**Комбинаторика**

**Правило суммы:**

Имеется объектов, и каждый из них можно выбрать соответственно различными способами, все способы различны. Тогда выбор одного из объектов осуществляется способами.

***Задача***. Для отдыха семья предпочитает следующие варианты:

Европа - 4 города

Азия -5 городов

РФ -7 городов

Сколькими способами можно выбрать для отдыха один из городов?

4+5+7=16

**Правило произведения:**

Имеется объектов, и каждый из них можно выбрать различными способами. Тогда упорядоченный набор (кортеж) можно выбрать способами.

***Задача.***

Из поселка А в поселок В идут 3 дороги. Из В в поселок С – 5 дорог. Из С в Д – 2 дороги.

Сколько дорог идет из А в Д.

Решение: из А в Д можно доехать по 3 дорогам.

A

B

D

**Размещения и сочетание**

Будем говорить, что задано элементное множество X (или просто -множество), если множество состоит из элементов. Соответственно введем понятия *k*-подмножества и *k*-выборки n-множества.

Выборки бывают:

1. Упорядоченная (кортеж);
2. Неупорядоченная (подмножество).

Выборки бывают:

1. Без повторений элементов;
2. С повторением элементов.

***Размещения -***

1. - упорядоченная *k*-выборка из -множества. Сколькими способами можно выбрать *k* различных упорядоченных элементов из множества?

1-ый элемент можно выбрать способами, 2-ой - способом,..., k-ый - способом:

Упорядоченная -выборка из -множества называется перестановкой.

Сколькими способами можно выбрать упорядоченных элементов из множества?

***Задача.*** Имеется материал пяти различных цветов. Сколькими способами можно сшить флаги из трех различных продольных полос?

Решение: число флагов

.

1. - упорядоченная *k*-выборка и -множества с повторениями: каждый раз можно выбирать элементов. Сколькими способами можно выбрать *k* упорядоченных элементов из множества?

***Задача***. Сколькими способами можно переплести 10 книг в 3 цвета?

***Сочетания***

1. - неупорядоченная *k*-выборка без повторений из -множества - сочетания без повторений. Сколькими способами можно выбрать *k* различных элементов из множества?

– вариантов упорядочения элементов.

***Задача***. Сколькими способами из колоды в 52 карты можно выбрать:

- 10 карт?

- 10 карт так, чтобы среди них было 2 туза?

Выберем 2 туза из 4 и 8 карт из 48 без тузов. По правилу произведения получим -

**Пример.**  Рассмотрим множество .

.

1. – неупорядоченная k-выборка с повторениями - сочетания с повторениями. Сколькими способами можно выбрать k различных элементов из множества, содержащего n типов элементов? При этом необходимо выбрать k элементов, так чтобы первого типа было , второго - , -ого и

Решение этой задачи сводится к нахождению, сколькими способами можно разместить k одинаковых шаров по урнам.

Сдвинем урны рядом, получим (шары обозначены 0, стенки - )

Всего шаров *k*, промежуточных стенок урн - . Число перестановок из шаров и промежуточных стенок урн - . Учитывая, что все шары одинаковые и их можно переставить способами, а также все промежуточные стенки урн одинаковые и их можно переставить способом, окончательно получим

Классическое доказательство этой формулы обычно сводится к нахождению количества упорядоченных наборов (векторов) из 0 и 1. После нулей ставится единица: <0,0,…,0,1, 0,0,…,0,1, …, 0,0,…,0,1, 0,0,…,0>. Аналогично задачи с шарами считаются перестановки из нулей вместе с единицами и отдельно из нулей и единиц. Получаем ту же формулу.

***Задача***. Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых шаров по трем урнам?

Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых шаров по трем урнам так, чтобы не было пустых урн?

Положим в каждую урну по одному шару, а остальные 7 распределим по трем урнам:

***Задача***. Сколькими способами можно выбрать 20 пирожных четырех сортов?

***Задача***. Найти количество целочисленных решений системы.

Число решений:

Найти количество целочисленных решений системы.

Число решений: , где

**Бином Ньютона. Треугольник Паскаля.**

Бином Ньютона:

где -- полиномиальные коэффициенты.

Полиномиальные коэффициенты образуют треугольник Паскаля:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 1 |
|  |  | 1 2 1 |
|  |  | 1 3 3 1 |
|  |  | 1 4 6 4 1 |
|  |  |  |

Легко заметить принцип его построения: .

Выделим наиболее важные свойства биномиальных коэффициентов:

1. ;
2. – множество всех подмножеств из элементов;
3. ;

**Докажем 1-е свойство.**

Подсчитаем сколькими способами из элементного множества *X* можно выделить подмножества, состоящие из элемента:

Число всех сочетаний разобьем следующим образом:

1. Содержащие элемент, например, .
2. Несодержащие элемент .

В первем случае удалим элемент из *X* и подсчитаем число- подмножеств из-множества: их . Затем добавим в каждое подмножество элемент . Во втором случае также удалим элемент из *X*  и подсчитаем число- подмножеств из-множества: их.

**Для доказательства 2-го свойства** подставим в бином: . Заметим, что биномиальный коэффициент опредеяет число - подмножеств из-множества.

**Для доказательства 3-й формулы** подставляем в бином .

**Полиномиальная формула**

Полиномиальная формула является обобщением бинома Ньютона:

где

.

**Пример**. Разложим по формуле

Перечислим возможные разбиения на слагаемых.

**Формула включений и исключений**

Число элементов множества можно найти по формуле:

где – число элементов множества .

Теперь рассмотрим множество . Тогда формула для нахождения числа элементов множества будет выглядеть следующим образом:

Докажем эту формулу индукцией по числу подмножеств.

1. Для 2-х подмножеств формула справедлива.
2. Предположим, что справедливо для n подмножеств.
3. Докажем справедливость для n+1 подмножеств.

Так как , получим

Применим предположение индукции для множеств :

Подставив из предположения индукции, окончательно получим:

**Пример 1**.

В группе 20 человек, 6 девочек. 8 студентов учится на «4» и «5», 10 занимается спортом. Девочек, учащихся на «4» и «5» – 4. Девочек, занимающихся спортом – 5. Всего учащихся на «4» и «5» и спортсменов – 6 человек. Девочек, учащихся на «4» и «5» и спортсменок – 3. Сколько в группе неспортивных и плохо учащихся мальчтиков?

Решение:

Ответ: 8.

Следствие из . Рассмотрим множество :

**Формула для числа объектов, не обладающих свойствами**

Пусть у нас имеются некоторые свойства Нужно вычислить число объектов, не обладающих ни одним из этих свойств. Из получим:

**Пример 2**. Найти количество простых чисел от 0 до 100.

– количество чисел, которые не делятся на 2, 3 и 5.

Простые числа 2, 3 и 5 компенсируются числами 49=77, 77=7 и 91=713, которые не являются простыми.

Найдем количество целочисленных решений системы.

.

Сделав замену , получим систему

где

Количество целочисленных решений этой системы:

1. .

Составим отрицание этих условий:

*.*

По формуле включений и исключений для числа объектов, не обладающих

данными свойствами находим значение



(обобщение п.2 и п. 3).

Сделав замену , получим систему

где

Составим отрицание этих условий:

*.*

По формуле включений и исключений для числа объектов, не обладающих

данными свойствами находим значение

**Пример 3.**



.

.

1. .

Делаем замену

И решаем систему

.

.

1. .

Составим отрицание этих условий:

1. .

**Пример 5**. Студент забыл последние 5 цифр номера телефона друга. Он помнит, что их сумма была 25, среди них были 2 и 3, а остальные были больше трех. Какое максимальное количество звонков нужно будет сделать, чтобы дозвониться?

Решение.

2 может стоять на пяти местах номера, тогда 3 на оставшихся 4. Ответ надо умножить на 45=20.

Найдем число способов распределения 20=25-2-3 на трёх местах, т.е. решим следующую систему

Умножив 15 на 20, получим: максимальное число звонков 300.