'(\cos x)\sin^2 x]dx$

提示：原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\cos x dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x df(\cos x)$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\cos x dx+\sin x f(\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\cos x dx=2f(0)$

14. $\int\dfrac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$ $\qquad \dfrac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\dfrac{5}{2}\arctan\dfrac{x-2}{2}+c$

15. 设 $\begin{cases} x=f(t)-\pi \\ y=f(e^{3t}-1)\end{cases}$，其中 f 可导，且 $f'(0)\neq 0$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$ $\qquad 3$

#16. $\int\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ $\qquad \arcsin x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+c$

17. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}dx$

提示：原式 $=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin x\cos x\right|dx=1$

18. $\int_0^2\dfrac{1}{(1-x)^2}dx$ $\qquad$ 发散

19. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

$2(1-\dfrac{\pi}{4})$

20. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad \arccos\dfrac{1}{x}+c$

21. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+4)\cos^4 x dx$ $\qquad \dfrac{3}{2}\pi$

22. $\int\dfrac{\ln 3x}{x}dx$ $\qquad \dfrac{1}{2}\ln^2(3x)+c$

23. $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3\cdot e^{-x^2}dx$ $\qquad -\dfrac{1}{4}\ln 2+\dfrac{1}{2}$

#24. $\int\dfrac{dx}{e^x(1+e^{2x})}$ $\qquad -e^{-x}-\arctan e^x+c$

25. $\int\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}dx$

26. 设 $f'(e^x)=1+x$，求 $f(x)=x\ln x+c$

27. $\int x^5\cos x^3 dx = \frac{1}{3}x^3\sin x^3 + \cos x^3 + c$

28. $\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx = -\arcsin x\sqrt{1-x^2} - \ln|x| + c$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}] + c$

#30. $\int \frac{dx}{x(1+x^{10})} = \ln|x| - \frac{1}{10}\ln|1+x^{10}| + c$

#31.已知 $f(x)$ **的一个原函数为** $(1+\sin x)\ln x$，**求** $\int xf'(x)dx$

$= x\cos x\ln x + 1 + \sin x - (1+\sin x)\ln x$

32. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}(x^2+1) - x + c$

#33. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln(x+1) - 4\sqrt{x} + 4\arctan\sqrt{x} + c$

#34. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}}dx = \frac{\pi}{2}$　　**35.** $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{\pi}{4}$

本题不作要求 **36.已知** $\varphi(x)$ **为连续函数，令**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x [(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)du]dt}{\ln(1+x^2)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ **在** $x=0$ **处的连续性与可微性。**

连续，可微

#37.设 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上可导，且满足** $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$ ，**证必存在一点** $\xi \in (0,1)$，**使**

$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$。提示：利用积分中值定理和Rolle定理

#38.设 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续，单调减且取正值，证：对于满足** $0<\alpha<\beta<1$ **的任何**

α,β **有**

$\beta\int_0^\alpha f(x)dx > \alpha\int_\alpha^\beta f(x)dx$ 。

提示：$\beta\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_\alpha^\beta f(x)dx=\beta\int_0^\beta f(x)dx+\beta\int_\beta^\alpha f(x)dx-\alpha\int_\alpha^\beta f(x)dx$

$=\beta\int_0^\beta f(x)dx+(\beta-\alpha)\int_\beta^\alpha f(x)dx\Rightarrow$

39.设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，单调不减且 $f(0)\ge 0$，试证：

$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)dt, x>0\\ 0, x=0\end{cases}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减。（$n>0$）

40. $\int_{-1}^1 x\ln(1+e^x)dx \quad =\frac{1}{3}$

原 $\overset{x=-t}{=}\int_{-1}^1(-t\ln(1+e^{-t})dt=\int_{-1}^1[-x\ln(1+e^x)+x^2]dx=-\int_{-1}^1 x\ln(1+e^x)dx+\int_{-1}^1 x^2dx$

#41.设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$ 。 $=\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$

42. $\int_0^1 t|t-x|dt \qquad \begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x & t>x\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3} & t\le x\end{cases}$

43. $\int_a^b|x|dx,(a<b) \quad \begin{cases}\frac{b^2-a^2}{2} & x>0\\ \frac{a^2-b^2}{2} & x<0\end{cases}$

44. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且对 $\forall x,y, f(x+y)=f(x)+f(y)$，求 $\int_{-1}^1(1+x^2)f(x)dx$

提示：$f(x)$为奇函数

#45. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$

提示：$f(x)=\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}$， $f(-x)=\frac{\sin^2 x}{1+e^x}=\frac{e^{-x}\sin^2 x}{1+e^{-x}}=\frac{(e^{-x}+1-1)\sin^2 x}{1+e^{-x}}$

$=\sin^2 x-\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}=\sin^2 x-f(x) \quad f(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x$

原 $=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx=$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}te^t\cdot\sin tdt}{x^6e^x}=\frac{1}{3}$

47. 设向量 $\vec{a}=\{2,-3,1\},\vec{b}=\{1,-2,3\},\vec{c}=\{2,1,2\}$，向量 $\vec{r}$ 满足 $\vec{r}\perp\vec{a},\vec{r}\perp\vec{b}$，且 $\Pr j_{\vec{c}}\vec{r}=14$

求向量$\bar{r}$。 $\{14,10$

48.1）求过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$ 的平面方程，

$x+3y=0$

2）求过三点 $P(2,3,0),Q(-2,-3,4),R(0,6,0)$ 的平面方程。

$3x+2y+6z-12=0$

49.求过点 $P(2,-1,-1),Q(1,2,3)$ 且垂直于平面 $2x+3y-5z+6=0$ 的平面方程。

$9x-y+3z-16=0$

50. 求过点 $A(3,1,-2)$ 且通过直线 $L:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程。

$8x-9y-22z-59=0$

51.求与平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行且与三坐标所构成的四面体体积为1的平面方程。

$2x+y+2z-2\sqrt[3]{3}=0$

52.求过点 $M(2,4,0)$ 且与直线 $L:\begin{cases}x+2z-1=0\\y-3z-2=0\end{cases}$ 平行的直线方程。

$\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{1}$

53.求点 $A(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影。 $(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$

54.求过直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程。

$x+20y+7z-12=0$

本题不作要求 **55.**若动点到坐标原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离，该动点轨迹表示何种曲面？ $x^2+y^2+8z=16$ 旋转曲面

四.列表讨论函数 $y=x\cdot e^{-x}$ 的单调区间、极值及曲线的凹凸区间、拐点、渐近线。

#五.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x,0\le x\le\pi\\0,x<0 or x>\pi\end{cases}$，求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}0, x<0\\ -\dfrac{1}{2}(\cos x-1), 0\le x\le\pi\\ 1, x>\pi\end{cases}$$

六．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，证明 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f'(t)dt=f(x)-f(a)$。

七..设 $D_1: y=2x^2, x=a, x=2, y=0; D_2: y=2x^2, y=0, x=a, 0<a<2$

1.试求 D_1 绕 x 轴旋转得旋转体体积 V_1； D_2 绕 y 轴旋转得旋转体体积 V_2；

2.问当 a 为何值时 V_1+V_2 得最大值？并求该最值。

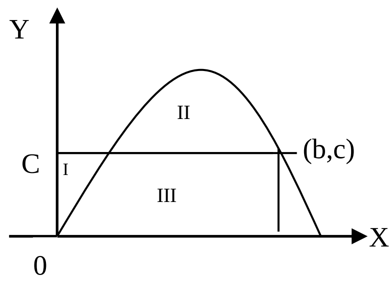
$V_1=\dfrac{4}{5}\pi(32-a^5)$， $V_2=\pi a^4$， $a=1$， $(V_1+V_2)_{\max}=\dfrac{129}{5}\pi$

八.已知 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，求 $f(x)$。

提示： $f'(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\Rightarrow f'(u)=1-2u+\dfrac{u}{1-u}$，

$f(x)=x^2-\ln|x-1|+c$

九.设 $y=c$ 与 $y=2x-x^2$ 相交于第一象限（如图）。



1.求使得两个阴影区域面积相等的常数 c；
2.在 1 的情况下，求区域 I 绕 x 轴旋转的旋转体体积。

提示： $s_I=s_{II}\Rightarrow s_{I+III}=s_{II+III}$，

$\int_0^b cdx=\int_0^b(2x-x^2)dx\Rightarrow c=b-\dfrac{1}{3}b^2$， 又 $c=2b-b^2$，

$\Rightarrow b=\dfrac{3}{2}, c=\dfrac{3}{4}, \begin{cases}y=\dfrac{3}{4}\\ y=2x-x^2\end{cases}\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{3}{2}$，

$V=\dfrac{41}{240}\pi$。

#十.设 $f(x)=x-\int_0^\pi f(x)\cos xdx$，证： $\int_0^\pi f(x)dx=\dfrac{\pi^2}{2}+2\pi$。

提示：设 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = A$， $A=-2$

十一.设直线 $y=ax+b$ 与直线 $x=0, x=1$ 及 $y=0$ 所围成的梯形面积为 A，求 a,b，使这块面积绕 x 轴旋转所得体积最小。$(a\ge 0, b\ge 0)$

提示：$V=\int_0^1 \pi(ax+b)^2dx=\pi(\frac{a^2}{3}+ab+b^2), A=\int_0^1(ax+b)dx=\frac{a}{2}+b$，

$a=0, b=A$时，体积最小

#十二.求抛物线 $y=-x^2+1$ 在 $(0,1)$ 内的一条切线，使它与两坐标轴和抛物线 $y=-x^2+1$所围图形的面积最小。

提示：切线$Y-(-x^2+1)=-2x(X-x), A(\frac{x^2+1}{2x},0), B(0,x^2+1)$，

$s=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^2}{2x}-\int_0^1(-x^2+1)dx \Rightarrow s'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所求切线为 $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{4}{3}$

十三.求通过直线 $\frac{x}{2}=y+2=\frac{z+1}{3}$ 与平面 $x+y+z=15$ 的交点，且与平面 $2x-3y+4z+5=0$垂直相交的直线方程。 $\frac{x+4}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+7}{4}$

十四.证明 $3x-1-\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=0$在区间 $(0,1)$ 内有唯一的实根。

提示：令 $F(x)=3x-1-\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow F(0)\cdot F(1)<0$，再证唯一性。

本题不作要求 十五. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$，证：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}f'(0)$

提示：$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt \overset{x^n-t^n=u}{=} -\frac{1}{n}\int_{x^n}^0 f(u)du=\frac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)du$

十 六 . 设 $x\ge 0, f(x)$ 满 足 $\int_0^{x^2(1+x)} f(x)dx=x$, 求 $f(2)$ 。

提示：对$\int_0^{x^2(1+x)} f(x)dx = x$求导,

十七. 证：$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx, f(x)$ 连续，$a>0$，并求 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin(x^2)dx$ 。

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^a x^2 f(x^2)dx^2 \overset{x^2=t}{=} \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt \qquad \text{所求值为}1$$

十八. 求 $f(x) = \int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大、小值。最小值为1,最大值为$1+e^{-2}$

十九. 已知 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 xf''(2x)dx$ 。$=2$

二十. 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ 。$=\frac{\pi}{2}$

提示：用分部积分，先将$\frac{1}{x^2}$凑入微分

二十一. 设 $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2}dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx$ 。同41题

二十二. $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt, x>0$, 求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$ 。$=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

二十三. 1) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, 0\le f'(x)\le 1$，证：

$(\int_0^1 f(x)dx)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx$ 。

提示：可利用已知条件知$f(x)\le 1$

2) 设 $f(x)\in C[a,b]$，证：$(\int_a^b f(x)dx)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$ 。

提示：
$$\text{设}F(x) = (\int_a^x f(t)dt)^2 - (x-a)\int_a^x f^2(t)dt \quad x\in(a,b)$$
$$\Rightarrow F'(x) < 0$$

#3) 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，证：$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2$

提示：设$F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_a^x \frac{1}{f(t)}dt - (x-a)^2 \quad \Rightarrow F'(x)$

4) 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且严格单调增加，证：$(a+b)\int_a^b f(x)dx < 2\int_a^b xf(x)dx$ 。

提示：设$F(x) = 2\int_a^x tf(t)dt - (a+x)\int_a^x f(t)dt \quad \Rightarrow F'(x)$

5) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\le M, f(a)=0$，证：

$\int_a^b f(x)dx \le \frac{M}{2}(b-a)^2$。

提示：$x\in[a,b]$,有微分中值定理：$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\quad \xi\in(a,x)$

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx=$

二十四. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且

$\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi} f(x)\sin xdx=0$，证明：$\exists$ 一个 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证：在 $(0,\pi)$ 内 $\sin x>0$，由 $\int_0^{\pi} f(x)\sin xdx=0$ 可知，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内不能恒正或负，由于 $f(x)$ 的连续性可知 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内必有零点。若能证明零点有两个以上，则可由罗尔定理可得证。

反证：若 $x_0\in(0,\pi)$ 是 $f(x)$ 的唯一零点，则当 $x\ne x_0$，

$\sin(x-x_0)f(x)$ 就恒正或负，于是 $\int_0^{\pi} \sin(x-x_0)f(x)dx\ne 0$，

而 $\int_0^{\pi} \sin(x-x_0)f(x)dx=\int_0^{\pi}(\sin x\cos x_0-\cos x\sin x_0)f(x)dx$

$=\cos x_0\int_0^{\pi}\sin xf(x)dx-\sin x_0\int_0^{\pi}\cos xf(x)dx=0$，矛盾，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点，由罗尔定理便得证。