**ТЕПЛОПЕРЕДАЧА**

(конспект лекций для студентов факультетов 1 и 6)

Лектор – доцент каф. 204 Семенов А.А.

(тел.: 8-916-612-02-32, 8-903-730-08-41, e-mail: [heat204@mail.ru](mailto:heat204@mail.ru) )

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. Под общ. ред. академика В.С.Авдуевского и проф. В.К.Кошкина. – М.: Машиностроение, 1992.
2. В.П.Исаченко, В.А.Осипова, А.С.Сукомел. Теплопередача. Учебник для вузов – изд. четвёртое, переработанное и дополненное. – М.: Энергоиздат, 1981.
3. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. Изд. второе. – М.: Энергия, 1977.
4. Михайлова М.М. Сборник задач и примеров расчета по теплопередаче. – М.: 1963.
5. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: Наука, 1972.

ВВЕДЕНИЕ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Теплопередача или теплообмен* – учение о самопроизвольных необратимых процессах распространения теплоты в пространстве. Под процессом распространения теплоты понимается обмен внутренней энергией между отдельными элементами и между отдельными областями рассматриваемой среды. Перенос теплоты осуществляется тремя способами:

*Теплопроводность* – молекулярный перенос теплоты в телах или между ними, обусловленный переменностью температуры в рассматриваемом пространстве.

*Конвекция* – процесс переноса теплоты при перемещении объёмов текучей среды (жидкости, газа) в пространстве из области с одной температурой в область с другой температурой. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

*Тепловое излучение* – распространение теплоты электромагнитными волнами, обусловленный только температурой и оптическими свойствами излучающего тела; при этом внутренняя энергия тела (среды) переходит в энергию излучения. Процесс превращения внутренней энергии вещества в энергию излучения, переноса излучения и его поглощения веществом называют *теплообменным излучением*.

На практике элементарные процессы распространения теплоты – теплопроводность, конвекция и тепловое излучение – часто происходят совместно. Теплопроводность в чистом виде имеет место, как правило, в твёрдых телах. Конвекция всегда сопровождается теплопроводностью – такой совместный процесс называют *конвективным теплообменом*. В инженерных расчётах часто изучают конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью твёрдого тела – такой процесс конвективного теплообмена называют *конвективной теплоотдачей* или просто *теплоотдачей*.

Теплообмен за счёт совместного переноса теплоты теплопроводностью и излучением называют *радиационно-кондуктивным теплообменом*. Если перенос теплоты осуществляется дополнительно и конвекцией, его называют *радиационно-конвективным теплообменом*. Иногда оба эти процесса называют *сложным теплообменом*.

В технике и быту часто происходят процессы теплообмена между жидкостями, разделёнными твёрдой стенкой. Процесс передачи теплоты от горячей жидкости к холодной через разделяющую их стенку называется *теплопередачей*. При этом возможны различные процессы теплопереноса. Например, парогенерирующие трубы котельного агрегата получают теплоту от продуктов сгорания топлива в результате радиационно-конвективного теплообмена. Через металлическую стенку теплота передаётся теплопроводностью. От внутренней поверхности трубы к омывающей её жидкости теплота переносится конвективным теплообменом (теплоотдачей).

Многие процессы переноса теплоты сопровождаются переносом вещества. Например, при испарении воды в воздух помимо теплообмена имеет место перенос образовавшегося пара в паровоздушной смеси. В общем случае перенос пара осуществляется молекулярным и конвективным путём – совместный молекулярный и конвективный перенос массы называют *конвективным массообменом*. При наличии массообмена процесс теплообмена усложняется – теплота дополнительно может переноситься вместе с массой диффундирующих веществ.

В общем случае перенос теплоты в смеси различных веществ может вызываться неоднородным распределением других физических величин, помимо температуры. Например, разность концентрации компонентов смеси приводит к дополнительному молекулярному переносу теплоты (*диффузионный термоэффект*). Обычно перенос теплоты связанный с такими эффектами невелик, и, как правило, им можно пренебречь.

При теоретическом исследовании теплообмена приходится вводить модельные представления о среде, в которой происходят изучаемые процессы. Рассматриваемые газы, жидкости и твёрдые тела в подавляющем большинстве случаев считаются *сплошной средой*, т.е. средой, при рассмотрении которой допустимо пренебречь её дискретным строением.

Различают *однородные* и *неоднородные сплошные среды*. В однородных средах физические свойства при одинаковых температуре и давлении в различных точках одинаковы, в неоднородных средах различны. Различают также *изотропные* и *анизотропные сплошные среды*. В любой точке изотропной среды её физические свойства не зависят от выбранного направления, и, наоборот, в анизотропной среде некоторые свойства в данной точке могут быть функцией направления.

Сплошная среда может быть *однофазной* и *многофазной*. В однофазной среде, состоящей из чистого вещества или смеси веществ, свойства изменяются в пространстве непрерывно. В многофазной среде, состоящей из ряда однофазных частей, на границе раздела свойства изменяются скачками.

1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ
   1. **Методы изучения физических явлений**

На основании представлений современной физики явления природы вообще и теплопроводности в частности можно описать и исследовать на основе *феноменологического* и *статистического* методов.

Метод исследования, игнорирующий микроскопическую структуру вещества и рассматривающий его как сплошную среду (континуум), называется *феноменологическим*. Феноменологические законы носят общий характер, а роль конкретной физической среды учитывается определяемыми из опыта коэффициентами. Метод позволяет установить общие связи между параметрами, характеризующими процесс, и использовать экспериментальные данные, точность которых определяет точность метода – в этом его достоинство. Однако факт проведения опытов для выявления характеристик физической среды является одновременно и недостатком – это ограничивает пределы применения феноменологических законов. Кроме того, современный эксперимент очень сложен и зачастую является дорогостоящим.

*Статистический* метод основан на изучении внутренней структуры вещества. Среда рассматривается как некая физическая система, состоящая из большого числа молекул с заданными свойствами и законами взаимодействия. Получение макроскопических характеристик по заданным микроскопическим свойствам среды составляет основную задачу метода. Метод позволяет получить феноменологические соотношения на основании заданных свойств микроскопической структуры среды без эксперимента – в этом его достоинство. Недостаток – его сложность, из-за чего получить конечные расчётные соотношения возможно лишь для простых физических моделей. Кроме того, метода требует знания ряда параметров, определение которых – предмет исследования специальных разделов физики.

В основу исследования процессов теплопроводности положен феноменологический метод. Аналитическая теория теплопроводности игнорирует молекулярное строение вещества и рассматривает вещество как сплошную среду. Такой подход правомерен, если размеры объектов исследования достаточно велики по сравнению с расстояниями эффективного межмолекулярного взаимодействия.

* 1. **Температурное поле**

Явление теплопроводности представляет собой процесс распространения энергии при непосредственном соприкосновении отдельных частей тела или отдельных тел, имеющих различные температуры. Теплопроводность обусловлена движением микрочастиц вещества.

В газах перенос энергии осуществляется путём диффузии молекул и атомов, а в жидкостях и твёрдых телах-диэлектриках – путём упругих волн. В металлах перенос энергии в основном осуществляется путём диффузии свободных электронов, а роль упругих колебаний кристаллической решётки здесь второстепенна.

Всякое физическое явление в общем случае сопровождается изменением в пространстве и времени существенных для него физических величин. Процесс теплопроводности, как другие виды теплообмена, может иметь место только при условии, что в различных точках тела температура неодинакова. В общем случае процесс передачи теплоты теплопроводностью в твёрдом теле сопровождается изменением температуры как в пространстве, так и во времени.

Аналитическое исследование теплопроводности сводится к изучению пространственно-временного изменения температуры, т.е. к нахождению уравнения

Уравнение (1.1) представляет математическое описание *температурного поля*. Таким образом, температурное поле есть совокупность значений температуры во всех точках изучаемого пространства для каждого момента времени.

Различают *стационарное* и *нестационарное* температурные поля. Уравнение (1.1) является записью наиболее общего вида температурного поля, когда температура изменяется с течением времени от одной точки к другой. Такое поле отвечает неустановившемуся тепловому режиму теплопроводности и называется нестационарным температурным полем.

Если тепловой режим является установившимся, то температура в каждой точке поля с течением времени остаётся неизменной, и такое температурное поле называется стационарным. В этом случае температура является функцией только координат:

Температурное поле, соответствующее уравнениям (1.1) и (1.2), является *пространственным*, т.к. температура есть функция трёх координат. Если температура есть функция двух координат, то поле называется *двумерным* и записывается в виде:

Если температура есть функция только одной координаты, то поле называется *одномерным*:

Наиболее простой вид имеет уравнение одномерного стационарного температурного поля:

* 1. **Температурный градиент**

Если соединить точки тела, имеющего одинаковую температуру, получим поверхность равных температур, называемую *изотермической*. Итак, изотермическая поверхность – это геометрическое место точек в температурном поле, имеющих одинаковую температуру.

Т.к. одна и та же точка не может одновременно иметь различные температуры, то изотермические поверхности не пересекаются. Они либо оканчиваются на поверхности тела, либо целиком располагаются внутри самого тела.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью даёт на этой плоскости семейство изотерм, обладающих теми же свойствами, что и изотермические поверхности, т.е. не пересекаются, не обрываются внутри тела, оканчиваются на поверхности либо целиком располагаются внутри тела.

|  |  |
| --- | --- |
| На рис. 1.1 приведены изотермы, температуры которых отличаются на . Температура изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. Наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности. Вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равным производной от температуры по этому направлению называется *градиентом температуры*:  где 0 – единичный вектор нормали к изотермической поверхности, направленный в сторону возрастания температуры; – производная от температуры по нормали . Значение температурного | *Рис. 1.1. Изотермы* |

градиента для различных точек изотермической поверхности неодинаково – оно больше там, где расстояние между изотермическими поверхностями меньше. Скалярную величину градиента температуры будем также называть температурным градиентом. Производная в направлении убывания температуры отрицательна. Проекция вектора на координатные оси Ox, Oy, Oz равны:

(1.7)

* 1. **Тепловой поток. Закон Фурье**

Необходимым условием распространения теплоты является неравномерность распределения температуры в рассматриваемой среде. Таким образом, для передачи теплоты теплопроводностью необходимо неравенство нулю температурного градиента в различных точках тела.

Согласно гипотезе Фурье количество теплоты , проходящее через элемент изотермической поверхности за промежуток времени , пропорционально температурному градиенту :

Коэффициент пропорциональности в уравнении (1.8) есть физический параметр вещества, характеризующий способность проводить теплоту и называемый *коэффициентом теплопроводности*.

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности, , Вт/м2, называется *плотностью теплового потока*:

Вектор плотности теплового потока направлен по нормали к изотермической поверхности. Его положительное направление совпадает с направлением убывания температуры, т.к. теплота передаётся от более горячих тел к более холодным. Таким образом, векторы и лежат на одной прямой, но направлены в противоположные стороны, что объясняет «минус» в правых частях уравнений (1.8), (1.9).

|  |  |
| --- | --- |
| Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора , называются *линиями теплового потока*. Они ортогональны к изотермическим поверхностям (рис. 1.2). Скалярная величина вектора плотности теплового потока , Вт/м2, будет равна:  Многочисленные опыты подтвердили справедливость гипотезы Фурье, поэтому уравнения (1.8) и (1.9) являются математической записью основного закона теплопроводности, который формулируют следующим образом: *плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры*.  Количество теплоты, проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность , называется *тепловым потоком*. | Рис. *1.2. Изотермы и линии теплового тока* |

Если градиент температуры для различных точек изотермической поверхности различен, то количество теплоты, которое пройдёт через всю изотермическую поверхность в единицу времени, будет

где – элемент изотермической поверхности. Значения измеряются в ваттах. Полное количество теплоты , Дж, прошедшее за время через изотермическую поверхность , равно:

|  |  |
| --- | --- |
| Количество теплоты, проходящее через элементарную площадку , расположенную, под углом к плоскости, касательной к изотермической поверхности (рис. 1.3), определяется по той же формуле (1.12), если учесть, что  Т.к. является проекцией площадки на изотермическую поверхность, то количество теплоты, протекающее через элементарную площадку за время , запишется как  Общее количество теплоты, протекающее за время через поверхность , будет равно | *Рис.1.3. К расчёту теплового потока* |

Из уравнения (1.13) следует, что самой большой плотностью теплового потока будет та, которая рассчитана вдоль нормали к изотермическим поверхностям. Если такой поток спроектировать на координатные оси Ox, Oy, Oz, то согласно уравнению (1.7) получим:

Тепловые потоки, выраженные уравнениями (1.16), являются составляющими вектора плотности теплового потока:

Из сказанного следует, что для определения количества теплоты, проходящей через какую-либо поверхность твёрдого тела, необходимо знать температурное поле внутри рассматриваемого тела. Нахождение температурного поля является главной задачей аналитической теории теплопроводности.

* 1. **Коэффициент теплопроводности**

Коэффициент теплопроводности является физическим параметром вещества и в общем случае зависит от температуры, давления и рода вещества. Коэффициент теплопроводности определяется, как правило, экспериментально посредством измерении теплового потока и градиента температур в исследуемом веществе. При этом коэффициент теплопроводности , Вт/(м·К) определяется как

откуда следует, что коэффициент теплопроводности равен количеству теплоты, проходящему в единицу времени через единицу изотермической поверхности при температурном градиенте, равном единице.

Т.к. тела могут иметь различную температуру, а при наличии теплообмена температура в теле распределена неравномерно, то важно знать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Опыты показывают, что для многих материалов с достаточной для практики точностью зависимость коэффициента теплопроводности от температуры можно принять линейной:

где – значение коэффициента теплопроводности при температуре , – постоянная, определяемая опытным путём.

**Коэффициент теплопроводности газов.** Согласно кинетической теории перенос теплоты теплопроводностью в газах при обычных давлениях и температурах определяется переносом кинетической энергии молекулярного движения в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа. При этом коэффициент теплопроводности определяется соотношением

где – средняя скорость перемещения молекул газа, – средняя длина свободного пробега молекул газа между соударениями, – теплоёмкость при постоянном объёме, – плотность газа.

С увеличением давления в равной мере увеличивается плотность , уменьшается длина пробега, произведение остаётся постоянным, и коэффициент теплопроводности заметно не меняется. Исключение составляют очень малые (менее 2,66·103 Па) и очень большие (2·109 Па) давления.

Средняя скорость перемещения молекул газа зависит от температуры:

где – универсальная газовая постоянна (8314,2 Дж/(кмоль·К)); – молекулярная масса газа, – температура, К.

Как и теплоёмкость газов, коэффициент теплопроводности для газов с повышением температуры возрастает.

Коэффициент теплопроводности газов лежит в пределах от 0,006 до 0,6 Вт/(м·К). Среди газов резко выделяются гелий и водород – у них коэффициент теплопроводности в 5-10 раз больше, чем у других газов. Молекулы гелия и водорода имеют малую массу и, следовательно, большую среднюю скорость перемещения, чем и объясняется их высокий коэффициент теплопроводности.

Коэффициенты теплопроводности водяного пара и реальных газов существенно отличаются от идеальных и, кроме того, сильно зависят от давления. Для смесей газов коэффициент теплопроводности не может быть определён по закону аддитивности – надо определять опытным путём.

**Коэффициент теплопроводности жидкостей.** Механизм распространения теплоты в капельных жидкостях можно представить как перенос энергии путём нестройных упругих колебаний. В рамках этой теории для коэффициента теплопроводности получена формула следующего вида:

где – теплоёмкость жидкости при постоянном давлении; – плотность жидкости; – молекулярная масса. Коэффициент , пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, не зависит от природы жидкости, но зависит от температуры, при этом .

Т.к. плотность жидкости с повышением температуры убывает, то из уравнения (1.21) следует, что для жидкостей с постоянной молекулярной массой (неассоциированные и слабо ассоциированные жидкости) коэффициент теплопроводности с повышением температуры уменьшается. Для сильно ассоциированных жидкостей (вода, спирты и т.д.) в формулу (1.21) вводят коэффициент ассоциации, учитывающий изменение молекулярной массы. Коэффициент ассоциации зависит от температуры, поэтому при различных температурах может влиять на коэффициент теплопроводности по-разному. Опыт подтверждает, что для большинства жидкостей коэффициент теплопроводности с повышением температуры убывает – исключение составляют вода и глицерин. Коэффициент теплопроводности капельных жидкостей лежит примерно в пределах от 0,07 до 0,7 Вт/(м·К).

При повышении давления коэффициенты теплопроводности жидкостей возрастают.

**Коэффициент теплопроводности твёрдых тел.** В *металлах* основным передатчиком теплоты являются свободные электроны, которые можно уподобить идеальному одноатомному газу. Передача теплоты при помощи колебательных движений атомов или в виде упругих звуковых волн возможна, но её доля незначительна по сравнению с переносом электронным газом. Вследствие движения свободных электронов происходит выравнивание температуры во всех точках нагревающегося металла. Свободные электроны движутся как из более нагретых областей в менее нагретые, так и в обратном направлении. В первом случае они отдают энергию атомам, во втором отбирают её. Т.к. в металлах носителем тепловой энергии являются электроны, то коэффициенты тепло- и электропроводности пропорциональны друг другу. При повышении температуры тепловые неоднородности усиливаются, рассеяние электронов увеличивается, и коэффициенты тепло- и электропроводности чистых металлов снижаются.

При наличии примесей коэффициент теплопроводности металлов резко убывает, что объясняется увеличением структурных неоднородностей, приводящих к рассеиванию электронов. Так, для чистой меди Вт/(м·К), для той же меди со следами мышьяка Вт/(м·К). В отличие от чистых металлов коэффициент теплопроводности сплавов при повышении температуры увеличивается.

В *диэлектриках* с повышением температуры коэффициенты теплопроводности обычно увеличиваются. Как правило, для материалов с б**о**льшей плотностью коэффициент теплопроводности имеет более высокое значение. Он зависит от структуры материала, его пористости и влажности.

Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение, и применение к ним закона Фурье является условным. Наличие пор в таких материалах не позволяет их рассматривать как сплошную среду. Условным является и коэффициент теплопроводности пористого материала – он имеет смысл коэффициента теплопроводности однородного тела, через которое при одинаковых формах, размерах и температурах на границах проходит то же количество теплоты, что и через данное пористое тело. Коэффициент теплопроводности пористых и порошкообразных тел сильно зависит от плотности. Так, при возрастании плотности от 400 до 800 кг/м3 коэффициент теплопроводности асбеста увеличивается от 0,105 до 0,248 Вт/(м·К). Это объясняется тем, что теплопроводность заполняющего поры воздуха значительно меньше теплопроводности твёрдых компонентов пористого материала.

Эффективный коэффициент теплопроводности пористых материалов сильно зависит от влажности – для влажного материала он значительно больше, чем для сухого и воды в отдельности. Например, для сухого кирпича Вт/(м·К), для воды Вт/(м·К), для влажного кирпича Вт/(м·К). Этот эффект объясняется конвективным переносом теплоты, возникающим за счёт капиллярного движения воды внутри пористого материала, и частично тем, абсорбционно связанная влага имеет другие характеристики по сравнению со свободной водой.

Увеличение коэффициента теплопроводности зернистых материалов с изменением температуры объясняется тем, что с повышением температуры возрастает теплопроводность среды, заполняющей промежутки между зёрнами, а также увеличивается теплопередача излучением зернистого массива.

Коэффициенты теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов имеют значения, лежащие примерно в пределах от 0,023 до 2,9 Вт/(м·К). Материалы с низким значением теплопроводности (менее 0,25 Вт/(м·К)), обычно применяемые для тепловой изоляции, называются *теплоизоляционными*.

* 1. **Дифференциальное уравнение теплопроводности**

Изучение физических явлений сводится к установлению зависимости между характеризующими его величинами. Для сложных физических процессов, в которых определяющие величины могут сильно меняться, установить такие зависимости трудно. В этих случаях используют метод математической физики, который исходит из того, что ограничивается промежутком времени, а из всего пространства рассматривается лишь элементарный объём. Это позволяет в пределах элементарного объёма и малого отрезка времени пренебречь изменением некоторых величин, характеризующих процесс, и существенно упростить зависимость. Элементарный объём и элементарный промежуток времени , в пределах которых рассматривается процесс, с математической точки зрения – бесконечно малые величины, а с физической точки зрения – величины, достаточно большие, чтобы в их пределах можно было игнорировать дискретное строение среды и рассматривать её как сплошную. Полученная таким образом зависимость является общим дифференциальным уравнением рассматриваемого процесса. Интегрируя дифференциальные уравнения, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всей области интегрирования и всего рассматриваемого промежутка времени.

При нахождении температурного поля, необходимо иметь *дифференциальное уравнение теплопроводности*. Для облегчения вывода этого уравнения сделаем следующие допущения:

* тело однородно и изотропно;
* физические параметры постоянны;
* деформация рассматриваемого объёма, связанная с изменением температуры, очень мала по сравнению с самим объёмом;
* внутренние источники теплоты в теле, которые в общем случае могут быть заданы как , распределены равномерно.

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на законе сохранения энергии, который можно сформулировать так: количество теплоты , введённое в элементарный объём извне за время за счёт теплопроводности и от внутренних источников, равно изменению внутренней энергии или энтальпии вещества (при изохорном или изобарном процессе), содержащегося в этом объёме:

где – количество теплоты, введённое в элементарный объём за время путём теплопроводности; – количество теплоты, выделенное за время в объёме за счёт внутренних источников; – изменение внутренней энергии или энтальпии вещества, содержащегося в объёме , за время .

|  |  |
| --- | --- |
| Для нахождения составляющих уравнения (1.22) выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами (рис.1.4),расположенный так, чтобы его грани были параллельны соответствующим координатным плоскостям.  Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объёма за время в направлении осей Ox, Oy, Oz, обозначим Количество теплоты, которое отводится через противоположные грани в тех же направлениях – . Количество теплоты, подведённое к грани в направлении оси Ox за время будет , где – проекция плотности теплового потока на направление нормали к указанной грани. Количество теплоты, отводимое через противоположную грань элементарного параллелепипеда в направлении оси Ox запишется как | *Рис. 1.4. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности* |

Разница между количеством теплоты, подведённым к элементарному параллелепипеду, и количеством теплоты, отведённым от него за время в направлении оси Ox, представляет собой количество теплоты

Функция в рассматриваемом интервале является непрерывной и может быть разложена в ряд Тейлора

Если ограничиться двумя первыми членами ряда, то уравнение (а) запишется в виде

Аналогичным образом можно найти количество теплоты, подводимое к элементарному объёму и в направлении координатных осей Oy и Oz. Количество теплоты, подведённое в результате теплопроводности к рассматриваемому объёму, будет равно:

Определим вторую составляющую уравнения (1.22). Обозначим количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объёма среды в единицу времени и называемое мощностью внутренних источников теплоты, через , тогда

Третью составляющую уравнения (1.22) найдём в зависимости от характера термодинамического процесса изменения системы. При рассмотрении изохорного процесса вся теплота, подведенная к элементарному объёму, уйдёт на изменения внутренней энергии вещества, заключённого в этом объёме, т.е. . Если рассматривать внутреннюю энергию единицы объёма , то найдём как

где – изохорная теплоёмкость единицы объёма, Дж/(м3·К); – изохорная теплоёмкость единицы массы, Дж/(кг·К); – плотность вещества, кг/м3.

Подставляя полученный выражения (в), (г) и (д) в формулу (1.22), получаем:

Выражение (1.23) является дифференциальным уравнением энергии для изохорного процесса переноса теплоты.

При рассмотрении изобарного процесса вся теплота, подведённая к объёму, уйдёт на изменение энтальпии вещества, заключённого в этом объёме, и уравнение (1.22) запишется следующим образом:

Если рассматривать энтальпию единицы объёма как , то можно показать, что

где – изохорная теплоёмкость единицы объёма, Дж/(м3·К); – изохорная теплоёмкость единицы массы, Дж/(кг·К).

Если полученные выражения (в), (г) и (е) подставить в уравнение (1.24), получим:

Соотношение (1.25) является дифференциальным уравнением энергии в самом общем виде для изобарного процесса переноса теплоты.

В твёрдых телах перенос теплоты осуществляется по закону Фурье , значение разности и мало, поэтому можно принять, что .

Подставляя проекции вектора плотности теплового потока на координатные оси Ox, Oy, Oz определяются выражениями и, опуская индекс при , получим:

Выражение (1.26), как и (1.26’), называется дифференциальным уравнением теплопроводности. Оно устанавливает связь между временн**ы**м и пространственным изменениями температуры в любой точке тела, в котором происходит процесс теплопроводности.

Наиболее общее дифференциальное уравнение теплопроводности имеет ту же форму, что и (1.26), но с переменными теплофизическими характеристиками: , и . Такая запись включает как пространственно-временн**у**ю, так и температурную зависимость. Уравнение (1.26) описывает большое количество практических задач теплопроводности. Если принять теплофизические характеристики постоянными, что предполагалось при выводе уравнения, то (1.26) принимает вид:

В уравнении (1.27) можно обозначить

где – выражение оператора Лапласа в декартовой системе координат.

Выражение в цилиндрической системе координат имеет вид:

где – радиус-вектор; – полярный угол; – аппликата.

Выражение в сферической системе координат имеет вид:

где – радиус-вектор; ; и – соответственно полярное расстояние и долгота.

С учётом введённых обозначений уравнение (1.27) запишется следующим образом:

Коэффициент , м2/с, в уравнении (1.28) является физическим параметром вещества и называется *коэффициентом температуропроводности*. Он существен для нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры, являясь мерой теплоинерционных свойств тела. Из уравнения (1.28) следует, что изменение температуры во времени для любой точки пространства пропорционально величине . Скорость изменения температуры в любой точке тела будет тем больше, чем больше коэффициент температуропроводности. Поэтому выравнивание температур (при прочих равных условиях) будет быстрее в теле, у которого б**о**льший коэффициент температуропроводности. Коэффициент температуропроводности зависит от природы вещества. Жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью, т.е. малым коэффициентом температуропроводности, а металлы – малой тепловой инерционностью, т.е. большим коэффициентом температуропроводности.

Далее, если система тел не содержит внутренних источников теплоты (), то выражение (1.28) принимает форму уравнения Фурье:

Если есть внутренние источники теплоты, но температурное поле соответствует стационарному состоянию, т.е. , то дифференциальное уравнение теплопроводности превращается в уравнение Пуассона:

Наконец, при стационарной теплопроводности и отсутствии внутренних источников теплоты выражение (1.27) принимает вид уравнения Лапласа:

* 1. **Условие однозначности для процессов теплопроводности**

Дифференциальное уравнение теплопроводности выведено на основе общих законов физики, оно описывает теплопроводность в общем виде – т.е. описывает целый класс явлений теплопроводности. Чтобы выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо добавить математическое описание частных особенностей процесса. Эти частные особенности называются *условиями однозначности* или *краевыми условиями*.

Условия однозначности включают в себя:

* геометрические условия, характеризующие форму и размеры тел, в которых протекает процесс;
* физические условия, характеризующие физические свойства среды и тела;
* временн**ы**е (начальные) условия, характеризующие распределение температур в теле в начальный момент времени;
* граничные условия, характеризующие взаимодействие тела с окружающей средой.

*Геометрические условия* задают форму и линейные размеры тела, в котором протекает процесс.

*Физические условия* задают физические параметры тела ( и др.) и может быть задан закон распределения внутренних источников теплоты.

*Начальные условия* необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температур внутри тела в начальный момент времени. В общем случае начальное условие аналитически может быть записано в следующем виде (при ):

При равномерном распределении температуры в теле начальное условие упрощается (при ):

*Граничные условия* могут быть заданы несколькими способами:

**Граничные условия первого рода.** Задаётся распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

где – температура на поверхности тела; – координаты поверхности тела. В частном случае, когда температура на поверхности постоянна на протяжении всего времени протекания процессов теплообмена, уравнение (1.44) принимает вид:

**Граничные условия второго рода.** Задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени. Аналитически это можно записать следующим образом:

где – плотность теплового потока на поверхности тела; – как и в случае (1.44) – координаты поверхности тела. В простейшем случае, когда плотность теплового потока по поверхности и во времени остаётся постоянной:

Такой случай теплообмена имеет место, например, при нагревании различных металлических изделий в высокотемпературных печах.

**Граничные условия третьего рода.** Задаются температура окружающей среды и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Граничное условие третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона – Рихмана, согласно которому количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды ():

где – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплоотдачи*, Вт/(м2·К), характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству теплоты, отдаваемому (принимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, равной одному градусу.

Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, отводимое с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплоотдачи (уравнение (1.47)), должно равняться количеству теплоты, подводимому к единице поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объёмов тела (уравнении (1.10)), т.е.

где – нормаль к поверхности тела; индекс «*с*» указывает на то, что температура и градиент относятся к поверхности тела (при ).

Окончательно граничное условие третьего рода можно записать в виде:

Уравнение (1.49) по существу является частным выражением закона сохранения энергии для поверхности тела.

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого числа факторов, однако во многих случаях можно его считать неизменным, поэтому при решении задач теплопроводности будем считать его постоянным.

На практике встречаются случаи, когда ни одно из перечисленных граничных условий задать невозможно, и тогда для определения теплового взаимодействия между телами или тела с окружающей средой решают сопряжённую задачу. При решении таких задач должны выполняться условия равенства температур и тепловых потоков по обе стороны границы раздела. В общем случае условие сопряжённости можно записать:

где – источники теплоты на поверхности границы; , , , – соответственно температуры и коэффициенты теплопроводности соприкасающихся сред; – координаты поверхности раздела сред.

При отсутствии на границе раздела сред процессов с выделением или поглощением теплоты условия сопряжённости (1.50) принимают вид:

Из (1.51) следует, что решение сопряжённой задачи связано с нахождением температурных полей по обе стороны границы раздела.

Дифференциальное уравнение (1.28) с заданными граничными условиями однозначности даёт полную математическую формулировку краевой задачи теплопроводности. Поставленная таким образом задача разрешается аналитическим, численным или экспериментальным методом. В случае экспериментального решения задач теплопроводности используются методы физического или математического моделирования.