

# द्विघात समीकरण

## (QUADRATIC EQUATIONS)

### आवश्यक तथ्य एवं सूत्र

1. ऐसा समीकरण जिसका प्रारूप  $ax^2 + bx + c = 0$  जैसा हो, जहाँ  $a, b, c$  वास्तविक संख्यायें हैं तथा  $a \neq 0$  एक द्विघात समीकरण कहलाता है। इसमें  $D = (b^2 - 4ac)$  इस समीकरण का विविक्तकर (Discriminant) कहलाता है।

2. समीकरण  $ax^2 + bx + c = 0$  के मूल यदि  $\alpha$  तथा  $\beta$  हों, तो

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{तथा} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति:

माना  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  दिया गया द्विघात समीकरण है तथा माना  $D = (b^2 - 4ac)$ . तब

D का मान	मूलों की प्रकृति	मूल
(i) $D > 0$ तथा एक पूर्ण वर्ग है।	परिमेय तथा असमान	$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
(ii) $D > 0$ तथा एक पूर्ण वर्ग नहीं है।	अपरिमेय तथा असमान	$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
(iii) $D = 0$	परिमेय तथा समान	प्रत्येक $= \frac{-b}{2a}$
(iv) $D < 0$	कोई वास्तविक मूल नहीं	

4. माना  $ax^2 + bx + c = 0$  के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हैं, तब

$$(i) \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad (ii) \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

5. ऐसा समीकरण जिसके मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हैं, होगा  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ .

### साधित उदाहरण

प्रश्न 1. हल कीजिए :  $3x^2 + 2x = 0$ .

$$\text{हल : } 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(3x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ अथवा } 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ अथवा } x = \frac{-2}{3}$$

प्रश्न 2. हल कीजिए :  $(2x - 3)(3x + 5) = 0$ .

$$\text{हल : } (2x - 3)(3x + 5) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \text{ अथवा } 3x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ अथवा } x = \frac{-5}{3}$$

प्रश्न 3. हल कीजिए :  $2x^2 - 9x + 10 = 0$ .

$$\begin{aligned}\text{हल : } 2x^2 - 9x + 10 = 0 &\Rightarrow 2x^2 - 5x - 4x + 10 = 0 \\ &\Rightarrow x(2x - 5) - 2(2x - 5) = 0 \\ &\Rightarrow (2x - 5)(x - 2) = 0 \\ &\Rightarrow 2x - 5 = 0 \text{ अथवा } x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ अथवा } x = 2.\end{aligned}$$

प्रश्न 4. हल करें :  $15x^2 - x - 28 = 0$ .

हल : यहाँ  $a = 15$ ,  $b = -1$  तथा  $c = -28$ .

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = (-1)^2 - 4 \times 15 \times (-28) = (1 + 1680) = 1681.$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1681} = 41.$$

$$\therefore \alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(1 + 41)}{(2 \times 15)} = \frac{42}{30} = \frac{7}{5}.$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(1 - 41)}{(2 \times 15)} = \frac{-40}{30} = \frac{-4}{3}.$$

अतः अभीष्ट मूल हैं:  $\frac{7}{5}$  तथा  $\frac{-4}{3}$ .

प्रश्न 5. ऐसा समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल  $\frac{1}{2}$  तथा  $\frac{1}{3}$  हैं:

हल : माना  $\alpha = \frac{1}{2}$  तथा  $\beta = \frac{1}{3}$ . तब,

$$(\alpha + \beta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6} \text{ तथा } \alpha\beta = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

$\therefore$  अभीष्ट समीकरण है :

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \text{ अर्थात् } x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0 \text{ अर्थात् } 6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

प्रश्न 6. यदि समीकरण  $x^2 - px + q = 0$  के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हों, तो

(i)  $(\alpha^2 + \beta^2)$  का मान ज्ञात कीजिए

(ii)  $(\alpha^3 + \beta^3)$  का मान ज्ञात कीजिए

हल : स्पष्ट है कि  $(\alpha + \beta) = p$  तथा  $\alpha\beta = q$ . तब,

$$(i) (\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (p^2 - 2q).$$

$$(ii) (\alpha^3 + \beta^3) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = (p^3 - 3pq).$$

प्रश्न 7. यदि समीकरण  $9x^2 - kx + 81$  के मूल बराबर हों, तो  $k = ?$

(a)  $\pm 9$

(b)  $\pm 27$

(c)  $\pm 18$

(d)  $\pm 54$

हल :  $9x^2 - kx + 81$  को  $ax^2 + bx + c$  से तुलना करने पर

$$a = 9, b = -k \text{ तथा } c = 81.$$

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = [(-k)^2 - 4 \times 9 \times 81] = (k^2 - 2916).$$

मूल बराबर हैं, अतः  $D = 0$ .

$$\text{अब } D = 0 \Rightarrow k^2 - 2916 = 0 \Rightarrow k^2 = (2916)$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{2916} \Rightarrow k = \pm 54.$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 1681 \quad (41) \\ & 16 \\ \hline 81 & 81 \\ & 81 \\ \hline & x \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2916 \quad (54) \\ & 25 \\ \hline 104 & 416 \\ & 416 \\ \hline & x \end{array}$$

1. निम्नलिखित में से कौन-सा समीकरण एक द्विघात समीकरण है?

(a)  $x - \frac{3}{x} = x^2$

(b)  $x^2 + \frac{3}{x^2} = 1$

(c)  $2x^2 + \sqrt{3}x + 5 = 0$

(d)  $x^2 - 1 = 2x^2 + 4$

2. निम्नलिखित में से कौन-सा समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है?

(a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

(b)  $4x^2 + 8 = 0$

(c)  $x^2 + x + 6 = 0$

(d)  $x^3 - x - 4 = 0$

3. निम्नलिखित में से किस समीकरण के वास्तविक मूल होंगे?

(a)  $x^2 + x + 6 = 0$

(b)  $2x^2 - 3x + 4 = 0$

(c)  $3x^2 + 4x + 5 = 0$

(d)  $2x^2 - 7x + 5 = 0$

4. द्विघात समीकरण  $x^2 + x + 1 = 0$  का विविक्तकर कितना है?

(a) -2

(b) -3

(c) -1

(d) 3

5. द्विघात समीकरण  $2x^2 - 3x - 12 = 0$  का विविक्तकर कितना है?

(a) 87

(b) -87

(c) 105

(d) -33

6. समीकरण  $x^2 - 9x + 18 = 0$  के मूल हैं:

(a) 3, 6

(b) -3, 6

(c) 3, -6

(d) -3, -6

7. समीकरण  $2x^2 - 11x + 15 = 0$  के मूल हैं:

(a)  $3, \frac{5}{2}$

(b)  $5, \frac{3}{2}$

(c)  $-3, \frac{-5}{2}$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. समीकरण  $x^2 - 4\sqrt{3}x + 9 = 0$  के मूल हैं :

(a)  $2\sqrt{3}, \sqrt{3}$

(b)  $3\sqrt{3}, \sqrt{3}$

(c)  $2\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

(d)  $3\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

9. समीकरण  $ax^2 + x + b = 0$  के मूल समान होंगे, यदि

(a)  $b^2 = 4a$

(b)  $b^2 < 4a$

(c)  $b^2 > 4a$

(d)  $ab = \frac{1}{4}$

10. समीकरण  $3 - 7x + 6x^2 = 0$  के मूलों का गुणनफल होगा :

(a) -2

(b)  $\frac{1}{2}$

(c) 2

(d)  $-\frac{1}{2}$

11. यदि समीकरण  $2x^2 - 8x + k = 0$  के मूल बराबर हों, तो  $k = ?$

(a) 2

(b) 4

(c) 6

(d) 8

12.  $p$  के किस मान के लिए समीकरण  $px^2 - 2\sqrt{5}x + 4 = 0$  के मूल वास्तविक तथा बराबर होंगे?

(a)  $\frac{3}{4}$

(b)  $\frac{5}{4}$

(c)  $\frac{6}{7}$

(d)  $\frac{7}{10}$

13. द्विघात समीकरण  $4x^2 + 4x + 1 = 0$  के मूल हैं :

(a) वास्तविक तथा असमान

(b) वास्तविक तथा समान

(c) अभिकल्पित

(d) वास्तविक धनात्मक

14. यदि समीकरण  $kx^2 - 6x + 3k = 0$  के मूलों का योगफल तथा गुणनफल बराबर हों, तो  $k = ?$

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) इनमें से कोई नहीं

15.  $p$  के किस मान के लिए  $x^2 - 4x + p = 0$  के मूल धिन्न तथा वास्तविक होंगे?

(a)  $p < 4$

(b)  $p > 4$

(c)  $p = 4$

(d) इनमें से कोई नहीं

16. एक द्विघात समीकरण के मूलों का योगफल -2 तथा गुणनफल -4 है. यह समीकरण है :

(a)  $x^2 - 2x - 4 = 0$

(b)  $x^2 - 2x + 4 = 0$

(c)  $x^2 + 2x - 4 = 0$

(d)  $x^2 + 2x + 4 = 0$



17. यदि समीकरण  $3x^2 + 5x - 7 = 0$  के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हों, तो  $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = ?$

(a)  $\frac{3}{7}$

(b)  $\frac{5}{11}$

(c)  $\frac{5}{7}$

(d) इनमें से कोई नहीं

18. एक द्विघात समीकरण के मूल  $(2 + \sqrt{5})$  तथा  $(2 - \sqrt{5})$  हैं, यह समीकरण है :

(a)  $x^2 - 4x - 1 = 0$

(b)  $x^2 + 4x - 1 = 0$

(c)  $x^2 - 4x + 1 = 0$

(d)  $x^2 + 4x + 1 = 0$

19. यदि  $x^2 - px + q = 0$  के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हों, तो  $(\alpha^3 + \beta^3)$  का मान कितना होगा ?

(a)  $q^3 + 3pq$

(b)  $q^3 - 3pq$

(c)  $p^3 + 3pq$

(d)  $p^3 - 3pq$

20. यदि  $x^2 + px + q = 0$  के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हों, तो  $\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$  का मान क्या होगा ?

(a)  $\frac{(p^2 - 2q)}{q}$

(b)  $\frac{(p^2 + 2q)}{q}$

(c)  $\frac{(-p^2 + 2q)}{q}$

(d)  $\frac{(-p^2 - 2q)}{q}$

21. यदि  $3x^2 + 8x + 2 = 0$  के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हों, तो  $(\alpha^3 + \beta^3) = ?$

(a)  $-\frac{46}{3}$

(b)  $\frac{368}{27}$

(c)  $-\frac{368}{27}$

(d) इनमें से कोई नहीं

22. यदि  $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{5}{4}$  हो, तो  $x = ?$

(a)  $\pm 3$

(b)  $\pm 9$

(c)  $\pm 1$

(d)  $\pm \frac{1}{3}$

23. यदि  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x = 48$  हो, तो  $x = ?$

(a) 16

(b) 18

(c) 20

(d) 24

24. यदि  $ax^2 + bx + c = 0$  के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम हों, तो

(a)  $a = b$

(b)  $b = ac$

(c)  $a = c$

(d)  $ac = 1$

### उत्तरमाला (प्रश्नमाला 33)

1. (d)	2. (d)	3. (d)	4. (b)	5. (c)	6. (a)	7. (a)	8. (b)
9. (d)	10. (b)	11. (d)	12. (b)	13. (b)	14. (a)	15. (a)	16. (c)
17. (c)	18. (a)	19. (d)	20. (a)	21. (c)	22. (a)	23. (a)	24. (c)

### दिये गये प्रश्नों के हल

### प्रश्नमाला 33

1. (a)  $x - \frac{3}{x} = x^2 \Rightarrow x^2 - 3 = x^3$ , जो एक द्विघात समीकरण नहीं है.

(b)  $x^2 + \frac{3}{x^2} = 1 \Rightarrow x^4 + 3 = x^2$ , जो एक द्विघात समीकरण नहीं है.

(c)  $2x^2 + \sqrt{3}x + 5 = 0$  स्पष्टतया एक द्विघात समीकरण नहीं है.

(d)  $x^2 - 1 = 2x^2 + 4 \Rightarrow 2x^2 + 4 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 5 = 0$ , जो एक द्विघात समीकरण है.

2. स्पष्ट है कि  $x^3 - x - 4 = 0$  एक द्विघात समीकरण नहीं है।

3. प्रत्येक दिये समीकरण की  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर:

(a)  $a = 1, b = 1, c = 6$ .

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = (1 - 4 \times 1 \times 6) = (1 - 24) = -23 < 0.$$

अतः  $x^2 + x + 6 = 0$  के वास्तविक मूल नहीं होंगे।

(b)  $a = 2, b = -3, c = 4$ .

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = (9 - 4 \times 2 \times 4) = (9 - 32) = -23 < 0.$$

अतः  $2x^2 - 3x + 4 = 0$  के वास्तविक मूल नहीं होंगे।

(c)  $a = 3, b = 4, c = 5$ .

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = (16 - 4 \times 3 \times 5) = (16 - 60) = -44 < 0.$$

अतः  $3x^2 + 4x + 5 = 0$  के वास्तविक मूल नहीं होंगे।

(d)  $a = 2, b = -7, c = 5$ .

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = (49 - 4 \times 2 \times 5) = (49 - 40) = 9 > 0.$$

अतः  $2x^2 - 7x + 5 = 0$  के वास्तविक मूल होंगे।

4.  $x^2 + x + 1 = 0$  को  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर:

$a = 1, b = 1$  तथा  $c = 1$ .

$$\therefore \text{विविक्तकर } D = (b^2 - 4ac) = (1 - 4 \times 1 \times 1) = (1 - 4) = -3.$$

5.  $2x^2 - 3x - 12 = 0$  को  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर:

$a = 2, b = -3$  तथा  $c = -12$ .

$$\therefore \text{विविक्तकर } D = (b^2 - 4ac) = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-12) = (9 + 96) = 105.$$

6.  $x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 3x + 18 = 0$

$$\Rightarrow x(x - 6) - 3(x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ अथवा } x = 3.$$

$\therefore$  अभीष्ट मूल 3 तथा 6 हैं।

7.  $2x^2 - 11x + 15 = 0$  को  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर:

$a = 2, b = -11$  तथा  $c = 15$ .

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = [(-11)^2 - 4 \times 2 \times 15] = (121 - 120) = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1.$$

माना अभीष्ट मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हैं। तब,

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(11 + 1)}{(2 \times 2)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{तथा } \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(11 - 1)}{(2 \times 2)} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

अतः अभीष्ट मूल 3 तथा  $\frac{5}{2}$  हैं।

8.  $x^2 - 4\sqrt{3}x + 9 = 0$  को तुलना  $ax^2 + bx + c = 0$  से करने पर:

$a = 1, b = -4\sqrt{3}$  तथा  $c = 9$ .

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = [(-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 9] = (48 - 36) = 12.$$

$$\therefore \sqrt{D} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{अतः } \alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(4\sqrt{3} + 2\sqrt{3})}{(2 \times 1)} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{तथा } \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{(2 \times 1)} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

अतः अभीष्ट मूल हैं  $3\sqrt{3}$  तथा  $\sqrt{3}$ .

9.  $ax^2 + x + b = 0$  की तुलना  $Ax^2 + Bx + C = 0$  से करने पर:

$$A = a, B = 1 \text{ तथा } C = b.$$

$$\therefore D = (B^2 - 4AC) = (1^2 - 4 \times a \times b) = (1 - 4ab).$$

मूल समान तभी होंगे जबकि  $D = 0$ .

$$\text{अब } D = 0 \Rightarrow 1 - 4ab = 0 \Rightarrow 4ab = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{4}.$$

10. दिया गया समीकरण है  $6x^2 - 7x + 3 = 0$ .

इसकी  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर  $a = 6, b = -7, c = 3$ .

$$\text{माना इसके मूल } \alpha \text{ तथा } \beta \text{ हैं. तब } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

11.  $2x^2 - 8x + k = 0$  की तुलना  $ax^2 + bx + c = 0$  से करने पर  $a = 2, b = -8, c = k$ .

$$\text{अब } D = (b^2 - 4ac) = [(-8)^2 - 4 \times 2 \times k] = (64 - 8k).$$

मूल समान तभी होंगे जबकि  $D = 0$  हो.

$$\therefore D = 0 \Rightarrow 64 - 8k = 0 \Rightarrow 8k = 64 \Rightarrow k = 8.$$

12.  $px^2 - 2\sqrt{5}x + 4 = 0$  की तुलना  $ax^2 + bx + c = 0$  से करने पर:

$$a = p, b = -2\sqrt{5} \text{ तथा } c = 4.$$

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = [(-2\sqrt{5})^2 - 4 \times p \times 4] = (20 - 16p).$$

मूल वास्तविक तथा बराबर तभी होंगे जबकि  $D = 0$ .

$$\text{अब, } D = 0 \Rightarrow 20 - 16p = 0 \Rightarrow 16p = 20 \Rightarrow p = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}.$$

13.  $4x^2 + 4x + 1 = 0$  की तुलना  $ax^2 + bx + c = 0$  से करने पर:

$$a = 4, b = 4 \text{ तथा } c = 1.$$

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = (16 - 4 \times 4 \times 1) = 0.$$

अतः  $4x^2 + 4x + 1 = 0$  के मूल वास्तविक तथा समान होंगे.

14.  $kx^2 - 6x + 3k = 0$  की तुलना  $ax^2 + bx + c = 0$  से करने पर:

$$a = k, b = -6 \text{ तथा } c = 3k.$$

माना अभीष्ट मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हैं. तब,

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{6}{k} \text{ तथा } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3k}{k} = 3.$$

$$\therefore \frac{6}{k} = 3 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2.$$



15.  $x^2 - 4x + p = 0$  की तुलना  $ax^2 + bx + c = 0$  से करने पर:

$$a = 1, b = -4 \text{ तथा } c = p.$$

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = (16 - 4 \times 1 \times p) = (16 - 4p).$$

इसके मूल भिन्न तथा वास्तविक तभी होंगे जबकि  $D > 0$

$$\therefore 16 - 4p > 0 \Rightarrow 16 > 4p \Rightarrow 4 > p \Rightarrow p < 4.$$

16. माना अभीष्ट समीकरण के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हैं.

$$\text{तब, } \alpha + \beta = -2 \text{ तथा } \alpha\beta = -4.$$

$$\text{अभीष्ट समीकरण है: } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \text{ अर्थात् } x^2 - (-2)x - 4 = 0$$

$$\text{अर्थात् } x^2 + 2x - 4 = 0.$$

17. दिया गया है कि  $3x^2 + 5x - 7 = 0$  के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हैं.

$$\text{अतः } (\alpha + \beta) = \frac{-5}{3} \text{ तथा } \alpha\beta = \frac{-7}{3}.$$

$$\therefore \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{\left( \frac{-5}{3} \right)}{\left( \frac{-7}{3} \right)} = \left( \frac{5}{3} \times \frac{3}{7} \right) = \frac{5}{7}.$$

18. माना  $\alpha = (2 + \sqrt{5})$  तथा  $\beta = (2 - \sqrt{5})$ . तब

$$(\alpha + \beta) = (2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) = 4 \text{ तथा } \alpha\beta = (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = (4 - 5) = -1.$$

$$\therefore \text{अभीष्ट समीकरण है: } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \text{ अर्थात् } x^2 - 4x - 1 = 0.$$

19.  $x^2 - px + q = 0$  की तुलना  $ax^2 + bx + c = 0$  से करने पर:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = p, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = q.$$

$$\therefore (\alpha^3 + \beta^3) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = (p^3 - 3pq).$$

20. चूँकि  $x^2 + px + q = 0$  के मूल  $\alpha$  तथा  $\beta$  हैं. अतः

$$\alpha + \beta = -p \text{ तथा } \alpha\beta = q.$$

$$\therefore \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(-p)^2 - 2q}{q} = \frac{(p^2 - 2q)}{q}.$$

21.  $3x^2 + 8x + 2 = 0$  की तुलना  $ax^2 + bx + c = 0$  से करने पर:

$$a = 3, b = 8 \text{ तथा } c = 2.$$

$$\therefore (\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-8}{3} \text{ तथा } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha^3 + \beta^3) &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= \left( \frac{-8}{3} \right)^3 - 3 \times \frac{2}{3} \times \left( \frac{-8}{3} \right) = \left( \frac{-512}{27} + \frac{16}{3} \right) = \left( \frac{-512}{27} + \frac{144}{27} \right) = \frac{-368}{27}. \end{aligned}$$

$$22. \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{5}{4} \Rightarrow 5(x^2 - 1) = 4(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5 = 4x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

$$23. \frac{x^2}{4} - x = 48 \Rightarrow x^2 - 4x - 192 = 0.$$

इसकी  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर:

$$a = 1, b = -4, c = -192.$$

$$\therefore D = (b^2 - 4ac) = 16 - 4 \times 1 \times (-192) = (16 + 768) = 784.$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{784} = 28.$$

$$\therefore \alpha = \frac{(-b + \sqrt{D})}{2a} = \frac{(4 + 28)}{(2 \times 1)} = \frac{32}{2} = 16.$$

$$24. \text{ माना } ax^2 + bx + c = 0 \text{ के मूल } \alpha \text{ तथा } \frac{1}{\alpha} \text{ हैं.}$$

$$\text{तब इनका गुणनफल} = \left( \alpha \times \frac{1}{\alpha} \right) = 1.$$

$$\therefore \frac{c}{a} = 1 \text{ अर्थात् } c = a \Rightarrow a = c.$$

2		784	(28
		4	
48		384	
		384	
		x	