

# Hình học xạ ảnh và phép biến đổi 2D

- Hình học xạ ảnh và phép biến đổi 2D
  - The 2D projective plan - Mặt phẳng xạ ảnh 2D
    - Phép chuyển vị của vector/matrix
    - Phép nhân vector/matrix:
    - Quy ước cho đường thẳng *đồng nhất*:
    - Quy ước cho điểm *đồng nhất*:
    - Degrees of freedom
    - Tìm giao của 2 đường thẳng
    - Tìm đường thẳng qua 2 điểm
    - Điểm và đường thẳng ở vô cùng.
    - A model for the projective plane
    - Tính đối lập (duality)
    - Đường conic và phương trình đường conic
  - Projective transformation - Phép biến đổi xạ ảnh.
    - Định nghĩa
    - Định lý về phép xạ ảnh.
    - Ánh xạ giữa 2 mặt phẳng
    - Xạ ảnh của đường thẳng và đường conic
  - A hierarchy of transformations
    - Lớp I: Isometries
      - Biểu diễn của phép biến đổi Isometries
      - Những thành phần bất biến (invariants)
    - Lớp II: Similarity transformations
      - Biểu diễn của phép biến đổi Similarity.
      - Thành phần bất biến.
    - Lớp III: Affine transformations
      - Biểu diễn của phép Affine transformation.
      - Các thành phần bất biến
    - Lớp IV: Projective transformations
      - Biểu diễn của Projective transformation
      - Thành phần bất biến
      - So sánh với Affine transformations

# The 2D projective plan - Mặt phẳng xạ ảnh 2D

## Phép chuyển vị của vector/matrix

- Với một vector ngang (hoặc dọc)  $x$  thì vector dọc (hoặc ngang) tương ứng với nó là  $x^T$ . Cụ thể, một vector ngang  $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  sẽ có vector dọc tương ứng là  $x^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  và ngược lại.
- Mục đích** của phép chuyển vị là để cho việc nhân vector với matrix được dễ dàng.
- Khi viết  $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ta hiểu đây là vector **ngang**.

## Phép nhân vector/matrix:

- Phép nhân matrix: [Tiếng anh](#), [Tiếng việt](#).
- Phép nhân vô hướng 2 vector: 2 vector cùng chiều  $a, b$ , thay vì ta viết  $a.b$ , ta sử dụng kí hiệu **chuyển vị** và chuyển nó thành phép **nhân ma trận**  $ab^T$  hoặc  $a^T b$
- Tích có hướng của vector 3 chiều: [tiếng anh](#).
  - 2 vector  $u = (a, b, c)$  và  $v = (x, y, z)$  có tích có hướng  $u \times v = ()$

## Quy ước cho đường thẳng đồng nhất:

- Vì mỗi đường thẳng trên mặt phẳng đều có phương trình dạng  $ax + by + c = 0$  nên mỗi đường thẳng được chọn bởi bộ 3 số  $(a, b, c)$  và ta sẽ đại diện mỗi đường thẳng bằng 1 vector **dọc**  $(a, b, c)^T$ .
- Vector  $(0, 0, 0)^T$  sẽ **không** đại diện cho đường thẳng nào cả.
- Tập hợp các đường thẳng có dạng  $(ka, kb, kc)^T$  với  $k$  bất kì đều đại diện cho cùng 1 đường thẳng

## Quy ước cho điểm đồng nhất:

- Thay vì sử dụng cặp điểm, ta sử dụng vector **dọc**  $(x, y, 1)^T$  để biểu diễn điểm  $(x, y)$  trên mặt phẳng.
- Mục đích** cho việc biểu diễn như vậy để có thể dễ dàng kiểm tra điểm  $p = (x, y, 1)^T$  có thuộc đường thẳng bằng  $l = (a, b, c)^T$  không bằng biểu thức  $(x, y, 1).(a, b, c)^T = (ax + by + c) = 0$ , hay nói cách khác,  $p^T l = 0$ .
- Mở rộng ra, vector dọc  $(x, y, z)^T$  có thể biểu diễn điểm  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & z \end{pmatrix}$  trên mặt phẳng tọa độ.

## Degrees of freedom

## Tìm giao của 2 đường thẳng

- Hai đường thẳng  $l_1$  và  $l_2$  sẽ có giao điểm  $x = l_1 \times l_2$ .

Thật vậy,  $l_1(l_1 \times l_2) = 0$  và  $l_2(l_1 \times l_2) = 0$ , do vector  $l_1 \times l_2$  trong không gian cùng song song với cả  $l_1$  và  $l_2$ . Như vậy  $l_1$  và  $l_2$  đều đi qua điểm  $l_1 \times l_2$

## Tìm đường thẳng qua 2 điểm

- Hai điểm  $p_1$  và  $p_2$  có sẽ có đường thẳng  $l = p_1 \times p_2$  cùng đi qua chúng.

Cũng như trên, do  $p_1 \cdot (p_1 \times p_2) = 0$  và  $p_2 \cdot (p_1 \times p_2) = 0$ . Như vậy  $p_1$  và  $p_2$  đều thuộc đường thẳng  $p_1 \times p_2$

## Điểm và đường thẳng ở vô cùng.

- Các điểm có dạng  $(x_1, x_2, 0)^T$  là những điểm ở vô cùng, vì ta không thể tìm thấy điểm  $(x_1/0, x_2/0)$  trên mặt phẳng tọa độ.
- Tập hợp các điểm ở vô cùng tạo thành đường thẳng ở vô cùng  $(0, 0, 1)^T$  (thật vậy  $(a, -b, 0)^T(0, 0, 1) = 0$ ).
- Mọi đường thẳng  $l = (a, b, c)$  đều giao với đường thẳng  $(0, 0, 1)^T$  tại điểm  $(b, -a, 0)^T$

## A model for the projective plane

Todo

## Tính đối lập (duality)

- Ta có thể đảo vai trò của điểm và đường thẳng cho nhau:
  - Chúng đều là vector 3 chiều dọc.
  - Biểu thức kiểm tra điểm  $x$  nằm trên đường thẳng  $l$  là  $x^T l = 0$  có thể đổi thành  $l^T x = 0$ .
  - Ngoài ra việc tìm giao điểm và đường thẳng qua 2 điểm chúng đều có thể đảo chỗ cho nhau.
- Đây gọi là nguyên tắc đối lập (duality principle)

## Đường conic và phương trình đường conic

Todo

# Projective transformation - Phép biến đổi xạ ảnh.

## Định nghĩa

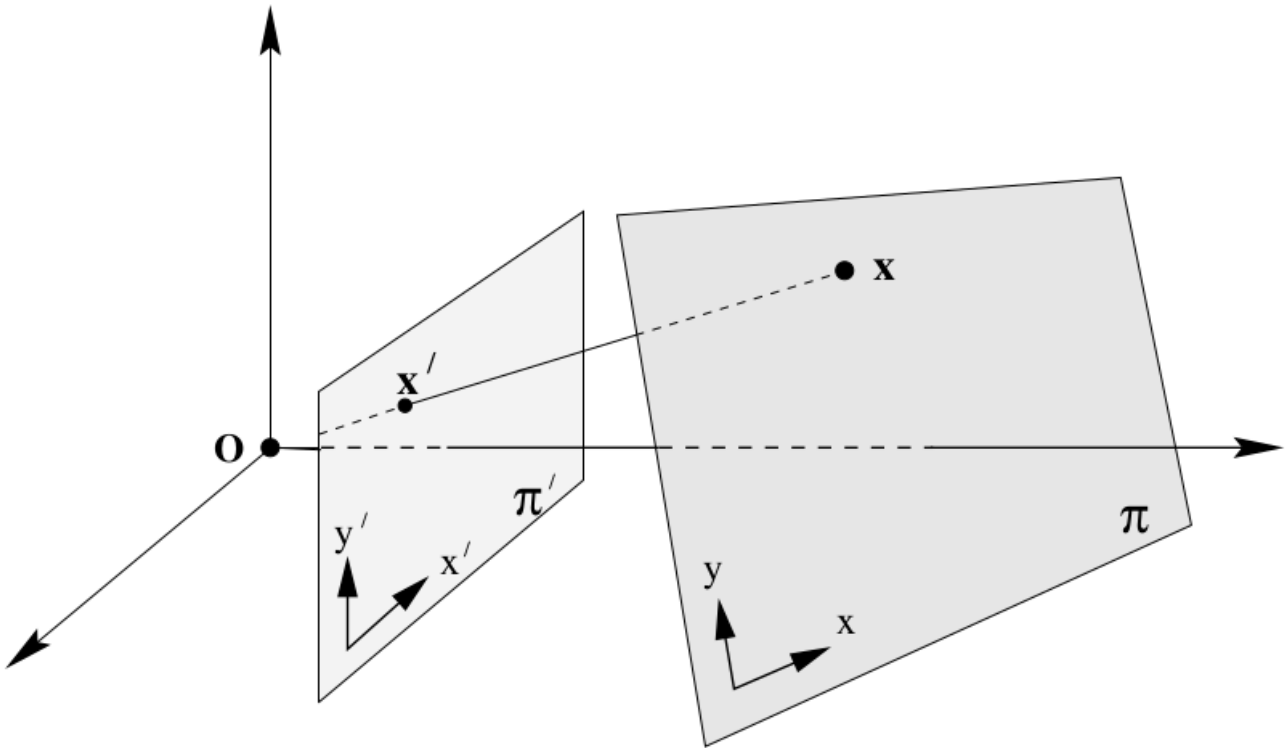
- Một phép xạ ảnh là một song ánh  $h$  từ  $\mathbb{P}^2$  đến chính nó thỏa mãn với 3 điểm bất kì thẳng hàng  $p_1, p_2$  và  $p_3$  thì 3 điểm  $h(p_1), h(p_2)$  và  $h(p_3)$  cũng phải thẳng hàng.

## Định lý về phép xạ ảnh.

- Phép ánh xạ  $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  là phép xạ ảnh khi và chỉ khi tồn tại 1 matrix khả nghịch  $3 \times 3$   $H$  thỏa mãn với điểm bất kì thuộc mặt phẳng đc biểu diễn bởi vector  $x$  thì  $h(x) = Hx$ .
- Cụ thể, với điểm  $x = (a, b, c)^T$  và matrix  $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$  thì:

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah_{11} + bh_{12} + ch_{13} \\ ah_{21} + bh_{22} + ch_{23} \\ ah_{31} + bh_{32} + ch_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

## Ánh xạ giữa 2 mặt phẳng



Hình 1: Phép xạ ảnh xuyên tâm từ 1 điểm trên mặt phẳng này đến mặt phẳng khác

Hình 1 là một ví dụ cho cách định lý trên được áp dụng như thế nào. Với mỗi một điểm bất kì  $x$  thuộc mặt phẳng  $\pi$  đều có một điểm  $x'$  trên mặt phẳng  $\pi'$  tương ứng với điểm  $x$  là giao của  $\pi'$  với  $Ox$  và ngược lại. Hiển nhiên ánh xạ này là một song ánh.

## Xạ ảnh của đường thẳng và đường conic

- Với phép xạ ảnh điểm  $x' = Hx$  thì điểm  $x'$  sẽ nằm trên đường thẳng  $l' = H^{-T}l$ .
  - Thật vậy, vì  $l^T x = 0$  nên

$$l^T H^{-1} Hx = 0 \iff (H^{-T}l)^T Hx = 0$$

, hay điểm  $Hx$  sẽ nằm trên đường thẳng  $H^{-T}l$ .

- Như vậy với sự biến đổi điểm  $x' = Hx$  thì đường thẳng  $l'$  lại được biến đổi thành  $H^{-T}l$ .

Todo: xạ ảnh của đường conic

## A hierarchy of transformations

Tạm dịch là "cấp của các phép biến đổi"

### Lớp I: Isometries

"Iso" là giống nhau (same), "metric" là độ dài (measure). Đây là phép biến đổi đảm bảo được khoảng cách Euclidean trên mặt phẳng. Phép biến đổi có thể là phép tịnh tiến, xoay, lấy đối xứng hoặc là phép biến đổi kết hợp giữa các phép đó.

### Biểu diễn của phép biến đổi Isometries

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \epsilon \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Trong đó:

-  $(t_x, t_y)$  là vector tịnh tiến.

-  $\theta$  là góc quay.

-  $\epsilon \in -1, 1$ . nếu  $\epsilon = 1$  thì đây là phép biến đổi cùng chiều, ngược lại đây là phép biến đổi ngược chiều (tức là đối xứng gương).

Hay ta có thể viết dưới block form:

$$x' = H_E x = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} x$$

Với  $R$  là matrix  $2 \times 2$  trực giao (tức  $R^T R = R R^T = I$  là ma trận cơ sở),  $t$  là vector tịnh tiến. Nếu  $R = I$ , đây là phép thuần tịnh tiến, còn  $t$  là vector 0 thì đây là phép thuần xoay.

## Những thành phần bất biến (invariants)

Bao gồm độ dài, góc, và diện tích sẽ bất biến sau khi biến đổi.

## Lớp II: Similarity transformations

Đôi khi gọi là similarity, là phép Isometry kết hợp với phép scale (co dãn).

### Biểu diễn của phép biến đổi Similarity.

Gần giống với Isometries.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \pm s \cos \theta & -s \sin \theta & t_x \\ \pm s \sin \theta & s \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hay block form:

$$x' = H_S x = \begin{bmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} x$$

Trong đó  $s$  là hệ số scale.

### Thành phần bất biến.

Góc vẫn được giữ nguyên nhưng khoảng cách thì không. Thay vào đó thì tỉ lệ giữa 2 đoạn thẳng song song nhau vẫn được bảo toàn. Ngoài ra tỉ lệ diện tích cũng không đổi.

## Lớp III: Affine transformations

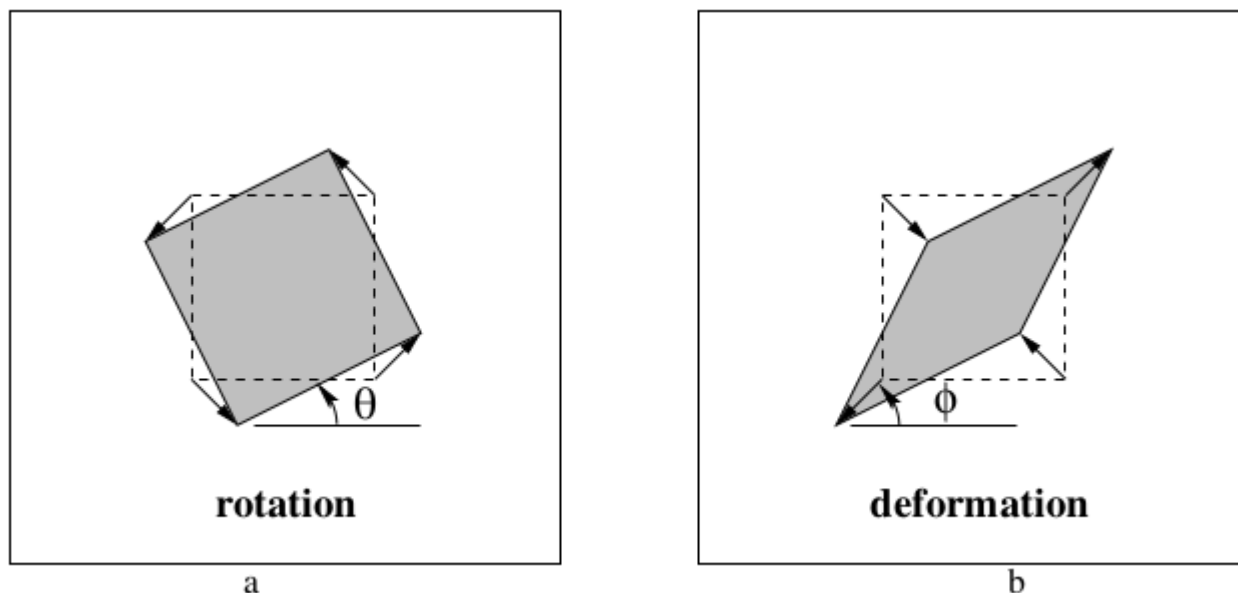
Đây là phép biến đổi kết hợp giữa phép biến đổi phi tuyến tính với phép biến đổi tịnh tiến.

### Biểu diễn của phép Affine transformation.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hay block form:

$$x' = H_S x = \begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} x$$



Hình 2: ví dụ về phép biến đổi affine.

Để dễ hiểu hơn ta có thể viết ma trận  $A$  dưới dạng:

$$A = R(\theta)R(-\phi)DR(\phi)$$

Trong đó  $R(x)$  là ma trận  $2 \times 2$  thể hiện phép xoay một góc  $x$  (như ma trận  $R$  ở lớp  $I$ ), và  $D$  là ma trận  $2 \times 2$  có dạng  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  thể hiện phép scale theo hệ số  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  tương ứng với trục hoành và tung. Tóm lại,  $A$  sẽ thực hiện: quay một góc  $\phi$ , scale theo ma trận  $D$ , xoay hình ngược lại góc  $\phi$  và cuối cùng lại xoay một góc  $\theta$ . Vd như hình 2b, đầu tiên ta xoay hình vuông theo góc  $\phi$ , dẫn hình theo trục tung và co hình theo trục hoành rồi xoay hình lại góc  $-\phi$ .

## Các thành phần bất biến

Các đường thẳng song song vẫn song song.

Thật vậy các đường thẳng song song ban đầu cắt nhau tại một điểm ở vô cùng  $(x_1, y_1, 0)^T$  nào đó, sau phép biến đổi, điểm này sẽ có ảnh vẫn là một điểm tại vô cùng, như vậy 2 đường thẳng vẫn tiếp tục cắt nhau tại vô cùng.

Tỉ lệ độ dài giữa các đoạn thẳng song song được bảo tồn.

Thật vậy, độ dài của các đoạn thẳng chỉ phụ thuộc vào độ lệch góc giữa phương của đoạn thẳng và phương scale. Giả sử ta đang có phép scale theo trục (orthogonal) và đoạn thẳng lệch so với trục hoành góc  $\alpha$ , vậy tỉ lệ giữa độ lớn đoạn thẳng mới và cũ là  $\sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \alpha + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha}$  và tỉ lệ này áp dụng cho mọi đường thẳng lệch góc  $\alpha$ .

Tỉ lệ diện tích được bảo tồn.

Thật vậy diện tích chỉ phụ thuộc vào sự scale. Và tỉ lệ diện tích mới so với diện tích cũ luôn là  $\lambda_1 \lambda_2$ .

## Lớp IV: Projective transformations

Cũng giống như Affine transformations, nhưng vì ta đang sử dụng quy ước điểm và đường thẳng đồng nhất, như vậy ta có thể thay hàng cuối của ma trận biến đổi thành 1 ma trận khác.

### Biểu diễn của Projective transformation

Biểu diễn ở block form:

$$x' = H_S x = \begin{bmatrix} A & t \\ \mathbf{v}^T & v \end{bmatrix} x$$

Trong đó  $\mathbf{v}^T = (v_1, v_2)$

### Thành phần bất biến

- Crossratio của 4 điểm thẳng hàng bằng nhau (sẽ nói rõ hơn ở phần sau).

### So sánh với Affine transformations

Nhận xét với một điểm  $(x_1, x_2, 0)^T$  ở vô cùng, thì với Affine transformations:

$$\begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

sẽ cho ra một điểm tại vô cùng, còn với projective transformation:

$$\begin{bmatrix} A & t \\ \mathbf{v}^T & v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 \end{pmatrix}$$



lại cho ra một điểm ko tại vô cùng. Điều này cho phép projective transformation **dựng lên những điểm không thực sự tồn tại.**