

Phương trình khuếch tán và phương pháp lặp Jacobi (Demo)

Kim Đình Sơn ID: 20102089

Dương Văn Chính ID: 20101170

Lê Khắc Tuấn ID: 20102419

Phạm Văn Tiến ID: 20102319

Báo cáo môn Tính toán khoa học, ngành Khoa học máy tính, viện Công nghệ thông tin và truyền thông, trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Ta chia mặt phẳng thành các điểm lưới, giá trị nồng độ tại mỗi điểm nằm trong miền từ 0 đến 1. Nồng độ cao nhất có giá trị là 1, và thấp nhất là 0. Khi tính toán theo phương pháp lặp Jacobi, ma trận nồng độ của các điểm lưới sẽ được cập nhật theo công thức dưới đây:

$$c_{l,m} = \frac{1}{4} [c_{l+1,m} + c_{l-1,m} + c_{l,m+1} + c_{l,m-1}]$$

Giải thuật

```
/* Jacobi update, square domain, periodic in x, fixed */
/* upper and lower boundaries */
while (d > tolerance)
{
    delta = 0
    for i=0 to max {
        for j=0 to max {
            if(cij is a source) cij(n+1) = 1.0
            else if(cij is a sink) cij(n+1) = 0.0
            else {
                /* periodic boundaries */
                left = (i==0) ? cmax-1,j(n) : ci-1,j(n)
                right = (i==max) ? c1,j(n) : ci+1,j(n)
                /* fixed boundaries */
                down = (j==0) ? c0 : ci,j-1(n)
                up = (j==max) ? cL : ci,j+1(n)
            }
        }
    }
}
```

```

                                ci,j+1(n) = 0.25 * (left+right+up+down)
                            }
                        /* stopping criterion */
                    if(|cij(n+1) - cij(n)| > tolerance) δ = |cij(n+1) - cij(n)|
                }
    }

```

Input:

Ma trận khởi tạo kích thước L:

- **Dòng thứ 1** : chứa giá trị L là độ chia kích thước lưới 2 chiều kích thước $C[1..(L), 1..(L)]$
- **Dòng thứ 2** : chứa giá trị 0 (ô biên đều là *sink*) hoặc 1 (*không đặt điều kiện biên*)

+	+	+	+	+	+	+	a
.							a
.							a
.							a
.							a
.							a
.	c	c	c	c	c	c	c

Các ô biên là các ô thuộc hàng 1, hàng L, cột 1, cột L

- Dòng tiếp theo chứa số m: số lượng ô sink hoặc source trong man trận
C[1..L][1..L]

M dòng tiếp theo theo định dạng:

 $dx \, dy \, dw$

Tương tự $C[dx][dy] = dw$;

$$2 \leq dx \leq L; 2 \leq dy \leq L; dw = 0,1.$$

- Dòng cuối cùng chứa độ sai số: tolerance

Output:

N - số bước lặp theo phương pháp Jacobi

T - thời gian chạy (Sử dụng để lập biểu đồ so sánh)

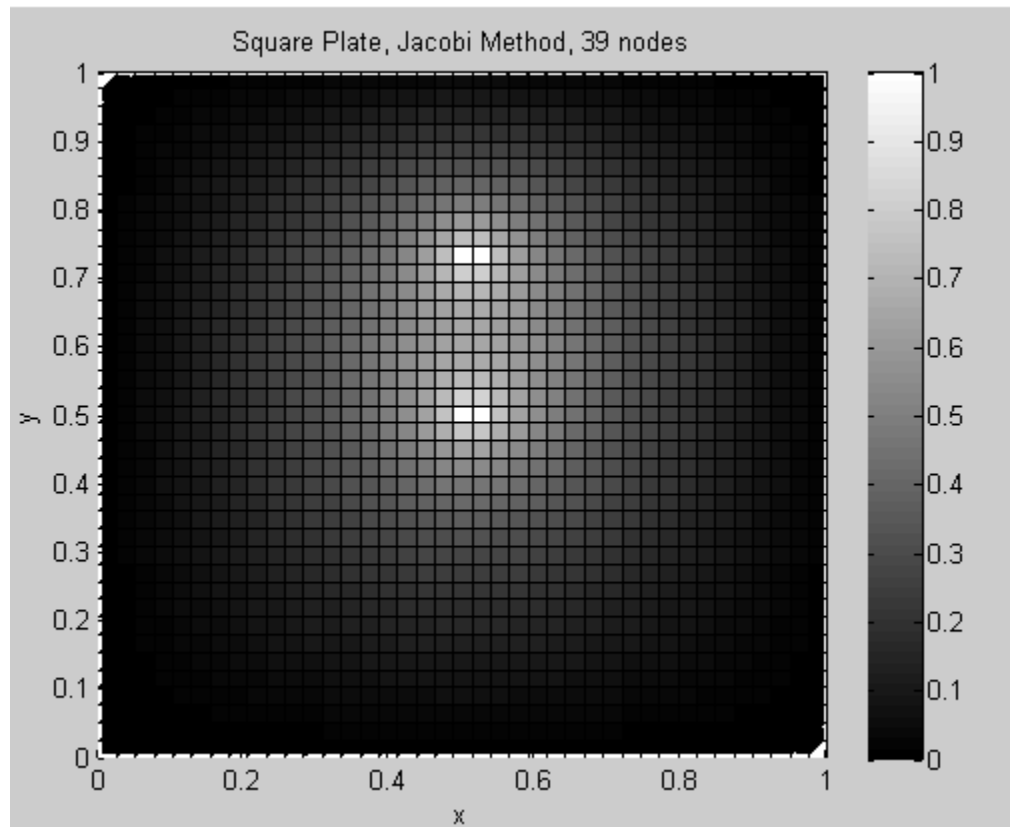
Ma trận nồng độ kết quả $C[i][j]$; ($1 \leq i \leq L$; $1 \leq j \leq L$);

Ví dụ ma trận khởi tạo:

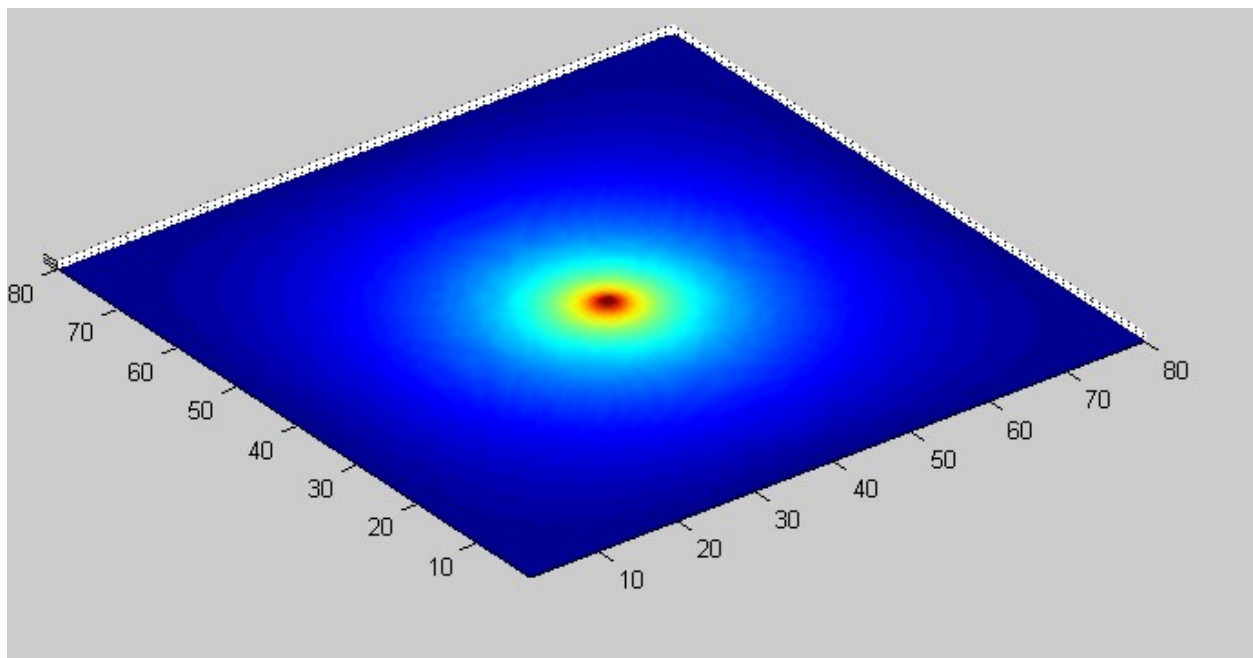
```
80
1
8
40 40 1
39 41 1
40 41 1
39 40 1
20 20 1
19 21 1
20 21 1
19 20 1
```

Demo kết quả

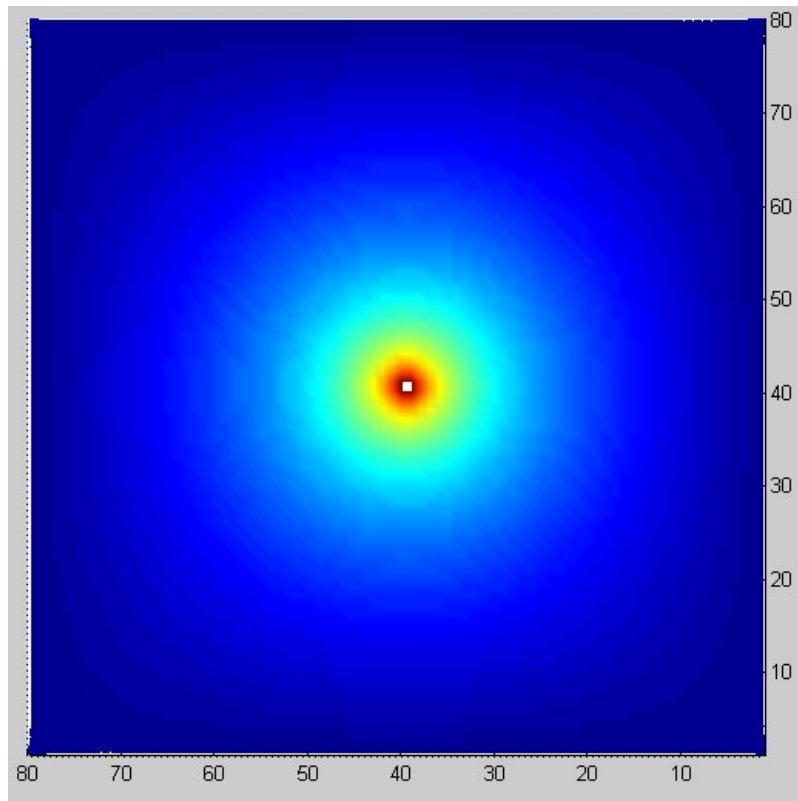
- 1- Kích thước $L = 40$ ($N=39$), 2 “vùng điểm” source, không có điều kiện biên (Hình 1)
- 2- Kích thước $L = 80$, 1 nguồn, không có điều kiện biên (Hình 2,3,4)
- 3- Kích thước $L = 80$, 2 nguồn, không có điều kiện biên (Hình 5,6,7,8)



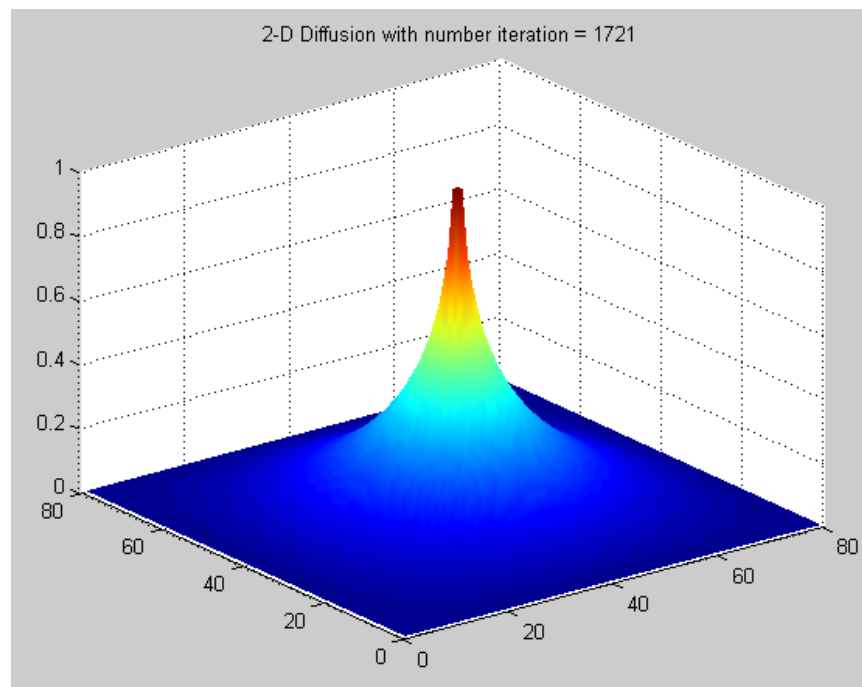
Hình 1 $L = 40$, 2 “vùng điểm” nguồn, không có điều kiện biên



Hình 2 $L = 80$, 1 nguồn, không có điều kiện biên

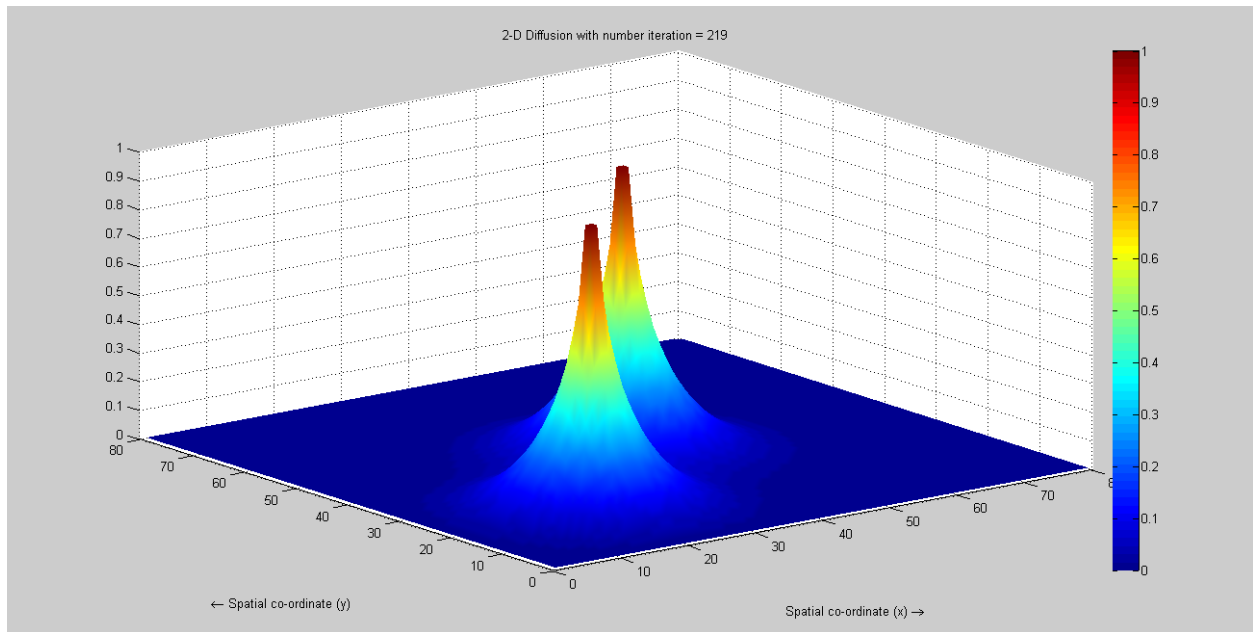


Hình 3 $L=80$, 1 nguồn, không có điều kiện biên, trạng thái kết thúc (cân bằng)

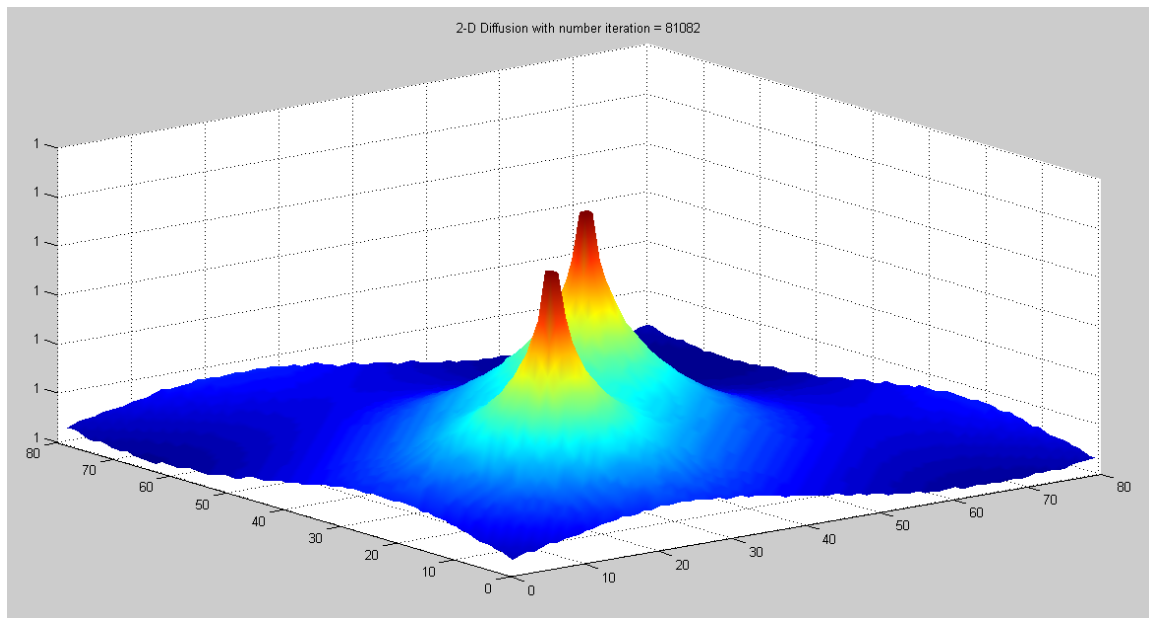


Hình 4 Mô tả trực quan điều kiện như ở hình 3, điểm có nồng độ càng cao thì càng nằm trên đỉnh.

Phương trình khuếch tán

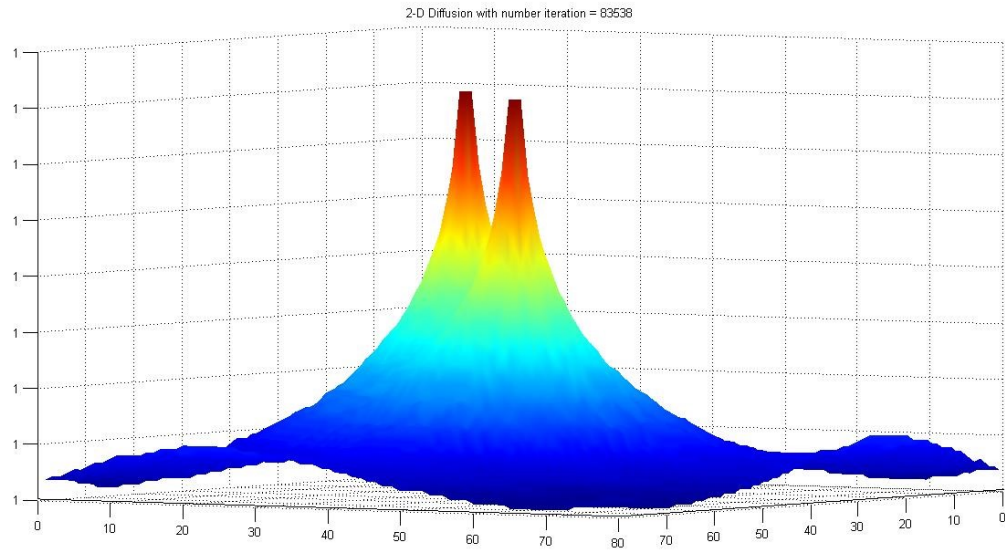


Hình 5 $L = 80$, 2 nguồn, có điều kiện biên, ở bước lặp $n = 219$

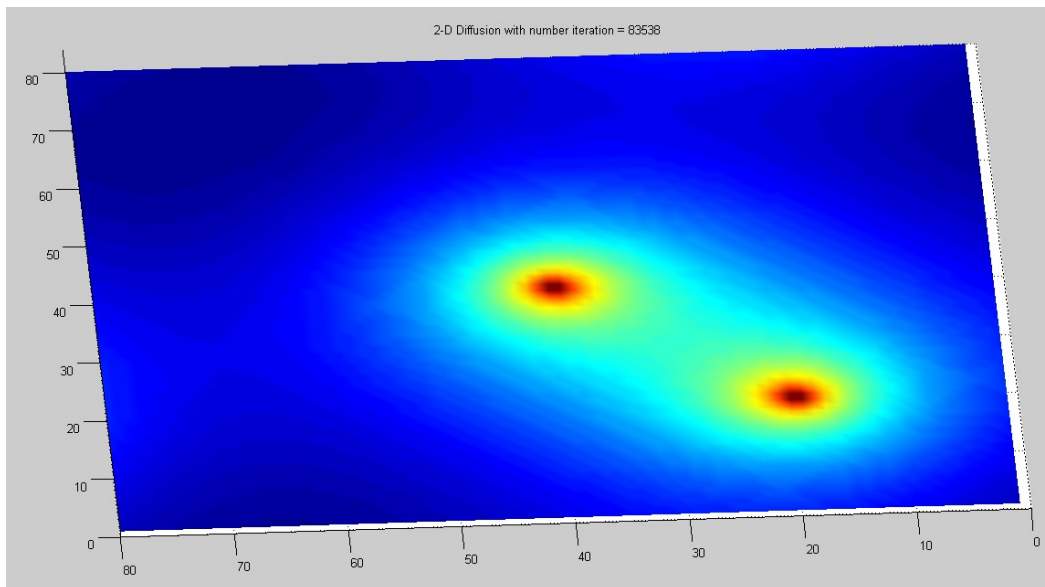


Hình 6 Trạng thái kết thúc, $n = 81082$

Phương trình khuếch tán



Hình 7 Trạng thái kết thúc, $n = 81082$



Hình 8 Trạng thái kết thúc, $n = 81082$, mặt phẳng 2 chiều