Mô hình logistic áp dụng hệ p-fuzzy

Sinh viên thực hiện: Nguyễn Quang Quý - 20153108

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội
Viện Công nghệ thông tin và truyền thông

Giảng viên hướng dẫn: PGS.TS. Phạm Văn Hải

Tóm tắt — *Nghiên cứu của bài báo chỉ ra khả năng áp dụng của hệ p-fuzzy trong mô hình hóa các hệ động học rời rạc và liên tục. Về khái niệm, hệ p-fuzzy là sự kết hợp giữa hệ mờ (fuzzy rule-based system, FRBSs) và các phương pháp số để có thể giả lập được tính động của một hệ thống tiến hoá. Trong bài báo này, tác giả sử dụng các mô hình logistic rời rạc và liên tục đã biết trong lĩnh vực Toán-Sinh với vấn đề điển hình được biết đến đó là quần thể động. Tác giả tiến hành một chuỗi các giả lập đối với hệ logistic rời rạc và liên tục với nhiều tỷ lệ tăng trưởng khác nhau. Kết quả thu được cho thấy có sự tương tự giữa kết quả định lượng và định tính thu được từ p-fuzzy so với kết quả đạt được nhờ vào nghiệm tường minh trong mô hình toán của hiện tượng xem xét.*

Từ khóa: *hệ động học phi tuyến, ánh xạ logistic, hệ p-fuzzy.*

1 Giới thiệu

Mô hình logistic, hay còn gọi là mô hình tăng trưởng Verhuslt, giữ một vai trò trong lĩnh vực Toán-Sinh, mô tả nhiều hiện tượng trong thực tế với điển hình là hiện tượng quần thể động. Mô hình logistic rời rạc và liên tục được cho bởi các phương trình vi phân và sai phân tương ứng [3, 4].

Trong thực tế, nhiều hiện tượng được mô tả bởi các phương trình vi phân hoặc sai phân [3, 4]. Tuy nhiên, các phương trình này cần phải có sự tường minh về mặt công thức thông qua việc mô tả các trường có hướng hoặc các hành vi thay đổi của hệ động. Nhìn chung, một hàm sẽ phụ thuộc vào nhiều giả thuyết và các điều kiện của hiện tượng đang xem xét. Khi đó, công thức tường minh của hàm thường không đơn giản cho các chuyên gia, đặc biệt là trong trường hợp họ chưa được tiếp cận với phương trình vi phân hoặc sai phân, do vậy sẽ khó khăn trong việc mô tả hành vi của hệ động học thông qua việc tìm nghiệm tường minh của phương trình vi phân hoặc sai phân. Tuy nhiên, có một cách tiếp cận khác để vẫn đạt được mục đích trên, đó là khi chuyên gia biết được cách hoạt động của hiện tượng được mô tả bởi các luật, khi đó chuyên gia có thể giả lập hành vi của hiện tượng dựa trên hệ p-fuzzy [1].

Một hệ p-fuzzy có thể được xem như một hệ động học mà hàm mô tả luật tiến hóa được cho bởi một hệ mờ (FRBS) [1]. Trong bài báo, tác giả sử dụng hệ mờ với điều khiển mờ là Mamdani dựa trên các luật được ràng buộc theo ngữ cảnh. Từ đó, xác định đầu ra của hệ p-fuzzy thông qua phương pháp số cho cả hai mô hình tăng trưởng Verhuslt rời rạc và liên tục. Sau cùng, tác giả tiến hành các thử nghiệm để đánh giá mức độ tương đồng của nghiệm khi áp dụng hệ p-fuzzy so với việc tìm lời giải tường minh cho phương trình vi phân (trong trường hợp liên tục) và sai phân trong trường hợp rời rạc.

2 Các khái niệm

Phần này sẽ mô tả nền tảng toán học cơ bản của mô hình logistic rời rạc và liên tục, và lý thuyết tập mờ.

2.1 Mô hình logistic rời rạc và liên tục

- Mô hình logistic rời rạc [3, 4, 6]:
  Phương trình mô tả:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \tag{1}$$

  - x_n - kích thước quần thể tại thế hệ thứ n
  - λ - tỷ lệ tăng trưởng của quần thể (tốc độ tăng trưởng)

Công thức (1) có dạng một phương trình sai phân phi tuyến với tham số λ, ở đây n là chỉ vòng lặp thứ n. Các ràng buộc của phương trình (1) đó là: $x_n \in (0,1)$và$\lambda \in (1,4)$. Nếu λ ngoài khoảng này thì quần thể sẽ dẫn tới sự tuyệt chủng tuyệt chủng [3, 4].

Trạng thái ổn định duy nhất không tầm thường của hệ (1) được cho bởi

$$\bar{x} = 1 - \frac{1}{\lambda} \tag{2}$$

với $1 < \lambda < 3$ [3, 4]. Khi $\lambda > 3$ thì hành vi của hệ thống sẽ trở nên hỗn loạn (tuân theo lý thuyết hỗn loạn) [4, 6].

Trong bài báo, tác giả chỉ xem xét các trường hợp đặc biệt sau [3, 4, 6]:

1. Nếu $\lambda \in (1,2)$ thì hệ (1) là ổn định và hộ tụ đơn điệu về $\bar{x}$.
2. Nếu $\lambda \in (2,3)$ thì hệ (1) là ổn định và hộ tụ về $\bar{x}$ nhưng không đơn điệu.
3. Nếu $\lambda \in (3, 1+\sqrt{6})$ thì hệ (1) là dao động ổn định quanh hai điểm cố định $\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2$:

$$\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2 = \frac{(\lambda+1) \pm \sqrt{(\lambda-3)(\lambda+1)}}{2\lambda}$$

- Mô hình logistic liên tục [3]:
Phương trình mô tả:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \alpha P(1 - \frac{P}{K}) \tag{3}$$

  - P - kích thước quần thể tại thời điểm t
  - K - kích thước quần thể khi $t \to \infty$
  - α - tỷ lệ tăng trưởng nội tại

Công thức nghiệm của (3) được cho bởi [3]:

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-\alpha t}} \tag{4}$$

Với P_0 là kích thước khởi tạo của quẩn thể. Mô hình logistic liên tục không có hiện tượng dao động hay phân chia, nói cách khác là không xuất hiện hỗn loạn. Tuy nhiên, tồn tại duy nhất một trạng thái ổn định không tầm thường đó là $\bar{P} = K$ với mọi $\alpha > 0$

2.2 Lý thuyết tập mờ và hệ p-fuzzy

Tập mờ A trên không gian tham chiếu $\mathbb{Z}$ được đặc trưng bởi hàm thuộc [1]:

$$\varphi_A : \mathbb{Z} \to [0, 1]$$

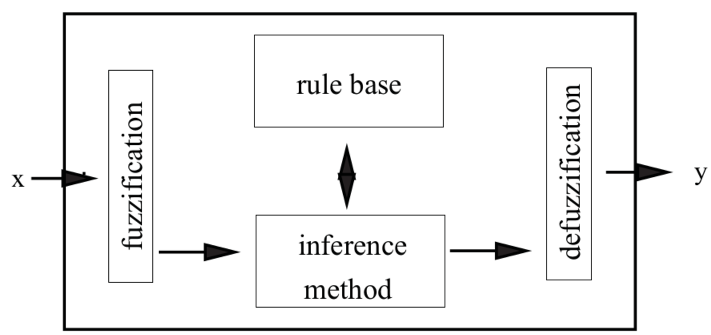
Để cho gọn, trong bài báo sử dụng ký hiệu $A(z)$ thay vì $\varphi_A(z)$ Tập hợp các tập mờ trên không gian nền $\mathbb{Z}$ được kí hiệu là $F(\mathbb{Z})$. Trong bài báo chỉ quan tâm tới một loại tập mờ đặc biệt đó là số mờ.

Một số mờ A có dạng hình thang, được mô tả bởi bộ 4 số (a, b_1, b_2, c) với $a, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$ và $a \leq b_1 \leq b_2 \leq c$, với hàm phụ thuộc được cho bởi [1, 7] là:

$$A(z) = \begin{cases} \frac{z-a}{b_1-a} & \text{Nếu} z \in [a, b_1) \\ 1 & \text{Nếu} z \in [b_1, b_2] \\ \frac{c-z}{c-b_2} & \text{Nếu} z \in (b_2, c] \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

Khi $b_1 = b_2 = b$, A sẽ có dạng tập mờ tam giác, biểu diễn bởi bộ 3 (a, b, c) [1]

Hệ mờ (FRBS) là hệ gồm 4 thành phần:



Hình 1: Hệ điều khiển mờ

- Mờ hoá: Chuyển các giá trị rõ đầu vào về dạng số mờ trong không gian bài toán tương ứng
- Tham số và cơ sở luật: Được xây dựng bởi các chuyên gia. Cơ sở luật được mô tả dưới dạng r luật theo dạng "Nếu u là A_j thì v là B_j" với $A_j \in F(U)$ và $B_j \in F(V)$, $j = 1, 2, \ldots, r$

- Suy diễn mờ: Ánh xạ liên kết tập mờ trên không gian U với tập mờ trên không gian, trên cơ sở các luật mờ. Ở đây, bài báo sử dụng suy diễn mờ Mamdani [1], cụ thể với đầu vào $u \in \mathbb{R}$, sử dụng suy diễn mờ Mamdani ta thu được tập mờ đầu ra B:

$$B(v) = \max_{j=1,2,\ldots,r} \min(A_j(u), B_j(v)), \forall v \in \mathbb{R} \tag{5}$$

- Khử mờ: Chuyển tập mờ về giá trị rõ. Ở đây, tác giả sử dụng phương pháp khử mờ trọng tâm [1, 5, 7].

Hệ mờ bán phần, hay ngắn gọn là hệ p-fuzzy, là một hệ động học được mô tả bởi trường có hướng hoặc hành vi hay chức nay có tính biến động được cho bởi một hệ mờ với luật mờ được xây dựng dựa trên các tri thức từng phần về hiện tượng đang xem xét [1, 9].

Bài báo xem xét các hệ tự trị, đó là các hệ động học mà các tốc độ thay đổi không phụ thuộc một cách rõ ràng vào thời gian. Về hình thức, các luật mờ trong hệ p-fuzzy liên tục và rời rạc là giống nhau, sự khác nhau chủ yếu đến từ công thức biểu diễn. Trong hệ rời rạc, các thay đổi là các khái niệm tuyệt đối, ngược lại, trong trường hợp liên tục, tốc độ thay đổi phải bao hàm các thuộc tính định tính thống nhất với khái niệm đạo hàm. Đầu vào của hệ mờ ở đây là biến trạng thái của hệ động học , đầu ra sẽ là tỷ lệ thay đổi sau khi qua hệ thống.

Vấn đề khởi tạo (IVPs) trong trường hợp rời rạc được mô tả dưới dạng:

$$x_{n+1} = f(x_n), x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Ở đây, f chỉ được biết một phần. Sử dụng những thông tin biết được về f, bài báo đánh giá f bởi hệ mờ $FRBS_f$. Khi đó, hệ (6) được xem xét dưới dạng hệ p-fuzzy như sau:

$$x_{n+1} = FRBS_f(x_n), x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Tương tự, trong trường hợp liên tục, IVPs có dạng:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = g(P), P(0) = P_0 \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Ở đây, thông tin của g chỉ được biết một phần. Áp dụng mô tả trong hệ p-fuzzy, ta được:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = FRBS_g(P), P(0) = P_0 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Trong phương trình (6) và (8), hàm f và g chỉ được biết một phần, theo nghĩa ta chỉ có một số thông tin định lượng và định tính của f và g, những thông tin này thường được cung cấp bởi chuyên gia hoặc được trích xuất từ tập dữ liệu được cho sẵn và không biết rõ công thức tường minh của f và g. Khi áp dụng suy diễn mờ theo Mamdani, ta thu được ánh xạ $f_r^* = FRBS_f$ (hoặc $g_r^* = FRBS_g$) từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, với r là số luật trong cơ sở luật. Về lý thuyết, có thể chứng minh được rằng khi r tăng lên thì $f_r^* \approx f$ (hoặc $g_r^* \approx g$) [2].

Trong trường hợp rời rạc, nghiệm cho hệ (7) đạt được bằng cách sử dụng phương pháp lặp theo phương trình:

$$x_{k+1} = x_k + \delta x_k \tag{10}$$

Ở đây δx_k là đầu ra của hệ mờ ở vòng lặp thứ k.

Trong trường hợp liên tục, nghiệm $P(t)$ của hệ (9) thu được dưới dạng chuỗi P_k sử dụng phương pháp số như Euler, Runge-Kutta [1] để giải gần đúng phương trình vi phân. Trong bài báo, sử dụng công thức:

$$P_{k+1} = P_k + h\delta P_k \tag{11}$$

Ở đây, h là bước thời gian, δP_k là sai phân sinh ra trong vòng lặp thứ k bởi $FRBS_g$

3 Mô hình logistic áp dụng hệ p-fuzzy

Áp dụng hệ p-fuzzy trong mô hình Logistic, trong trường hợp liên tục, IVP là:

$$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = g(P), P(0) = P_0 \in \mathbb{R} \tag{12}$$

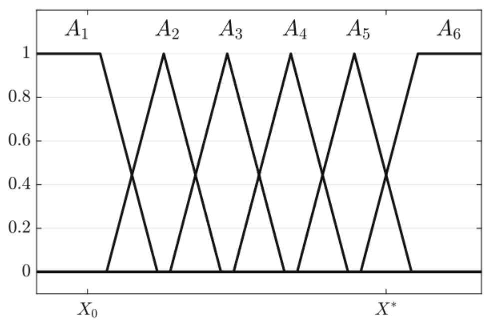
Khi đó (11) trở thành:

$$P_{k+1} = P_k + h\delta P_k \tag{13}$$

3.1 Xây dựng luật mờ

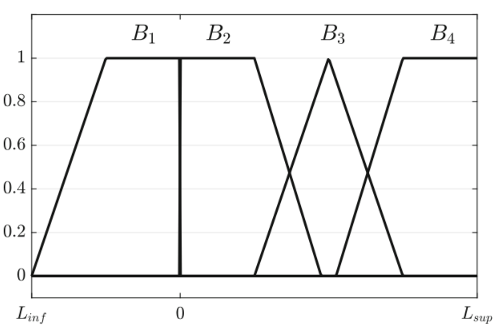
Trong hệ p-fuzzy, ta đã thấy rằng trường có hướng thu được bởi các hệ mờ. Ở đây, ta cần xây dựng hệ mờ cho việc tìm các trường có hướng. Dựa trên mô hình Logistic, ta xác định được đầu vào X của hệ mờ là kích thước quần thể x_n (hoặc P_t) và đầu ra Y sẽ là độ lệch của X ở thời điểm kế tiếp so với thời điểm hiện tại - δx_k trong trường hợp rời rạc và δP_k trong trường hợp liên tục. Trong bài báo, tác giả xây dựng kịch bản giả lập như sau:

- 6 tập mờ cho biến ngôn ngữ X: A_1: "low", A_2: "average low", A_3: "average", A_4: "average high", A_5: "high" và A_6: "very high":



Hình 2: Tập mờ đầu vào, X_0 là giá trị khởi tạo, X^* là khả năng mang

- 4 tập mờ cho biến ngôn ngữ Y: B_1: "low negative", B_2: "low positive", B_3: "average positive", B_4: "high positive"



Hình 3: Tập mờ đầu ra, $[L_{inf}, L_{sup}]$ là khoảng giá trị có thể của Y

- Các luật mờ:

  1. r_1: nếu X là "low" (A_1) thì Y là "low possitive" (B_2)

2. r_2: nếu X là "average low" (A_2) thì Y là "low possitive" (B_3)
3. r_3: nếu X là "average" (A_3) thì Y là "low possitive" (B_4)
4. r_4: nếu X là "average high" (A_4) thì Y là "low possitive" (B_3)
5. r_5: nếu X là "high" (A_5) thì Y là "low possitive" (B_2)
6. r_6: nếu X là "very high" (A_6) thì Y là "low possitive" (B_1)

3.2 Thử nghiệm

Sử dụng hệ p-fuzzy để mô tả hành vi của biến X - kích thước quần thể trong mô hình Logistic dựa trên phương pháp lặp theo công thức mô tả trong (10), (13). Sau đó, tiến hành so sánh với nghiệm thu được khi thực hiển tìm nghiệm bằng cách giải phương trình sai phân (đối với rời rạc) và vi phân (đối với liên tục).

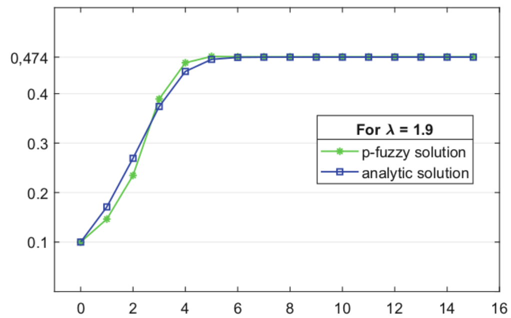
Kịch bản thử nghiệm:

- Logistic rời rạc: Các tham số của tập mờ được tinh chỉnh dựa trên lý thuyết về tính cân bằng và ổn định trong hệ p-fuzzy rời rạc một chiều [10], cụ thể ở đây xác định dựa trên hai tham số: giá trị khởi tạo X_0 và khả năng mang X^*.
  - Thử nghiệm trường hợp 1 và 2 với $\bar{x}$ được tính toán từ (2).
  - Thử nghiệm trường hợp 3 với X^* là trung bình giữa $\bar{\bar{x}}_1$ và $\bar{\bar{x}}_2$

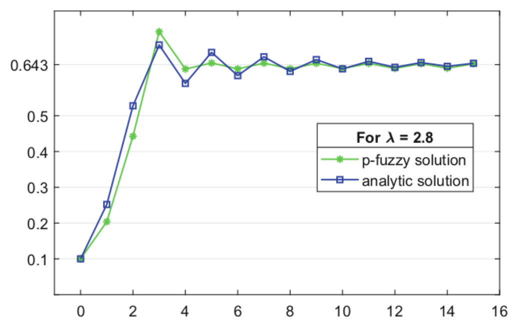
  $\lambda = 1.9, 2.8, 3.05$. Tập mờ đầu ra: $L_{sup} = 2|L_{inf}|$
- Logistic liên tục: $P_0 = 15, h = 0.05, \alpha = 1.9, 2.8, 3.05, K = 200$. Tập mờ đầu ra: $L_{sup} = 2|L_{inf}|$

3.3 Kết quả

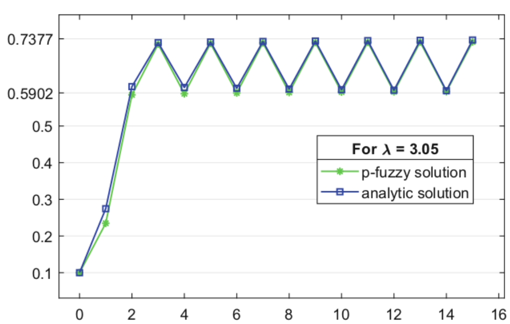
- Trường hợp rời rạc:



Hình 4: Nghiệm thu được từ hệ p-fuzzy rời rạc theo (10) và nghiệm tường minh theo (1) với $\lambda = 1.9$ và $\bar{x} \approx 0.474$

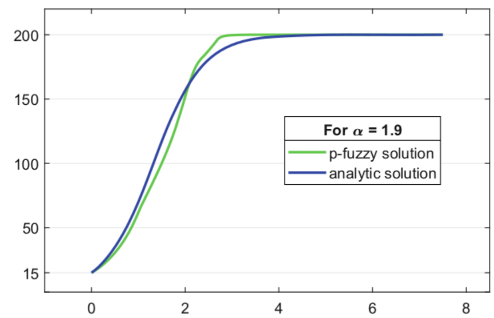


Hình 5: Nghiệm thu được từ hệ p-fuzzy rời rạc theo (10) và nghiệm tường minh theo (1) với $\lambda = 2.8$ và $\bar{x} \approx 0.643$

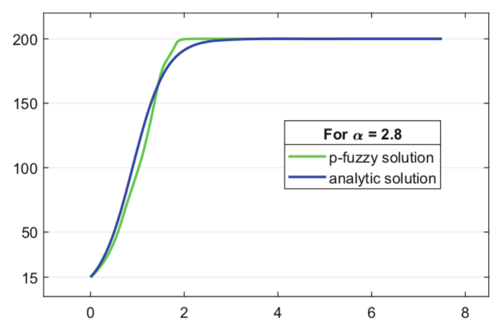


Hình 6: Nghiệm thu được từ hệ p-fuzzy rời rạc theo (10) và nghiệm tường minh theo (1) với $\lambda = 3.05$, $\bar{x_1} \approx 0.5902$ và $\bar{x_1} \approx 0.7377$

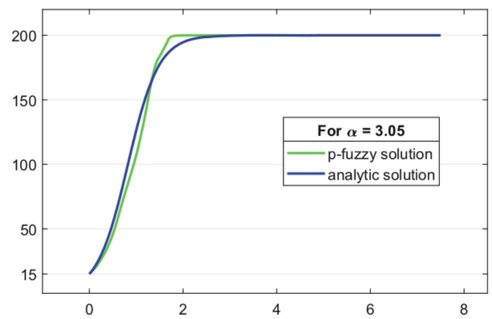
- Trường hợp liên tục:



Hình 7: Nghiệm thu được từ hệ p-fuzzy liên tục theo (13) và nghiệm tường minh theo (4) với $\alpha = 1.9$



Hình 8: Nghiệm thu được từ hệ p-fuzzy liên tục theo (13) và nghiệm tường minh theo (4) với $\alpha = 2.8$



Hình 9: Nghiệm thu được từ hệ p-fuzzy liên tục theo (13) và nghiệm tường minh theo (4) với $\alpha = 3.05$

4 Kết luận

Bài báo đã cho thấy hệ p-fuzzy là một công cụ toán hữu ích trong việc mô hình các hệ thống tiến hóa mà thông tin về tính động chỉ biết một phần thông qua việc giả lập mô hình Logistic rời rạc và liên tục. Bài báo đã cho thấy việc áp dụng hệ p-fuzzy trong mô hình Logistic đem lại kết quả khá tương đương so với kết quả sử dụng ngiệm tường minh. Từ đây, có thể thấy rằng, khi một hiện tượng được mô tả bởi một hệ phương trình vi phân hoặc sai phân phức tạp và ta đã biết được hành vi của hệ theo dạng tác động và đáp ứng, hơn nữa việc giải tường minh công thức của hệ này là không tầm thường, bằng việc áp dụng hệ p-fuzzy, lời giải thu được sẽ cho kết quả khá giống với các hành vi đã ghi nhận được của hiện tượng. Do đó, hệ p-fuzzy sẽ hữu ích khi chuyên gia không có kinh nghiệm về phương trình vi phân hay sai phân và có thể được sử dụng để đánh giá tính động của nhiều hiện tượng thực tế khác nhau.

Tài liệu tham khảo

[1] Barros, L.C., Bassanezi, R.C., Lodwick, W.A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*, Springer, Heidelberg (2017)

[2] Dias, M.R., Barros, L.C. *Differential equations based on fuzzy rules*, In: Proceedings of IFSA/EUSFLAT Conference, pp. 240–246 (2009)

[3] Edelstein-Keshet, L. *Mathematical Models in Biology*, Classics in Applied Mathematics. SIAM (2005)

[4] Hale, J.K., Koçak, H. *Dynamics and Bifurcations*, Springer, New York (1996)

[5] Jafelice, R.M., Barros, L.C., Bassanezi, R.C., Gomide, F. *Fuzzy modeling in symptomatic HIV virus infected population*, Bull. Math. Biol. 66(6), 1597–1620 (2004)

[6] May, R.M. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature 261, 459–467 (1976)

[7] Pedrycz, W., Gomide, F. *Fuzzy Systems Engineering Toward Human-centric Computing*, IEEE Press/Wiley (2007)

[8] Peixoto, M.S., Barros, L.C., Bassanezi, R.C. *Predator-prey fuzzy model*, Ecol. Model. 214, 39–44 (2008)

[9] Sánchez, D., Barros, L.C., Esmi, E., Miebach, A.D. *Goodwin model via p-fuzzy system. In: Data Science and Knowledge Engineering for Sensing Decision Support*, World Scientific Proceedings Series, vol. 11, pp. 977–984 (2018)

[10] Silva, J.D.M., Leite, J., Bassanezi, R.C., Cecconello, M.S. *Stationary points-I: one-dimensional p-fuzzy dynamical systems*, J. Appl. Math. 2013, 1–11 (2013)