

Прикладная эконометрика, 2019, т. 54, с. 90–104.

Applied Econometrics, 2019, v. 54, pp. 90–104.

DOI: 10.24411/2076-4766-2017-10005

Д. А. Борзых, А. А. Языков<sup>1</sup>

## KS-метод обнаружения структурного сдвига в GARCH(1,1) моделях

*В работе предложен новый метод обнаружения одного структурного сдвига в GARCH(1,1) модели, основанный на статистике Колмогорова–Смирнова. Хорошие свойства предлагаемого метода подтверждаются численными экспериментами. Метод сопоставляется с тремя широко известными CUSUM-методами обнаружения структурных сдвигов в GARCH моделях: KL (Kokoszka, Leipus, 1999), IT (Inclán, Tiao, 1994) и LTM (Lee et al., 2004). Для генерации GARCH процессов использовались временные ряды доходностей 26 российских ценных бумаг. На основе проведенных экспериментов показано, что предлагаемый метод обладает высокой конкурентоспособностью и занимает в некотором смысле «компромиссное» положение между KL-методом, имеющим высокие мощность и вероятность ошибки первого рода, и IT- и LTM-методами, мощность и вероятности ошибок первого рода которых низки.*

**Ключевые слова:** GARCH; волатильность; структурные сдвиги; CUSUM.

**JEL classification:** C32; C58; C63.

### 1. Введение

**П**од волатильностью цены финансового инструмента обычно понимают некоторую меру изменчивости цены этого финансового инструмента. Волатильность является одним из основных показателей, характеризующих риск финансового инструмента. Точная оценка волатильности финансового инструмента — важная прикладная задача, поскольку неправильный расчет и прогноз волатильности приводит к неадекватному восприятию риска агентами, принимающими решения, и зачастую является причиной существенных убытков, которые эти агенты несут. В данной работе волатильность моделируется с помощью широко известной модели временных рядов — GARCH модели.

При практическом применении моделей временных рядов исследователи часто сталкиваются с проблемой, называемой структурными сдвигами или разладками случайного процесса. Как известно, игнорирование структурных сдвигов при оценивании модели приводит к некорректным результатам и ошибочным прогнозам. В этом отношении модели для волатильности не являются исключением.

<sup>1</sup> **Борзых Дмитрий Александрович** — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва; borzykh.dmitriy@gmail.com.

**Языков Артем Анатольевич** — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН; Московский физико-технический институт; yazikov87@gmail.com.

В настоящей работе рассматривается задача обнаружения одного структурного сдвига для кусочно-заданной GARCH(1,1) модели, которая описывается следующим образом. Пусть  $\tau \in \{1, \dots, T\}$  — возможный момент структурного сдвига временного ряда  $Y = (Y_t)_{t=1}^T$ , который разделяет временной ряд  $Y$  на два однородных сегмента. Будем предполагать, что  $j$ -й фрагмент временного ряда описывается системой уравнений

$$Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_j + \delta_j \sigma_{t-1}^2 + \gamma_j \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \in [\tau_{j-1}; \tau_j - 1], \quad (1)$$

где  $j = 1, 2$ ,  $\tau_0 := 1$ ,  $\tau_1 := \tau$ ,  $\tau_2 := T + 1$ ,  $\theta_j := (\omega_j, \delta_j, \gamma_j)$  — неизвестные параметры модели, принадлежащие множеству допустимых значений

$$\Theta = \{(\omega, \delta, \gamma) : \omega > 0, \delta \geq 0, \gamma \geq 0, \delta + \gamma < 1\}, \quad \sigma_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_T —$$

независимые случайные величины, причем  $\sigma_0$  — неотрицательная случайная величина с  $E[\sigma_0^2] = \omega_1 / (1 - \delta_1 - \gamma_1)$ ,  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_T$  — стандартные нормальные случайные величины и  $\varepsilon_0 = \sigma_0 \xi_0$ .

Некоторые подходы к решению этой задачи можно найти, например, в (Davis et al., 2008; Fukuda, 2010; Kim et al., 2000; Kokoszka, Leipus, 1999, 2000; Lee et al., 2004; Inclán, Tiao, 1994; Ombao et al., 2002; Ross, 2013). Подробный обзор многих методов обнаружения структурных сдвигов для кусочно-заданных GARCH моделей содержится в диссертации (Badagián, 2013, Ch. 3, 87–105).

В данной работе предложен новый метод обнаружения момента структурного сдвига в GARCH(1,1) модели, основанный на статистике Колмогорова–Смирнова. Для удобства дальнейших ссылок данный метод будем обозначать KS. Хорошие свойства предлагаемого метода подкрепляются численными экспериментами по методу Монте-Карло. Метод сопоставляется с тремя хорошо известными CUSUM-методами обнаружения структурных сдвигов в GARCH моделях: (Kokoszka, Leipus, 1999), (Inclán, Tiao, 1994) и (Lee et al., 2004), которые далее будут обозначаться KL, IT и LTM соответственно.

Работа состоит из пяти разделов. Первый раздел — введение. Для большей замкнутости изложения и удобства читателей второй раздел статьи содержит краткое описание KL-, IT- и LTM-методов. В третьем разделе изложен предлагаемый KS-алгоритм. В четвертом разделе симулируются приближенные к реальности ситуации возникновения структурных сдвигов в GARCH моделях. Для этого при генерации GARCH процессов используются параметры GARCH моделей, которые были оценены по временным рядам доходностей 26 российских ценных бумаг. Была проведена серия из четырех численных экспериментов, каждый из которых состоял из 26 расчетов, а каждый расчет — из 5000 симуляций. С помощью этих экспериментов в работе проведено разностороннее сопоставление рассматриваемых в работе методов обнаружения структурных сдвигов. В заключении сформулированы основные выводы работы.

## 2. Описание KL-, IT- и LTM-методов

Данный раздел посвящен краткому описанию KL-, IT- и LTM-методов обнаружения структурных сдвигов, предложенных в работах (Kokoszka, Leipus, 1999), (Inclán, Tiao, 1994) и (Lee et al., 2004).

Пусть кусочно-заданный GARCH(1,1) процесс  $(Y_t)_{t=1}^T$  допускает один структурный сдвиг в момент времени  $\tau \in \{1, \dots, T\}$  и описывается системой уравнений (1).

**KL-метод.** Рассмотрим статистику

$$KL(k) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \sum_{t=1}^k Y_t^2 - \frac{k}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^2 \right), \quad k \in \{1, \dots, T\}.$$

Пусть  $r = r(T)$ ,  $T \in \mathbb{N}$  — строго возрастающая функция такая, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} r(T) = \infty \text{ и } \lim_{T \rightarrow \infty} r(T)/T = 0.$$

Обозначим  $(\hat{v}_{r,T})^2 := \sum_{|j| \leq r} w_j \hat{c}_j$ , где  $w_j = 1 - |j|/(r+1)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{и } \hat{c}_j = T^{-1} \sum_{i=1}^{T-|j|} (Y_i^2 - \bar{Y}^2) (Y_{i+|j|}^2 - \bar{Y}^2).$$

В статье (Kokoszka, Leipus, 1999) момент, *подозрительный на структурный сдвиг*, определяется по формуле

$$\hat{\tau}_{KL} = \min \left\{ k : |KL(k)| = \max_{j \in \{1, \dots, T\}} |KL(j)| \right\}.$$

Из теоремы 2.2 в (Kokoszka, Leipus, 1999) следует, что в случае отсутствия структурного сдвига при  $T \rightarrow \infty$  имеет место сходимость по распределению

$$\frac{|KL(\hat{\tau}_{KL})|}{\hat{v}_{r,T}} \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq u \leq 1} |B^0(u)|,$$

где  $B^0(u)$ ,  $u \in [0, 1]$  — процесс броуновского моста.

Критерий *наличия структурного сдвига*: если  $|KL(\hat{\tau}_{KL})|/\hat{v}_{r,T} \geq q_p$ , то момент  $\hat{\tau}_{KL}$  считается моментом структурного сдвига на уровне значимости  $1-p$ , где  $q_{0.95} = 1.358$  и  $q_{0.99} = 1.628$  — значения квантилей уровней 0.95 и 0.99 для супремума модуля броуновского моста  $\sup_{0 \leq u \leq 1} |B^0(u)|$ .

В расчетах из раздела 4 в качестве функции  $r = r(T)$  взята функция  $r = \lfloor \sqrt{T} \rfloor$ , где  $\lfloor \cdot \rfloor$  означает операцию округления вниз.

**IT-метод.** Рассмотрим статистику

$$IT(k) := \frac{\sum_{t=1}^k \hat{\xi}_t^2}{\sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^2} - \frac{k}{T}, \quad k \in \{1, \dots, T\},$$

где  $\hat{\xi}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$  — стандартизованные остатки GARCH(1,1) процесса.

В статье (Inclán, Tiao, 1994) момент, *подозрительный на структурный сдвиг*, определяется по формуле

$$\hat{\tau}_{\Gamma} := \min \left\{ k : |\Gamma(k)| = \max_{j \in \{1, \dots, T\}} |\Gamma(j)| \right\}.$$

Из теоремы 1 в (Inclán, Tiao, 1994) следует, что в случае отсутствия структурного сдвига при  $T \rightarrow \infty$  имеет место сходимость по распределению

$$\sqrt{T/2} |\Gamma(\hat{\tau}_{\Gamma})| \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq u \leq 1} |B^0(u)|.$$

*Критерий наличия структурного сдвига:* если  $\sqrt{T/2} |\Gamma(\hat{\tau}_{\Gamma})| \geq q_p$ , то момент  $\hat{\tau}_{\Gamma}$  считается моментом структурного сдвига на уровне значимости  $1 - p$ , где точки  $q_{0.95}$  и  $q_{0.99}$  определяются так же, как и в описании KL-метода.

**LTM-метод.** Рассмотрим статистику

$$\text{LTM}(k) := \frac{1}{\sqrt{T} \hat{\eta}} \left| \sum_{t=1}^k \hat{\xi}_t^2 - \frac{k}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^2 \right|, \quad k \in \{1, \dots, T\},$$

где  $\hat{\eta}^2 := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^4 - \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\xi}_t^2 \right)^2$ , а величины  $\hat{\xi}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$ , как и выше, означают стандарти-

зованные остатки GARCH(1,1) процесса.

В статье (Lee et al., 2004) момент, *подозрительный на структурный сдвиг*, определяется по формуле

$$\hat{\tau}_{\text{LTM}} := \min \left\{ k : \text{LTM}(k) = \max_{j \in \{1, \dots, T\}} \text{LTM}(j) \right\}.$$

Из теоремы 2 в (Lee et al., 2004) следует, что в случае отсутствия структурного сдвига при  $T \rightarrow \infty$  имеет место сходимость по распределению

$$\text{LTM}(\hat{\tau}_{\text{LTM}}) \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq u \leq 1} |B^0(u)|.$$

*Критерий наличия структурного сдвига:* если  $\text{LTM}(\hat{\tau}_{\text{LTM}}) \geq q_p$ , то момент  $\hat{\tau}_{\text{LTM}}$  считается моментом структурного сдвига на уровне значимости  $1 - p$ , где точки  $q_{0.95}$  и  $q_{0.99}$  те же, что и выше.

### 3. KS-алгоритм

Отметим сразу, что предлагаемый KS-метод является исключительно эвристическим и не имеет под собой строгого математического обоснования. Дело в том, что в ситуации с GARCH процессами наблюдения не являются независимыми, как того требует теорема Колмогорова–Смирнова. Поэтому тест Колмогорова–Смирнова, строго говоря, в данном случае неприменим.

Несмотря на это, численные эксперименты из раздела 4 показывают, что KS-метод обладает хорошими статистическими свойствами — достаточно низкими вероятностями ошибок первого рода и высокими мощностями обнаружения структурных сдвигов в GARCH(1,1) моделях.

Итак, пусть  $\hat{F}_Y(x)$  и  $\hat{F}_Z(x)$  — выборочные функции распределения, построенные по выборкам  $Y$  и  $Z$  соответственно, а  $\text{dist}(Y, Z) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_Y(x) - \hat{F}_Z(x)|$  — расстояние между этими функциями распределения. Введем обозначение  $Y[s; t] := [Y_s, \dots, Y_t]$ , где  $Y = [Y_1, \dots, Y_T]$  и  $1 \leq s \leq t \leq T$ .

Зафиксируем два параметра метода —  $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{N}$ , смысл которых в KS-методе будет пояснен в конце данного раздела.

Сначала объясним идею предлагаемого метода. Зафиксируем произвольный момент времени  $k \in [\Delta_1; T - \Delta_1]$  и рассмотрим две подвыборки  $Y[1; k-1]$  и  $Y[k; T]$ , которые располагаются во времени «левее» и «правее» момента  $k$  соответственно (см. рис. 1).

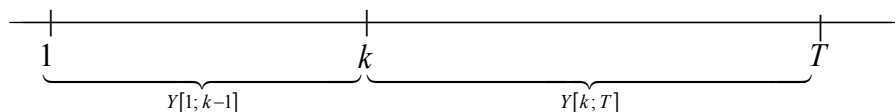


Рис. 1. Разбиение исходной выборки на две части

Точкой  $\lfloor k/2 \rfloor$  разобьем «левую» выборку  $Y[1; k-1]$  на две подвыборки примерно одинакового объема:  $Y[1; \lfloor k/2 \rfloor]$  и  $Y[\lfloor k/2 \rfloor + 1; k-1]$ . Вычислим расстояние между выборочными функциями распределения этих подвыборок:

$$\mathfrak{D}_L(k) = \text{dist}(Y[1; \lfloor k/2 \rfloor], Y[\lfloor k/2 \rfloor + 1; k-1]).$$

Аналогично, точкой  $\lfloor (k+T)/2 \rfloor$  разобьем «правую» выборку  $Y[k; T]$  на две подвыборки примерно одинакового объема:  $Y[k; \lfloor (k+T)/2 \rfloor]$  и  $Y[\lfloor (k+T)/2 \rfloor + 1; T]$ . Вычислим расстояние между выборочными функциями распределения этих подвыборок:

$$\mathfrak{D}_R(k) = \text{dist}(Y[k; \lfloor (k+T)/2 \rfloor], Y[\lfloor (k+T)/2 \rfloor + 1; T]).$$

Описанная выше ситуация проиллюстрирована на рис. 2.

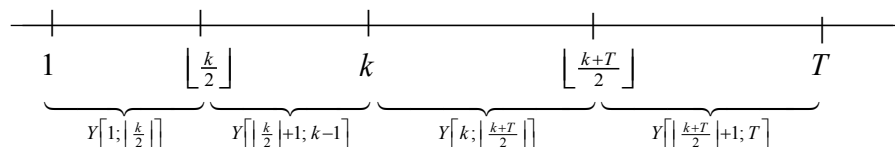
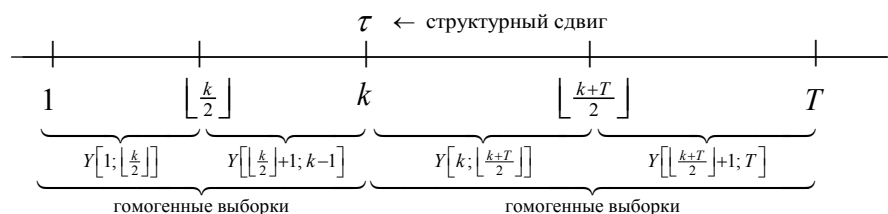


Рис. 2. Разбиение исходной выборки на четыре части

Заметим, что момент времени  $k$  совпадает с истинным моментом структурного сдвига тогда и только тогда, когда одновременно выборки  $Y[1; \lfloor k/2 \rfloor]$ ,  $Y[\lfloor k/2 \rfloor + 1; k - 1]$  являются гомогенными, и выборки  $Y[k; \lfloor (k + T)/2 \rfloor]$ ,  $Y[\lfloor (k + T)/2 \rfloor + 1; T]$  также являются гомогенными (см. рис. 3).



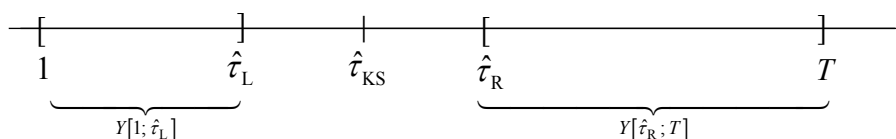
**Рис. 3.** Ситуация, когда  $k$  совпадает с моментом структурного сдвига  $\tau$

Точка минимума  $\hat{\tau}_{KS}$  функции  $\mathcal{D}(k) := \mathcal{D}_L(k) + \mathcal{D}_R(k)$  при  $k \in [\Delta_1; T - \Delta_1]$  объявляется моментом, подозрительным на структурный сдвиг. Данный момент подвергается проверке на наличие структурного сдвига с помощью теста Колмогорова–Смирнова (см. подробнее).

Перейдем к формальному описанию алгоритма.

**Шаг 1** (обнаружение). Находим момент времени  $\hat{\tau}_{KS}$ , подозрительный на структурный сдвиг, по формуле  $\hat{\tau}_{KS} \in \underset{k \in [\Delta_1; T - \Delta_1]}{\text{Argmin}} \mathcal{D}(k)$ .

**Шаг 2** (валидация). На заданном уровне значимости выполняем тест Колмогорова–Смирнова по выборкам  $Y[1; \hat{\tau}_L]$  и  $Y[\hat{\tau}_R; T]$ , где  $\hat{\tau}_L = \max\{\hat{\tau}_{KS} - \Delta_2, \Delta_1\}$  и  $\hat{\tau}_R = \min\{\hat{\tau}_{KS} + \Delta_2, T - \Delta_1\}$  (см. рис. 4). Если в данном тесте гипотеза об однородности выборок отвергается, то точку  $\hat{\tau}_{KS}$  считаем структурным сдвигом. В противном случае в точке  $\hat{\tau}_{KS}$  структурного сдвига нет.



**Рис. 4.** Валидация KS-оценки  $\hat{\tau}_{KS}$

Теперь поясним роли, которые играют в KS-методе параметры  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ .

**Параметр  $\Delta_1$**  выбирается так, чтобы при каждом  $k \in [\Delta_1; T - \Delta_1]$  была возможность разбить исходную выборку на четыре части  $Y[1; \lfloor k/2 \rfloor]$ ,  $Y[\lfloor k/2 \rfloor + 1; k - 1]$ ,  $Y[k; \lfloor (k + T)/2 \rfloor]$  и  $Y[\lfloor (k + T)/2 \rfloor + 1; T]$  (см. рис. 2). В расчетах ниже выбиралось  $\Delta_1 = 4$ .

**Роль параметра  $\Delta_2$** . Отметим, что на шаге валидации тест Колмогорова–Смирнова применяется не к выборкам  $Y[1; \hat{\tau}_{KS} - 1]$  и  $Y[\hat{\tau}_{KS}; T]$ , а к выборкам  $Y[1; \hat{\tau}_L]$  и  $Y[\hat{\tau}_R; T]$  (см. рис. 4). Смысл отбрасывания части наблюдений  $Y[\hat{\tau}_L + 1; \hat{\tau}_R - 1]$ , окружающих оценку момента структурного сдвига  $\hat{\tau}_{KS}$ , состоит в следующем. В той частой ситуации, когда оценка  $\hat{\tau}_{KS}$  не совпадает с истинным моментом структурного сдвига  $\tau$ , желательно избежать

применения теста Колмогорова–Смирнова к выборкам  $Y[1; \hat{\tau}_{KS} - 1]$  и  $Y[\hat{\tau}_{KS}; T]$ , одна из которых заведомо содержит структурный сдвиг  $\tau$ . Экспериментальным путем было установлено, что увеличение параметра  $\Delta_2$  снижает вероятность ошибки первого рода, но при этом в некоторой степени снижает и мощность теста. Поэтому параметр  $\Delta_2$  следует выбирать не слишком большим, но и не слишком маленьким. В расчетах из раздела 4 было использовано значение параметра  $\Delta_2 = 400$ .

#### 4. Численные эксперименты

Данный раздел посвящен описанию проведенных экспериментов, в которых структурные сдвиги волатильности моделировались с помощью кусочно-заданных GARCH(1,1) моделей. Для того чтобы условия экспериментов были в достаточной степени приближены к реальным условиям, были отобраны  $N = 26$  наиболее ликвидных ценных бумаг (см. Приложение, табл. П1<sup>2</sup>), торгуемых на Московской бирже и отвечающих некоторым техническим условиям, о которых будет сказано далее. Данные были взяты с сайта компании «ФИНАМ» (<https://www.finam.ru>) за период времени с 1 января 2011 г. по 31 декабря 2013 г. Этот временной период был выбран в силу его гомогенности — кризис 2008 г. уже закончился, а кризис 2014 г. еще не успел начаться. Цены отобранных бумаг были преобразованы в логарифмические доходности. По этим данным с помощью GARCH(1,1) модели для каждой ценной бумаги был оценен вектор параметров  $\theta = (\omega, \delta, \gamma)$ . Таким образом, было получено 26 векторов параметров  $\theta^{(j)} = (\omega^{(j)}, \delta^{(j)}, \gamma^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, N$ , каждый из которых соответствует одной из ценных бумаг (см. табл. П2)<sup>3</sup>. Все расчеты выполнялись на уровне значимости 1%. Параметры KS-метода были выбраны следующими:  $\Delta_1 = 4$ ,  $\Delta_2 = 400$ .

**Численный эксперимент 1.** Случай отсутствия структурного сдвига. Расчет вероятностей ошибок первого рода.

- Для каждой ценной бумаги и вектора параметров  $\theta = (\omega, \delta, \gamma)$  из табл. П2 согласно модели (1) при условии отсутствия структурного сдвига ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ) для  $T = 2000$  была выполнена серия из  $S = 5000$  генераций случайного процесса  $(Y_t^{(j)})_{t=1}^T$ .

- С использованием результатов данных симуляций рассчитаны эмпирические вероятности ошибок первого рода  $\alpha_{KS}^{(j)}$ ,  $\alpha_{KL}^{(j)}$ ,  $\alpha_{IT}^{(j)}$  и  $\alpha_{LTM}^{(j)}$  как доли случаев, в которых KS-, KL-, IT- и LTM-методы ошибочно указывали на наличие структурного сдвига. Результаты приведены в табл. П2.

- На основе величин  $\alpha_{KS}^{(j)}$ ,  $\alpha_{KL}^{(j)}$ ,  $\alpha_{IT}^{(j)}$  и  $\alpha_{LTM}^{(j)}$  были вычислены средние вероятности ошибок первого рода KS-, KL-, IT- и LTM-методов:

$$\bar{\alpha}_{KS} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_{KS}^{(j)}, \quad \bar{\alpha}_{KL} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_{KL}^{(j)}, \quad \bar{\alpha}_{IT} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_{IT}^{(j)}, \quad \bar{\alpha}_{LTM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_{LTM}^{(j)}.$$

- Результаты расчетов приведены в табл. 1.

<sup>2</sup> Таблицы, номера которых начинаются с «П», размещены в Приложении.

<sup>3</sup> Индекс ценной бумаги ( $j$ ) иногда будем опускать.

Таблица 1. Средние вероятности ошибки первого рода

$\bar{\alpha}_{KS}$	$\bar{\alpha}_{KL}$	$\bar{\alpha}_{IT}$	$\bar{\alpha}_{LTM}$
0.049	0.074	0.003	0.003

**Численные эксперименты 2–4.** Три типа структурных сдвигов. Расчет мощностей методов. В каждом из экспериментов моделировался структурный сдвиг в одном из трех параметров модели (1).

- Для каждой ценной бумаги и вектора параметров  $\theta = (\omega, \delta, \gamma)$  из табл. П2 согласно модели (1) при  $T = 2000$  и наличии структурного сдвига в момент времени  $\tau = 1001$  была выполнена серия из  $S = 5000$  генераций случайного процесса  $(Y_t^{(j)})_{t=1}^T$ . При этом:
  - в эксперименте 2 моделировался скачок параметра  $\omega$  вверх в пять раз, т. е.  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 5\omega$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  и  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,
  - в эксперименте 3 моделировался скачок параметра  $\delta$  вниз на 0.1, т. е.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\delta_1 = \delta$ ,  $\delta_2 = \delta - 0.1$  и  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,
  - в эксперименте 4 моделировался скачок параметра  $\gamma$  вниз на 0.04, т. е.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ,  $\gamma_1 = \gamma$  и  $\gamma_2 = \gamma - 0.04$ .
- С использованием результатов данных симуляций рассчитаны мощности  $W_{KS}^{(j)}$ ,  $W_{KL}^{(j)}$ ,  $W_{IT}^{(j)}$  и  $W_{LTM}^{(j)}$  как доли случаев, в которых KS-, KL-, IT- и LTM-методы правильно указали на наличие структурного сдвига. Результаты приведены в табл. П3–П5.
- На основе величин  $W_{KS}^{(j)}$ ,  $W_{KL}^{(j)}$ ,  $W_{IT}^{(j)}$  и  $W_{LTM}^{(j)}$  были вычислены средние мощности KS-, KL-, IT- и LTM-методов:

$$\bar{W}_{KS} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W_{KS}^{(j)}, \bar{W}_{KL} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W_{KL}^{(j)}, \bar{W}_{IT} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W_{IT}^{(j)}, \bar{W}_{LTM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W_{LTM}^{(j)}.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2. Средние мощности при разных типах скачков

Тип скачка	$\bar{W}_{KS}$	$\bar{W}_{KL}$	$\bar{W}_{IT}$	$\bar{W}_{LTM}$
Эксперимент 2 — увеличение $\omega$ в 5 раз	0.992	0.972	0.295	0.223
Эксперимент 3 — уменьшение $\delta$ на 0.1	0.838	0.870	0.417	0.383
Эксперимент 4 — уменьшение $\gamma$ на 0.04	0.622	0.745	0.275	0.246

**Техническое условие**, согласно которому отбирались ценные бумаги и о котором было сказано в начале раздела, состояло в том, что «сдвинутые» векторы параметров  $\theta_2 = (\omega_2, \delta_2, \gamma_2)$  в модели (1) для каждой из отобранных ценных бумаг должны попадать в множество допустимых значений параметров  $\Theta$  в каждом из экспериментов 2–4. В частности, должны выполняться условия  $\delta_2 + \gamma_2 < 1$  и  $\gamma_2 \geq 0$ . По этой причине в экспериментах 3 и 4 параметры  $\delta$  и  $\gamma$  сдвигаются вниз, а не вверх. При этом сдвиг в параметре  $\gamma$  — незначительный (всего на 0.04). В противном случае для некоторых расчетов «сдвинутые» векторы параметров  $\theta_2$  не попадают в допустимое множество  $\Theta$ .



В связи с данным техническим ограничением пришлось исключить из рассмотрения такие ценные бумаги, как GAZP (ПАО «Газпром», ао<sup>4</sup>), MOEX (ПАО Московская Биржа, ао), MTLR (ПАО «Мечел», ао), MVID (ПАО «М.видео», ао), PHOR (ПАО «ФосАгро», ао), POLY (Полиметалл Интернэшнл плс, акции иностранного эмитента), SBERP (ПАО Сбербанк, ап), UPRO (ПАО «Юнипро», ао).

Из таблицы 1 видно, что самые маленькие средние вероятности ошибки первого рода<sup>5</sup> имеют два метода — IT и LTM. По сравнению с ними KS- и KL-методы имеют существенно большие ошибки первого рода. При этом средняя ошибка первого рода для KL-метода в полтора раза больше средней ошибки первого рода для KS-метода. Анализ табл. П2 показывает, что KL-метод имеет большие ошибки первого рода в большем числе случаев по сравнению с KS-методом. А именно, для KS-метода ошибка первого рода оказалась больше 10% в двух случаях, а для KL-метода — в пяти.

Во втором эксперименте самую большую мощность обнаружения структурных сдвигов продемонстрировал предлагаемый KS-метод. В третьем и четвертом экспериментах самую высокую мощность показал KL-метод. Во всех трех экспериментах IT- и LTM-методы показали низкую мощность обнаружения структурных сдвигов.

## 5. Заключение

В работе предложен новый метод обнаружения одного структурного сдвига в GARCH(1,1) модели, основанный на статистике Колмогорова–Смирнова (KS-метод).

С помощью численного моделирования метод сравнивается с тремя CUSUM-методами обнаружения структурных сдвигов в GARCH моделях: KL (Kokoszka, Leipus, 1999), IT (Inclán, Tiao, 1994) и LTM (Lee, Tokutsu, Maekawa, 2004).

Для того чтобы условия проводимых численных экспериментов были в достаточной степени приближены к реальным условиям, при генерации GARCH процессов использовались параметры GARCH моделей, которые были оценены по временным рядам доходностей 26 российских ценных бумаг. Была проведена серия из четырех численных экспериментов, каждый из которых состоял из 26 расчетов, а каждый расчет — из 5000 симуляций.

В рамках данных экспериментов получены следующие результаты. KL-метод в большинстве случаев продемонстрировал самую высокую мощность обнаружения структурных сдвигов. На втором месте с небольшим отрывом оказался предлагаемый KS-метод, а на третьем и четвертом местах — IT- и LTM-методы соответственно. Причем IT- и LTM-методы показали в расчетах низкую мощность. Вместе с тем, для KL-метода был обнаружен существенный недостаток, состоящий в том, что в некоторых расчетах он имеет высокие вероятности ошибок первого рода (вплоть до 42%). В то же время предлагаемый KS-метод имеет более приемлемые вероятности ошибок первого рода.

Таким образом, основываясь на проведенных экспериментах, можно заключить, что предлагаемый метод занимает некоторое «компромиссное» положение между KL-методом, имеющим высокие мощность и вероятность ошибки первого рода, и IT- и LTM-методами, которые имеют низкие мощность и вероятности ошибок первого рода.

<sup>4</sup> Здесь «ао» означает акции обыкновенные, а «ап» — акции привилегированные.

<sup>5</sup> Далее для краткости вероятности ошибок первого рода будем также называть просто ошибками первого рода.

## Список литературы

- Badagián A. L. (2013). Time series segmentation procedures to detect, locate and estimate change-points. <https://core.ac.uk/download/pdf/29404624.pdf>.
- Davis R., Lee T., Rodriguez-Yam G. (2008). Break detection for a class of nonlinear time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 29 (5), 834–867.
- Fukuda K. (2010). Parameter changes in GARCH model. *Journal of Applied Statistics*, 37 (7), 1123–1135.
- Kim S., Cho S., Lee S. (2000). On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1,1) models. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 29 (2), 445–462.
- Kokoszka P., Leipus R. (1999). Testing for parameter changes in ARCH models. *Lithuanian Mathematical Journal*, 39 (2), 182–195.
- Kokoszka P., Leipus R. (2000). Change-point estimation in ARCH models. *Bernoulli*, 6 (3), 513–539.
- Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K. (2004). The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors. *Journal of the Japanese Statistical Society*, 34 (2), 173–188.
- Inclán C., Tiao G. (1994). Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 89 (427), 913–923.
- Ombao H., Raz J., von Sachs R., Guo W. (2002). The SLEX model of a non-stationary random process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 54 (1), 171–200.
- Ross G. J. (2013). Modeling financial volatility in the presence of abrupt changes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 192 (2), 350–360.

Поступила в редакцию 03.02.2019;  
принята в печать 01.04.2019.

## Приложение

**Таблица П1.** Список анализируемых ценных бумаг

Тикер	Название ценной бумаги	Тикер	Название ценной бумаги
AFKS	ПАО АФК «Система», ао	NVTK	ПАО «НОВАТЭК», ао
AFLT	ПАО «Аэрофлот», ао	PIKK	ПАО «Группа Компаний ПИК», ао
ALRS	АК «АЛРОСА» (ПАО), ао	PLZL	ПАО «Полюс», ао
CHMF	ПАО «Северсталь», ао	ROSN	ПАО «НК «Роснефть», ао
FEES	ПАО «ФСК ЕЭС», ао	RTKM	ПАО «Ростелеком», ао
GMKN	ПАО «ГМК Норильский никель», ао	SBER	ПАО Сбербанк, ао
HYDR	ПАО «РусГидро», ао	SNGS	ОАО «Сургутнефтегаз», ао
IRAO	ПАО «Интер РАО», ао	SNGSP	ОАО «Сургутнефтегаз», ап
LKOH	ПАО «ЛУКОЙЛ», ао	TATN	ПАО «Татнефть» им. В. Д. Шашина, ао
MAGN	ПАО «ММК», ао	TATNP	ПАО «Татнефть» им. В. Д. Шашина, ап
MGNT	ПАО «Магнит», ао	TRMK	ПАО «ТМК», АО
MTSS	ПАО «МТС», ао	TRNFP	ПАО «Транснефть», ап
NLMK	ПАО «НЛМК», ао	VTBR	Банк ВТБ (ПАО), ао

*Примечание.* «ао» — акции обыкновенные, «ап» — акции привилегированные.

**Таблица П2.** Оценки векторов параметров  $\theta = (\omega, \delta, \gamma)$  акций из табл. П1 и ошибки первого рода

Тикер	$\omega$	$\delta$	$\gamma$	$\alpha_{KS}$	$\alpha_{KL}$	$\alpha_{IT}$	$\alpha_{LTM}$
AFKS	4.28E-05	0.746	0.144	0.023	0.006	0.001	0.002
AFLT	2.68E-05	0.803	0.120	0.023	0.014	0.007	0.009
ALRS	5.99E-05	0.511	0.409	0.036	0.000	0.003	0.003
CHMF	2.36E-05	0.872	0.082	0.017	0.011	0.002	0.003
FEES	6.46E-05	0.831	0.086	0.017	0.011	0.006	0.006
GMKN	9.69E-06	0.887	0.083	0.059	0.056	0.002	0.002
HYDR	1.17E-05	0.897	0.070	0.034	0.051	0.004	0.004
IRAO	2.06E-05	0.869	0.096	0.042	0.034	0.003	0.002
LKOH	1.07E-06	0.943	0.051	0.256	0.422	0.000	0.000
MAGN	1.09E-05	0.917	0.058	0.031	0.071	0.002	0.001
MGNT	3.14E-05	0.809	0.115	0.013	0.011	0.007	0.006
MTSS	3.95E-06	0.941	0.043	0.037	0.132	0.000	0.000
NLMK	1.60E-05	0.915	0.055	0.025	0.048	0.002	0.002
NVTK	9.43E-06	0.918	0.059	0.037	0.072	0.001	0.001
PIKK	7.84E-05	0.564	0.184	0.010	0.008	0.014	0.016
PLZL	0.000294	0.165	0.109	0.007	0.006	0.007	0.006
ROSN	4.62E-06	0.929	0.052	0.062	0.115	0.000	0.000
RTKM	0.000104	0.519	0.338	0.025	0.003	0.012	0.011
SBER	6.25E-06	0.934	0.046	0.040	0.099	0.001	0.000
SNGS	8.23E-06	0.921	0.052	0.034	0.059	0.003	0.002
SNGSP	1.11E-05	0.895	0.075	0.037	0.046	0.003	0.003
TATN	5.49E-06	0.909	0.079	0.130	0.165	0.001	0.002
TATNP	4.64E-06	0.928	0.057	0.077	0.155	0.001	0.000
TRMK	1.28E-05	0.902	0.068	0.029	0.042	0.001	0.001
TRNFP	1.28E-05	0.902	0.068	0.034	0.052	0.000	0.000
VTBR	3.53E-06	0.936	0.054	0.142	0.241	0.000	0.000

Таблица ПЗ. Мощности методов при скачке параметра  $\omega$  вверх в 5 раз

Тикер	$\omega_1$	$\omega_2 = 5\omega_1$	$\delta_1 = \delta_2$	$\gamma_1 = \gamma_2$	$W_{KS}$	$W_{KL}$	$W_{IT}$	$W_{LTM}$
AFKS	4.28E-05	2.15E-04	0.746	0.144	1.000	0.993	0.881	0.801
AFLT	2.68E-05	1.35E-04	0.803	0.120	1.000	0.998	0.749	0.626
ALRS	5.99E-05	3.00E-04	0.511	0.409	0.996	0.586	1.000	1.000
CHMF	2.36E-05	1.20E-04	0.872	0.082	0.997	0.998	0.268	0.147
FEES	6.46E-05	3.25E-04	0.831	0.086	1.000	1.000	0.367	0.210
GMKN	9.69E-06	5.00E-05	0.887	0.083	0.999	0.991	0.212	0.114
HYDR	1.17E-05	6.00E-05	0.897	0.070	0.996	1.000	0.135	0.058
IRAO	2.06E-05	1.05E-04	0.869	0.096	0.998	0.983	0.283	0.170
LKOH	1.07E-06	5.00E-06	0.943	0.051	0.914	0.965	0.107	0.029
MAGN	1.09E-05	5.50E-05	0.917	0.058	1.000	1.000	0.077	0.018
MGNT	3.14E-05	1.55E-04	0.809	0.115	0.999	1.000	0.676	0.551
MTSS	3.95E-06	2.00E-05	0.941	0.043	0.995	1.000	0.048	0.009
NLMK	1.60E-05	8.00E-05	0.915	0.055	0.999	1.000	0.087	0.026
NVTK	9.43E-06	4.50E-05	0.918	0.059	0.998	0.999	0.067	0.017
PIKK	7.84E-05	3.90E-04	0.564	0.184	1.000	0.999	0.844	0.761
PLZL	0.000294	1.47E-03	0.165	0.109	1.000	1.000	0.021	0.001
ROSN	4.62E-06	2.50E-05	0.929	0.052	1.000	0.999	0.068	0.019
RTKM	0.000104	5.20E-04	0.519	0.338	1.000	0.864	1.000	1.000
SBER	6.25E-06	3.00E-05	0.934	0.046	0.996	0.999	0.057	0.010
SNGS	8.23E-06	4.00E-05	0.921	0.052	0.997	1.000	0.069	0.016
SNGSP	1.11E-05	5.50E-05	0.895	0.075	1.000	0.998	0.147	0.058
TATN	5.49E-06	2.50E-05	0.909	0.079	0.950	0.938	0.123	0.039
TATNP	4.64E-06	2.50E-05	0.928	0.057	0.989	0.994	0.059	0.011
TRMK	1.28E-05	6.50E-05	0.902	0.068	0.996	0.998	0.120	0.050
TRNFP	1.28E-05	6.50E-05	0.902	0.068	0.999	0.996	0.116	0.043
VTBR	3.53E-06	2.00E-05	0.936	0.054	0.967	0.982	0.079	0.025

Д. А. Борзых, А. А. Языков

Таблица П4. Мощности методов при скачке параметра  $\delta$  вниз на 0.1

Тикер	$\omega_1 = \omega_2$	$\delta_1$	$\delta_2 = \delta_1 - 0.1$	$\gamma_1 = \gamma_2$	$W_{KS}$	$W_{KL}$	$W_{IT}$	$W_{LTM}$
AFKS	4.28E-05	0.746	0.646	0.144	0.568	0.881	0.968	0.968
AFLT	2.68E-05	0.803	0.703	0.120	0.844	0.97	0.976	0.967
ALRS	5.99E-05	0.511	0.411	0.409	0.361	0.133	0.609	0.61
CHMF	2.36E-05	0.872	0.772	0.082	0.996	0.995	0.612	0.563
FEES	6.46E-05	0.831	0.731	0.086	0.855	0.998	0.807	0.791
GMKN	9.69E-06	0.887	0.787	0.083	1.000	0.992	0.453	0.383
HYDR	1.17E-05	0.897	0.797	0.070	0.998	0.996	0.293	0.231
IRAO	2.06E-05	0.869	0.769	0.096	0.993	0.981	0.729	0.69
LKOH	1.07E-06	0.943	0.843	0.051	0.999	0.992	0.998	0.996
MAGN	1.09E-05	0.917	0.817	0.058	0.997	0.999	0.136	0.082
MGNT	3.14E-05	0.809	0.709	0.115	0.854	0.979	0.969	0.962
MTSS	3.95E-06	0.941	0.841	0.043	1.000	1.000	0.047	0.029

Окончание табл. П4

Тикер	$\omega_1 = \omega_2$	$\delta_1$	$\delta_2 = \delta_1 - 0.1$	$\gamma_1 = \gamma_2$	$W_{KS}$	$W_{KL}$	$W_{IT}$	$W_{LTM}$
NLMK	1.60E-05	0.915	0.815	0.055	1.000	0.999	0.111	0.064
NVTK	9.43E-06	0.918	0.818	0.059	1.000	0.999	0.132	0.085
PIKK	7.84E-05	0.564	0.464	0.184	0.071	0.438	0.642	0.635
PLZL	0.000294	0.165	0.065	0.109	0.011	0.121	0.156	0.156
ROSN	4.62E-06	0.929	0.829	0.052	1.000	0.999	0.093	0.056
RTKM	0.000104	0.519	0.419	0.338	0.248	0.195	0.618	0.623
SBER	6.25E-06	0.934	0.834	0.046	1.000	1.000	0.041	0.016
SNGS	8.23E-06	0.921	0.821	0.052	1.000	1.000	0.080	0.045
SNGSP	1.11E-05	0.895	0.795	0.075	0.999	0.993	0.369	0.308
TATN	5.49E-06	0.909	0.809	0.079	0.998	0.968	0.279	0.2
TATNP	4.64E-06	0.928	0.828	0.057	1.000	0.998	0.093	0.052
TRMK	1.28E-05	0.902	0.802	0.068	1.000	0.997	0.256	0.192
TRNFP	1.28E-05	0.902	0.802	0.068	1.000	0.999	0.272	0.199
VTBR	3.53E-06	0.936	0.836	0.054	1.000	0.997	0.113	0.061

Таблица П5. Мощности методов при скачке параметра  $\gamma$  вниз на 0.04

Тикер	$\omega_1 = \omega_2$	$\delta_1 = \delta_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2 = \gamma_1 - 0.04$	$W_{KS}$	$W_{KL}$	$W_{IT}$	$W_{LTM}$
AFKS	4.28E-05	0.746	0.144	0.104	0.053	0.202	0.200	0.204
AFLT	2.68E-05	0.803	0.120	0.080	0.130	0.410	0.345	0.338
ALRS	5.99E-05	0.511	0.409	0.369	0.063	0.014	0.040	0.040
CHMF	2.36E-05	0.872	0.082	0.042	0.453	0.905	0.583	0.548
FEES	6.46E-05	0.831	0.086	0.046	0.103	0.641	0.470	0.460
GMKN	9.69E-06	0.887	0.083	0.043	0.787	0.938	0.510	0.474
HYDR	1.17E-05	0.897	0.070	0.030	0.779	0.973	0.430	0.390
IRAO	2.06E-05	0.869	0.096	0.056	0.600	0.857	0.584	0.556
LKOH	1.07E-06	0.943	0.051	0.011	0.996	0.996	0.328	0.237
MAGN	1.09E-05	0.917	0.058	0.018	0.921	0.995	0.248	0.213
MGNT	3.14E-05	0.809	0.115	0.075	0.146	0.489	0.386	0.370
MTSS	3.95E-06	0.941	0.043	0.003	0.995	0.999	0.080	0.046
NLMK	1.60E-05	0.915	0.055	0.015	0.875	0.996	0.248	0.215
NVTK	9.43E-06	0.918	0.059	0.019	0.937	0.998	0.245	0.200
PIKK	7.84E-05	0.564	0.184	0.144	0.010	0.037	0.057	0.050
PLZL	0.000294	0.165	0.109	0.069	0.005	0.017	0.018	0.020
ROSN	4.62E-06	0.929	0.052	0.012	0.987	0.997	0.122	0.102
RTKM	0.000104	0.519	0.338	0.298	0.033	0.010	0.028	0.031
SBER	6.25E-06	0.934	0.046	0.006	0.988	1.000	0.104	0.072
SNGS	8.23E-06	0.921	0.052	0.012	0.917	0.992	0.200	0.165
SNGSP	1.11E-05	0.895	0.075	0.035	0.811	0.973	0.481	0.453
TATN	5.49E-06	0.909	0.079	0.039	0.967	0.965	0.313	0.260
TATNP	4.64E-06	0.928	0.057	0.017	0.991	1.000	0.145	0.103
TRMK	1.28E-05	0.902	0.068	0.028	0.810	0.978	0.417	0.365
TRNFP	1.28E-05	0.902	0.068	0.028	0.813	0.984	0.447	0.404
VTBR	3.53E-06	0.936	0.054	0.014	0.994	0.996	0.118	0.084

Borzykh D., Yazykov A. The new KS method for a structural break detection in GARCH(1,1) models. *Applied Econometrics*, 2019, v. 54, pp. 90–104.  
DOI: 10.24411/2076-4766-2017-10005

**Dmitriy Borzykh**

National Research University Higher School of Economics (NRU HSE), Moscow,  
Russian Federation;  
borzykh.dmitriy@gmail.com

**Artem Yazykov**

National Research University Higher School of Economics (NRU HSE), Federal Research  
Center «Computer Science and Control», Moscow Institute of Physics and Technology;  
Russian Federation;  
yazikov87@gmail.com

**The new KS method for a structural break detection  
in GARCH(1,1) models**

We propose a new method of a structural break detection for GARCH(1,1) model. This new method is called the KS method since it is based on Kolmogorov-Smirnov statistics. By using Monte-Carlo experiments we show that the KS method has good statistical properties. We compare our method with three well-known CUSUM methods: (Kokoszka, Leipus, 1999) referred to as KT method, (Inclán, Tiao, 1994) referred to as IT method, and (Lee et al., 2004) referred to as LTM method. To make the experiments closer to real conditions, we generate GARCH processes with coefficients estimated on 26 Russian stocks time series. Based on the results of numerical experiments, we suggest that our method is highly competitive and may be placed somewhere in between the KL method which has high power and high probability of type I error, and IT and LTM methods which have low power and also low probability of type I error.

**Keywords:** GARCH; volatility; change points; structural breaks; ICSS; CUSUM.

**JEL classification:** C32; C58; C63.

**References**

- Badagián A. L. (2013). Time series segmentation procedures to detect, locate and estimate change-points. <https://core.ac.uk/download/pdf/29404624.pdf>.
- Davis R., Lee T., Rodriguez-Yam G. (2008). Break detection for a class of nonlinear time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 29 (5), 834–867.
- Fukuda K. (2010). Parameter changes in GARCH model. *Journal of Applied Statistics*, 37 (7), 1123–1135.
- Kim S., Cho S., Lee S. (2000). On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1,1) models. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 29 (2), 445–462.
- Kokoszka P., Leipus R. (1999). Testing for parameter changes in ARCH models. *Lithuanian Mathematical Journal*, 39 (2), 182–195.
- Kokoszka P., Leipus R. (2000). Change-point estimation in ARCH models. *Bernoulli*, 6 (3), 513–539.

Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K. (2004). The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors. *Journal of the Japanese Statistical Society*, 34 (2), 173–188.

Inclán C., Tiao G. (1994). Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 89 (427), 913–923.

Ombao H., Raz J., von Sachs R., Guo W. (2002). The SLEX model of a non-stationary random process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 54 (1), 171–200.

Ross G. J. (2013). Modeling financial volatility in the presence of abrupt changes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 192 (2), 350–360.

*Received 03.02.2019; accepted 01.04.2019.*