重要知识点储备

常用等价无穷小:$x\to 0$

$\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$\arctan x \sim x$ $\arcsin x \sim x$ $\ln(1+x) \sim x$

$e^x - 1 \sim x$ $a^x - 1 \sim x\ln a$ $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$

两个重要极限

(1) $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square} = 1$ (2) $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e$

注: $\square$代表相同的表达式

结论.

偶倍奇零

(1) 若 $f(-x)=f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}\, x\to-\infty)}} f(x)=b$, 则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+ \\ (\text{或}\, x\to x_0^-)}} f(x)=\infty$, 则曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线 $x=x_0$.

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$$

$$\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

高等数学自我检查试题集

自我检查试题一

一、3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x[f(1-\frac{1}{x})-f(1)]\right]=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[f(1-\frac{1}{x})-f(1)]}{-\frac{1}{x}}=-f'(1)=-1$

4. $\int_0^1 f'(x)f''(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}f'(x)=[\frac{1}{2}[f'(x)]^2]_0^1=\frac{1}{2}a^2$

二、1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\int_{x^3}^0\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{x^3}^0\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3x^2\frac{\sin x^3}{x^3}}{3x^2}=-1=a$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\ln(1-x\sin x)}=-3$, 当$x\to0$时, $\ln(1-x\sin x)\to0$， 则$f(x)\to0$,

$f(x)$可导一定连续，因此$f(0)=0$;

$x\to0$时, $\ln(1-x\sin x)\sim-x\sin x<0$,则$f(x)>0=f(0)$;故$f(0)$为极小值.

自我检查试题二

一、1. $f(x)=\dfrac{x(1-x)(x+1)}{\sin\pi x}$,间断点有$x=0,\pm1,\pm2,\cdots$但是$x=0,\pm1$从分子可以看出比较特殊，均为可去间断点（用洛必达法则极限均存在）

2. $f'(x)=e^{f(x)},f''(x)=f'(x)e^{f(x)}=e^{2f(x)}$,

则$f'''(x)=2f'(x)e^{2f(x)}=2e^{3f(x)}$，因此$f'''(2)=2e^{3}$.

5.整理为$y'+\dfrac{1}{x}y=0$,一阶线性齐次微分方程.（也可以分离变量）

二、2. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，分母趋于0，则分子必须趋于0，函数又在$x=0$连续，

则$f(0)=0$,故原式相当于$\lim\limits_{h^2\to0^+}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2-0}=1$，仅能看出右导数存在.

4.(A)分母趋于0,分子必须趋于0，$f(x)$在$x=0$连续，则$f(0)=0$;

(B)分母趋于0,分子必须趋于0，$f(x)$在$x=0$连续，则$2f(0)=0$;

(C)由(A)得$f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$;

(D)取$f(x)=|x|$,显然$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-|-x|}{x}=0$,但是$f'(0)$不存在;

5.$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)=[xf(x)]_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

几何意义表示:

矩形$OBAC$的面积−曲边梯形$OBAD$的面积=曲边三角形ACD的面积

自我检查试题三

一、4. 拆成俩，分别偶倍奇零. 5. 分离变量 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{x}{1+x^2}dx$

二、2. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，则在$x=0$连续；

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$震荡不存在，则不可导.

4. $\int_0^{\sin x}f(t)\,\mathrm{d}t=x$，两边求导得$\cos xf(\sin x)=1$，$x=\dfrac{\pi}{4}$代入得$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$.

5. $\lambda=2$，$P_m(x)=x$，特征方程$r^2-5r+6=0$，$r_1=2$，$r_2=3$，则$y^*=xe^{2x}(ax+b)$

自我检查试题四

一、2. $y=f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+t)^{\frac{x}{t}}=xe^{x}$.

3.换元令 $\ln x=t$,则$f'(t)=e^{t}+1$,然后去求$f(t)$.

4.令$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=a$,对$f(x)=x^2+\dfrac{2}{3}a$两边同时在[0,1]积分，

则$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,x+\dfrac{2}{3}\int_0^1 a\,\mathrm{d}\,x$, 即$a=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}a$,故$a=1$.

二、1.（C） $x\sin x$在$x\to\infty$时无界但不是无穷大；

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,因此是无穷间断点.答案A,D 都对.

3.注意$x=0$是个导数不存在的点，两边异号，也是极值点.

三、2.分段函数，$x=0$必须用定义.

自我检查试题五

一、1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}$，洛必达法则.

3.$\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，两边同时求导求$f(x)$.

4.偶倍奇零. 5.$\lambda=0, P_m(x)=x$,特征根为0和$-\dfrac{5}{2}$，则$y^*=x(ax+b)$.

二、1.(B)等价于$\dfrac{1}{2}x^2$,(C)等价于$-\dfrac{1}{2}x^2$,排除法选D.

2.已知$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$存在，现在看选项中哪个能让

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$不存在.

(1)若$f(a)=0$,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{x-a}$,$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=f'(a)$, 此时若

有$f'(a)$=0，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=\pm\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}$=0存在，

若有$f'(a)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=\pm\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=\pm f'(a)$不存在.

(2)若$f(a)>0$,由于$f(x)$可导一定连续，则在邻域内$f(x)>0$,

$$\text{则}\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),\text{存在}$$

(3)若$f(a)<0$,由于$f(x)$可导一定连续，则在邻域内$f(x)<0$,

$$\text{则}\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-f'(a),\text{存在}$$

3.$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$, 显然$f'(a)=0$，

$x\to a^-$时，$f'(x)>0$, $x\to a^+$时，$f'(x)<0$,先增后减，极大值.

4.令$\sin x=t$,则$f'(t)=1$，因此$f(t)=t+C$，故$f(\sin x)=\sin x+C$

5.利用积分中值定理，$F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{x-a}f(\xi)(x-a)=x^2f(\xi)$,

因此,$\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}x^2f(\xi)=a^2f(a)$, ξ介于x与a之间，所以$\xi\to a$.

三、5.两边同时积分得：$F^2(x)=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}\,x=\int\frac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}\,x$

$$=\int\frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}\,x-\int\frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}\,x=\int\frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}\,x+\int e^x\mathrm{d}\,\frac{1}{1+x}$$

$$=\int\frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}\,x+\frac{e^x}{1+x}-\int\frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}\,x=\frac{e^x}{1+x}+C$$

$F(0)=1$,则$C=0$,然后得$F(x)$，再求导即可得到$f(x)$

自我检查试题六

一、2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=2$

5.两边对x求导得$f[x^2(1+x)]\cdot(2x+3x^2)=1$,当$x=1$时可以求得$f(2)=\frac{1}{5}$

二、2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\left(ax^2+bx+1\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=0$,得$b=1$

继续$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2a}{2}=0$,得$a=\frac{1}{2}$

3. $f(x)=-\cos x+C_1, F(x)=-\sin x+C_1x+C_2$,只有$B$合适.

4.由题意可以看出在邻域内$f''(x)>0$,则$f'(x)$单调递增，

而$f'(0)=0$,于是$f'(x)$先负后正，故为极小值.

三、5.令$x=-u$, $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}\,x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2(-u)}{1+e^{u}}-\mathrm{d}\,u=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 u}{1+e^{u}}\mathrm{d}\,u=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\mathrm{d}\,x$

则$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}\,x+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\mathrm{d}\,x)=\frac{1}{2}(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{1}{1+e^{x}})\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x)$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}+\frac{1}{1+e^{x}})\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x$$

自我检查试题七

一、4. 先换元, $\sin^2 x = t$, 则$f'(t) = 1 - t$, 故$f(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + C$, 可得$f(x)$

二、1. $A.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x} = 0$, $B.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = 0$,

$C.\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不是无穷大，参照书42页题7

3. $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $x\sin x \sim x^2$,所以为同阶无穷小.

4. $x > 0$时, $\int |x|dx = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$,

$x < 0$时, $\int |x|dx = \int -xdx = -\frac{1}{2}x^2 + C$,综合得$\int |x|dx = \frac{1}{2}x|x| + C$

5. $\int_a^b f'(2x)dx = \frac{1}{2}[f(2x)]_a^b = \frac{1}{2}\left[f(2b) - f(2a)\right]$

自我检查试题八

一、5. $\int_0^a xf''(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a x\,\mathrm{d}f'(x)=[xf'(x)]_0^a-\int_0^a f'(x)\,\mathrm{d}x$

$$=a-[f(x)]_0^a=a-f(a)+f(0)=a-1$$

自我检查试题九

一、2. $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}ax^2, \cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$, 则$a=-\frac{3}{2}$.

5.偶倍奇零.

二、2. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{1+x^2}+\alpha}{\Delta x}=\frac{1}{1+x^2}$,则$f'(-2)=\frac{1}{5}$

3. $f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi), \xi\in(0,1)$

二阶导数大于0，导数单调递增，则选B.

自我检查试题十

一、5.偶倍奇零.

二、1.$A.\ln(1+\tan x)\sim\tan x\sim x, B.\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,$

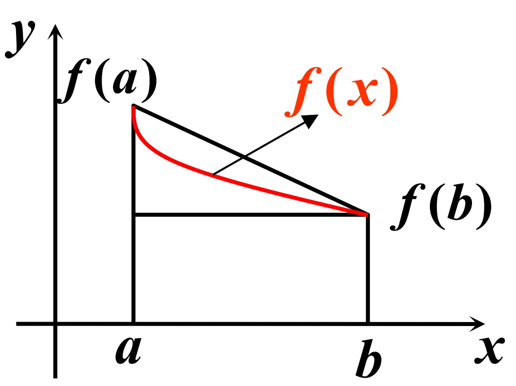
$C.\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$与$x$的比值的极限为1

$D.e^{\arcsin x}-1\sim\arcsin x\sim x$

3.$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}|x|=0$,则可导且连续。

4.$\int x\,\mathrm{d}\,f(x)=xf(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}\,x=x(\frac{\ln x}{x})'-\frac{\ln x}{x}+C$

5.



根据题意，画出如图所示的图形，去比较与三个量对应的面积即可.