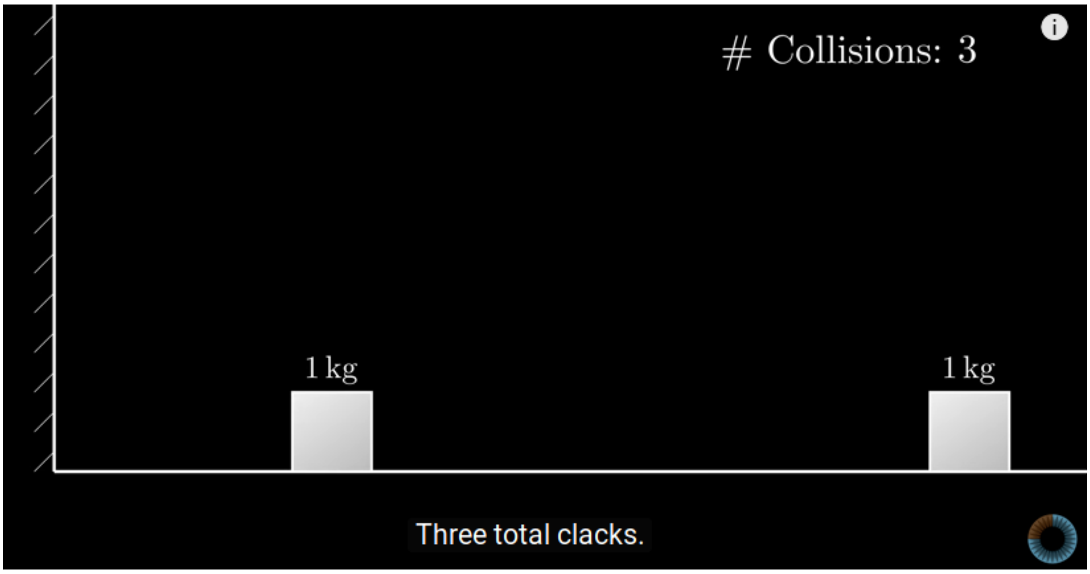
Giải thích một video của 3Blue1Brown bằng phép nhân ma trận

Bài tập Đại số tuyến tính

Ngày 7 tháng 8 năm 2019

Giới thiệu

Trong một video trên kênh YouTube 3Blue1Brown (*The most unexpected answer to a counting puzzle*, tại `https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs`) được chia sẻ rất nhiều trong thời gian gần đây, Grant Sanderson đã giới thiệu bài toán sau của Gregory Galperin về sự va chạm của 2 hình hộp như hình dưới đây, trong đó hộp bên trái có khối lượng bằng 1 và hộp bên phải có khối lượng là $m \geq 1$.



Ở thời điểm bắt đầu, hộp bên phải chuyển động thẳng đều về phía tường (bên trái) và hộp trái đứng yên. Hai hộp có thể va chạm với nhau và với tường. Giả sử không có ma sát và các va chạm đều là đàn hồi (động lượng và năng lượng được bảo toàn), ta muốn đếm tổng số va chạm (hộp-hộp và hộp-tường), chẳng hạn trong trường hợp khối lượng hai vật bằng nhau ($m = 1$) có tổng cộng 3 va chạm: hộp phải với hộp trái (sau đó hộp phải đứng yên), hộp trái với tường, và hộp trái với hộp phải (sau đó hộp trái đứng yên). Trong trường hợp $m = 100$, tổng số va chạm là 31 và nếu $m = 10000$, là 314. Grant Sanderson chỉ ra rằng nếu m là một lũy thừa của 100, giả sử 100^k thì số va chạm là k chữ số đầu tiên của số π.

Youtuber này cho rằng thực hiện thí nghiệm này và đếm số va chạm là cách tính số π đẹp nhất nhưng cũng kém hiệu quả nhất, so sánh khối lượng m cần thiết để tính chính xác 20 chữ số thập phân của π với khối lượng một lỗ đen. Anh dành một tuần để khán giả của mình suy nghĩ vì sao số π lại xuất hiện trong một bài toán va chạm đàn hồi.

Qua bài tập sau, ta sẽ thấy đường tròn (hay số π) xuất hiện một cách tự nhiên qua góc argument của giá trị riêng (phức) của một ma trận 2x2. Sử dụng một số tính toán cơ bản được học trong môn đại số tuyến tính, ta sẽ chứng minh tổng số va chạm là

$$N = \left\lfloor \frac{2\pi}{\arccos(\frac{m-1}{m+1})} \right\rfloor \text{ khi } m \geq 2$$

Với m lớn, dùng khai triển Taylor $\arccos(1-2\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon} + O(\epsilon^{3/2})$ ta có

$$\frac{2\pi}{\arccos(\frac{m-1}{m+1})} = \frac{2\pi}{2(m+1)^{-1/2} + O((m+1)^{-3/2})} = \pi\sqrt{m+1} + O(\frac{1}{\sqrt{m+1}})$$

Do đó khi $m = 100^k$ thì $N = \pi.10^k$ là k chữ số đầu tiên của π.

Mô hình hoá

Va chạm giữa 2 hộp

Chọn chiều dương từ trái sang phải và gọi a, b lần lượt là vận tốc của hộp phải và hộp trái trước khi va chạm, và a', b' là vận tốc ngay sau khi 2 hộp chạm nhau, định luật bảo toàn động lượng và năng lượng (Sách giáo khoa Vật Lý lớp 10) nói rằng

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ma'^2 + \frac{1}{2}b'^2 = \frac{1}{2}ma^2 + \frac{1}{2}b^2, \\ ma' + b' = ma + b \end{cases}$$

Viết lại phương trình thứ nhất thành $\frac{1}{2}m(a'-a)(a'+a) = \frac{1}{2}(b-b')(b+b')$ và thế $m(a'-a) = b-b'$ (phương trình thứ 2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a' - b' = a - b, \\ ma' + b' = ma + b \end{cases} \tag{1}$$

Câu 1. Dùng phép khử Gauss để tính a', b' theo a, b từ hệ phương trình (1). Viết lại dưới dạng phép nhân ma trận $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = A_m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ với A_m là một ma trận 2x2 có các hệ số phụ thuộc vào m. Tính A_m.

Đáp án.

$$A_m = \begin{bmatrix} \frac{m-1}{m+1} & \frac{2}{m+1} \\ \frac{2m}{m+1} & \frac{1-m}{1+m} \end{bmatrix}$$

□

Va chạm với tường

Vector vận tốc của hộp bên trái đổi chiều khi va chạm với tường. Nếu gọi a, b lần lượt là vận tốc của hộp phải và hộp trái trước khi hộp trái chạm tường và a', b' là vận tốc ngay sau khi chạm, ta có

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ với } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Điều kiện dừng

Vận tốc 2 hộp ban đầu được biểu diễn bởi vector $\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ và vận tốc sau n lần va chạm biểu diễn bởi vector

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \ldots BA_mBA_m \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

cho bởi phép nhân bên trái xem kẽ với các ma trận A_m và B, kết thúc bằng B nếu n chẵn và A_m nếu n lẻ.

Sẽ không còn va chạm khi và chỉ khi vận tốc cả 2 hộp đều dương và hộp bên phải đi nhanh hơn hộp bên trái, nói cách khác là khi $a_n \geq b_n \geq 0$. Bài toán được mô hình hoá thành.

Bài toán. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $a_n \geq b_n \geq 0$.

Nhận thấy rằng để tính a_n, b_n, ta chỉ cần tính được lũy thừa của ma trận $C := A_m B$

Câu 2. Tính ma trận $C := A_m B$. Tìm vết và định thức của C. Bạn có nhận xét gì về 2 giá trị riêng của C.

Đáp án.

$$C = \begin{bmatrix} \frac{m-1}{m+1} & \frac{-2}{m+1} \\ \frac{2m}{m+1} & \frac{m-1}{m+1} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Tr}(C) = 2\frac{m-1}{m+1}, \quad \det C = 1$$

Nhận xét. Hai giá trị riêng của C là 2 số phức liên hợp có module 1, do đó được biểu diễn bởi một góc θ. Đây là lý do số π xuất hiện trong kết quả đếm. Dựa vào phần thực của chúng, ta thấy $\theta = \arccos(\frac{m-1}{m+1})$ là góc đã nhắc đến trong đầu bài. □

Đơn giản hoá tính toán.

Nhận xét rằng $\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$, ta viết lại

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \dots BA_mBA_mB \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{cases} BC^k \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, & \text{khi } n = 2k \\ C^k \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, & \text{khi } n = 2k-1 \end{cases}$$

trong đó $C = A_m B$ là ma trận ở câu 2.

Một cách để tính C^k là chéo hoá ma trận C, vì khi $C = P^{-1}DP$ với $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ là một ma trận chéo thì $C^k = P^{-1}D^kP$ với $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$.

Câu 3. Ma trận C có chéo hoá được trên $\mathbb{C}$ không? Lưu ý: Bạn không cần chéo hóa ma trận C để trả lời.

Đáp án. Có. Nhắc lại rằng một ma trận vuông bậc k chéo hoá được khi và chỉ khi tổng số chiều cuả các không gian riêng bằng k. Do 2 giá trị riêng cuả C khác nhau nên C có 2 không gian riêng, số chiều của mỗi không gian ít nhất là 1 nên tổng số chiều đúng bằng 2. □

Sau đây ta sẽ tính luỹ thừa của ma trận C mà không chéo hoá.

Câu 4. Tính đa thức tối tiểu $Q(X)$ của ma trận C.

Đáp án. Nhắc lại rằng đa thức tối tiểu là ước của đa thức đặc trưng của C, i.e. $X^2 - 2\frac{m-1}{m+1}X + 1 = 0$. Do 2 giá trị riêng của C khác nhau nên đa thức tối tiểu cũng là đa thức đặc trưng. □

Ta sẽ tính C^k bằng cách thực hiện phép chia đa thức X^k cho $Q(X)$:

$$X^k = P_k(X)Q(X) + u_kX + v_k, \quad P_k \in \mathbb{R}[X], \quad u_k, v_k \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Do đa thức Q triệt tiêu C, ta có thể tính $C^k = u_kC + v_k$ nếu biết hai số thực u_k và v_k.

Gọi λ và $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ là hai giá trị riêng của C.

Câu 5. Chứng minh rằng $u_k = \frac{\lambda^{2k}-1}{\lambda^{k-1}(\lambda^2-1)} = \lambda^{-(k-1)} + \lambda^{-(k-1)+2} + \cdots + \lambda^{k-1}$ và $-v_k = \frac{\lambda^{2(k-1)}-1}{\lambda^{k-2}(\lambda^2-1)} = \lambda^{-(k-2)} + \lambda^{-(k-2)+2} + \cdots + \lambda^{k-2}$.

Đáp án. Thế X bởi λ và $\bar{\lambda}$ vào (2), lưu ý rằng $Q(X) = 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u_k\lambda + v_k = \lambda^k \\ u_k\bar{\lambda} + v_k = \bar{\lambda}^k \end{cases}$$

Sau đó giải hệ phương trình này để tính u_k, v_k. □

Câu 6. Tính $\begin{bmatrix} a_{2k-1} \\ b_{2k-1} \end{bmatrix} = C^k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} a_{2k} \\ b_{2k} \end{bmatrix} = BC^k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ theo u_k, v_k. Thay $\frac{m-1}{m+1} = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1})$ và $\frac{2m}{m+1} = \frac{1}{2}(\lambda+\lambda^{-1})+1$, chứng minh rằng $a_{2k-1}-b_{2k-1} = u_k-v_k$ và $b_{2k}-a_{2k} = u_k-v_k+\lambda^k+\lambda^{-k}$

Đáp án.

$$\begin{bmatrix} a_{2k-1} \\ b_{2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_k\cdot\frac{m-1}{m+1} - v_k \\ -u_k\cdot\frac{2m}{m+1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{2k} \\ b_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_k\cdot\frac{m-1}{m+1} - v_k \\ u_k\cdot\frac{2m}{m+1} \end{bmatrix}$$

Với $b_{2k} - a_{2k}$, để ý rằng $u_k\lambda^{\pm 1} = -v_k + \lambda^{\pm k}$. □

Trực quan hình học

Viết $\lambda = e^{i\theta}$ với $\theta = \arccos(\frac{m-1}{m+1})$. Với mọi $k \geq 1$, đặt

$$S_k^2 := \lambda^{-k} + \lambda^{-k+2} + \cdots + \lambda^{k-2} + \lambda^k \quad \text{và} \quad S_k^1 = \lambda^{-k} + \lambda^{-k+1} + \cdots + \lambda^{k-1} + \lambda^k$$

Câu 7. Chứng minh rằng (a_{2k-1}, b_{2k-1}) thoả mãn điều kiện dừng $a_{2k-1} \geq b_{2k-1} \geq 0$ khi và chỉ khi $S_{k-1}^1 \geq 0$ và $S_{k-1}^2 \leq 0$. Chứng minh rằng (a_{2k}, b_{2k}) thoả mãn điều kiện dừng $a_{2k} \geq b_{2k} \geq 0$ khi và chỉ khi $S_k^1 \leq 0$ và $S_{k-1}^2 \geq 0$.

Đáp án. Hiển nhiên khi viết lại $u_k = S_{k-1}^2$, $u_k - v_k = S_{k-1}^1$ và $u_k - v_k + \lambda^k + \lambda^{-k} = S_k^1$. □

Xem S_k^2 (tương ứng S_k^1) là tổng của $k+1$ (tương ứng $2k+1$) vector cách đều trên đường tròn đơn vị, mệnh đề sau là hiển nhiên về mặt trực quan và được thừa nhận.

Mệnh đề. Giả sử $k \leq \lfloor \frac{\pi}{\theta} \rfloor$. Khi đó

1. $S_k^1 \leq 0$ khi và chỉ khi cung tròn từ λ^k đến λ^{-k} nhỏ hơn hoặc bằng θ.
2. $S_k^2 \leq 0$ khi và chỉ khi cung tròn từ λ^k đến λ^{-k} nhỏ hơn hoặc bằng 2θ.

Câu 8. Dùng mệnh đề, chứng minh rằng với $h = \lfloor \frac{\pi}{\theta} \rfloor$ thì hoặc (a_{2h}, b_{2h}) hoặc (a_{2h+1}, b_{2h+1}) thoả điều kiện dừng, còn các bộ (a_i, b_i) với $i < 2h$ không dừng. Từ đó suy ra $N = \lfloor \frac{2\pi}{\theta} \rfloor$.

Đáp án. Nếu cung từ λ^h đến -1 nhỏ hơn $\frac{\theta}{2}$ thì (a_{2h}, b_{2h}) dừng, ngược lại thì (a_{2h+1}, b_{2h+1}) dừng. □

Một tuần sau video nói trên, Grant Sanderson đưa ra lời giải của anh tại `https://www.youtube.com/watch?v=jsYwFizhncE` bằng một lập luận tương đối đơn giản. Kết quả của anh là $N = \left\lfloor \frac{\pi}{\phi} \right\rfloor$ với $\phi = \arctan \frac{1}{\sqrt{m}}$

Câu 9 (Không tính điểm). So sánh hai số va chạm N ở đầu bài với kết quả của Grant Sanderson.

Đáp án. $\theta = 2\phi$. $\square$