1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

**2.1. Передача теплоты через плоскую стенку []**

При установившемся, или стационарном, тепловом режиме температура тела во времени остаётся постоянной, т.е. . При этом дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид:

Если внутренние источники теплоты отсутствуют, то уравнение (2.1) упростится и примет вид

|  |  |
| --- | --- |
| **Граничные условия первого рода.** Рассмотрим однородную и изотропную стенку толщиной с постоянным коэффициентом теплопроводности . На наружных поверхностях стенки поддерживают постоянные температуры и .  При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. Если ось Ox направить, как показано на рис.2.1, то температура в направлении осей Oy и Oz будет оставаться постоянной (). Поэтому температура будет функцией только одной координаты x, и дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая будет иметь вид:  Граничные условия в данной задаче зададим следующим образом:  Уравнения (2.3) и (2.4) дают полную математическую формулировку задачи. В результате её решения будут найдены распределение температуры в плоской стенке , и формула определения плотности теплового потока. | *Рис. 2.1. Однородная плоская стенка* |

Закон распределения температур по толщине стенки найдётся в результате двойного интегрирования уравнения (2.3). Первое интегрирование даст

а после интегрирования второго будем иметь

Из уравнения (2.6) следует, что при постоянном коэффициенте теплопроводности температура в стенке изменяется по линейному закону. и в уравнении (2.6) определяются из граничных условий:

Подставив значения и в уравнение (2.6) получим закон распределения температуры в рассматриваемой плоской стенке:

Если отсчёт избыточной температуры в стенке вести от наименьшей заданной температуры , то уравнение (2.7) можно привести к безразмерному виду. Обозначим – текущий температурный напор или избыточная температура; – полный температурный напор или наибольшая избыточная температура. Тогда уравнение (2.7) запишется следующим образом:

Обозначим – безразмерный температурный напор или безразмерная избыточная температура; – безразмерная координата, и получим:

Уравнение температурного поля (2.8’) универсально – распределение температуры в стенке можно представить единой прямой для любых значений , и (рис.2.2), что в ряде случаев весьма удобно.

|  |  |
| --- | --- |
| Для определения количества теплоты, проходящего через единицу поверхности в единицу времени в направлении оси Ox, применим закон Фурье . Подставив , получим:  Из (2.9) следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности и разности температур на поверхностях стенки и обратно пропорционально её толщине . Отметим: тепловой поток определяется не абсолютным значением температур, а разностью , которую называют *температурным напором*. | *Рис. 2.2. Безразмерное поле температур в плоской стенке* |

Отношение , Вт/(м2·К) называется тепловой проводимостью стенки. Обратная величина , (м2·К)/Вт – тепловым (термическим) сопротивлением, характеризующим падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока. Зная плотность теплового потока, легко вычислить общее количество теплоты , передаваемое через поверхность стенки за промежуток времени :

Из (2.9) найдём: введя это в уравнение температурного поля (2.7) получим:

Из уравнения (2.11) следует, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает тем быстрее, чем больше плотность теплового потока.

Формулы (2.7) и (2.9) получены в предположении . В действительности – переменная величина. Рассмотрим случай, когда является функцией только температуры . Для многих материалов зависимость коэффициента теплопроводности от температуры близка к линейной +, где – коэффициент теплопроводности при 0оС. На основании закона Фурье

Разделяя переменные и интегрируя (а) в пределах от до в интервале температур от до , получим:

где множитель – среднеинтегральное значение коэффициента теплопроводности:

При этом плотность теплового потока , Вт/м2, на поверхности пластины

Из (2.13) следует: если коэффициент теплопроводности зависит от температуры, то можно вычислять , полагая и принимая его среднеинтегральное значение в интервале температур от до .

Интегрируя (а) в пределах от до любой текущей координаты и в интервале температур от до , получим выражение для температурного поля:

Из уравнения следует, что температура в стенке меняется не линейно, а по кривой, характер которой определяется знаком и числовым значением коэффициента .

Рассмотрим **теплопроводность многослойной плоской стенки** из однородных слоёв. Считаем контакт между слоями идеальным, температура соприкасающихся поверхностей двух слоёв одинакова. При стационарном режиме тепловой поток через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же: . При заданных температурах на внешних поверхностях такой стенки, размерах слоёв и их коэффициентах теплопроводности можно составить систему уравнений:

Определив температурные напоры слоёв из (в) и сложив правые и левые части уравнений, имеем:

Отсюда плотность теплового потока

Величина равная сумме термических сопротивлений всех слоёв, называется полным термическим сопротивлением теплопроводности многослойной стенки.

Сравнивая перенос теплоты через многослойную и однородную стенки вводят эквивалентный коэффициент теплопроводности многослойной стенки . Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой равна толщине многослойной стенки , а термическое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки, т.е.

Из (2.16) следует, что эквивалентный коэффициент теплопроводности зависит как от теплофизических свойств слоёв, так и от их толщины. Температуры на границе соприкосновения соседних слоёв равны:

Внутри каждого из слоёв температура изменяется согласно (2.7) или (2.14), а для многослойной стенки в целом температурная кривая представляет собой ломаную линию.

**Граничные условия третьего рода (теплопередача).** Передача теплоты из одной среды к другой через разделяющую однородную или многослойную стенку любой формы называется *теплопередачей* и включает в себя: теплоотдачу от горячей среды к стенке, теплопроводность в стенке и теплоотдачу от стенки к холодной среде. Рассмотрим теплопередачу через однородную плоскую стенку толщиной (рис.2.3). Заданы: коэффициент теплопроводности стенки , температуры сред , , коэффициенты теплоотдачи , – считаем их постоянными, что позволит рассматривать изменение температуры стенки и жидкостей только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки. Необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры поверхностей стенки.

Плотность теплового потока от горячей жидкости к стенке:

|  |  |
| --- | --- |
| При стационарном тепловом режиме та же плотность теплового потока, обусловленная теплопроводностью через твёрдую стенку,  И тот же тепловой поток от второй поверхности стенки к холодной жидкости за счёт теплоотдачи:  Уравнения (2.18) – (2.20) можно записать в виде: | *Рис. 2.3. Теплопередача через плоскую стенку* |

Сложив почленно равенства (2.21), получим: Отсюда плотность теплового потока, Вт/м2, равна

Обозначим

Эта величина измеряется в Вт/(м2·К). С учётом (2.23) уравнение (2.22) можно записать в виде

Величина имеет ту же размерность, что и , и называется *коэффициентом теплопередачи*. Коэффициент теплопередачи характеризует интенсивность передачи тепла от одной жидкости к другой через разделяющую их стенку и численно равен количеству теплоты, которое передаётся через единицу поверхности в единицу времени при разности температур между жидкостями в 1о. Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется полным *термическим сопротивлением теплопередачи*:

Из (2.25) видно, что полное термическое сопротивление складывается из частных сопротивлений: – термическое сопротивление теплоотдачи от горячей жидкости к поверхности стенки; – термическое сопротивление теплопроводности стенки; – термическое сопротивление теплоотдачи от поверхности стенки к холодной жидкости. Т.к. общее термическое сопротивление состоит из частных, то нужно учитывать термические сопротивления каждого слоя. Если стенка состоит из слоёв, то полное термическое сопротивление теплопередачи через неё равно:

Плотность теплового потока через многослойную стенку, состоящую из слоёв, будет равна:

Уравнение (2.27) для многослойной стенки подобно уравнению (2.24) для однородной плоской стенки. Различие в выражениях для коэффициентов теплопередачи . При сравнении уравнений (2.26) и (2.23) видно, что соотношение (2.23) является частным случаем уравнения (2.26), когда .

Тепловой поток , Вт, через поверхность твёрдой стенки равен:

Температуры поверхностей однородной стенки можно найти из уравнения (2.21):

Из сопоставления уравнений (2.15) и (2.27) следует, что передача теплоты через многослойную стенку при граничных условиях первого рода является частным случаем общего случая передачи теплоты при граничных условиях третьего рода.

На основании сказанного температура на границе любых двух слоёв и при граничных условиях третьего рода может быть определена по уравнению

**2.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку []**

**Граничные условия первого рода.** Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним диаметром и наружным – (рис.2.6). На поверхностях стенки заданы постоянные температуры и . В заданном интервале температур коэффициент теплопроводности материала стенки постоянен. Найдём распределение температур в цилиндрической стенке и тепловой поток через неё.

|  |  |
| --- | --- |
| Дифференциальное уравнение теплопроводности запишем в цилиндрической системе координат:  Ось Oz совмещена с осью трубы. Температура изменяется только в радиальном направлении, температурное поле одномерно, поэтому:  Температуры наружной и внутренней поверхностей неизменны, изотермические поверхности цилиндрические, имеют с трубой общую ось. Тогда температура не меняется также и вдоль , т.е. | *Рис. 2.6. Теплопроводность цилиндрической стенки* |

С учётом (а) и (б) уравнение (2.34) примет вид:

Решая уравнение (2.35) совместно с (2.36), получим уравнение температурного поля в цилиндрической стенке. Для этого введём новую переменную

Подставляя (в) и (г) в уравнение (2.35), получим:

Интегрируя (2.37), получим:

Потенцируя выражение (д) и переходя к первоначальным переменным, получим:

После интегрирования (е) получим:

Постоянные и можно определить, подставив в уравнение (2.38) граничные условия:

Решение уравнений (ж) относительно и даёт:

Подставив значения и в уравнение (2.38), получим:

Формула (2.39) есть уравнение логарифмической кривой. То, что распределение температуры в цилиндрической стенке криволинейно, объясняется следующим. Для плоской стенки плотность теплового потока одинакова для всех изотермических поверхностей, поэтому градиент температуры имеет постоянное значение. Для цилиндрической стенки плотность теплового потока через любую изотермическую поверхность зависит от радиуса.

Для нахождения количества теплоты, проходящего через цилиндрическую поверхность площадью в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье:

Подставляя в уравнение градиент температуры из уравнения (е), получим (учитывая, что ):

Из уравнения (2.40) следует, что количество теплоты, проходящее через цилиндрическую стенку в единицу времени, *полностью определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса*.

Тепловой поток (2.40) можно отнести либо к единице длины трубы, либо к единице внутренней или внешней поверхности. При этом формулы для плотности теплового потока, Вт/м2, принимают вид:

Тепловой поток, отнесённый к единице длины трубы, Вт/м, называют *линейной плотностью теплового потока*. Как видно из (2.43), при неизменном отношении линейная плотность теплового потока не зависит от поверхности цилиндрической стенки. Плотности теплового потока и , отнесённые к внутренней и внешней поверхности, неодинаковы – всегда , что видно из уравнений (2.41) и (2.42). Из уравнений (2.41)–(2.43) легко установить связь между величинами , и :

Если коэффициент теплопроводности является функцией вида , можно показать, что линейную плотность теплового потока можно вычислить по той же формуле, что и для :

где – среднеинтегральный коэффициент теплопроводности (см. уравнение (2.12)).

Для нахождения температурного поля при можно воспользоваться уравнением закона Фурье, записанного для цилиндрической стенки:

Если разделить переменные и проинтегрировать уравнение (2.46) в пределах от до и в диапазоне температур от до и найти из полученного интеграла , то получим выражение для температурного поля:

|  |  |
| --- | --- |
| **Граничные условия третьего рода (теплопередача).** Рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (трубу) с постоянным коэффициентом теплопроводности . Заданы постоянные температуры сред и , постоянные коэффициенты теплоотдачи и на внутренней и наружной поверхностях трубы (рис. 2.7). Необходимо найти и .  *Рис. 2.7. Теплопередача через однородную цилиндрическую стенку.* →  Длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки, т.е. потерями тепла с торцов трубы можно пренебречь, и при установившемся тепловом режиме проходит через стенку и отдаётся от стенки к холодной среде одно и то же количество теплоты. Следовательно: |  |

Складывая эти уравнения, получим температурный напор:

Отсюда следует:

Обозначим:

С учётом (2.50) уравнение (2.49) примет вид:

Величина называется *линейным коэффициентом теплопередачи* и измеряется в Вт/(м·К). Она характеризует интенсивность передачи теплоты от одной среды к другой через разделяющую стенку и численно равна количеству теплоты, проходящей через стенку длиной 1 м в единицу времени от одной среды к другой при разности температур между ними 1 К. Обратная величина , (м·К/Вт) называется *линейным термическим сопротивлением теплопередачи* и равна:

где и – термические сопротивления теплоотдачи на соответствующих плоскостях ( и ); – термическое сопротивление теплопроводности стенки ().

Отметим, что линейные термические сопротивления теплоотдачи для трубы определяются не только коэффициентами теплоотдачи и , но и соответствующими диаметрами.

Если тепловой поток через стенку отнести к внутренней или наружной поверхности, то получим плотность теплового потока. Вт/м2, отнесённую к единице соответствующей поверхности трубы:

где и . Последнее соотношение устанавливает связь между коэффициентом теплопроводности при отнесении теплового потока к единице длины стенки и к единице поверхности: Вт/(м·К). Формулы для и , Вт/(м2·К) в развёрнутом виде имеют вид:

При теплопередаче через многослойную цилиндрическую стенку система равенств (2.48’) заменяется системой, учитывающей сопротивления теплопроводности всех слоёв:

После сложения равенств (2.55) и решения относительно , Вт/м, получим:

Величина

называется полным термическим сопротивлением многослойной цилиндрической стенки, м·К/Вт.

Из уравнения (2.55) следует, что

Граничные условия первого рода можно рассматривать как предельный случай граничных условий третьего рода, когда коэффициенты теплоотдачи и стремятся к бесконечности, в силу чего и становятся равными и . При этих условиях уравнение (2.56) принимает вид:

а выражение для расчёта температуры на границах между слоями следующее:

**2.3. Критический диаметр цилиндрической стенки**

Рассмотрим влияние изменения наружного диаметра на термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки. Из (2.51) имеем:

|  |  |
| --- | --- |
| При постоянных , , , полное термическое сопротивление теплопередачи зависит от внешнего диаметра. Из (2.51) следует, что при этих условиях . Термическое сопротивление теплопроводности с увеличением растёт, а термическое сопротивление теплоотдачи уменьшается. Полное термическое сопротивление определяется характером изменения и (рис.2.8).  Чтобы выяснить, как будет изменяться при изменении толщины цилиндрической стенки, исследуем как функцию . Возьмём производную от по и приравняем нулю: | *Рис. 2.8. Зависимость термического сопротивления стенки от .* |

Значение в данном случае соответствует экстремальной точке кривой . Исследуя кривую на максимум и минимум, увидим, что в экстремальной точке имеет место минимум. Т.е. при значении диаметра термическое сопротивление теплопередачи будет минимальным.

Внешний диаметр трубы, при котором полное термическое сопротивление теплопередачи минимально, называется *критическим диаметром* () и рассчитывается по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| При полное термическое сопротивление теплопередачи с увеличением снижается, т.к. увеличение наружной поверхности оказывает на него б**о**льшее влияние, чем увеличение толщины стенки. При с увеличением полное термическое сопротивление возрастает, что указывает на доминирующее влияние толщины стенки. Это надо учитывать при выборе тепловой изоляции трубопроводов. Рассмотрим критический диаметр изоляции, наложенной на трубу (рис.2.9). Термическое сопротивление теплопередачи такой трубы  Из уравнения видно, что при увеличении внешнего диаметра изоляции возрастает, имея при максимум. При дальнейшем увеличении внешнего диаметра будет снижаться (рис.2.10). | *Рис. 2.9. К понятию критического диаметра изоляции* |

Выбрав какой-либо теплоизоляционный материал для покрытия цилиндрической поверхности, нужно, прежде всего, рассчитать критический диаметр по формуле (2.60) для заданных и . Если окажется, что значение больше наружного диаметра трубы , то применение материала в качестве

|  |  |
| --- | --- |
| тепловой изоляции нецелесообразно. В области при увеличении толщины изоляции будет наблюдаться увеличение теплопотерь. Это наглядно иллюстрируется на рис.2.10. Только при тепловые потери вновь станут такими же, как для первоначального, неизолированного трубопровода. Следовательно, некоторый слой тепловой изоляции не будет оправдывать своего назначения, и, значит, для эффективной работы тепловой изоляции необходимо, чтобы . | *Рис.2.10.* |

**2.4. Передача теплоты через шаровую стенку**

**Граничные условия первого рода.** Имеется полый шар с радиусами и , постоянным коэффициентом теплопроводности и с заданными равномерно распределёнными температурами поверхностей и . Т.к. в данном случае температура меняется только в направлении радиуса шара, то дифференциальное уравнение теплопроводности в сферических координатах имеет вид:

После первого интегрирования уравнения (2.61) получим: (а).

Второе интегрирование даёт: .

Постоянные интегрирования в уравнении (2.63) определяются из граничных условий (2.62):

Подставляя значения и в (2.63), получим выражение для температурного поля в шаровой стенке:

Для нахождения количества теплоты, проходящего через шаровую поверхность площадью в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье:

Если в это выражение подставить значение градиента температуры , то получим:

Уравнения являются расчётными формулами теплопроводности шаровой стенки. Из уравнения (2.64) следует, что при постоянном температура в шаровой стенке меняется по закону **гиперболы**.

**Граничные условия третьего рода (теплопередача).** При заданных граничных условиях третьего рода кроме и известны и , а также коэффициенты теплоотдачи на поверхности шаровой стенки и . Величины , , и предполагаются постоянными во времени, а и – и по поверхностям. Поскольку процесс стационарный, и полный тепловой поток , Вт, будет постоянным для всех изотермических поверхностей, то можно записать:

Из этих уравнений следует, что

Величина

называется коэффициентом теплопередачи шаровой стенки и измеряется в Вт/К. Обратная величина

называется термическим сопротивлением теплопередачи шаровой стенки и измеряется в К/Вт.