Hình học xạ ảnh và phép biến đổi 2D

The 2D projective plan - Mặt phẳng xạ ảnh 2D

Phép chuyển vị của vector/matrix

- Với một vector ngang (hoặc dọc) x thì vector dọc (hoặc ngang) tương ứng với nó là x^T. Cụ thể, một vector ngang $x = (a_1, a_2, ...a_n)$ sẽ có vector dọc tương ứng là $x^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ và ngược lại.
- **Mục đích** của phép chuyển vị là để cho việc nhân vector với matrix được dễ dàng.
- Khi viết $x = (a_1, a_2, ...a_n)$ ta hiểu đây là vector **ngang**.

Phép nhân vector/matrix:

- Phép nhân matrix: Tiếng anh, Tiêng việt.

- Phép nhân vô hướng 2 vector: 2 vector cùng chiều a, b, thay vì ta viết $a.b$, ta sử dụng kí hiệu **chuyển vị** và chuyển nó thành phép **nhân ma trận** ab^T hoặc $a^T b$
- Tích có hướng của vector 3 chiều: tiếng anh.
  - 2 vector $u = (a, b, c)$ và $v = (x, y, z)$ có tích có hướng $u \times v = ()$

Kí hiệu đường thẳng *đồng nhất*:

- Vì mỗi đường thẳng trên mặt phẳng đều có phương trình dạng $ax + by + c = 0$ nên mỗi đường thẳng được chọn bởi bộ 3 số (a, b, c) và ta sẽ đại diện mỗi đường thẳng bằng 1 vector **dọc** $(a, b, c)^T$.
- Vector $(0, 0, 0)^T$ sẽ **không** đại diện cho đường thẳng nào cả.
- Tập hợp các đường thẳng có dạng $(ka, kb, kc)^T$ với k bất kì đều đại diện cho cùng 1 đường thẳng

Kí hiệu điểm *đồng nhất*:

- Thay vị sử dụng cặp điểm, ta sử dụng vector **dọc** $(x, y, 1)^T$ để biểu diễn điểm (x, y) trên mặt phẳng.
- **Mục đích** cho việc biểu diễn như vậy để có thể dễ dàng kiểm tra điểm $p = (x, y, 1)^T$ có thuộc đường thẳng bằng $l = (a, b, c)^T$ không bằng biểu thức $(x, y, 1).(a, b, c)^T = (ax + by + c) = 0$, hay nói cách khác, $p^T l = 0$.
- Mở rộng ra, vector dọc $(x, y, z)^T$ có thể biểu diễn điểm $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ trên mặt phẳng toạ độ.

Tìm giao của 2 đường thẳng

- Hai đường thẳng l_1 và l_2 sẽ có giao điểm $x = l_1 \times l_2$.
- Thật vậy, $l_1(l_1 \times l_2) = 0$ và $l_2(l_1 \times l_2) = 0$, do vector $l_1 \times l_2$ trong không gian cùng song song với cả l_1 và l_2. Như vậy l_1 và l_2 đều đi qua điểm $l_1 \times l_2$

Tìm đường thẳng qua 2 điểm

- Hai điểm p_1 và p_2 có sẽ có đường thẳng $l = p_1 \times p2$ cùng đi qua chúng.
- Cũng như trên, do $p_1.(p_1 \times p_2) = 0$ và $p_2.(p_1 \times p_2) = 0$. Như vậy p_1 và p_2 đều thuộc đường thẳng $p_1 \times p_2$

Điểm và đuường thẳng ở vô cùng.

- Các điểm có dạng $(x_1, x_2, 0)^T$ là những điểm ở vô cùng, vì ta không thể tìm thấy điểm $(x_1/0, x_2/0)$ trên mặt phẳng tọa độ.

- Tập hợp các điểm ở vô cùng tạo thành đường thẳng ở vô cùng $(0, 0, 1)^T$ (thật vậy $(a, -b, 0)^T(0, 0, 1) = 0$).
- Mọi đường thẳng $l = (a, b, c)$ đều giao với đường thẳng $(0, 0, 1)^T$ tại điểm $(b, -a, 0)^T$

A model for the projective plane

> Todo
> Do em phần này em chưa biết dịch như thế nào.

Tính đối lập (duality)

- Ta có thể đảo vai trò của điểm và đường thẳng cho nhau:
  - Chúng đều là vector 3 chiều dọc.
  - Biểu thức kiểm tra điểm x nằm trên đường thẳng l là $x^T l = 0$ có thể đổi thành $l^T x = 0$.
  - Ngoài ra việc tìm giao điểm và đường thẳng qua 2 điểm chúng đều có thể đảo chỗ cho nhau.
- Đây gọi là nguyên tắc đôi lập (duality principle)

Đường conic và phương trình đường conic

> Todo

Projective transformation - Phép biến đổi xạ ảnh.

Định nghĩa

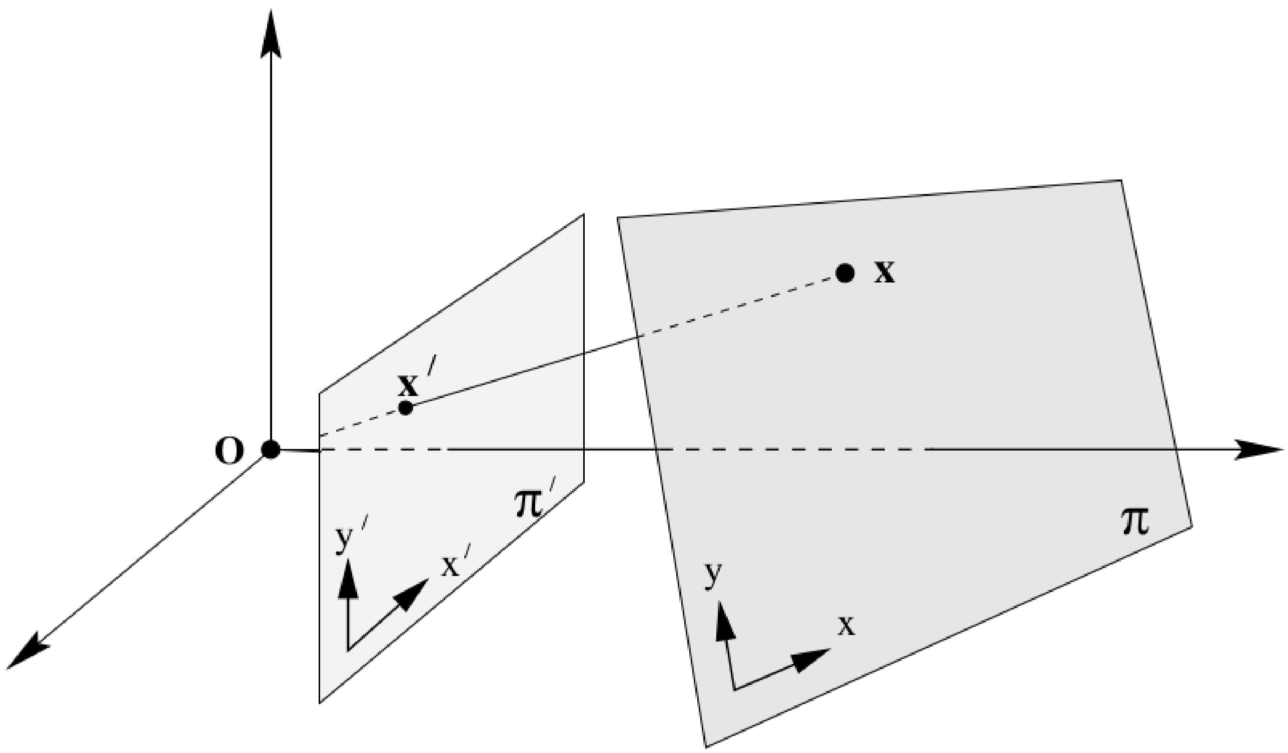
- Một phép xạ ảnh là một song ánh h từ $\mathbb{P}^2$ đến chính nó thỏa mãn với 3 điểm bất kì thẳng hàng p_1, p_2 và p_3 thì 3 điểm $h(p_1), h(p_2))$ và $h(p_3)$ cũng phải thẳng hàng.

Định lý về phép xạ ảnh.

- Phép ánh xạ $h : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ là phép xạ ảnh khi và chỉ khi tồn tại 1 matrix khả nghịch 3×3 H thỏa mãn với điểm bất kì thuộc mặt phẳng đc biểu diễn bởi vector x thì $h(x) = Hx$.
- Cụ thể, với điểm $x = (a, b, c)^T$ và matrix $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$ thì:

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

Ánh xạ giữa 2 mặt phẳng



Hình 1: Phép xạ ảnh xuyên tâm từ 1 điểm trên mặt phẳng này đến mặt phẳng khác

Hình 1 là một ví dụ cho cách định lý trên được áp dụng như thế nào. Với mỗi một điểm bất kì x thuộc mặt phẳng π đều có một điểm x' trên mặt phẳng π' tương ứng với điểm x là giao của π' với Ox và ngược lại. Hiển nhiên ánh xạ này là một song ánh.

Xạ ảnh của đường thẳng và đường conic

- Với phép xạ ảnh điểm $x' = Hx$ thì điểm x' sẽ nằm trên đường thẳng $l' = H^{-T}l$.
    - Thật vậy, vì $l^T x = 0$ nên

      $$l^T H^{-1} Hx = 0 \iff (H^{-T}l)^T HX = 0$$

      , hay điểm Hx sẽ nằm trên đường thẳng $H^{-T}l$.
- Như vậy với sự biến đổi điểm $x' = Hx$ thì đương thẳng l' lại được biến đổi thành $H^{-T}l$.

> Todo: xạ ảnh của đường conic