3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

**3.1. Общие сведения**

Ранее были рассмотрены стационарные режимы теплообмена – такие, в которых температурное поле по времени не изменяется и в дифференциальном уравнении теплопроводности Фурье-Кирхгофа производная . Однако ряд практических задач теплообмена не может быть рассмотрен в рамках предположения о неизменности параметров процесса по времени. К ним относятся задачи о прогреве теплозащитных оболочек и конструктивных элементов скоростных летательных аппаратов, о нагреве стенок сопел реактивных двигателей твердого топлива, о расчете поля температур в энергетических ядерных реакторах при изменении режима работы, о тепловом режиме искусственного спутника Земли. В этой главе будут рассмотрены нестационарные процессы теплопроводности в неподвижных средах (твердых телах) и даны аналитические и численные методы решения дифференциального уравнения Фурье-Кирхгофа для нестационарного случая с различными краевыми условиями.

Нестационарные тепловые процессы сопровождаются не только изменением температурного поля по времени, но почти всегда связаны с изменением энтальпии тела, т. е. с его нагревом и охлаждением.

Практические задачи нестационарного теплообмена можно разделить на две основные группы. К первой относятся процессы, происходящие при переходе тепла из некоторого начального теплового состояния в иное стационарное, обычно равновесное тепловое состояние. Примерами могут служить изменение температурного поля в теле, помещенном в среду, температура которой отличается от начальной температуры тела, или выравнивание температур в теле с заданным начальным распределением температур. Ко второй группе можно отнести процессы, происходящие в телах, испытывающих тепловое воздействие извне, изменяющиеся во времени по некоторому закону. Здесь можно назвать процессы периодического изменения температуры при движении ИСЗ по орбите, часть которой пролегает в тени Земли, суточные и годовые колебания температуры в верхних слоях земной коры, тепловые режимы аппаратов, находящихся на поверхности Луны, процессы в регенеративных теплообменниках и др.

В большинстве нестационарных тепловых процессов можно выделить три этапа, характеризующиеся различными режимами, из которых собственно нестационарными будут лишь два первых. На первом этапе поле температур в теле определяется не только изменившимся тепловым воздействием, например изменением температуры окружающей среды, но и начальным распределением температур в теле при . Поскольку начальное температурное поле в общем случае может быть произвольным, то и тепловой режим на этом первом этапе носит характер неупорядоченного процесса.

На втором этапе влияние начального состояния все более ослабевает, и дальнейшее протекание процесса управляется лишь условиями на границе тела, т. е. наступает режим упорядоченного процесса, в частности, регулярный режим.

Для большинства процессов первой группы характерен еще и третий этап, в котором температура тела во всех точках одинакова и равна температуре окружающей среды. Это состояние называют тепловым равновесием.

Строго говоря, равновесное тепловое состояние наступает по прошествии бесконечно большого промежутка времени. Однако на практике тело относительно быстро достигает состояния, близкого к состоянию теплового равновесия, поэтому и интересующие нас длительности нестационарных режимов не бесконечны.

**3.2. Постановка задачи нестационарной теплопроводности**

Выведенное дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье (Фурье–Кирхгофа) в случае неподвижной среды и отсутствия внутренних источников тепла имеет вид

где и – оператор Лапласа, записанный в прямоугольной, цилиндрической, сферической или иной системах координат. Это уравнение устанавливает зависимость между температурой, временем и координатами тела в элементарном объеме, т. е. связывает временные и пространственные изменения температуры тела.

Если заданы форма и размеры тела, а также его физические свойства , т.е. геометрические и физические условия однозначности, то для решения уравнения (3.1) необходимо задать еще начальные и граничные, или краевые условия.

Поскольку температура тела в общем случае является функцией координат и времени , то начальные условия, т. е. распределение температур в теле в начальный момент, задаются в виде , где – известная функция, которая необязательно должна быть задана аналитически, а может быть представлена численно или графически.

В ряде практических задач начальное условие имеет более простой вид: .

Для однородных тел граничные условия могут быть заданы трех видов: температура любой точки поверхности тела в любой момент времени; тепловой поток у поверхности, либо температура среды, омывающей тело; условия теплообмена тела с окружающей средой. В отличие от стационарных задач все величины, входящие в граничные условия, могут изменяться во времени по заданному закону.

**3.3. Теория подобия в применении к дифференциальному уравнению теплопроводности**

Предположим, что температура среды *,* омывающей рассматриваемое тело, величина постоянная. Считаем также, что начальная температура тела одинакова и не зависит от координат, т.е. . Введем новую переменную

Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности запишется в виде

Начальные условия: при , в нашем случае .

Используем граничные условия 3-го рода:

где – коэффициент теплоотдачи от тела к омывающей среде, – температура стенки тела .

С другой стороны, плотность теплового потока у стенки тела равна:

где – коэффициент теплопроводности тела, – производная температуры в теле по нормали к поверхности.

Из (3.4) и (3.5) следует:

Таким образом, решение уравнения (3.3) зависит от:

1) формы тела;

2) характерного размера тела ;

3) теплофизических свойств тела – ;

4) начального условия ;

5) условий теплообмена с окружающей средой, т.е. коэффициента теплоотдачи .

Для тел одинаковой формы имеем:

Совершенно очевидно, что получить универсальную форму решения для функции, зависящей от столь большего количества параметров, невозможно. Попробуем, используя теорию подобия, уменьшить количество факторов, влияющих на решение.

Используем в качестве масштаба температур , а в качестве масштаба длины характерный размер тела . Тогда: – безразмерная избыточная температура, , , – безразмерные линейные координаты.

При использовании новых переменных уравнение получаем:

где – оператор Лапласа, записанный в системе безразмерных координат .

Тогда уравнение (3.3) примет вид:

Условия однозначности уравнения (3.8) имеют вид:

при *τ* = 0, Θ = 1;

на границе тела из (3.6) получаем:

В уравнение (3.8) и в граничное условие (3.9) входят некие безразмерные комплексы – определяющие критерии подобия и . Безразмерный комплекс называется критерием тепловой гомохронности Фурье (см. гл. 3), который характеризует соотношение между временем протекания процесса и временем распространения температурной волны. Безразмерный комплекс обозначается через и так же, как и , является критерием подобия процессов нестационарной теплопроводности, в частности, подобия граничных условий 3-го рода. По своему физическому смыслу он характеризует отношение термического сопротивления теплопроводности стенки к термическому сопротивлению теплоотдачи на границе между телом и окружающей средой .

Критерии и называются определяющими критериями, состоящими из независимых переменных и условий однозначности, а функция – определяемой.

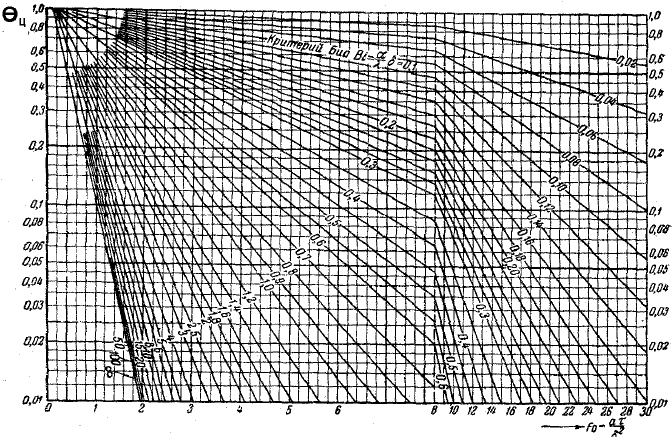
В новых переменных уравнение Фурье–Кирхгофа имеет вид

а граничные условия 3-го рода

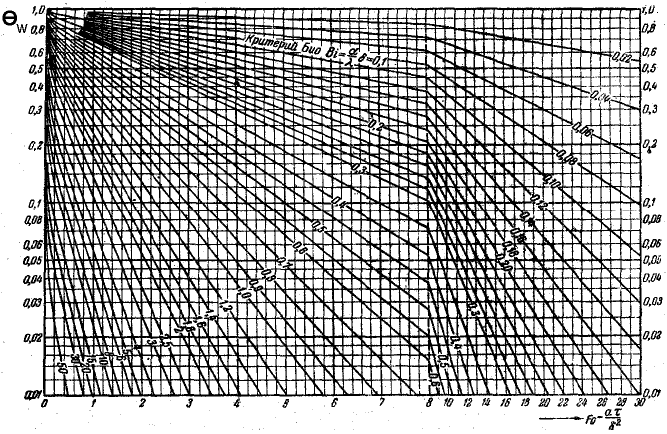
Решением уравнения является функция

Формула (3.12) означает, что безразмерные температуры двух тел одинаковой формы, равномерно нагретых в начальный момент времени , в сходственных точках пространства и времени будут одинаковы, если одинаковы критерии . Например, на поверхности плоской пластины толщиной (характерный размер ) получаем:

Зависимость (3.12) можно получить аналитически и с помощью численных методов: они представляются в виде таблиц или номограмм. На рис. 3.1...3.3 приведены примеры номограмм для расчета процессов нагрева и охлаждения простейших тел в среде с постоянной температурой.



*Рис.3.1а. Безразмерная избыточная температура в середине плоской пластины.*



*Рис.3.1б. Безразмерная избыточная температура на поверхности плоской пластины.*

Рассмотрим несколько примеров использования этих номограмм.

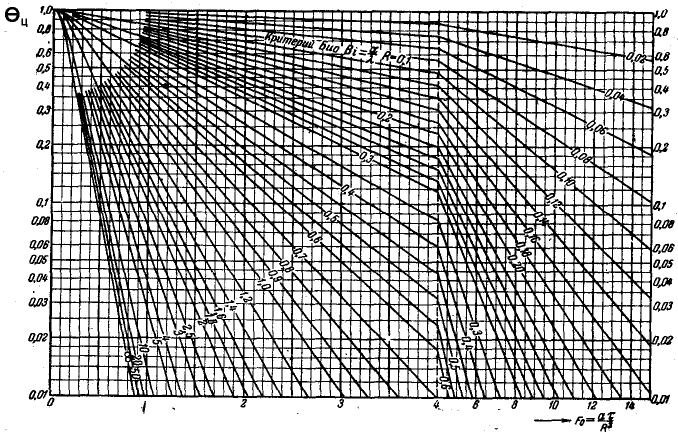
**Пример I.** Стальная плита толщиной с начальной температурой опущена в масляную ванну (температура масла принимается постоянной и равной ). Считая коэффициент теплоотдачи постоянным [], определить температуру в плоскости симметрии и на поверхности плиты через 1 час 23 мин.

*Решение*. Пренебрегая в первом приближении зависимостью теплофизических свойств стали от температуры, примем в рассматриваемом интервале температур и . Тогда значения определяющих критериев и будут

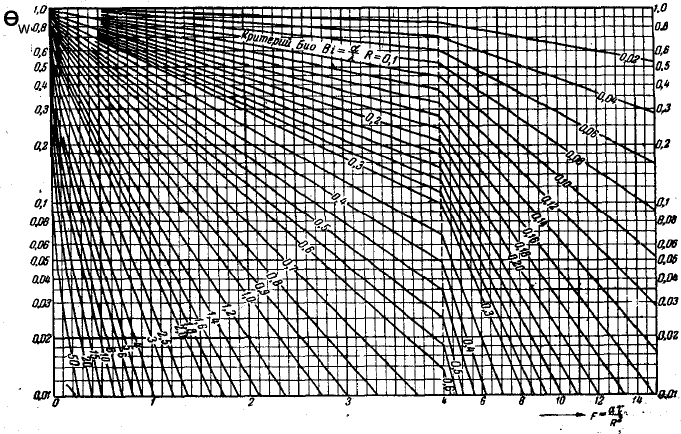
Пользуясь номограммами, приведенными на рис. 3.1а, 3.1б, находим, что безразмерная температура в плоскости симметрии равна:

а на поверхности пластины:

Откуда:



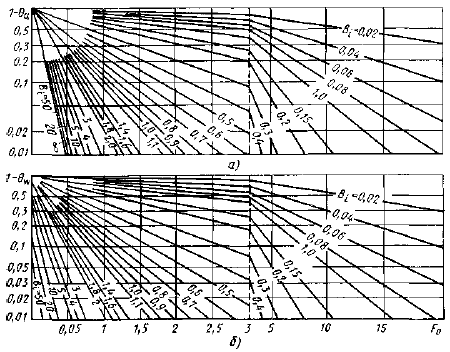
*Рис.3.2а. Безразмерная избыточная температура на оси бесконечного цилиндра.*



*Рис.3.2б. Безразмерная избыточная температура на поверхности бесконечного цилиндра.*

Интересно рассмотреть качественный характер и предельные случаи изменения безразмерной избыточной температуры по безразмерному времени () при граничных условиях 3-го рода. При фиксированном числе температура поверхности быстрее приближается к температуре окружающей среды , чем температура внутри тела (сравните рис. 3.1а и 3.1б). Степень различия в скоростях зависит от . Так, при температуры центра и на поверхности в течение всего процесса можно считать одинаковыми, т.к. приток тепла к телу вследствие конвекции мал (мало ), и температура внутри тела успевает в каждый момент выровняться в силу большой его теплопроводности (большое )*.* В случае же отличие в температурах внутренних точек тела и его поверхности максимально, т.к. задача, как уже говорилось, стремится к задаче с граничными условиями 1-го рода, когда в течение всего процесса. Это легко обнаружить и на номограммах (рис.3.1-3.3), сравнивая зависимости безразмерной температуры от в центре и на поверхности при малых и больших значениях .

В практике часто нельзя воспользоваться решениями для тел бесконечной протяженности (пластина, цилиндр) в силу того, что продольный размер реального объекта (например, длина цилиндра) сравним с поперечным (его диаметром). В этих случаях задача существенно неодномерна.



*Рис. 3.3. Номограммы для определения безразмерной избыточной температуры шара:*

*а – в центре; 6 – на поверхности*

|  |  |
| --- | --- |
| Можно показать, что для ряда простейших тел конечных размеров решение может быть получено комбинацией имеющихся решений для тел бесконечной протяженности. Для цилиндра радиусом и длиной решение находится по формуле , где и – решения для пластины и цилиндра соответственно (см.рис.3.4.).  Для параллелепипеда с ребрами , и безразмерное решение будет равно , где – безразмерное решение соответствующей задачи о бесконечной пластине толщиной . Построение комбинированных решений для тел конечной протяженности, продемонстрированное здесь на примере задачи с граничными условиями 3-го рода, возможно и в задачах с граничными условиями других родов. Следовательно, номограммы типа приведенных на рис. 3.1...3.3 для определения температур простейших тел в нестационарных процессах применимы к весьма широкому кругу неодномерных задач. | *Рис. 3.4. Схема решения задачи о нагреве (охлаждении) цилиндра конечной длины (граничные условия 3-го рода)* |

Следует учитывать, что полученные с помощью номограмм решения носят приближенный характер, т.к. они получены в предположении постоянства по поверхности, неизменности теплофизических свойств тела по температуре и т. д.

**3.4. Аналитический метод решения (метод Фурье)**

Классическим методом решения уравнения (3.10) является метод разделения переменных (метод Фурье). Идея метода состоит в предположении, что решение можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых является функцией безразмерных координат, а другая – функцией только критерия . Таким образом, находятся частные решения уравнения , удовлетворяющие граничным условиям, но не удовлетворяющие начальным. Затем, пользуясь линейностью уравнения, находят решение как линейную суперпозицию этих частных решений

причем такую, которая удовлетворяет начальным условиям путем соответствующего выбора коэффициентов *.*

Итак, представляем в виде:

Подстановка (3.14) в уравнение (3.10) дает:

откуда

Здесь слева функции только времени, а справа – только координат. Равенство (3.16) возможны лишь в том случае, если как левые, так и правые его части – одинаковые постоянные величины, не зависящие ни от времени, ни от координат. Обозначим эту константу через (знак минус принят для удобства последующих преобразований, что отнюдь не налагает каких-либо ограничений на знак самой константы )*.* Тогда исходная задача сводится к следующим двум:

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.17) имеет вид

где *А* – произвольная константа.

Из полученного вида решения видна непригодность значений в рассматриваемой задаче, так как при функция оказывается монотонно растущей функцией времени, что противоречит физическому смыслу задачи, согласно которому тело стремится к тепловому равновесию, т.е.

Решение второго уравнения (3.18) зависит от геометрии тела. При этом оказывается, что не все положительные значения позволяют удовлетворить граничным условиям так, чтобы решение не было тривиальным: .

Дискретные значения постоянной *,* при которых задача (3.18) имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям, называются собственными значениями задачи (3.18) и обозначаются (причем ). Соответствующие решения уравнения называются собственными функциями задачи (3.18) и обозначаются .

Общее решение уравнения (3.10), таким образом, имеет вид

Как уже говорилось, коэффициенты выбираются из условия удовлетворения решения начальным условиям, т. е. при

Для нахождения коэффициентов единица раскладывается в ряд по собственным функциям .

|  |  |
| --- | --- |
| Рассмотрим конкретный пример определения собственных значений и собственных функций задачи в простом случае пространственно одномерной задачи об изменении температур в плоской бесконечной стенке толщиной (рис.3.5). В качестве характерного размера возьмем . В этом случае задача (3.18) будет иметь вид:  Из симметрии рассматриваемой задачи следует, что распределение в стенке будет симметричным относительно плоскости . Поэтому в плоскости симметрии будет выполняться | *Рис.3.5. Схема к задаче об охлаждении плоской стенки (граничные условия 3-го рода)* |

Это условие позволяет освободиться от 2-го граничного условия (3.24) при и свести к задаче о пластине толщиной , теплоизолированной от поверхности . Частное решение исходного уравнения (3.22), удовлетворяющее граничному условию (3.25), имеет вид

Граничному условию при это частное решение удовлетворяет, если

Это уравнение получается подстановкой равенства (3.26) в условие (3.23). Отсюда получаем:

Это характеристическое уравнение позволяет найти собственные значения *m*, а следовательно, и собственные функции рассматриваемой задачи. Обозначая через , получаем

|  |  |
| --- | --- |
| На рис.3.6 показан графический метод отыскания корней характеристического уравнения как координат точек пересечения котангенсоид с прямой . Очевидно, что число корней бесконечно, причем каждый последующий корень больше предыдущего: . Этот набор корней зависит от . Таким образом, решение задачи (3.18) в данном случае имеет вид:  или  а общее решение (3.20) дифференциального уравнения теплопроводности | *Рис.3.6. Графический метод отыскания корней характеристического уравнения* |

Условие (3.21) для нахождения коэффициентов примет вид откуда

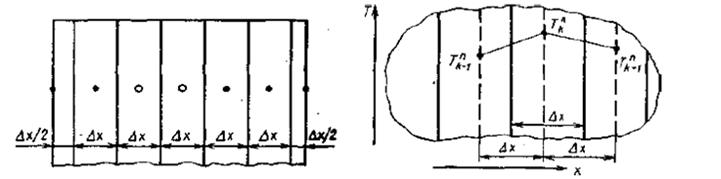
**3.5. Численные методы решения задач нестационарной теплопроводности**

Упомянутые выше решения простейших задач, которые удается затабулировать или свести к расчетным номограммам, получены при неизменной по времени температуре окружающей среды (или температуре стенки или теплового потока )и при одинаковой по всему объёму начальной температуре в момент .

В виде рядов выписывается решение в случае произвольно заданного распределения температур при для тел простейшей формы и одномерных задач. Однако и в этом случае вычисление коэффициентов ряда часто является трудоемким. В связи с этим, наряду с аналитическими развивались и численные методы решения нестационарных задач теплопроводности, которые с появлением мощных компьютеров приобрели решающую роль в проведении точных инженерных тепловых расчетов (прогрев теплозащитных покрытий камер сгорания и сопел ЖРД, тепловые режимы ИСЭ). Численные методы являются единственным инструментом решения нелинейных задач, когда теплофизические свойства непостоянны, и задач теплопроводности тел сложной формы.

**3.5.1. Явный метод**

Один из простейших численных методов продемонстрируем на примере одномерной задачи прогрева (охлаждения) плоской стенки с граничными условиями 3-го рода. Разобьем стенку изотермическими поверхностями (в рассматриваемой задаче они параллельны поверхности стенки) на слои равной толщины . В центре каждого слоя поместим узел. Исключение составляют слои, непосредственно прилегающие к границам твердого тела: их толщина вдвое меньше и узлы расположены на границе (рис. 3.7). Пронумеровав узлы и соответствующие им слои и разделив интересующий нас период времени на малые интервалы и т.д., температуру *k-*го узла в *n*-й момент времени будем считать равной .Считаем, что температура между узлами в каждый момент времени изменяется по линейному закону (рис. 3.8).



|  |  |
| --- | --- |
| *Рис. 3.7. Схема решения задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей* | *Рис. 3.8. Внутренний узел* |

Запишем баланс тепла для *k-*го слоя (см. рис. 3.8). Очевидно, что тепловые потоки, втекающие через левую и правую границы слоя, изменяют энтальпию рассматриваемого слоя, т. е.

Тепловые потоки выражаются через закон Фурье: , где – площадь поверхности слоя. Т.к. предположили, что между узлами (значит и на границе слоя) температура меняется линейно, то

Энтальпия выражается соотношением , где – теплоемкость материала,  *–* плотность. Её изменение за время , предполагая, что плотность и теплоемкостьпостоянны, можно аппроксимировать выражением

Подставляя соотношения для , , в уравнение (3.33), получим

Решая это уравнение относительно , получим

где критерий Фурье определяется соотношением , .

Уравнение (3.34) позволяет в явной форме определить температуры во всех внутренних узлах в -й момент времени, если известны температуры в -й момент – этот способ численного решения называют явным.

|  |  |
| --- | --- |
| Теперь рассмотрим баланс тепла в граничном слое (рис.3.9). В отличие от предыдущего случая в том, что поток тепла через левую границу слоя определяется формуле Ньютона , энтальпия , т.е. . Записав балансное уравнение (3.33), получим  откуда  где . | *Рис.3.9. Граничный узел* |

Для решения задачи нестационарного теплообмена надо знать начальное распределение температуры в каждой точке тела . Из соотношений (3.34) и (3.35) определяется распределение температуры в следующий момент времени – . Далее процесс повторяется до достижения момента времени, для которого требуется знать распределение температуры. Аналогично можно решать двухмерные и трехмерные задачи.

Отметим, что выбор шагов интегрирования и не является произвольным, т.к. при некоторых соотношениях шагов можно получить результаты, противоречащие законам термодинамики. Пусть в какой-то момент времени в трех соседних точках температуры равны , , , а интервал времени таков, что критерий . Согласно формуле (3.34), . В первый момент времени температура -й точки меньше, чем в двух соседних точках, и тепло подводится к ней от этих точек. Таким образом, тот факт, что в следующий момент времени температура -й точки превысила 200К, противоречит второму закону термодинамики. Анализ показывает, что нарушение законов термодинамики не будет происходить только при выполнении условия

т. е., когда коэффициент при в формуле (3.34) не является отрицательным.

Условие (3.36) называется критерием устойчивости уравнения (3.34). Если оно не выполняется, решение становится неустойчивым. Критерий устойчивости для слоя, прилежащего к границе, имеет вид

Для получения устойчивого решения необходимо и достаточно выполнение обоих условий: (3.36) и (3.37). Например, если положить , то из (3.37) получим . Это значит, что, если значение коэффициента теплоотдачи достаточно велико, необходимо уменьшить шаг *,* что, в свою очередь, повлечет уменьшение шага согласно (3.36). Ограничения типа (3.36), (3.37) являются существенным недостатком явных методов.

**3.5.2. Неявный метод**

Как уже говорилось, основной недостаток явных методов – ограничения на шаг по времени согласно критериям устойчивости (3.36), (3.37). Для удовлетворения этих критериев приходится выбирать очень малый шаг , что приводит к возрастанию времени расчетов. Избежать ограничений на шаг по времени со стороны критериев устойчивости позволяет переход к неявным методам. Рассмотрим сначала внутренний узел. Выразив потоки тепла через температуры на -ом шаге по времени (а не на -ом, как это было сделано в разделе 3.5.1), получим следующий конечно-разностный аналог дифференциального уравнения теплопроводности

откуда получаем систему уравнений для определения температур на -м шаге по времени

В отличие от явного метода, при использовании которого температура выражается явно через остальные члены уравнения (3.35), в данном случае необходимо решать одновременно систему уравнений (3.38) для всех узлов. Такой метод называется неявным. Он устойчив при любом значении , в этом его основное достоинство по сравнению с явным методом. Недостаток – необходимость решать систему алгебраических уравнений (3.38).

Аналогично выводится уравнение для граничных узлов:

Таким образом, получена система из -х уравнений для внутренних узлов и двух – для граничных. Она содержит неизвестных и таким образом является замкнутой.

**3.6. Регулярные тепловые режимы**

Для того, чтобы ввести понятие регулярного теплового режима, рассмотрим процесс охлаждения (нагрева) в среде с постоянной температурой произвольного по форме однородного и изотропного тела, начальное распределение температур в котором (при ) задано известной функцией координат *.* В целях упрощения записи будем, не уменьшая общности, считать температуру окружающей среды . Решение (3.20) представлено в виде бесконечного ряда

или

Рассматривая поведение ряда (3.40) с ростом времени (т.е. критерия Фурье), убедимся, что все члены ряда убывают по времени, хотя и с неодинаковой скоростью. Причем, поскольку , члены высших порядковых номеров убывают быстрее и уже очень скоро становятся пренебрежимо малыми. Поэтому температура какой-либо произвольной точки тела задолго до достижения ею температуры окружающей

|  |  |
| --- | --- |
| среды (в нашем случае ) будет определяться, по существу, первым членом ряда (3.40), т. е. следовать простому экспоненциальному закону  Момент, когда изменение температуры всех точек тела можно считать следующим этому простому закону, называют началом регулярного, т. е. упорядоченного режима. Функция по определению не зависит от начальных условий, а хотя и определяется из начальных условий, не зависит ни от координаты точки, ни от времени . Поэтому при наступлении регулярного режима можно считать, что начальное тепловое состояние тела больше не оказывает влияния на закон изменения температур по времени во всех его точках. Подставив значение безразмерной избыточной температуры и в (3.41) и прологарифмировав это выражение, получим: | *Рис. 3.10. Изменение по времени логарифма избыточной температуры для точек произвольного тела.* |

Дифференцируем (3.42) по времени и получаем:

где называется темпом охлаждения (нагрева). Из (3.43) следует важный вывод, что зависимость логарифма избыточной температуры в области регулярного режима для всех точек тела приобретает линейный характер, причем ее угол наклона одинаков для всех точек и равен (рис. 3.10).

Существенно, что поле температур в теле в процессе регулярного охлаждения остается подобным самому себе, поскольку отношение избыточных температур любых точек тела становится постоянным и не зависящим от времени, а определяется лишь координатами этих точек. В этом легко убедиться, поделив полученное из равенства (3.41) значение в точке на значение в точке :

Темп охлаждения зависит от формы, размеров и материала тела, а также от граничных условий задачи. Значение можно определить, замеряя в эксперименте изменение температуры какой-либо точки охлаждаемого тела по времени. Для этого, построив график зависимости , следует взять на прямолинейном его участке (область регулярногорежима) две точки и тогда

|  |  |
| --- | --- |
| Наглядную интерпретацию становления регулярного режима охлаждения можно дать, рассмотрев распределение температуры по толщине плоской стенки, помещенной в среду с постоянной температурой (рис.3.11). Если вначале () распределение температуры имело вид, изображенный кривой *А'А,* то в ближайшие за начальным моменты времени и изменения температуры отдельных точек по времени во многом еще определяются не внешними условиями, а самим начальным распределением. Так, в некоторых сечениях (близких к ) температура сначала начинает даже возрастать. Но постепенно влияние начальных условий ослабевает, и, начиная с , температура всех точек тела начинает падать по одинаковому экспоненциальному закону, т.е. наступает регулярный режим.  Выше было дано представление о регулярном режиме охлаждения (нагрева) тела в среде с постоянной температурой. Понятие регулярности режима может быть обобщено и на случай изменения во времени по таким простейшим законам, как линейный и гармонический. При рассмотрении регулярных режимов не делается различия между задачами | *Рис.3.11. Распределение температуры по толщине плоской стенки (граничные условия 3-го рода) для различных моментов времени при произвольном начальном распределении А'А* |

с граничными условиями 1-го и 3-го рода, поскольку ранее было показано, что при обе задачи эквивалентны , а значит и все выводы, полученные из рассмотрения задачи с граничными условиями 3-го рода, легко обобщаются на случай граничных условий 1-го рода.

В соответствии с названными выше тремя типичными законами изменения во времени различают регулярные режимы трех родов. Рассмотренный в начале этого раздела называется регулярным режимом 1-го рода. Признак регуляризации режима 1-го рода состоит в том, что изменение температуры в каждой точке системы происходит по экспоненте, одинаковой для всех точек:

Регулярный режим 2-го рода () наступает, когда скорость изменения температуры становится, во-первых, постоянной, общей для всех точек тела, и, во-вторых, равной скорости изменения температуры внешней среды:

т.е. .

Для регулярного режима 3-го рода, когда , характерно, что температура любой точки тела колеблется около своего среднего значения с тем же периодом, что и температура окружающей среды, т.е. с периодом, одинаковым для всех точек тела:

где – функции координат. Очевидно, эти колебания происходят с иной амплитудой, а также могут быть смещены по фазе по сравнению с колебаниями температуры окружающей среды.

**3.6.1. Регулярный режим 1-го рода**

Остановимся подробно на регулярном режиме 1-го рода. В некоторых случаях регулярный режим может наступать сразу после начала процесса охлаждения или нагрева тела.

Пусть тело произвольной формы, с объемом и поверхностью обладает высокой теплопроводностью к, а коэффициент теплоотдачи у поверхности *α* мал. Это означает, что критерий , и можно считать, что температура внутри тела очень быстро выравнивается и в каждый данный момент времени близка к постоянной, равной температуре его поверхности . Тогда уравнение теплового баланса, приравнивающее количество тепла, поступившего через поверхность тела, к изменению его энтальпии, запишем в виде

В этом уравнении – температура тела – не зависит от координат в силу предположения, что . Считая теплофизические характеристики системы постоянными и вводя новую переменную , легко проинтегрировать это выражение:

или

где , .

Таким образом, при регулярный режим устанавливается сразу после начала процесса. Уравнение, аналогичное уравнению (3.51), можно составить и для случая, когда произвольно, т.е. температура в различных точках тела в данный момент времени различна. Только при этом пришлось бы воспользоваться понятиями средней по объему избыточной температуры

и средней по поверхности температуры

где – местная избыточная температура в данный момент времени. В этом произвольном случае темп охлаждения отличался бы от выражения (3.50) при на коэффициент

представляющий собой отношение средней поверхностной температуры к средней по объему. Очевидно, что при , когда : .

Другой предельный случай, когда , соответствует , т.е. максимальной неравномерности температурного поля внутри тела. Уравнения (3.49) – (3.51) имеют в общем случае вид:

или с учетом (3.52)

или

Итак, при произвольном темп охлаждения

**3.6.2. Регулярный режим 1-го рода при и его использование для экспериментального определения коэффициента теплоотдачи**

Исходя из вышесказанного, укажем на некоторые практические приложения теории регулярного режима 1-го рода. В теплофизическом эксперименте часто необходимо экспериментально найти коэффициент теплоотдачи на каком-то участке поверхности. В этом случае удобно воспользоваться тем обстоятельством, что при  коэффициент , и следовательно, из формулы (3.56) следует:

Заделав в интересующей части поверхности тела датчик в виде тонкой пластины из теплопроводного материала (медь, серебро) и подсоединив в нему термопару, связанную с регистрирующим устройством (например осциллографом), можно получить зависимость температуры датчика от времени, после того как тело, на поверхности которого установлен датчик, поместили в поток или среду с постоянной температурой .

Вследствие малости (толщина датчика мала, а коэффициент велик) температуру в данный момент времени можно считать одинаковой по всему датчику и равной измеренной с помощью термопары.

Перестраивая полученную зависимость в полулогарифмических координатах , определим на участке регулярного режима по формуле (3.45) (см. рис. 3.10). А затем, пользуясь выражением (3.57), легко найти . В этом случае в качестве должна браться лишь та площадь поверхности датчика, которая воспринимает конвективный тепловой поток. Остальную часть его поверхности при установке датчика стремятся тщательно теплоизолировать, поскольку важно быть уверенным, что за время измерений утечки тепла от датчика в корпус или иным путем пренебрежимо малы в сравнении с конвективным потоком

Основное преимущество данного метода регулярного режима состоит в том, что при очень малых, а следовательно, малоинерционных датчиках время измерения можно сократить до 1с и менее, что важно в экспериментальных установках кратковременного действия, таких, например, как аэродинамические трубы больших скоростей.

**3.6.3. Регулярный режим 1-го рода при и его использование для экспериментального определения коэффициента температуропроводности**

Другой пример практического использования регулярного режима относится к экспериментальному определению теплофизических констант материала. При (т.е. ) стремится к нулю. Однако в этом предельном случае, который очевидно сводит задачу с граничными условиями 3-го рода к задаче с граничными условиями 1-го рода (), темп охлаждения стремится к определенному конечному пределу, не зависящему от и прямо пропорциональному коэффициенту температуропроводности тела :

Это утверждение называют 1-й теоремой Кондратьева.

В выражении (3.58) коэффициент пропорциональности зависит лишь от формы и размеров тела и для задач с граничными условиями 1-го рода, где доступно аналитическое решение (пластина, шар, цилиндр, параллелепипед и др.), может быть получен из показателя экспоненты первого члена ряда, представляющего соответствующее решение.

Так, для шара радиусом

для цилиндра радиусом и длиной

для параллелепипеда со сторонами

Размерность – м2.

Важным с точки зрения практики является то обстоятельство, что с увеличением темп охлаждения очень быстро приближается к своему предельному значению , соответствующему .

Найдя экспериментально темп охлаждения и зная коэффициент формы (если образцу придана простая геометрическая форма), можно определить коэффициент температуропроводности материала . Как уже говорилось, быстро приближается к с ростом (или ). Поэтому с достаточно высокой точностью при больших, но конечных можно принять . Поместив образец в водяной термостат, где температура поддерживается постоянной и идет интенсивное вынужденное перемешивание, обеспечивающее высокое значение коэффициентов теплоотдачи , измеряют заделанной внутрь образца термопарой величину через определенные промежутки времени. Из построенной для участка регулярного режима зависимости находят и, зная коэффициент формы , вычисляют коэффициент температуропроводности по формуле (3.58).