高等数学上

一、填空题（将正确答案填在横线上，本大题共 4 小题，每题 4 分，共 16 分）

1. 已知当 $x \to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$__________。

答案：$a=\dfrac{3}{2}$

2. $\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du\,(t>0) \end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________________。

答案：$\dfrac{dy}{dx}=t$

3．微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为_______________。

答案：$(x-4)y^4=Cx$

4．$\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}=$_______________________。

答案：$I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 4 小题，每题 4 分，共 16 分）

1．如果 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0 \\ b(1-x^2), x>0 \end{cases}$ 处处可导，则（　B　）。

(A) $a=b=1$；　(B) $a=0,b=1$；　(C) $a=1,b=0$；　(D) $a=-2,b=-1$。

2. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且取得极大值，则 $f(x)$ 在 x_0 处必有（　C　）。

(A) $f'(x_0)=0$；　(B) $f''(x_0)<0$

(C) $f'(x_0)=0$或不存在；　(D) $f'(x_0)=0$且$f''(x_0)<0$。

3．若 $\dfrac{\ln x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx =$（　D　　）。

(A) $\dfrac{\ln x}{x}+C$；　　(B) $\dfrac{1+\ln x}{x^2}+C$；　　(C) $\dfrac{1}{x}+C$；

(D) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}+C$。

4．微分方程 $y'''=\sin x$ 的通解是(　A　)。

(A) $y=\cos x+\dfrac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$；　　(B) $y=\cos x+C_1$；

(C) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$；　　(D) $y=2\sin 2x$；

三、解答下列各题（本大题共 2 小题，共 14 分）

1.**（本小题 7 分）**

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^t-1-t)^2dt}{x\sin^4 x}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^t-1-t)^2dt}{x\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^t-1-t)^2dt}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1-x)^2}{5x^4}$　　3 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(e^x-1-x)(e^x-1)}{20x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(e^x-1-x)x}{20x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1-x)}{10x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{20x}=\dfrac{1}{20}$　　7 分

2.**（本小题 7 分）**

设 $y(x)=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x},(\dfrac{1}{2}<x<1)$，求 dy。

解：取对数　$\ln y=\tan\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)$　　2 分

两边对 x 求导：$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\pi}{2}\sec^2\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)+\dfrac{1}{x-2}\tan\dfrac{\pi}{2}x$　　5 分

$dy=y'dx=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}[\dfrac{\pi}{2}\sec^2\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)+\dfrac{1}{x-2}\tan\dfrac{\pi}{2}x]dx$　　7 分

四、解答下列各题（本大题共 4 小题，共 28 分）

1.（本小题 7 分）

$F(x)=\int_{-1}^{x}t(t-4)dt$，求 $F(x)$ 的极值及 $F(x)$ 在 $[-1,5]$ 上的最值。

解：$F(x)=\int_{-1}^{x}t(t-4)dt=\frac{x^3}{3}-2x^2+\frac{7}{3}$

2 分

则 $F'(x)=x^2-4x$，令 $F'(x)=x^2-4x=0$，解得 $x=0,x=4$

$F''(x)=2x-4$，$F''(0)=-4<0$，所以 $x=0$ 时，$F(x)$ 的极大值是 $\frac{7}{3}$；

$F''(4)=4>0$，所以 $x=4$ 时，$F(x)$ 的极小值是 $-\frac{25}{3}$；　　5 分

$F(-1)=0$，$F(5)=-6$，比较得 $F(x)$ 在 $[-1,5]$ 上的最大值是 $\frac{7}{3}$，最小值是 $-\frac{25}{3}$。

7 分

2.（本小题 7 分）

求 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,x$。

解：令 $x=\sin t$，

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,x=\int\frac{\sin^3 t}{\cos t}\cos t dt=-\int(1-\cos^2 t)d\cos t=-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t+C$$　5 分

$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^{\,3}+C$$　7 分

3.（本小题 7 分）

设 $f(t)=\int_{1}^{t^2}e^{-x^2}dx$，计算 $I=\int_{0}^{1}tf(t)dt$。

解：$I=\int_{0}^{1}tf(t)dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(t)dt^2=\frac{1}{2}t^2f(t)\Big|_{0}^{1}-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}t^2f'(t)dt$　3 分

$$=-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}t^2\,2te^{-t^4}dt=\frac{1}{4}e^{-t^4}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$$　7 分

4.（本小题 7 分）

求积分 $\int_{1/2}^{3/4}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$。

解：

$\int_{1/2}^{3/4}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx \qquad =2\int_{1/2}^{3/4}\frac{a \qquad \sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)}}d\sqrt{x}$

$=2\int_{1/2}^{3/4} a \qquad \sqrt{x}d\ a \qquad \sqrt{x}$ 4 分

$=(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_{1/2}^{3/4}=\frac{7}{144}\pi^2$

7 分

五、解答下列各题（本大题共 3 小题，共 26 分）

1.（**本小题 9 分**）

求由曲线 $y=e^{2x}$， x 轴及该曲线过原点的切线所围成平面图形的面积。

解：设切点为 (x_0,e^{2x_0})，则切线方程 $y-e^{2x_0}=2e^{2x_0}(x-x_0)$

又切线过原点，将 $(0,0)$ 代入得切点 $(\frac{1}{2},e)$，则切线 $y=2ex$ 5 分

$S=\int_{-\infty}^{0}e^{2x}dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(e^{2x}-2ex)dx=\frac{e}{4}$ 9 分

2.（**本小题 9 分**）

求微分方程 $y''-4y'+4y=3e^{2x}+2x$ 的通解。

解：齐方程的特征方程 $r^2-4r+4=0$，特征根 $r_1=r_2=2$

齐方程的通解是 $Y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$ 4 分

设非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ax^2e^{2x}+Bx+C$，代入原方程

解得 $A=\frac{3}{2},B=\frac{1}{2},C=\frac{1}{2}$，故 $y^*=\frac{3}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 8 分

非齐次方程的通解 $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{3}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$； 9 分

3.（**本小题 8 分**）设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$， $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$，证明

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}f'(0)$。

证明：令 $u=x^n-t^n$，则 $du=-nt^{n-1}dt$

$$F(x)=\int_0^x t^{n-1} f(x^n-t^n)dt=-\frac{1}{n}\int_{x^n}^0 f(u)du=\frac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)du$$

3 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^n} f(u)du}{nx^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)nx^{n-1}}{n\cdot 2nx^{2n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-f(0)}{2nx^n}=\frac{1}{2n}f'(0)$$

8 分