

आवश्यक तथ्य एवं सूत्र

1. (i) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
(ii) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.
(iii) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.
(iv) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$.
(v) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$.
(vi) $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$.
2. (i) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.
(ii) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.
(iii) $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$.
(iv) $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$.
(v) $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
(vi) $a+b+c=0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
3. (i) गुणनखण्ड प्रमेय (Factor Theorem) : यदि $f(x)$ का एक गुणनखण्ड $(x-a)$ हो, तो $f(a) = 0$.
(ii) शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem) : यदि $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दें तो शेषफल $= f(a)$.

4. कुछ विशेष परिणाम :

- (i) $(x^n - a^n)$ सदैव $(x-a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा.
- (ii) $(x^n - a^n)$ तभी $(x+a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा, जबकि n एक समसंख्या हो.
- (iii) $(x^n + a^n)$ तभी $(x+a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा, जबकि n एक विषम संख्या हो.
- (iv) $(x^n + a^n)$ कभी भी $(x-a)$ से पूर्णतया विभक्त नहीं होगा.

5. करणी (SURDS)

माना a एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा n एक धनपूर्णांक है. तब $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ को n वें घात की करणी कहते हैं, जबकि किसी भी धनात्मक परिमेय संख्या की n वीं घात a के बराबर नहीं है.

- उदाहरणार्थ : (i) $\sqrt{11}$ एक करणी है, चूँकि किसी भी धनात्मक परिमेय संख्या का वर्ग 11 नहीं है.
(ii) $\sqrt[3]{12}$ एक करणी है, चूँकि किसी भी धनात्मक परिमेय संख्या का घन 12 नहीं है.
(iii) $\sqrt{9}$ एक करणी नहीं है, क्योंकि $9 = 3^2$.
(iv) $\sqrt[3]{8}$ एक करणी नहीं है, क्योंकि $8 = 2^3$.

नोट : प्रत्येक अपरिमेय संख्या का करणी होना आवश्यक नहीं.

जैसे : π एक अपरिमेय संख्या है, परन्तु करणी नहीं.

6. करणी के नियम :

- (i) $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\left(\frac{1}{n} \times m\right)} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \times m}$.
- (ii) $(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^m = \left(a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left((ab)^{\frac{1}{n}}\right)^m = (ab)^{\left(\frac{1}{n} \times m\right)} = (ab)^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n} \times m}$.
- (iii) $(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^{mn} = \left\{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{mn} = a^{\left(\frac{1}{nm} \times mn\right)} = a^1 = a$.

7. (i) शुद्ध करणी (Pure Surd) :

यदि किसी एकपदी करणी में गुणांक 1 हो, तो यह शुद्ध करणी कहलाती है.

जैसे : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{8}$ आदि सभी शुद्ध करणी हैं.

(ii) मिश्र करणी (Mixed Surd) :

यदि किसी एकपदी करणी में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य परिमेय गुणांक हो, तो उसे मिश्र करणी कहते हैं।
जैसे : $3\sqrt{2}$, $5\sqrt[3]{6}$, $2\sqrt[4]{8}$ आदि।

बहुपद (Polynomial) : एक चर x के विभिन्न घात वाले पदों को + चिन्ह से एकत्रित करने पर प्राप्त व्यंजक

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

को चर x में एक बहुपद कहते हैं जहाँ a_0, a_1 इत्यादि धनात्मक या ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं एवं n एक पूर्ण संख्या है।

जैसे : $4x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ चर x में एक बहुपद है जबकि $5\sqrt{y} + \sqrt{7}y$ चर y में बहुपद नहीं है क्योंकि प्रथम पद $5\sqrt{y}$ में y का घात $\frac{1}{2}$ है जो एक पूर्ण संख्या नहीं है।

बहुपद का घात (Degree of a Polynomial) : किसी बहुपद में सबसे बड़े घात वाले पद के घातांक को उस बहुपद का घात कहा जाता है।

जैसे : बहुपद $x^3 + 3x^2 + 2x + 5$ में x के सबसे बड़े घात वाला पद x^3 है। इसका घातांक 3 है। अतः इस बहुपद का घात 3 है।

रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) : यदि बहुपद में प्रयुक्त चर का अधिकतम घात 1 ही तो उसे रैखिक बहुपद कहते हैं।

जैसे : $4x$, $2x + 5$, $\sqrt{3} - y$

द्विघाती बहुपद (Quadratic Polynomial) : यदि बहुपद में प्रयुक्त चर का अधिकतम घात 2 हो तो उसे द्विघाती बहुपद कहते हैं।

जैसे : $3x^2$, $2x^2 - 5x + 3$, $y^2 + \frac{3}{5}y$ ।

प्रश्नमाला 31

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में ठीक उत्तर को चिह्नंकित (✓) कीजिए :

- निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा बहुपद है ?
(a) $x + \frac{1}{x} - 2$ (b) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3$ (c) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x + 6$ (d) $x + 2\sqrt{x} + 3$
- निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा बहुपद है ?
(a) $\sqrt{x} - 2$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 3$ (c) $x - \frac{1}{x}$ (d) $2x$
- निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा बहुपद है ?
(a) $x + \frac{1}{x} + 1$ (b) $\frac{1}{x} + 3$ (c) $\sqrt{x} + 3$ (d) -5
- निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा बहुपद है ?
(a) $x^{-2} + x^{-1} + 1$ (b) $x + x^{-1} + 2$ (c) $x^{-1} + 5$ (d) 0
- निम्नलिखित में से कौन-सा रैखिक बहुपद है ?
(a) $x + \frac{1}{x}$ (b) $x + x^2$ (c) $x + 8$ (d) $\frac{3}{x} + 3$
- निम्नलिखित में से कौन-सा व्यंजक द्विपदी है ?
(a) $x^2 + x + 3$ (b) $x^3 + 2$ (c) $2x^2$ (d) $x^2 + 3x + 5$
- $\sqrt{2}$ किस घात का बहुपद है ?
(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 0

- (a) 0 (b) 1 (c) परिभाषित नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं
8. यदि $P(x) = x^3 + 3$ हो, तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?
 (a) $P(x)$ एक बहुपदी है जिसकी घात 3 है
 (b) $P(x)$ एक बहुपदी है जिसकी घात $\frac{1}{3}$ है
 (c) $P(x)$ एक व्यंजक है जो बहुपदी नहीं है
 (d) इनमें से कोई नहीं
9. यदि $\sqrt{2} = 1.414$ हो, तो $\frac{1}{\sqrt{2}} = ?$
 (a) 0.471 (b) 0.707 (c) 0.713 (d) 1.707
10. यदि $\sqrt{3} = 1.732$ हो, तो $\frac{1}{\sqrt{3}} = ?$
 (a) 0.866 (b) 0.433 (c) 0.577 (d) इनमें से कोई नहीं
11. यदि $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{2}$ हो, तो
 (a) $a = \frac{11}{7}, b = \frac{3}{7}$ (b) $a = \frac{11}{7}, b = \frac{4}{7}$ (c) $a = \frac{11}{7}, b = \frac{5}{7}$ (d) $a = \frac{11}{7}, b = \frac{6}{7}$
12. यदि $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = a-b\sqrt{2}$ हो, तो
 (a) $a = 3, b = 2$ (b) $a = 2, b = 3$ (c) $a = 5, b = 3$ (d) $a = 3, b = 5$
13. यदि $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = a+b\sqrt{3}$ हो, तो
 (a) $a = 2, b = 1$ (b) $a = 2, b = -1$ (c) $a = 3, b = -2$ (d) $a = 1, b = -2$
14. यदि $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = a+b\sqrt{15}$ हो, तो
 (a) $a = 3, b = 2$ (b) $a = 4, b = 1$ (c) $a = 5, b = 3$ (d) $a = 3, b = 5$
15. यदि $\frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$ हो, तो
 (a) $a = 11, b = 6$ (b) $a = -11, b = 6$ (c) $a = 11, b = -6$ (d) $a = -11, b = -6$
16. यदि $\frac{4+2\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} = a+b\sqrt{5}$ हो, तो
 (a) $a = \frac{46}{29}, b = \frac{-20}{29}$ (b) $a = \frac{-46}{29}, b = \frac{20}{29}$ (c) $a = \frac{46}{29}, b = \frac{20}{29}$ (d) $a = \frac{-46}{29}, b = \frac{-20}{29}$
17. यदि $\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = a+b\sqrt{6}$ हो, तो
 (a) $a = 12, b = -5$ (b) $a = -12, b = 5$ (c) $a = -12, b = -5$ (d) $a = 12, b = 5$
18. यदि $\sqrt{5} = 2.236$ हो, तो $\frac{(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})}$ का मान कितना होगा ?
 (a) 0.134 (b) 0.124 (c) 0.764 (d) 0.146
19. यदि $x = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$ हो, तो $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = ?$
 (a) 512 (b) 625 (c) 488 (d) 424

21. यदि $x = (2 + \sqrt{3})$ हो, तो $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = ?$

(a) 52

(b) 56

(c) 72

(d) इनमें से कोई नहीं

22. $\frac{(7+3\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} + \frac{(7-3\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})} = ?$

(a) 6

(b) 9

(c) 3

(d) 8

23. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = ?$

(a) 6

(b) 4

(c) 12

(d) 10

24. $\sqrt{50} \times \sqrt{72} = ?$

(a) 60

(b) 65

(c) $6\sqrt{5}$ (d) $15\sqrt{2}$

25. $\sqrt{20} \times \sqrt{45}$

(a) 25

(b) 30

(c) 35

(d) इनमें से कोई नहीं

26. $\sqrt{20} + \sqrt{80} + \sqrt{45} - \sqrt{180} = ?$

(a) $4\sqrt{5}$ (b) $5\sqrt{3}$ (c) $3\sqrt{5}$ (d) $5\sqrt{5}$

27. $(125)^{-\frac{1}{3}} = ?$

(a) -5

(b) $-\frac{1}{5}$

(c) 5

(d) $\frac{1}{5}$

28. $(27)^{\frac{2}{3}} = ?$

(a) 6

(b) 9

(c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{9}$

29. $(16)^{\frac{3}{2}} = ?$

(a) 48

(b) 24

(c) 64

(d) 96

30. $(81)^{\frac{3}{4}} = ?$

(a) 36

(b) 27

(c) 18

(d) 12

31. $(81)^{-\frac{1}{4}} = ?$

(a) 3

(b) -3

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

32. $(64)^{-\frac{1}{2}} = ?$

(a) -8

(b) 8

(c) $-\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{8}$

33. $\sqrt[3]{216} = ?$

(a) 4

(b) 6

(c) 3

(d) 16

34. $\sqrt[3]{27} = ?$

(a) घात 3 की करणी (b) $\frac{1}{3}$ घात की करणी (c) 1 घात की करणी (d) एक करणी नहीं है

35. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{9}$ तथा $\sqrt[3]{18}$ में से सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है ?

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt[3]{9}$ (c) $\sqrt[3]{18}$

(d) सभी बराबर हैं

36. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3$ हो, तो $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = ?$
 (a) 9 (b) 7 (c) 11 (d) 13
37. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$ हो, तो $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = ?$
 (a) 64 (b) 14 (c) 8 (d) 2
38. यदि $\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$ हो, तो $\left(4x^2 + \frac{4}{x^2}\right) = ?$
 (a) 7 (b) -7 (c) 9 (d) -9
39. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{3}$ हो, तो $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = ?$
 (a) 0 (b) $3\sqrt{3}$ (c) $3(\sqrt{3}-1)$ (d) $3(\sqrt{3}+1)$
40. यदि $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 102$ हो, तो $\left(x - \frac{1}{x}\right) = ?$
 (a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 13
41. यदि $\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = 322$ हो, तो $\left(x - \frac{1}{x}\right) = ?$
 (a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) $3\sqrt{2}$
42. यदि $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 52$ हो, तो $\left(x + \frac{1}{x}\right) = ?$
 (a) 6 (b) 4 (c) 3 (d) 13
43. यदि $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 14$ हो, तो $\left(x - \frac{1}{x}\right) = ?$
 (a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2
44. यदि $\left(2x - \frac{3}{x}\right) = 5$ हो, तो $\left(4x^2 - \frac{9}{x^2}\right) = ?$
 (a) 25 (b) 30 (c) 35 (d) 49
45. यदि $a + b = 7$ तथा $ab = 12$ हो, तो $(a^2 + b^2) = ?$
 (a) 25 (b) 29 (c) 37 (d) 49
46. यदि $a + b = 7$ तथा $ab = 6$ हो, तो $(a^3 + b^3) = ?$
 (a) 91 (b) 133 (c) 217 (d) 343
47. यदि $a + b = 5$ तथा $ab = 6$ हो, तो $(a^3 - b^3) = ?$
 (a) 19 (b) -19 (c) 63 (d) 63
48. यदि $a + b + c = 0$ हो, तो $(a^3 + b^3 + c^3) = ?$
 (a) 0 (b) abc (c) $3abc$ (d) $(ab + bc + ca)$
49. यदि $a + b + c = 0$ हो, तो $\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) = ?$
 (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3
50. यदि $a + b + c = 9$ तथा $ab + bc + ca = 23$ हो, तो $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = ?$
 (a) 108 (b) 207 (c) 669 (d) 723

51. यदि $(x^2 + 3x - 2a)$ का एक गुणनखण्ड $(x - 2)$ हो, तो $a = ?$
 (a) 2 (b) -2 (c) 1 (d) -1
52. यदि $(x^3 + 6x^2 + 4x + k)$ पूर्णतया $(x + 2)$ से विभाज्य हो, तो $k = ?$
 (a) -6 (b) -7 (c) -8 (d) -10
53. यदि $(x^3 - 5x^2 + 4k)$ पूर्णतया $(x - 2)$ से विभाज्य हो, तो $k = ?$
 (a) -2 (b) 3 (c) 7 (d) -7
54. यदि $(x^{100} + x^{99} + k)$ पूर्णतया $(x + 1)$ से विभक्त हो, तो $k = ?$
 (a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) 0
55. यदि $(x^3 + 3x^2 + 4x + k)$ का एक गुणनखण्ड $(x + 6)$ हो, तो $k = ?$
 (a) 33 (b) 36 (c) 66 (d) 132
56. यदि $(x^3 - k)$ का एक गुणनखण्ड $(x - 1)$ हो, तो $k = ?$
 (a) -1 (b) 1 (c) 2 (d) -2
57. यदि $(x^3 + 10x^2 + mx + n)$ के दो गुणनखण्ड $(x - 1)$ तथा $(x + 2)$ हों, तो
 (a) $m = 5, n = -3$ (b) $m = 7, n = -18$ (c) $m = 17, n = -8$ (d) $m = 23, n = -19$
58. यदि $f(x)$ एक बहुपद ऐसा है कि $f(-2) = 0$, तो $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है :
 (a) $x - 2$ (b) $x + 2$ (c) $2 - x$ (d) इनमें से कोई नहीं
59. $(3x^3 + x^2 - 12x - 4)$ का एक गुणनखण्ड निम्नालिखित में से कौन-सा है ?
 (a) $3x - 1$ (b) $3x + 1$ (c) $3x - 2$ (d) $3x + 2$
60. $(x^3 - 6x + 7)$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?
 (a) 0 (b) 2 (c) 7 (d) 12
61. $(5x^3 + 5x^2 - 6x + 9)$ को $(x + 3)$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?
 (a) 63 (b) -63 (c) 135 (d) -135
62. यदि एक बहुपद $f(x)$ को $(2x + 3)$ से भाग दें, तो शेषफल क्या होगा ?
 (a) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ (b) $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ (c) $f\left(\frac{3}{2}\right)$ (d) $f\left(-\frac{3}{2}\right)$
63. $(x^{11} + 1)$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?
 (a) 0 (b) 2 (c) 11 (d) 12
64. $(2x^3 + 5x^2 - 4x - 6)$ को $(2x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?
 (a) 3 (b) -3 (c) 6 (d) $-\frac{13}{2}$
65. यदि n एक धन पूर्णांक हो, तो $(x^n - a^n)$ पूर्णतया $(x - a)$ से विभक्त होगा :
 (a) n के सभी मानों के लिए (b) केवल n के सम मानों के लिए
 (c) केवल n के विषम मानों के लिए (d) केवल n के अभाज्य मानों के लिए
66. यदि n एक धन पूर्णांक हो, तो $(x^n - a^n)$ पूर्णतया $(x + a)$ से विभक्त होगा
 (a) n के सभी मानों के लिए (b) केवल n के सम मानों के लिए
 (c) केवल n के विषम मानों के लिए (d) केवल n के अभाज्य मानों के लिए
67. यदि n एक धन पूर्णांक हो, तो $(x^n + a^n)$ पूर्णतया $(x + a)$ से विभक्त होगा :
 (a) n के सभी मानों के लिए (b) केवल n के सम मानों के लिए
 (c) केवल n के विषम मानों के लिए (d) केवल n के अभाज्य मानों के लिए
68. यदि n एक धन पूर्णांक हो तो $(x^n + a^n)$ पूर्णतया $(x - a)$ से विभक्त होगा :
 (a) n के सभी मानों के लिए (b) n के सम मानों के लिए
 (c) n के विषम मानों के लिए (d) n के किसी भी मान के लिए नहीं

69. $(x+3)^3$ में x का गुणांक क्या होगा?
 (a) 1 (b) 9 (c) 18 (d) 27
70. यदि $a+b+c=0$ हो $a^3+b^3+c^3=?$
 (a) 0 (b) abc (c) $2abc$ (d) $3abc$
71. बहुपद $p(x) = x^2 - 3x$ की शून्य कौन-सी हैं?
 (a) 0, 0 (b) 0, 3 (c) 0, -3 (d) 3, -3
72. बहुपद $p(x) = 3x^2 - 1$ की शून्य कौन-सी हैं?
 (a) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}$ (b) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$ (d) इनमें से कोई नहीं
73. $107 \times 93 = ?$
 (a) 9021 (b) 9951 (c) 8881 (d) 9631
74. $(370)^2 - (369)^2 = ?$
 (a) 1 (b) 19 (c) 739 (d) इनमें से कोई नहीं
75. $305 \times 308 = ?$
 (a) 94840 (b) 94940 (c) 93840 (d) 93940
76. $x^2 + b - ab - a = ?$
 (a) $(a+1)(a-b)$ (b) $(a-1)(a+b)$ (c) $(a-1)(a-b)$ (d) इनमें से कोई नहीं
77. $a(a+b-c) - bc = ?$
 (a) $(a+c)(a-b)$ (b) $(a-c)(a-b)$ (c) $(a-c)(a+b)$ (d) इनमें से कोई नहीं
78. $a(a-2b-c) + 2bc = ?$
 (a) $(a-c)(a-2b)$ (b) $(a-c)(a+2b)$ (c) $(a+c)(a-2b)$ (d) इनमें से कोई नहीं
79. $2x + 4y - 8xy - 1 = ?$
 (a) $(1+4y)(2x-1)$ (b) $(1-4y)(2x-1)$
 (c) $(1-4y)(2x+1)$ (d) इनमें से कोई नहीं
80. $a(a-1) - b(b-1) = ?$
 (a) $(a+b)(a-b+1)$ (b) $(a-b)(a-b+1)$
 (c) $(a-b)(a+b-1)$ (d) इनमें से कोई नहीं
81. $a-b-a^2+b^2 = ?$
 (a) $(a+b)(a-b-1)$ (b) $(a-b)(1-a-b)$
 (c) $(a-b)(1+a-b)$ (d) इनमें से कोई नहीं
82. $1+2ab-a^2-b^2 = ?$
 (a) $(1+a-b)(1-a+b)$ (b) $(1-a+b)(1-a-b)$
 (c) $(1+a-b)(1-a+b)$ (d) इनमें से कोई नहीं
83. $20x^2 - 45 = ?$
 (a) $(5x-9)(4x-5)$ (b) $5(2x-3)^2$
 (c) $5(x-3)(x+3)$ (d) $5(2x-3)(2x+3)$
84. $x - 64x^3 = ?$
 (a) $x(8x-1)(8x+1)$ (b) $(8x^2-1)(8x^2+1)$
 (c) $x(1-8x)(1+8x)$ (d) इनमें से कोई नहीं
85. $a^2 - b^2 - 4ac + 4c^2 = ?$
 (a) $(a-b-2c)(a-b+2c)$ (b) $(a-2c+b)(a-2c-b)$
 (c) $(a+2c-b)(a+2c+b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

86. $3x^3 - 48x = ?$
 (a) $3x(x^2 + 16)$ (b) $3x(x-4)(x+4)$ (c) $4x(x-3)(x+3)$ (d) इनमें से कोई नहीं
87. $2 - 50x^2 = ?$
 (a) $(\sqrt{2} - 5x)(\sqrt{2} + 5x)$ (b) $2(1 - 5x)^2$
 (c) $2(1 - 5x)(1 + 5x)$ (d) $2(5x - 1)(5x + 1)$
88. $8ab^2 - 18a^3 = ?$
 (a) $2(2ab + 3a)(2ab - 3a)$ (b) $2a(2a + 3b)(2a - 3b)$
 (c) $2a(2b - 3a)(2b + 3a)$ (d) इनमें से कोई नहीं
89. $(a+b)^3 - a - b = ?$
 (a) $(a+b-1)(a+b+1)$ (b) $(a+b)(a+b-1)(a+b+1)$
 (c) $(a-b)(a-b-1)(a-b+1)$ (d) इनमें से कोई नहीं
90. $150 - 6x^2 = ?$
 (a) $6(25 + x^2)$ (b) $6(x+5)(x-5)$ (c) $6(5-x)(5+x)$ (d) इनमें से कोई नहीं
91. $a^2 + b - ab - a = ?$
 (a) $(a+1)(a-b)$ (b) $(a-1)(a+b)$ (c) $(a-1)(a-b)$ (d) इनमें से कोई नहीं
92. $(2x-3)^2 - 8x + 12 = ?$
 (a) $(2x-3)(2x-4)$ (b) $(2x-3)(2x-5)$
 (c) $(2x-3)(2x-6)$ (d) $(2x-3)(2x-7)$
93. $(3a-1)^2 - 6a + 2 = ?$
 (a) $(3a-1)(a-3)$ (b) $3(3a-1)(a-1)$ (c) $3(1-3a)(1+a)$ (d) इनमें से कोई नहीं
94. $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2) = ?$
 (a) $(bx + ay)(ax - by)$ (b) $(bx - ay)(ax + by)$
 (c) $(bx - ay)(ax - by)$ (d) इनमें से कोई नहीं
95. $x^2 - (a+b)x + ab = ?$
 (a) $(x-a)(x-b)$ (b) $(x-a)(x+b)$ (c) $(x+a)(x-b)$ (d) इनमें से कोई नहीं
96. $(ax+by)^2 + (bx-ay)^2 = ?$
 (a) $(a^2 + b^2)(x^2 - y^2)$ (b) $(a^2 - b^2)(x^2 + y^2)$
 (c) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (d) इनमें से कोई नहीं
97. $(x^2 + 5x - 24) = ?$
 (a) $(x-8)(x-3)$ (b) $(x-8)(x+3)$ (c) $(x+8)(x-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं
98. $(x^2 - 4x - 21) = ?$
 (a) $(x-7)(x+3)$ (b) $(x+7)(x-3)$ (c) $(x-7)(x-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं
99. $6x^2 + 7x - 3 = ?$
 (a) $(2x-3)(3x+1)$ (b) $(2x+3)(3x-1)$
 (c) $(3x-1)(2x-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं
100. $2x^2 - x - 21 = ?$
 (a) $(2x-7)(x+3)$ (b) $(2x+7)(x-3)$
 (c) $(2x-7)(x-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं
101. $6 - x - x^2 = ?$
 (a) $(2+x)(3-x)$ (b) $(2-x)(3+x)$ (c) $(x-2)(3-x)$ (d) इनमें से कोई नहीं
102. $2x^2 - x - 21 = ?$
 (a) $(2x+7)(x-3)$ (b) $(2x-7)(x+3)$
 (c) $(2x-3)(x+7)$ (d) $(2x+3)(x-7)$

$$103. 2x^2 + 3\sqrt{3}x + 3 = ?$$

$$(a) (x + \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$$

$$(c) (\sqrt{3}x + 1)(2\sqrt{3}x + 3)$$

$$104. \sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = ?$$

$$(a) (x + \sqrt{2})(x + \sqrt{3})$$

$$(c) (x + \sqrt{2})(\sqrt{2}x + 1)$$

$$105. 3x^3 - x^2 - 10x = ?$$

$$(a) (x^2 - 2)(3x + 5)$$

$$(c) x(x - 2)(3x + 5)$$

$$106. 8a^2 - 27ab + 9b^2 = ?$$

$$(a) (a - 3b)(8a - 3b)$$

$$(c) (a + 3b)(3b - 8a)$$

$$107. 16a^4 + 54a = ?$$

$$(a) (2a + 3)(4a^3 - 6a + 9)$$

$$(c) 2a(2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$$

$$108. (1 - 27x^3) = ?$$

$$(a) (1 - 3x)(1 + 9x^2 - 3x)$$

$$(c) (1 + 3x)(1 - 3x + 9x^2)$$

$$109. (7a^3 + 56b^3) = ?$$

$$(a) 7(a + 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

$$(c) (7a + 8b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$$

$$110. a^3 - 0.064 = ?$$

$$(a) (a - 0.4)(a^2 + 0.4a + 1.6)$$

$$(c) (a - 0.4)(a^2 + 0.4a + 0.16)$$

$$111. a - 8ab^3 = ?$$

$$(a) a(1 - 2b)(1 - 2b + 4b^2)$$

$$(c) (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

$$112. 64x^3 - 343 = ?$$

$$(a) (4x - 7)(16x^2 + 28x + 49)$$

$$(c) (4x - 7)(16x^2 - 28x - 49)$$

$$113. 32x^4 - 500x = ?$$

$$(a) x(8x - 25)(4x^2 + 10x + 20)$$

$$(c) 4x(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$$

$$114. a^3 + a - 3a^2 - 3 = ?$$

$$(a) (a - 3)(a^2 + 1)$$

$$(c) (3 - a)(1 + a^2)$$

$$115. (x^4 + 4) = ?$$

$$(a) (x^2 + 2)^2$$

$$(c) (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

$$116. (a + b)^3 - (a - b)^3 = ?$$

$$(a) 2b(3a^2 + b^2) \quad (b) 2b(3b^2 + a^2)$$

$$(b) (\sqrt{3}x + 1)(2x + 1)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) (x + \sqrt{2})(2x + 1)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) (x^2 + 2)(3x - 5)$$

$$(d) x(x + 2)(3x - 5)$$

$$(b) (3b - a)(8a + 3b)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) (2a^2 + 3)(4a^2 - 6a + 9)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) 7(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) (a - 0.04)(a^2 + 0.04a - 0.0016)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) a(1 - 2b)(1 + 2b + 4b^2)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) (4x - 7)(16x^2 - 28x + 49)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) 4x(2x - 5)(4x^2 - 10x + 25)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) (a^2 + 3)(a - 1)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(b) (x^2 + 2)(x^2 - 2)$$

$$(d) \text{ इनमें से कोई नहीं }$$

$$(c) 2a(3a^2 + b^2)$$

$$(d) 2a(a^2 + 3b^2)$$

117. $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = ?$

- (a) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (b) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$
 (c) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (d) $3(a-b)(b-c)(c-a)$

118. $(x^4 + x^2 + 25) = ?$

- (a) $(x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x - 5)$ (b) $(x^2 + 5 - 3x)(x^2 + 5 + 3x)$
 (c) $(x^2 - 5 - 3x)(x^2 - 5 + 3x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

119. $(x^2 - 1 - 2a - a^2) = ?$

- (a) $(x-a+1)(x-a-1)$ (b) $(x+a-1)(x-a+1)$
 (c) $(x+a+1)(x-a-1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तरमाला (प्रश्नमाला 31)

- | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1. (c) | 2. (d) | 3. (d) | 4. (d) | 5. (c) | 6. (b) | 7. (d) | 8. (c) | 9. (c) | 10. (b) |
| 11. (c) | 12. (d) | 13. (a) | 14. (b) | 15. (b) | 16. (c) | 17. (d) | 18. (b) | 19. (d) | 20. (c) |
| 21. (a) | 22. (c) | 23. (d) | 24. (a) | 25. (b) | 26. (c) | 27. (d) | 28. (b) | 29. (c) | 30. (b) |
| 31. (c) | 32. (d) | 33. (b) | 34. (d) | 35. (a) | 36. (b) | 37. (d) | 38. (c) | 39. (a) | 40. (b) |
| 41. (a) | 42. (b) | 43. (d) | 44. (c) | 45. (a) | 46. (c) | 47. (a) | 48. (c) | 49. (d) | 50. (a) |
| 51. (d) | 52. (c) | 53. (c) | 54. (d) | 55. (d) | 56. (b) | 57. (b) | 58. (b) | 59. (b) | 60. (d) |
| 61. (b) | 62. (d) | 63. (a) | 64. (b) | 65. (a) | 66. (b) | 67. (c) | 68. (d) | 69. (d) | 70. (d) |
| 71. (b) | 72. (c) | 73. (b) | 74. (c) | 75. (d) | 76. (c) | 77. (c) | 78. (a) | 79. (b) | 80. (c) |
| 81. (b) | 82. (c) | 83. (d) | 84. (c) | 85. (b) | 86. (b) | 87. (c) | 88. (c) | 89. (b) | 90. (c) |
| 91. (c) | 92. (d) | 93. (b) | 94. (c) | 95. (a) | 96. (c) | 97. (c) | 98. (a) | 99. (b) | 100. (a) |
| 101. (b) | 102. (b) | 103. (a) | 104. (c) | 105. (c) | 106. (a) | 107. (c) | 108. (b) | 109. (b) | 110. (c) |
| 111. (b) | 112. (a) | 113. (c) | 114. (a) | 115. (c) | 116. (a) | 117. (d) | 118. (b) | 119. (c) | |

दिये गये प्रश्नों के हल

प्रश्नमाला 31

- स्पष्ट है कि $(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x + 6)$ एक बहुपद है.
- स्पष्ट है कि $2x$ एक बहुपद है.
- स्पष्ट है कि -5 एक अचर बहुपद है.
- स्पष्ट है कि 0 शून्य बहुपद है.
- स्पष्ट है कि $x + 8$ एक रेखिक बहुपद है.
- इनमें से $(x^3 + 2)$ एक द्विपदी व्यंजक है.
- स्पष्ट है कि $\sqrt{2}$ एक अचर बहुपद है जिसकी घात शून्य है.
- शून्य-बहुपद की घात परिभाषित नहीं है.
- $P(x) = x^{1/3} + 3$ एक व्यंजक है जो बहुपदी नहीं है.
- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414}{2} = 0.707.$
- $\frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.732}{3} = 0.577.$
- $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})} \times \frac{(3+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})} = \frac{(3+\sqrt{2})^2}{(9-2)} = \frac{9+2+6\sqrt{2}}{7}$
 $= \frac{11}{7} + \frac{6\sqrt{2}}{7} \Rightarrow a = \frac{11}{7}$ तथा $b = \frac{6}{7}.$

$$13. \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)} \times \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(2-1)} = (2+1-2\sqrt{2}) = (3-2\sqrt{2}).$$

$$\therefore a=3, b=2.$$

$$14. \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)} \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(3-1)} = \frac{(3+1-2\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{(4-2\sqrt{3})}{2} = (2-\sqrt{3}).$$

$$\therefore (a+b\sqrt{3}) = (2-\sqrt{3}) \Rightarrow a=2, b=-1.$$

$$15. \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \times \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(5-3)} = \frac{5+3+2\sqrt{15}}{2} = \frac{(8+2\sqrt{15})}{2} = (4+\sqrt{15}).$$

$$\therefore (a+b\sqrt{15}) = (4+\sqrt{15}) \Rightarrow a=4, b=1.$$

$$16. \frac{(5+2\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})} = \frac{(5+2\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})} \times \frac{(7-4\sqrt{3})}{(7-4\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(5+2\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{(49-48)} = (35-24+14\sqrt{3}-20\sqrt{3}) = (11-6\sqrt{3})$$

$$(a+b\sqrt{3}) = (11-6\sqrt{3}) \Rightarrow a=11, b=-6.$$

$$17. \frac{(4+2\sqrt{5})}{(4-3\sqrt{5})} = \frac{(4+2\sqrt{5})}{(4-3\sqrt{5})} \times \frac{(4+3\sqrt{5})}{(4+3\sqrt{5})} = \frac{(4+2\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})}{(16-45)}$$

$$= \frac{(16+30+12\sqrt{5}+8\sqrt{5})}{-29} = \frac{(46+20\sqrt{5})}{-29} = -\frac{46}{29} - \frac{20}{29}\sqrt{5}$$

$$\therefore (a+b\sqrt{5}) = -\frac{46}{29} - \frac{20}{29}\sqrt{5} \Rightarrow a = -\frac{46}{29}, b = -\frac{20}{29}.$$

$$18. \frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \times \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(3-2)}$$

$$= 3\sqrt{6} - 6 - 6 + 2\sqrt{6} = (5\sqrt{6} - 12).$$

$$\therefore (a+b\sqrt{6}) = (-12+5\sqrt{6}) \Rightarrow a=-12, b=5.$$

$$19. \frac{(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} = \frac{(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} \times \frac{(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})} = \frac{(3-\sqrt{5})^2}{(9-5)}$$

$$= \frac{(9+5-6\sqrt{5})}{4} = \frac{(14-6\sqrt{5})}{4} = \frac{(7-3\sqrt{5})}{2}$$

$$= \frac{(7-3 \times 2.236)}{2} = \frac{(7-6.708)}{2} = \frac{0.292}{2} = 0.146.$$

$$20. \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(5-3)}$$

$$= \frac{2(5+3)}{2} = 8$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 8^3 = 512$$

$$\Rightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 512$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times 1 \times 8 = 512 \Rightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = (512 - 24) = 488.$$

$$21. \frac{1}{x} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})} \times \frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})} = \frac{(2-\sqrt{3})}{(4-3)} = (2-\sqrt{3}).$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right) = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 64 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 64$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times 4 = 64 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 52.$$

$$\begin{aligned} 22. \text{ दिया गया व्यंजक} &= \frac{(7+3\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} \times \frac{(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})} + \frac{(7-3\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})} \times \frac{(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} \\ &= \frac{(7+3\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(9-5)} + \frac{(7-3\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(9-5)} \\ &= \frac{(21-7\sqrt{5}+9\sqrt{5}-15)}{4} + \frac{(21+7\sqrt{5}-9\sqrt{5}-15)}{4} \\ &= \frac{(6+2\sqrt{5})}{4} + \frac{(6-2\sqrt{5})}{4} = \frac{(6+2\sqrt{5}) + (6-2\sqrt{5})}{4} = \frac{12}{4} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \text{ दिया गया व्यंजक} &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \times \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \times \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(3-2)} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(3-2)} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \\ &= 2(3+2) = (2 \times 5) = 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \sqrt{50} \times \sqrt{72} &= \sqrt{25 \times 2} \times \sqrt{36 \times 2} \\ &= 5\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = (30 \times 2) = 60. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. \sqrt{20} \times \sqrt{45} &= \sqrt{4 \times 5} \times \sqrt{9 \times 5} \\ &= 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = (2 \times 3 \times 5) = 30. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \sqrt{20} + \sqrt{80} + \sqrt{45} - \sqrt{180} \\ &= \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{16 \times 5} + \sqrt{9 \times 5} - \sqrt{36 \times 5} \\ &= 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$27. (125)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(125)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(5^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{5^{(3 \times \frac{1}{3})}} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}.$$

$$28. (27)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{(3 \times \frac{2}{3})} = 3^2 = 9.$$

$$9. (16)^{\frac{3}{2}} = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^{\left(2 \times \frac{3}{2}\right)} = 4^3 = 64.$$

$$10. (81)^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{\left(4 \times \frac{3}{4}\right)} = 3^3 = 27.$$

$$11. (81)^{-\frac{1}{4}} = (3^4)^{-\frac{1}{4}} = 3^{4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

$$12. (64)^{-\frac{1}{2}} = (8^2)^{-\frac{1}{2}} = 8^{\left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right)} = 8^{-1} = \frac{1}{8}.$$

$$13. \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6} = 6.$$

$$14. \sqrt[3]{27} = 3 \text{ जो एक परिमेय संख्या है.}$$

$$\text{अतः } \sqrt[3]{27} \text{ एक करणी नहीं है.}$$

$$15. 2, 3, 6 \text{ का ल.सं.} = 6.$$

प्रत्येक करणी को घात 6 की करणी में बदलने पर :

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = (27)^{\frac{1}{6}};$$

$$\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = (9)^{\frac{1}{6}};$$

$$\text{तीसरी संख्या} = (18)^{\frac{1}{6}}.$$

स्पष्ट है कि इन सब में से $(27)^{\frac{1}{6}}$ अर्थात् $\sqrt{3}$ सबसे बड़ी संख्या है.

$$16. \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (9 - 2) = 7.$$

$$17. \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 8$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times 2 = 8 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 2.$$

$$18. \left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(4x^2 + \frac{4}{x^2}\right) = 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(4 \times \frac{9}{4}\right) = 9.$$

$$19. \left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

$$20. \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 102 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 100 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (10)^2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right) = 10.$$

$$41. \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = 322 \Rightarrow \left(x^4 + \frac{1}{x^4} + 2\right) = 324$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (18)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 16 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right) = 4.$$

$$42. \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 52 \Rightarrow y^3 - 3y = 52, \text{ जहाँ } \left(x + \frac{1}{x}\right) = y$$

$$\Rightarrow y^3 - 3y - 52 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4.$$

$$43. \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 14 \Rightarrow y^3 + 3y - 14 = 0, \text{ जहाँ } \left(x - \frac{1}{x}\right) = y$$

$$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

$$44. \left(2x - \frac{3}{x}\right) = 5 \Rightarrow \left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow 4x^2 + \frac{9}{x^2} - 2 \times 2x \times \frac{3}{x} = 25$$

$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{9}{x^2} - 12 = 25 \Rightarrow 4x^2 + \frac{9}{x^2} = 37$$

$$\Rightarrow (2x)^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 + 2 \times 2x \times \frac{3}{x} = 37 + 12 = 49$$

$$\Rightarrow \left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 = 7^2 \Rightarrow \left(2x + \frac{3}{x}\right) = 7$$

$$\Rightarrow \left(4x^2 - \frac{9}{x^2}\right) = \left(2x + \frac{3}{x}\right)\left(2x - \frac{3}{x}\right) = (7 \times 5) = 35.$$

$$45. (a^2 + b^2) = (a+b)^2 - 2ab = (7)^2 - 2 \times 12 = (49 - 24) = 25.$$

$$46. (a^3 + b^3) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= (7)^3 - 3 \times 6 \times 7 = (343 - 126) = 217.$$

$$47. (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = (5)^2 - 4 \times 6 = (25 - 24) = 1 \Rightarrow (a-b) = 1.$$

$$\therefore (a^3 - b^3) = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = 1^3 + 3 \times 6 \times 1 = 19.$$

$$48. (a+b+c) = 0 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

$$49. (a+b+c) = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{abc} + \frac{b^3}{abc} + \frac{c^3}{abc} = 3 \Rightarrow \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = 3.$$

$$\begin{aligned} 40. (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= (a+b+c) \cdot [(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)] \\ &= 9 \times [(9)^2 - 3 \times 23] = 9 \times [81 - 69] = (9 \times 12) = 108. \end{aligned}$$

$$41. \text{ माना } f(x) = x^2 + 3ax - 2a. \text{ तब, } f(2) = 0.$$

$$\therefore 2^2 + 3a \times 2 - 2a = 0 \Rightarrow 4 + 6a - 2a = 0 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1.$$

$$42. \text{ माना } f(x) = x^3 + 6x^2 + 4x + k. \text{ तब, } f(-2) = 0.$$

$$\therefore (-2)^3 + 6 \times (-2)^2 + 4 \times (-2) + k = 0 \Rightarrow -8 + 24 - 8 + k = 0 \Rightarrow k = -8.$$

$$43. \text{ माना } f(x) = x^3 - 5x^2 + 4k. \text{ तब, } f(-2) = 0.$$

$$\therefore (-2)^3 - 5 \times (-2)^2 + 4k = 0 \Rightarrow -8 - 20 + 4k = 0 \Rightarrow 4k = 28 \Rightarrow k = 7.$$

$$44. \text{ माना } f(x) = x^{100} + x^{99} + k. \text{ तब, } f(-1) = 0.$$

$$\therefore (-1)^{100} + (-1)^{99} + k = 0 \Rightarrow 1 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

$$45. \text{ माना } f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + k. \text{ तब, } f(-6) = 0.$$

$$\therefore (-6)^3 + 3 \times (-6)^2 + 4 \times (-6) + k = 0$$

$$\Rightarrow -216 + 108 - 24 + k = 0 \Rightarrow k = 132.$$

$$46. \text{ माना } f(x) = (x^3 - k). \text{ तब, } f(1) = 0.$$

$$\therefore 1^3 - k = 0 \Rightarrow k = 1.$$

$$47. \text{ माना } f(x) = x^3 + 10x^2 + mx + n. \text{ तब, } f(1) = 0 \text{ तथा } f(-2) = 0.$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + 10 \times 1^2 + m \times 1 + n = 0 \Rightarrow m + n = -11.$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 10 \times (-2)^2 + m \times (-2) + n = 0 \Rightarrow 2m - n = 32.$$

$$\text{इन्हें हल करने पर : } m = 7 \text{ तथा } n = -18.$$

$$48. \text{ चूँकि } f(-2) = 0 \text{ है, अतः } f(x) \text{ का एक गुणनखण्ड } (x + 2) \text{ है.}$$

$$49. \text{ माना } f(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4.$$

$$\text{तब, } f\left(\frac{-1}{3}\right) = 3 \times \frac{(-1)}{27} + \frac{1}{9} - 12 \times \frac{(-1)}{3} - 4 = 0.$$

$$\text{अतः } f(x) \text{ का एक गुणनखण्ड } (3x + 1) \text{ है.}$$

$$50. \text{ माना } f(x) = x^3 - 6x + 7.$$

$$\text{तब, } f(-1) = (-1)^3 - 6 \times (-1) + 7 = (-1 + 6 + 7) = 12.$$

$$\text{अतः } (x^3 - 6x + 7) \text{ को } (x + 1) \text{ से भाग देने पर शेषफल } = 12.$$

$$51. \text{ माना } f(x) = 5x^3 + 5x^2 - 6x + 9.$$

$$f(x) \text{ को } (x + 3) \text{ से भाग देने पर शेषफल } = f(-3).$$

$$\therefore \text{ शेषफल } = f(-3)$$

$$= 5 \times (-3)^3 + 5 \times (-3)^2 - 6 \times (-3) + 9$$

$$= 5 \times (-27) + 45 + 18 + 9 = -135 + 72 = -63.$$

$$52. 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}.$$

$$\therefore f(x) \text{ को } (2x + 3) \text{ से भाग देने पर शेषफल } = f\left(\frac{-3}{2}\right).$$

$$53. x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

$$f(x) = (x^{11} + 1) \text{ को } (x + 1) \text{ से भाग देने पर :}$$

$$\text{शेषफल } = f(-1) = (-1)^{11} + 1 = (-1 + 1) = 0.$$

$$64. 2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 6$ को $(2x+1)$ से भाग देने पर :

$$\text{शेषफल} = f\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 5 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{-1}{2}\right) - 6 \\ &= 2 \times \frac{(-1)}{8} + 5 \times \frac{1}{4} + 2 - 6 = \frac{-1}{4} + \frac{5}{4} + 2 - 6 \\ &= (1 + 2 - 6) = -3. \end{aligned}$$

65. सभी पूर्णाकों n के लिए $(x^n - a^n)$ सदैव $(x - a)$ से पूर्णतया विभक्त होता है.

66. यदि n एक समसंख्या है, तो $(x^n - a^n)$ सदैव $(x + a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा.

67. यदि n एक विषम संख्या है, तो $(x^n + a^n)$ सदैव $(x + a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा.

68. $(x^n + a^n)$ कभी भी $(x - a)$ से विभक्त नहीं होगा.

$$69. (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

$$\therefore (x+3)^3 = x^3 + 27 + 9x(x+3) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$$

अतः x का गुणांक = 27.

$$70. a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc.$$

$$71. p(x)=0 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \text{ अथवा } x=3.$$

$$72. p(x)=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ अथवा } \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

$$73. 107 \times 93 = (100+7)(100-7) \\ = (100)^2 - 7^2 = (10000 - 49) = 9951.$$

$$74. (370)^2 - (369)^2 = (370+369) \times (370-369) = (739 \times 1) = 739.$$

$$75. (305 \times 308) = (300+5) \times 308 \\ = (300 \times 308) + 5 \times 308 = 92400 + 1540 = 93940.$$

$$76. a^2 + b - ab - a = (a^2 - ab) - a + b \\ = a(a-b) - (a-b) = (a-b)(a-1).$$

$$77. a(a+b-c) - bc = a^2 + ab - ac - bc \\ = a(a+b) - c(a+b) = (a+b)(a-c).$$

$$78. a(a-2b-c) + 2bc = a^2 - 2ab - ac + 2bc \\ = a(a-c) - 2b(a-c) = (a-c)(a-2b).$$

$$79. 2x(1-4y) - (1-4y) = (1-4y)(2x-1).$$

$$80. a(a-1) - b(b-1) = a^2 - a - b^2 + b = (a^2 - b^2) - (a-b) = (a-b)(a+b-1).$$

$$81. a-b-a^2+b^2 = (a-b) - (a^2-b^2) = (a-b)[1-(a+b)] = (a-b)(1-a-b).$$

$$82. 1+2ab-a^2-b^2 = 1-(a^2+b^2-2ab) = 1-(a-b)^2 \\ = (1+a-b)(1-a+b).$$

$$83. 20x^2 - 45 = 5(4x^2 - 9) = 5(2x-3)(2x+3).$$

$$84. x - 64x^3 = x(1-64x^2) = x(1-8x)(1+8x).$$

$$85. a^2 - b^2 - 4ac + 4c^2 = (a^2 + 4c^2 - 4ac) - b^2 = (a-2c)^2 - b^2 \\ = (a-2c+b)(a-2c-b).$$

96. $3x^3 - 48x = 3x(x^2 - 16) = 3x(x-4)(x+4).$
97. $2 - 50x^2 = 2(1 - 25x^2) = 2(1-5x)(1+5x).$
98. $8ab^2 - 18a^3 = 2a(4b^2 - 9a^2) = 2a(2b-3a)(2b+3a).$
99. $(a+b)^3 - a - b = (a+b)^3 - (a+b) = (a+b)[(a+b)^2 - 1]$
 $= (a+b)(a+b-1)(a+b+1).$
100. $(150 - 6x^2) = 6(25 - x^2) = 6(5-x)(5+x).$
101. $a^2 + b - ab - a = a^2 - ab - a + b = a(a-b) - (a-b) = (a-b)(a-1).$
102. $(2x-3)^2 - 8x + 12 = (2x-3)^2 - 4(2x-3) = (2x-3)(2x-3-4) = (2x-3)(2x-7).$
103. $(3a-1)^2 - 6a + 2 = (3a-1)^2 - 2(3a-1) = (3a-1)[(3a-1)-2]$
 $= (3a-1)(3a-3) = 3(3a-1)(a-1).$
104. $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)$
 $= abx^2 + aby^2 - a^2xy - b^2xy = (abx^2 - a^2xy) + (aby^2 - b^2xy)$
 $= ax(bx - ay) + by(ay - bx) = ax(bx - ay) - by(bx - ay)$
 $= (bx - ay)(ax - by).$
105. $x^2 - (a+b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab$
 $= x(x-a) - b(x-a) = (x-a)(x-b).$
106. $(ax+by)^2 + (bx-ay)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy$
 $= (a^2x^2 + a^2y^2) + (b^2x^2 + b^2y^2) = a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2)$
 $= (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$
107. $x^2 + 5x - 24 = x^2 + 8x - 3x - 24$
 $= x(x+8) - 3(x+8) = (x+8)(x-3).$
108. $x^2 - 4x - 21 = x^2 - 7x + 3x - 21$
 $= x(x-7) + 3(x-7) = (x-7)(x+3).$
109. $6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 + 9x - 2x - 3$
 $= 3x(2x+3) - (2x+3) = (2x+3)(3x-1).$
110. $2x^2 - x - 21 = 2x^2 - 7x + 6x - 21$
 $= x(2x-7) + 3(2x-7) = (2x-7)(x+3).$
111. $6 - x - x^2 = -x^2 - x + 6 = -x^2 - 3x + 2x + 6$
 $= -x(x+3) + 2(x+3) = (x+3)(2-x).$
112. $2x^2 - x - 21 = 2x^2 - 7x + 6x - 21$
 $= x(2x-7) + 3(2x-7) = (2x-7)(x+3).$
113. $2x^2 + 3\sqrt{3}x + 3 = 2x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x + 3$
 $= 2x(x+\sqrt{3}) + \sqrt{3}(x+\sqrt{3}) = (x+\sqrt{3})(2x+\sqrt{3}).$
114. $\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = \sqrt{2}x^2 + 2x + x + \sqrt{2}$
 $= \sqrt{2}x(x+\sqrt{2}) + (x+\sqrt{2}) = (x+\sqrt{2})(\sqrt{2}x+1).$
115. $3x^3 - x^2 - 10x = x(3x^2 - x - 10)$
 $= x(3x^2 - 6x + 5x - 10) = x[3x(x-2) + 5(x-2)]$
 $= x(x-2)(3x+5).$
116. $8a^2 - 27ab + 9b^2 = 8a^2 - 24ab - 3ab + 9b^2$
 $= 8a(a-3b) - 3b(a-3b) = (a-3b)(8a-3b).$

$$107. 16a^4 + 54a = 2a(8a^3 + 27) = 2a \times [(2a)^3 + 3^3] \\ = 2a(2a+3)(4a^2 - 6a + 9).$$

$$108. (1 - 27x^3) = [1^3 - (3x)^3] \\ = (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2).$$

$$109. (7a^3 + 56b^3) = 7(a^3 + 8b^3) = 7[a^3 + (2b)^3] \\ = 7(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2).$$

$$110. (a^3 - 0.064) = a^3 - (0.4)^3 \\ = (a - 0.4)(a^2 + 0.4a + 0.16)$$

$$111. a - 8ab^3 = a(1 - 8b^3) = a[1^3 - (2b)^3] \\ = a(1 - 2b)(1 + 2b + 4b^2).$$

$$112. 64x^3 - 343 = (4x)^3 - (7)^3 \\ = (4x - 7)(16x^2 + 28x + 49).$$

$$113. 32x^4 - 500x = 4x(8x^3 - 125) = 4x \times [(2x)^3 - 5^3] \\ = 4x(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25).$$

$$114. a^3 + a - 3a^2 - 3 = (a^3 - 3a^2 + a - 3) \\ = (a^3 - 3a^2) + (a - 3) = a^2(a - 3) + (a - 3) = (a - 3)(a^2 + 1).$$

$$115. (x^4 + 4) = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x).$$

$$116. \text{माना } (a+b) = x \text{ तथा } (a-b) = y. \text{ तब} \\ (a+b)^3 - (a-b)^3 = (x^3 - y^3) \\ = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ = [(a+b) - (a-b)][(a+b)^2 + (a-b)^2 + (a+b)(a-b)] \\ = 2b[2a^2 + 2b^2 + a^2 - b^2] = 2b(3a^2 + b^2).$$

$$117. \text{माना } a-b = x, b-c = y \text{ तथा } c-a = z. \text{ तब} \\ x+y+z=0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \\ \Rightarrow (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

$$118. x^4 + x^2 + 25 = (x^2)^2 + 5^2 + 10x^2 - 9x^2 \\ = (x^2 + 5)^2 - (3x)^2 = (x^2 + 5 - 3x)(x^2 + 5 + 3x).$$

$$119. (x^2 - 1 - 2a - a^2) = x^2 - (1 + 2a + a^2) = x^2 - (a+1)^2 \\ = (x - a - 1)(x + a + 1).$$