то получим однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}.$$

В его интеграле надо заменить $\xi$ через $x - h_1$, $\eta$ через $y - k$, где $h$ и $k$ имеют вышеуказанные значения, и мы получим интеграл уравнения (32).

Система (33) не имеет решений, если детерминант из коэффициентов при неизвестных равен нулю:

$$ab_1 - a_1b = 0.$$

Тогда здесь изложенный метод неприменим. Но, замечая, что в этом случае $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ и, следовательно, уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}, \tag{34}$$

мы легко приведем его к виду с разделяющимися переменными, если введем новое переменное

$$z = ax + by.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

и уравнение (34) примет вид:

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1},$$

т. е. мы получаем уравнение, не содержащее явно $x$ — переменные разделяются.

З а д а ч а 25. Проинтегрировать это уравнение до конца с буквенными коэффициентами.

Изложенный метод можно интерпретировать геометрически: в случае однородного уравнения числитель и знаменатель правой части уравнения (32), приравненные нулю, представляют две прямые, проходящие через начало координат; в общем случае эти прямые через начало координат не проходят. Подстановка состоит в том, что мы переносим начало координат в точку их пересечения; особый случай (34) соответствует параллельности этих прямых.

П р и м е ч а н и е. Тот же метод, очевидно, применяется к значительно более общему классу уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

где $f$ — некоторая непрерывная функция своего аргумента.

З а д а ч и.

Проинтегрировать уравнения:

26. $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\dfrac{dy}{dx}$;

27. $(x + 2y + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x + 4y + 3$;

28. $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$;

29. $(x + y)^2\dfrac{dy}{dx} = a^2$.

3. Г е о м е т р и ч е с к и е с в о й с т в а с е м е й с т в а и н т е г р а л ь н ы х к р и в ы х.

Рассмотрим уравнение, не содержащее явно $y$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1}$$

Если в нем сделать замену переменного

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + C \tag{35}$$

($C$ — постоянное), то, так как $dx = dx_1$, $dy = dy_1$, уравнение перейдет само в себя. Следовательно, если $F(x, y) = 0$ есть частный интеграл уравнения (1), то

$$F(x_1, y_1) = 0$$

или

$$F(x, y + C) = 0 \tag{36}$$

тоже будет интегралом при любом $C$.

Легко видеть, что обратно, если общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид (36), то исключение произвольного постоянного приведет к уравнению вида (1). Преобразование (35) состоит геометрически в том, что все точки плоскости $(x, y)$ переносятся на равную величину $C$ параллельно оси $y$ (перенос). Дифференциальное уравнение (1) д о п у с к а е т п р е о б р а з о в а н и е (35), т. е. поле направлений после такого переноса совпадает с первоначальным (так линии $x = x_0$, параллельные оси $OY$, являются изоклинами: в самом деле, на такой прямой угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}$ имеет постоянное значение $f(x_0)$). Ясно, что и семейство интегральных кривых переходит при переносе (35) само в себя; причем, однако, каждая отдельная кривая $F(x, y, C') = 0$ переходит в другую кривую

$$F(x, y, C' + C) = 0 \quad [1]).$$

1

1 Преобразования переноса образуют группу преобразований: с о в о к у п н о с т ь п р е о б р а з о в а н и й о б р а з у е т г р у п п у, е с л и р е з у л ь т а т д в у х п о с л е д о в а т е л ь н ы х п р е о б р а з о в а н и й д а н н о й с о в о к у п н о с т и п р е д с т а в л я е т с о б о й п р е о б р а з о в а н и е э т о й ж е с о в о к у п н о с т и. В нашем случае пусть первое преобразование будет: $x_1 = x, y_1 = y + C_1$;