河南工业大学 2020-2021 学年第 2 学期
高等数学押题卷答案

1. 6

2. $-\frac{1}{3}$（dx+2dy）

3. 0

解析：$\iint \frac{xy}{x^2+y2}dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho cos\theta sin\theta d\rho = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} sin2\theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho d\rho = 0$

4. 1<λ<2

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$

解析：$\because \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$

$\therefore \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} * \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$， $x \in (-2, 2)$

6. B

7. C

解析： l 的方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (y+3z^2, x+2yz, y^2+6xz)$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{P_0} = (4, 3, 7)$

$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,1,1)}\cos\gamma = \frac{\sqrt{8}}{3}$

8. D

解析：定义域为球，半径为$R\sqrt{R}$，故上述三重积分为球的体积$\frac{4\pi R^4\sqrt{R}}{3}$

9. B

解析：$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$可知$, R = 2$

又$\because x+1 = R,$可得：

$$\begin{cases} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

在 x=1 处，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n*2}$收敛；

在 x=−3 处，级数$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{2n}$发散;

$\therefore$收敛域为:$(-3,1]$

10. C　因为初等函数 f(x，y)=$\frac{e^x+y}{x+y}$在(0, 1)处连续，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{e^x+y}{x+y}=\frac{e^0+1}{0+1}=2$

11. $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$

12. 11x+2y+z−15=0

13. 设 F(x, y, z)=$\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{xy+zy}$

14. $\int_0^{\pi}(\sin 2x+2(x^2-1)\sin x\cos x)\,dx=-\int_0^{\pi}x^2.\frac{1}{2}d\cos 2x=-\frac{\pi^2}{2}$

15. 切线方程为$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1}$　法平面方程为 x−z=0

16. 解：设Σ：z=0（$x^2+y^2\leqslant a^2$），方向向下。

则Σ与 S 所围成的区域为Ω.

原式$=\frac{1}{a^3}\iint_S xdydz+(z+1)dxdy$

$=\frac{1}{a^3}(\oiint_{S+\Sigma}-\iint_{\Sigma})$

$=\frac{1}{a^3}(-\iiint_{\Omega}2d\Omega+\iint_{x^2+y^2\le a^2}dxdy)$

$=\frac{1}{a^3}(-2\cdot\frac{2}{3}\pi a^3+\pi a^2)$

$=\frac{\pi}{a}-\frac{4}{3}\pi$

17. 解 ：易知，此级数的收敛区间为（0，2）. 将已给幂级数通过变形，转化为几何级数来求其和.

令 x−1=t，得幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$.

设和函数$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$（当幂级数系数 a_n 分子中含有 n 时，宜用先积后

微法），则

$$\int_0^t s(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}, \quad |t| < 1.$$

所以

$$s(t) = (\frac{t}{1-t})' = \frac{1}{(1-t)^2}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} = s(x-1) = \frac{1}{(1-t)^2}, \quad 0 < x < 2.$$

18. 解：先求函数在区域 $x^2+y^2<25$ 内的驻点

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0, x = 6, y = -8$.

但 $(6,8)$ 不在区域 $x^2+y^2 \le 25$ 内，故函数的最大值和最小值必在边界 $x^2+y^2=25$ 上

再求 $z = x^2+y^2-12x+16y$ 在边界 $x^2+y^2=25$ 上的条件极值

设 $F(x,y,\lambda) = x^2+y^2-12x+16y-\lambda(x^2+y^2)$

令 $\begin{cases} F_x' = 2x - 12 - 2\lambda x = 0 & (1) \\ F_y' = 2y + 16 - 2\lambda y = 0 & (2) \\ F_\lambda' = x^2 + y^2 - 25 = 0 & (3) \end{cases}$

由 $(1),(2)$ 得 $x = \frac{6}{1-\lambda}$，$y = \frac{-8}{1-\lambda}$，代入 (3) 式，有

$$\left(\frac{6}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-8}{1-\lambda}\right)^2 = 25$$

得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. 可得驻点 $P_1(3,-4), P_2(-3,4)$ 而 $z(3,-4) = -75, z(-3,4) = 125$

故 z 的最大值为 125, 最小值为−75.

19. 解：质心坐标（$\bar{x}$,$\bar{y}$） $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$

$$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} x^2 y dy = \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^{x} y dy$$

$$=\int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - x^4)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{35}$$

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} x \cdot x^2 dy = \frac{1}{48}$$

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} y \cdot x^2 dy = \frac{1}{54}$$

$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{35}{48}$　　$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{35}{54}$

故该薄片的质心为$(\frac{35}{48}, \frac{35}{54})$.

20. 分析：问题的证明与考察两个正项级数的通项关系有关，可用正项级数的比较审敛法。

证 ：因为$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$，$a_n > 0$, $b_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$. 所以

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1},\ \ \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2},\ \cdots,\qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

将这些式子两端分别相乘$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$, 即

$$a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n$$

或

$$b_n \le \frac{b_1}{a_1} a_n$$

从而由比较审敛法知，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛（则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$收敛），从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

收敛；若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散（则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1}{a_1} a_n$发散），从而$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散.