

# 6

## **Análisis en el dominio del tiempo de sistemas de primer y segundo orden**

---

Básicamente, las propiedades dinámicas de las plantas pueden ser aproximadas por las características temporales de sistemas más simples. Se entiende por modelos simples, aquellos que definen su dinámica por ecuaciones diferenciales lineales de primer o de segundo orden.

Como se verá en el siguiente capítulo, los modelos de los equipos pueden ser abordados por funciones de transferencias sencillas. Este paso se da en una doble vertiente. Desde el punto de vista del análisis, al reducir el modelo se podrá predecir sus características temporales, empleando expresiones matemáticas de los modelos sencillos. Por otro lado, desde la visión del diseño, se suele emplear las medidas de las características temporales de los modelos simples para fijar los requisitos del comportamiento dinámico de los sistemas a compensar.

Por todas estas razones, este tema pretende analizar el comportamiento dinámico temporal de los sistemas simples, fijando su evolución temporal así como de tantos parámetros como exija, para su determinación matemática.

## 6.1 Sistemas de primer orden

---

Se denomina orden de un sistema al grado de su polinomio característico, esto es, al número de polos que tiene el sistema en su conjunto.

La función de transferencia de un sistema de primer orden es:

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s + a)} \quad (6.1)$$

donde  $N(s)$  es el polinomio del numerador de coeficientes constante al ser de tipo LTI. Por el principio de causalidad, el grado de  $N(s)$  es uno o cero, bien es una constante o es un cero de primer orden. Considérese el caso más simple, el numerador corresponde a una ganancia. La relación entre la entrada y salida del sistema vendrá dada por una ecuación diferencia ordinaria de primer orden:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t) \quad (6.2)$$

donde  $x(t)$  representa la señal en la entrada e  $y(t)$  es la salida. Aplicando a ambos lados de la igualdad la transformada de Laplace y considerando condiciones iniciales nulas, se conseguirá la FDT de los sistemas de primer orden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{1 + Ts} = \frac{k/T}{s + \frac{1}{T}} \quad (6.3)$$

El valor de  $k$  será la ganancia estática del equipo y  $T$  será la constante de tiempo. En general, denominando  $a_i$  y  $b_i$  a los coeficientes de los polinomios del denominador y del numerador, respectivamente, de grado  $i$ , las dos FDT de primer orden de los sistemas causales serán:

$$a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 x \rightarrow G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \quad (6.4)$$

$$a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 x + b_1 \dot{x} \rightarrow G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} \quad (6.5)$$

Sin embargo, para determinar la respuesta dinámica del sistema de primer orden se empleará el modelo de la ecuación (6.3). En el caso de que tuviera un cero de primer orden, desde luego, su dinámica cambiará. Pero desde el punto de vista metodológico, se planteará como la adición de un cero al sistema simple definido en la ec. (6.3). Estos aspectos serán tratados en el capítulo siguiente. Por tanto, se va a tratar de definir la respuesta dinámica de un sistema simple de primer orden y si poseyese un cero, su efecto se verá como una adición a la dinámica del sistema simple.

### 6.1.1 Respuesta temporal ante la entrada en escalón

Para analizar la dinámica del sistema de primer orden se requiere conocer qué tipo de entrada excitará al equipo. Como a priori no se conoce la naturaleza de esta señal, tal cual se comentó en el anterior capítulo, se emplearán las señales de pruebas. En el dominio temporal se definieron tres entradas normalizadas: escalón, rampa y parábola. Por dicha razón, la caracterización de los sistemas de primer y segundo orden en el dominio temporal se darán con estas excitaciones unitarias.

Suponiendo un sistema de primer orden simple caracterizado por su ganancia  $k$  y su constante de tiempo  $T$ , al ser estimulado por una señal de entrada en escalón unitario evolucionará a partir de la convolución entre la entrada y el sistema. Aplicando las transformadas de Laplace y haciendo descomposición en fracciones simples, la respuesta transformada valdrá:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{1+sT} = k \left( \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+sT} \right) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{1}{T}} \quad (6.6)$$

Empleando el cálculo de los residuos será fácil de determinar la antitransformada y por ende la evolución temporal de la señal de salida, en función de sus dos parámetros característicos,  $k$  y  $T$ :

$$\left. \begin{aligned} k_1 = [sY(s)]_{s=0} &= k \\ k_2 \left[ \left( s + \frac{1}{T} \right) Y(s) \right]_{s=-\frac{1}{T}} &= -k \end{aligned} \right\} y(t) = k(1 - e^{-t/T}) \quad (6.7)$$

Pero antes de representar la evolución temporal de un sistema de primer orden simple con una entrada en escalón, véase la correlación entre el dominio complejo y el temporal. Utilizando el teorema del valor final sobre la transformada de Laplace de la salida y haciendo el límite cuando el tiempo tiende a infinito en la ec.(6. 7), los resultados son idénticos. La salida alcanzará, en el régimen permanente, el nivel de la ganancia estática del sistema,  $k$ :

$$\text{Valor final: } \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = k \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k$$

Nótese que si el módulo de la ganancia,  $|k|$ , es mayor que uno el sistema amplifica, en caso contrario, atenúa, esto es, la amplitud de la salida es más pequeña que la entrada. Para resolver el valor inicial sólo basta con aplicar el teorema del valor inicial sobre la ec.(6. 6) o hacer tender el tiempo a cero en la ec. (6. 7):

$$\text{Valor inicial: } \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$$

La constante de tiempo del sistema,  $T$ , define la rapidez del equipo. De hecho, cuando el intervalo de tiempo recorrido desde el inicio de la estimulación hasta la constante de tiempo, la señal de salida ya ha alcanzado una buena parte de su recorrido:

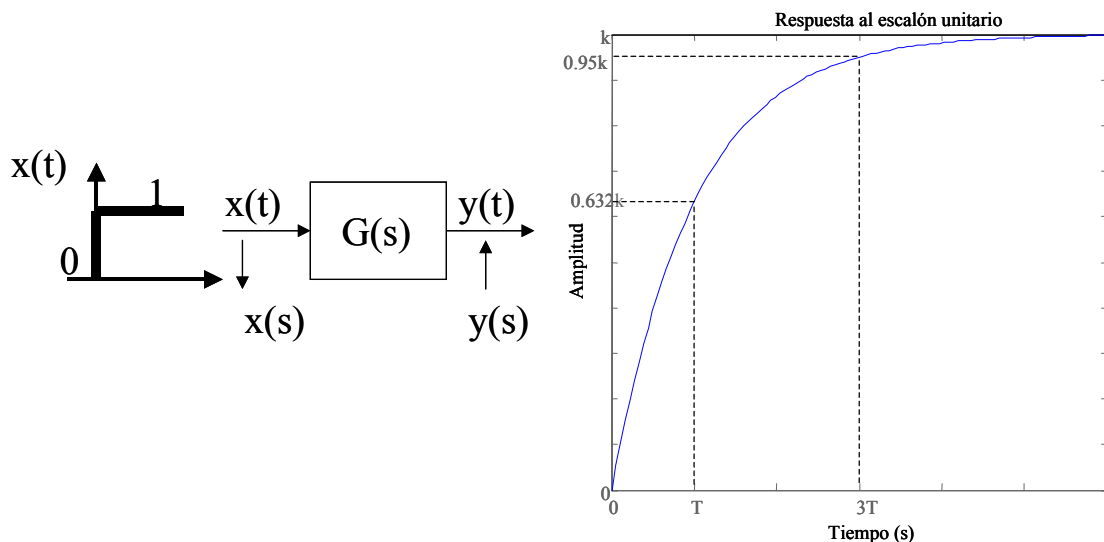
$$\text{Valor } t = T: \quad y(t = T) = k(1 - e^{-1}) = 0.632k \quad (6.8)$$

Se define el tiempo de establecimiento,  $t_s$ , como el que necesita el sistema para alcanzar el régimen permanente. El valor de la señal del permanente no es exactamente el valor final. Atendiendo a la ec. (6.7) y si se pusiera la condición de lograr el valor de nivel de  $k$  ante una entrada en escalón unitario, el tiempo sería infinito y no habría medida de comparación entre estos sistemas sobre su velocidad de respuesta. Por dicha razón, se suele emplear el error del 5% o el 2% del valor final. En este curso, se empleará el 5% de error del valor del régimen permanente. Para un valor de tres veces la constante de tiempo del sistema de primer orden,  $T$ , coincide con llegar al 5% de error del valor final:

$$\text{Valor } t = 3T: \quad y(t = 3T) = k(1 - e^{-3}) = 0.95k \quad (6.9)$$

Por tanto, para sistemas de primer orden simples, el tiempo de establecimiento es de tres veces la constante de tiempo. Si la definición está dada con el 2%, entonces el tiempo de establecimiento es de cuatro veces la constante de tiempo.

Concluyendo, si el sistema es de primer orden simple, los valores característicos pueden ser determinados experimentalmente ante la respuesta de una entrada en escalón unitario. La ganancia estática,  $k$ , será el valor final de la señal de salida y la constante de tiempo,  $T$ , está dada por el tiempo en que alcanza 0.632 veces el valor de  $k$  o tres veces su valor coincidirá con el tiempo de establecimiento,  $t_s$ , esto es, el tiempo en alcanzar la señal  $0.95k$ .



**Figura 6. 1. Respuesta de un sistema de primer orden simple ante una entrada en escalón unitario**

### 6.1.2 Respuesta impulsional

La respuesta impulsional de un sistema coincide con su propia función de ponderación,  $g(t)$ . De hecho, esta propiedad es empleada como técnica experimental para realizar la identificación de sistemas. La forma de demostrarlo consiste en determinar la transformada de Laplace de la excitación impulsional y luego aplicar el teorema de la convolución continua. Se define una entrada impulsional, aquella que en un tiempo infinitesimal,  $\varepsilon$ , da un pulso de energía que tiende a ser infinito,  $1/\varepsilon$ .

$$\delta(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & t < 0 \text{ o } t > \varepsilon \end{cases} \quad (6.10)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

Su transformada de Laplace coincide con la unidad:

$$L[\delta(t)] = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon s} [1 - e^{-s\varepsilon}] \stackrel{H}{=} \frac{s\varepsilon^{-s\varepsilon}}{s} = 1 \quad (6.11)$$

Concluyendo que al dar una entrada de este tipo, la señal de salida coincide con la propia naturaleza de la planta,  $y(t)=g(t)$ , por el teorema de la convolución. Para el caso que ocupa de sistemas simples de primer orden, resultará:

$$Y(s) = G(s) = \frac{k}{1+sT} \Rightarrow y(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} = g(t) \quad (6.12)$$

$$Y(s) = \frac{k}{1+sT} = \frac{k/T}{s + \frac{1}{T}} \quad (6.13)$$

Además, para sistemas LTI, la respuesta al impulso es la derivada de la salida al escalón:

$$y_{\text{escalón}}(t) = k(1 - e^{-t/T}) \quad \dot{y}_{\text{escalón}}(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} = g(t) \quad (6.14)$$

La aplicación de los teoremas del valor final y del inicial debe de coincidir con la respuesta de la excitación impulsional de los sistemas de primer orden, definido por la ec.(6. 12):

$$\text{Valor final: } y(t \rightarrow \infty) = 0 \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot 1 \cdot \frac{k}{1 + sT} = 0 \quad (6. 15)$$

$$\text{Valor inicial: } y(t \rightarrow 0) = \frac{k}{T} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot 1 \cdot \frac{k}{1 + sT} = \frac{k}{T} \quad (6. 16)$$

Los valores característicos de la salida cuando el tiempo coincide con la constante de tiempo o cuando el tiempo es de tres veces la constante de tiempo del sistema están dados por la ec.(6. 12), simplemente sustituyendo:

$$y(t = T) = \frac{k}{T} e^{-1} = 0.367 \frac{k}{T}$$

$$y(t = 3T) = \frac{k}{T} e^{-3} = 0.05 \frac{k}{T}$$

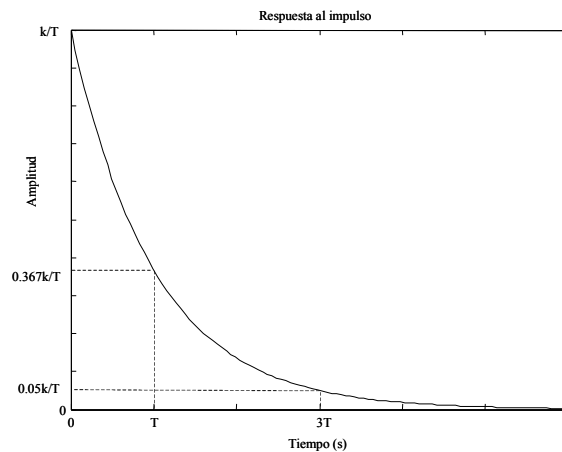
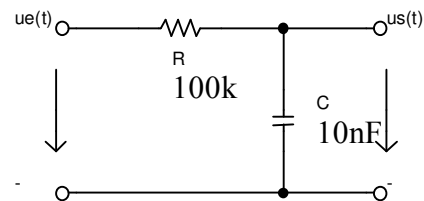


Figura 6. 2. Respuesta impulsional de un sistema simple de primer orden

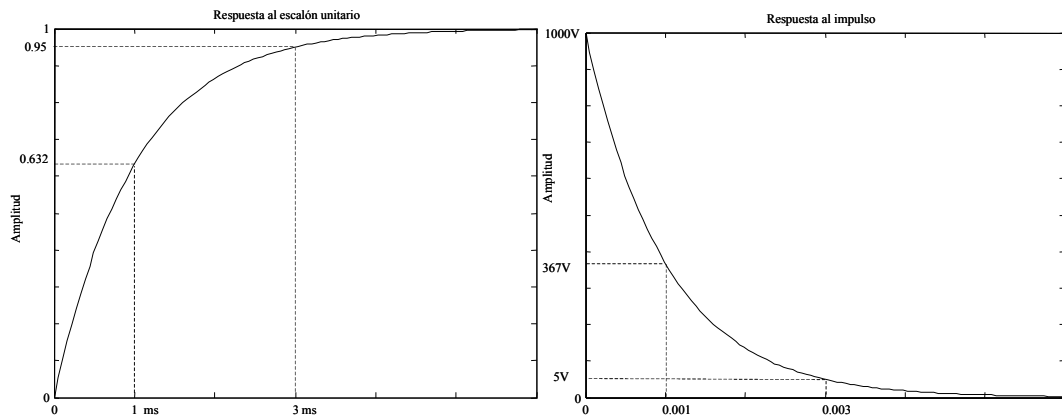
### Ejemplo 6.1

Para el cuadripolo de la figura determinar su respuesta ante la entrada en escalón unitario y ante una excitación impulsional. Considérese condiciones iniciales nulas.



Al haber un elemento de almacenamiento de energía, el sistema tendrá un modelo de primer orden:

$$u_e(t) = RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) \quad \Rightarrow \quad A_v(s) = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + 10^{-3}s}$$



### 6.1.3 Respuesta a la rampa

Dos métodos se pueden plantear para determinar la respuesta ante una excitación en rampa unitaria en un sistema de primer orden simple. Bien a través de la transformada de Laplace de la salida o bien empleando el teorema de la integración. Este último proceder se basa en que la rampa unitaria corresponde con la integral en el tiempo de una señal en escalón unitario.

1. Descomposición en fracciones simples: La rampa unitaria presenta un polo doble en el origen, el cálculo de los residuos de la antitransforma de la salida exige la formulación de la multiplicidad de las raíces:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \frac{k}{1+sT} = \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_1}{s} + \frac{k_1}{s + \frac{1}{T}} \quad (6.17)$$

$$a_2 = \left[ s^2 Y(s) \right]_{s=0} = k \quad (6.18)$$

$$a_1 = \left[ \frac{d}{ds} \left( s^2 \frac{k}{s^2(1+sT)} \right) \right]_{s=0} = \left[ \frac{k(-T)}{(1+sT)^2} \right]_{s=0} = -kT \quad (6.19)$$

$$k_1 = \left[ \left( s + \frac{1}{T} \right) \frac{1}{s^2} \frac{k/T}{s + \frac{1}{T}} \right]_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{k/T}{(-1/T)^2} = kT \quad (6.20)$$

$$y(t) = k(t - T + Te^{-t/T}) \quad (6.21)$$

2. La respuesta a la rampa es la integral de la respuesta al escalón:

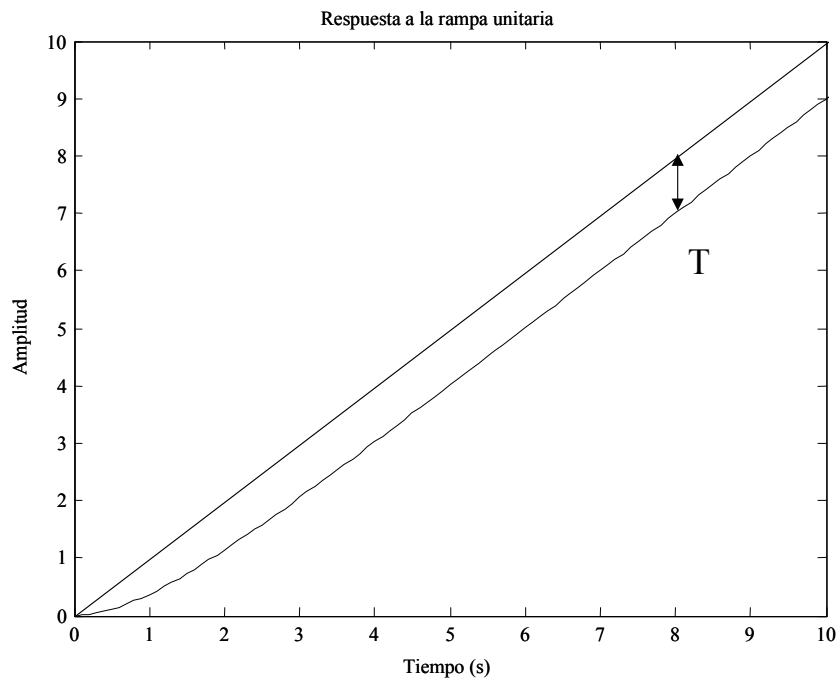
$$y_{rampa}(t) = \int_0^t y_{escalón}(\tau) d\tau = \int_0^t k(1 - e^{-\tau/T}) d\tau = k[\tau + Te^{-\tau/T}]_0^t \quad (6.22)$$

$$y_{rampa}(t) = k(t + Te^{-t/T} - T) \quad (6.23)$$

En general, para sistemas LTI, la respuesta a la derivada de una señal de entrada, puede ser obtenida derivando la respuesta del sistema, a la señal original. Así mismo, la respuesta a la integral de una señal se puede obtener integrando la respuesta a la señal original.

Por ambos métodos los resultados son idénticos, las ecuaciones finales (6.21) y (6.23) son iguales. En la salida, existe un transitorio al iniciar la excitación y luego la componente rampa es el efecto dominante. En la figura 6.3 se puede apreciar la evolución temporal. La salida, en el régimen permanente, sigue a la de mando con un error dado por la ganancia y la constante de tiempo del sistema. Para el caso de tener una ganancia estática unitaria en el sistema,  $k = 1$ , el error coincide con la constante de tiempo del sistema:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = t - k(t - T) = T$$



**Figura 6. 3. Evolución de un sistema de primer orden con ganancia unitaria ante una rampa unitaria**



## 6.2 Análisis temporal de sistemas de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de segundo orden, describen las dinámicas de sistemas con dos elementos de almacenamiento de energía en su interior. La expresión matemática que generaliza a estos equipos está definida por:

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} = b_0 x + b_1 \dot{x} + b_2 \ddot{x} \quad (6.24)$$

donde  $a_i$  y  $b_i$  son escalares constantes,  $x(t)$  es la excitación e  $y(t)$  es la salida. Considerando condiciones iniciales nulas o variaciones lineales alrededor de un punto de reposo, la FDT será:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1(s) + b_2 s^2}{a_0 + a_1(s) + a_2 s^2} \quad (6.25)$$

El caso más simple de sistema de segundo orden es cuando los coeficientes  $b_1$  y  $b_2$  son nulos:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} \quad (6.26)$$

La dinámica de este caso, como la de todos los sistemas LTI, está definida básicamente por las raíces del denominador. La naturaleza de los polos puede ser de tipo real o compleja conjugada. Si los polos son reales, la respuesta a la entrada al escalón estará definida por las dos exponenciales, cuyos exponentes dependerán de la ubicación de los polos. Nótese que la constante de tiempo de un polo real es la inversa del valor del polo,  $T_i = -1/p_i \quad \forall p_i < 0$ . Empleando las transformadas de Laplace es fácil conseguir la respuesta temporal ante una excitación en entrada en escalón unitario:

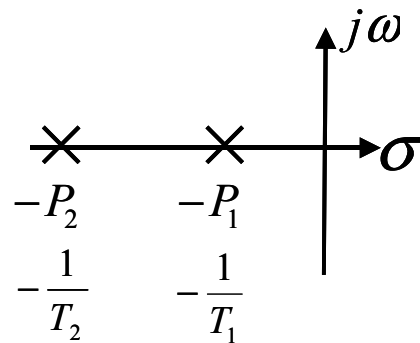


Figura 6. 4. Raíces reales de un sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{b_0}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (6.27)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{b_0}{(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + p_1} + \frac{k_3}{s + p_2} \quad (6.28)$$

$$y(t) = k_1 + k_2 e^{-p_1 t} + k_3 e^{-p_2 t} \quad (6. 29)$$

En cambio, ya no resultará tan evidente la salida si las raíces son complejas y conjugadas. Antes de determinar la evolución temporal de la salida, se va a analizar los parámetros que definen la respuesta de estos sistemas. Si en los sistemas de primer orden simples, los parámetros eran la ganancia estática,  $k$ , y la constante de tiempo,  $T$ . En los sistemas de segundo orden simples los parámetros son tres: la ganancia estática,  $k$ , el factor de amortiguamiento,  $\xi$ , y la frecuencia natural no amortiguada,  $\omega_n$ . La ec. (6. 26) queda determinada por un modelado a partir de sus parámetros característicos:

$$G(s) = \frac{k}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6. 30)$$

La frecuencia natural,  $\omega_n$ , corresponde a una velocidad angular constante y sus dimensiones son radianes/segundo. Su interpretación en el dominio complejo, es la distancia euclídea entre el origen de coordenadas y los polos. El factor de amortiguamiento,  $\xi$ , es adimensional. Si es mayor a 1 ó 1, en valor absoluto, las raíces son reales, en caso contrario, son complejas y conjugadas.

Las soluciones del polinomio del denominador de segundo grado estarán determinadas por su resolución en función de los parámetros  $\omega_n$  y  $\xi$ .

$$\frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (6. 31)$$

Si el factor de amortiguamiento,  $\xi$ , es en valor absoluto menor que la unidad, las raíces serán complejas, según se desprende de la ec. (6. 31). Para estos casos, habrá una componente real y otra imaginaria conjugada. La primera se llamará constante de amortiguamiento,  $\sigma$ , cuya ubicación se dará en el eje real:

$$\sigma = \xi\omega_n$$

La segunda es la frecuencia de amortiguamiento,  $\omega_d$ , y se encontrará en el eje imaginario:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad [rad / s]$$

La frecuencia natural,  $\omega_n$ , será la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los catetos de constante de amortiguamiento,  $\sigma$ , y frecuencia de

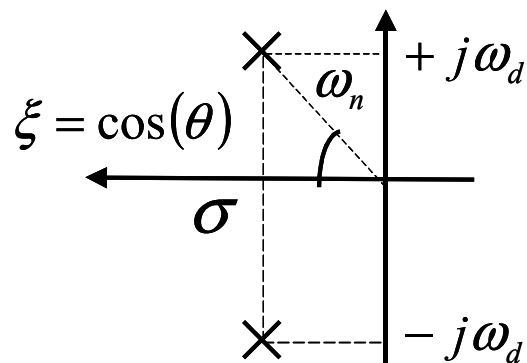


Figura 6. 5. Polos complejos y conjugados de un sistema de segundo orden

amortiguamiento,  $\omega_d$ :

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega_d^2 \quad 0 \leq |\xi| \leq 1$$

Además, el ángulo de apertura de los polos complejos,  $\theta$ , estará relacionado con el coeficiente de amortiguamiento,  $\xi$ :

$$\xi = \cos \theta \quad 0 \leq |\xi| \leq 1$$

### 6.2.1 Respuesta al impulso de un sistema de segundo orden subamortiguado.

A los sistemas de segundo orden, cuyos factores de amortiguamiento están entre 0 y 1,  $0 \leq |\xi| < 1$ , sus soluciones son complejas y conjugadas. Si además se pide que sean estables, se exigirán que los factores de amortiguamiento sean mayores que cero. Se llaman sistemas subamortiguados, aquellos que los factores de amortiguamiento sean mayor que cero y menor que uno. Los polos serán complejos y conjugados y se encuentran en el semiplano negativo del dominio complejo.

La respuesta impulsional de un sistema subamortiguado simple indicará la naturaleza del sistema. Aplicando descomposición en fracciones simples en su transformada, permitirá ver la evolución temporal:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d)} \\ &= \frac{k_1}{(s + \sigma - j\omega_d)} + \frac{k_2}{(s + \sigma + j\omega_d)} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Haciendo la antitransformada y empleando el cálculo de los residuos de dos polos simples (da igual que sean reales que complejos):

$$g(t) = k_1 e^{-(\sigma - j\omega_d)t} + k_2 e^{-(\sigma + j\omega_d)t} \quad (6.33)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= [(s + \sigma - j\omega_d)G(s)]_{s=-\sigma+j\omega_d} = \frac{k\omega_n^2}{2j\omega_d} = \frac{k\omega_n}{2j\sqrt{1-\xi^2}} \\ k_2 &= [(s + \sigma + j\omega_d)G(s)]_{s=-\sigma-j\omega_d} = \frac{k\omega_n^2}{-2j\omega_d} = \frac{-k\omega_n}{2j\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Introduciendo el cálculo de los residuos en la ec.(6. 32) y sacando factor común a  $\frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma t}$ , se conseguirá una expresión a la que posteriormente se empleará la relación de Euler:

$$g(t) = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma t} \left( \frac{e^{+j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j} \right) = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma t} \text{sen}(\omega_d t) \quad (6. 35)$$

La respuesta impulsional para un sistema subamortiguado es una combinación de una exponencial monótonamente decreciente con el tiempo y un armónico de frecuencial  $\omega_d$ . El resto de la expresión es una valor constante. La excitación depende de la constante de amortiguamiento,  $\sigma$ , y de la frecuencia de amortiguamiento. Las conclusiones de la ec. (6. 35) requieren de un análisis detallado.

En primer lugar, considérese el efecto de la constante de amortiguamiento,  $\sigma$ . El lugar geométrico de la constante de amortiguamiento son rectas paralelas al eje imaginario. Los polos complejos situados sobre estas rectas paralelas tendrá igual constante de amortiguamiento. A medida de que la constante de amortiguamiento,  $\sigma$ , se hace mayor, dos conclusiones se extraen: el sistema es más estable y es más rápido. La primera por que alejarse del semiplano positivo indica mayor estabilidad, la segunda por que a medida de que aumenta la constante de amortiguamiento, más rápido cesará la salida a consecuencia del término exponencial con el tiempo,  $e^{-\sigma t}$ .

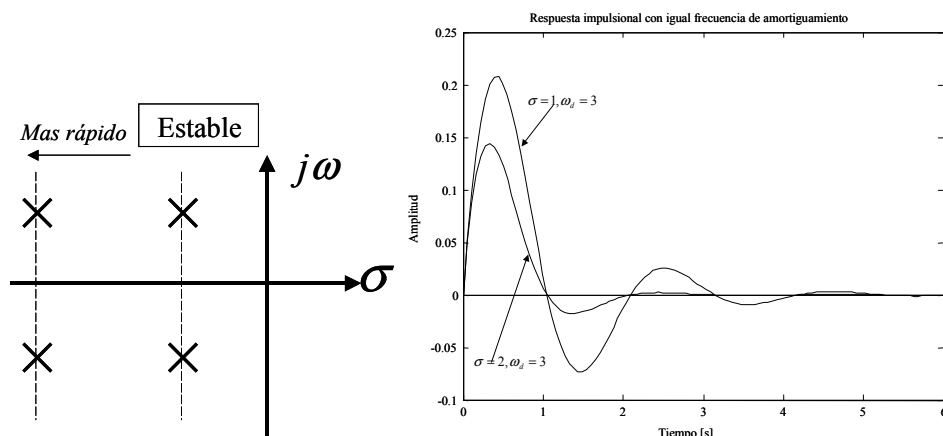


Figura 6. 6. a) Lugar geométrico de la constante de amortiguamiento b) Respuesta impulsional de dos sistemas con igual frecuencia de amortiguamiento y distinta constante de

En cambio, el lugar geométrico de la frecuencia de amortiguamiento,  $\omega_d$ , serán rectas paralelas al eje real. Aquellas raíces del denominador que estén a la misma altura respecto al eje real, tendrán igual frecuencia de amortiguamiento. En cuanto aumente la frecuencia de amortiguamiento,  $\omega_d$ , menor será el periodo del armónico y para un mismo valor de coeficiente de amortiguamiento,  $\sigma$ , el número de oscilaciones, antes de apagarse la salida, será mayor.

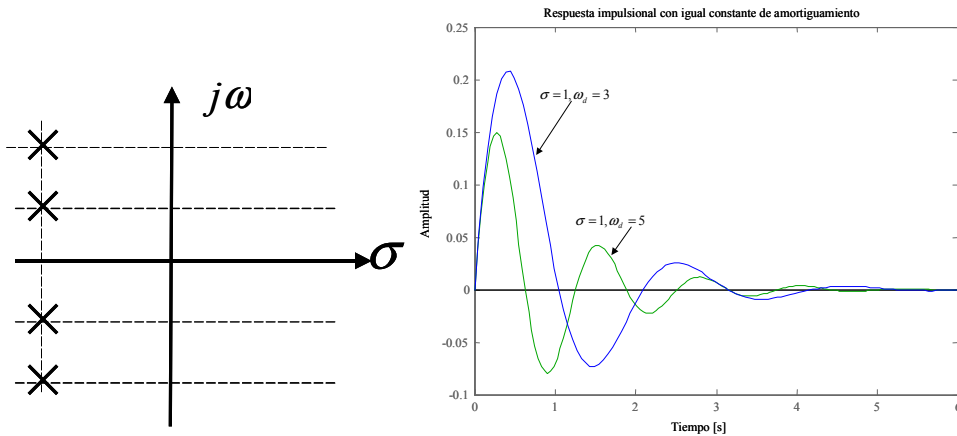


Figura 6. 7. a) Lugar geométrico de la frecuencia de amortiguamiento, b) Respuesta impulsional de dos sistemas con igual constante de amortiguamiento y diferente frecuencia de amortiguamiento

Las naturalezas de los polos de los sistemas de segundo orden están determinadas por el factor de amortiguamiento. Si el  $\xi$  es menor a cero el sistema es inestable. Cuando está entre 0 y 1 las raíces son complejas y conjugadas, situadas en el semiplano negativo. Un valor del  $\xi$  igual a la unidad, indica que los polos son dobles y reales, con valor negativo. Por último, valores del coeficiente de amortiguamiento mayor a 1, indica dos raíces negativas y reales:

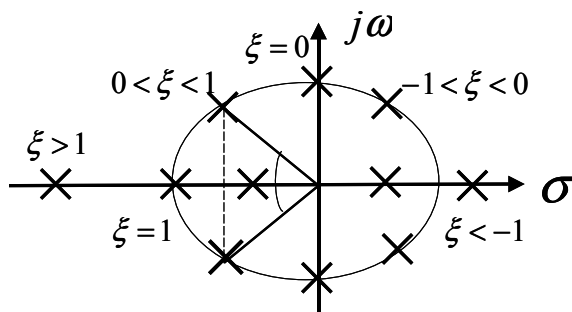


Figura 6. 8. Polos de segundo orden en función  $\xi < 0$  del coeficiente de amortiguamiento

$$0 < \xi < 1 \quad \text{'Subamortiguado'}$$

$$s = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.36)$$

$$\xi = 0 \quad \text{'Críticamente estable'}$$

$$s = \pm j \omega_d = j \omega_n \quad (6.37)$$

$$\xi = 1 \quad \text{No amortiguado}$$

$$s = -\omega_n = -\sigma \quad (6.38)$$

(polo doble real)

$$\xi > 1 \quad \text{'Sobreamortiguado'}$$

$$s = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6.39)$$

$$\xi < 0 \quad \text{'Inestable'}$$

### 6.2.2 Respuesta en escalón

Se propone al lector que demuestre que la respuesta al escalón unitario de un sistema de segundo orden simple:

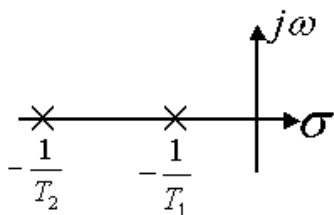
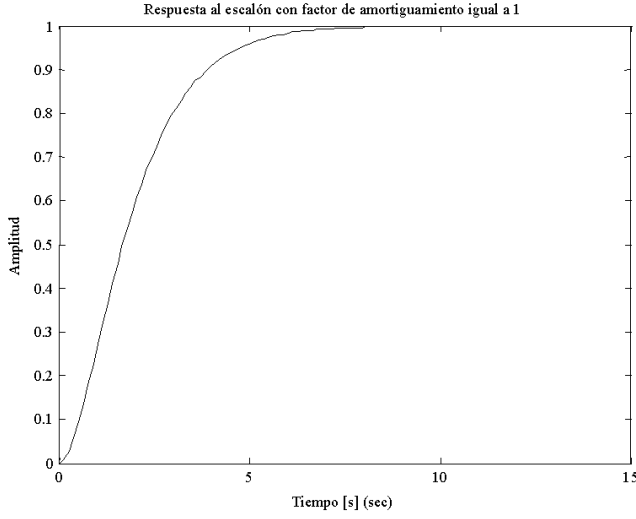
$$G(s) = \frac{k}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} \quad (6.40)$$

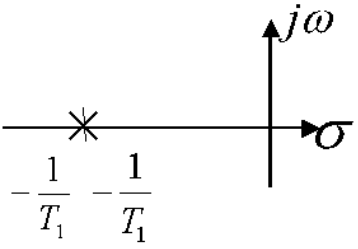
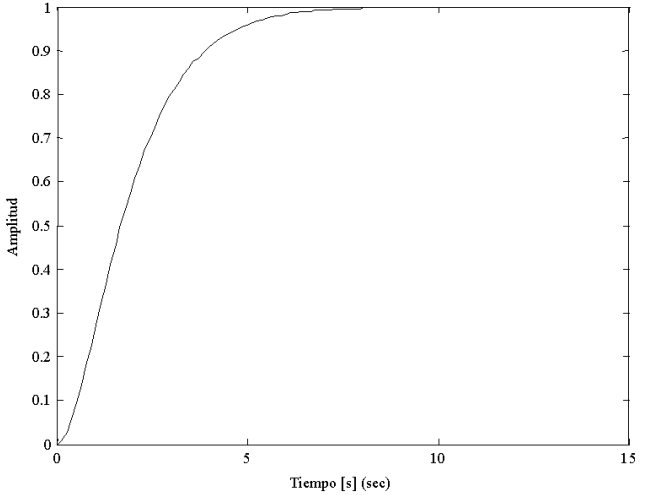
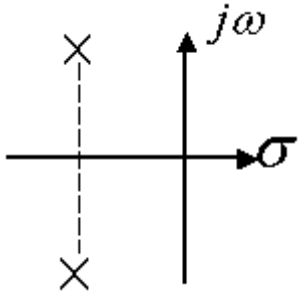
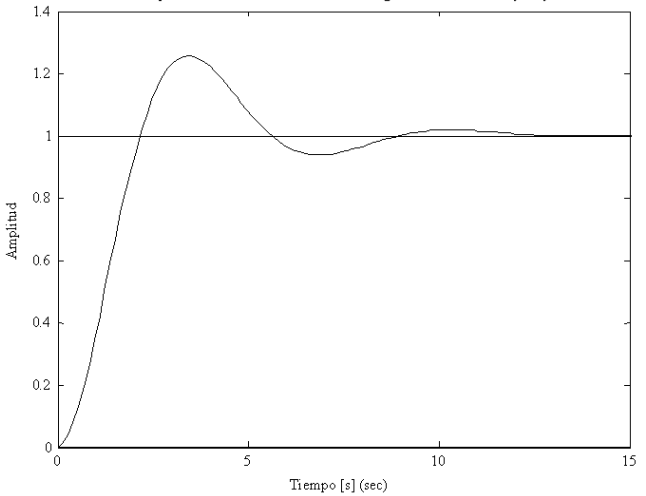
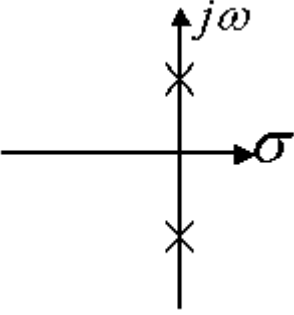
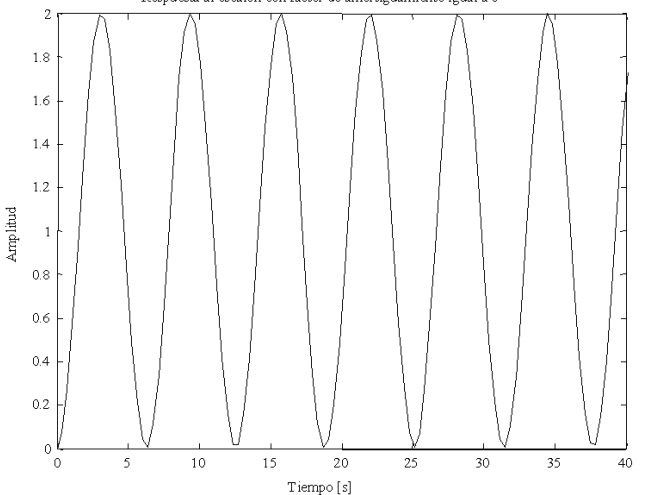
es igual a:

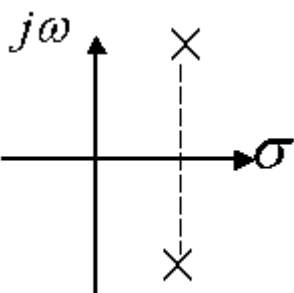
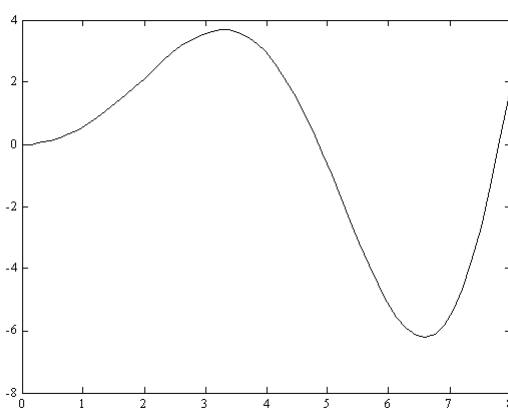
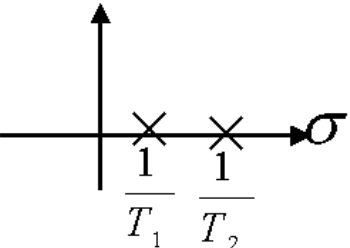
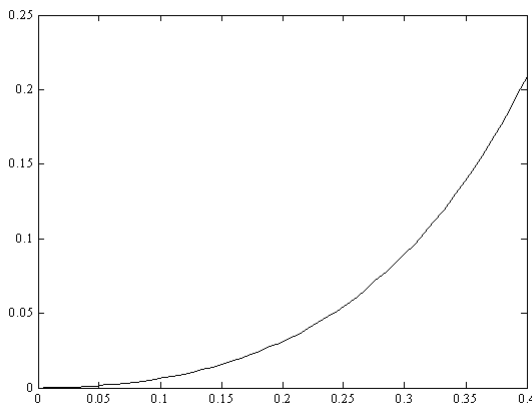
$$y(t) = k \left( 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t + \theta) \right) \quad (6.41)$$

De dos maneras distintas pueden ser abordadas la problemática. Una a través de la descomposición en fracciones simples de la transformada de Laplace de la salida. La otra posibilidad es la integración en el tiempo de la respuesta al impulso (ver ec. (6.35)).

Al igual que en el anterior capítulo, se sintetiza el comportamiento de los sistemas de segundo orden ante una entrada en escalón unitario a través de un cuadro resumen. Aparecerán los polos según el coeficiente de amortiguamiento y cuál es la evolución temporal de su salida:

Situación del polo	Respuesta al escalón	Sistema
		<p>Sobre Amortiguado</p> <p><math>\xi &gt; 1</math></p>

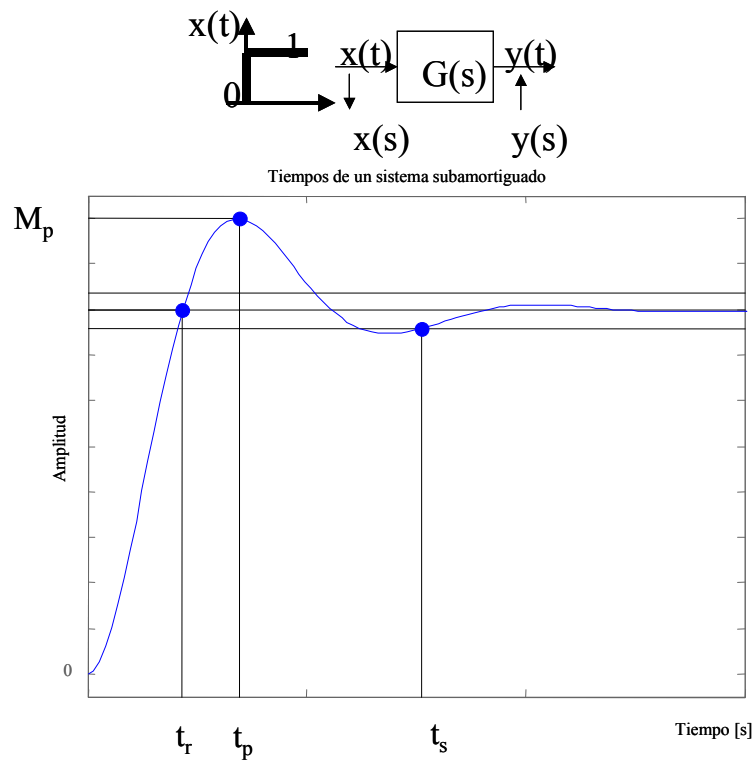
	<p>Respuesta al escalón con factor de amortiguamiento igual a 1</p> 	<p><b>Críticamente amortiguado</b></p> <p><math>\xi=1</math></p>
	<p>Respuesta al escalón con factor de amortiguamiento menor a 1 y mayor a 0</p> 	<p><b>Sub amortiguado</b></p> <p><math>0&lt;\xi&lt;1</math></p>
	<p>Respuesta al escalón con factor de amortiguamiento igual a 0</p> 	<p><b>Críticamente estable</b></p> <p><math>\xi=0</math></p>

		<p>INESTABLE</p> <p><math>-1 &lt; \xi &lt; 0</math></p>
		<p>INESTABLE</p> <p><math>\xi &lt; -1</math></p>



### 6.2.3 Caracterización de la respuesta temporal al escalón de un sistema subamortiguado

La importancia de definir parámetros temporales de un sistema subamortiguado al escalón, se debe a que muchas plantas o procesos físicos, sus dinámicas, son aproximadas a esta FDT. Por lo que este modelado simplificado permite conocer características de la estabilidad y de la naturaleza de las respuestas del régimen transitorio. Adicionalmente, no sólo permite analizar o predecir el comportamiento temporal, sino que, a veces, los requisitos de diseño de los reguladores de control, emplean definiciones dadas en este epígrafe, como por ejemplo el valor de sobreoscilación. Por todas estas razones, se trata de caracterizar mediante medidas de tiempo y de valor de pico, la salida de un sistema subamortiguado ante una excitación de escalón unitario.



Según se observa de la figura adjunta, los tiempos que se definen son:

- Tiempo de establecimiento,  $t_s$  : valor de tiempo que el sistema necesita en alcanzar un error del 5% ó 2%, según criterio, del valor final del régimen permanente.
- Tiempo de pico,  $t_p$ : intervalo de tiempo en darse la máxima amplitud de salida ( sólo es válido si el factor de amortiguamiento está entre 0 y 0.7,  $0 < \xi < 0.7$ ). En caso contrario, no habrá sobreoscilación y no tiene sentido este parámetro.

- Sobreoscilación,  $M_p$ : Valor de pico máximo de la salida ponderado con el valor final. Sólo sucede si  $0 < \xi < 0.7$ .
- Tiempo de subida,  $t_r$ : el tiempo transcurrido en alcanzar por primera vez el 100% del valor final de la señal de salida.

El objetivo que se pretende es obtener expresiones matemáticas que determinen los valores característicos temporales y de sobreoscilación, a través de los parámetros característicos de los sistemas de segundo orden ( $\omega_n, \xi, \sigma, \omega_d$  y  $\theta$ ).

### 6.2.3.1 Tiempo de establecimiento, $t_s$

El tiempo que necesita en alcanzar el régimen permanente con un error del 5% o del 2% del valor final, depende básicamente de la componente envolvente de la señal de salida. Nótese de la ec. (6. 42) que la salida es una combinación entre un armónico y una exponencial monótonamente decreciente. Simplificando y no considerando el efecto senoidal, el 95% de la señal se alcanzará cuando la envolvente valga 0.05 ó 0.02, según criterio del 5% o el 2% del valor final.

$$y(t) = k \left( 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t + \theta) \right) \quad (6. 42)$$

Con el criterio del 5% de error del valor final, el tiempo de establecimiento es aproximadamente:

$$\frac{e^{-\sigma_s}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 0.05 = e^{-\pi} \quad (6. 43)$$

Para valores pequeños de coeficiente de amortiguamiento,  $0 < \xi < 0.7$ , el tiempo de establecimiento es inversamente proporcional a la constante de amortiguamiento:

$$\begin{aligned} \xi \ll 1 \rightarrow t_s &\cong \frac{\pi}{\sigma} \\ \uparrow \sigma &\rightarrow \downarrow t_s \end{aligned} \quad (6. 44)$$

### 6.2.3.2 Tiempo de pico, $t_p$

Este valor se dará cuando se alcance el valor máximo de la amplitud de la señal de salida. Tomando la primera derivada de la expresión analítica de la respuesta al escalón unitario e igualando a cero, permitirá definir los tiempos de máximos y mínimos de amplitud de la señal:

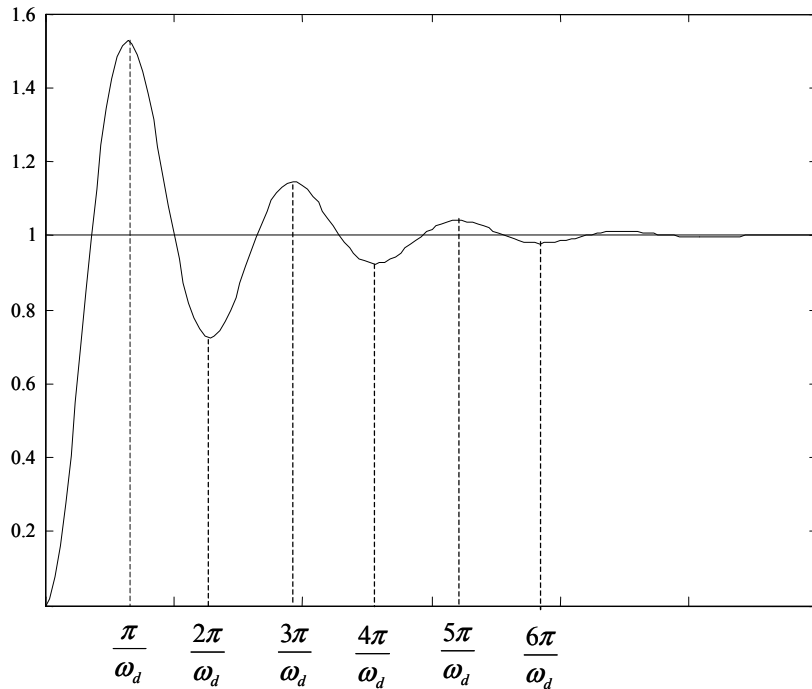
$$\dot{y} = 0 = -k \left( \frac{(-\sigma) \cdot e^{-\sigma t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t_p + \theta) + \frac{e^{-\sigma t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_d t_p + \theta) \omega_d \right) \quad (6.45)$$

Reordenando la expresión, los tiempos de máximos y mínimos estarán validados por la coincidencia del ángulo de apertura de los polos complejos y conjugados,  $\theta$ , con vueltas enteras de  $\pi$  radianes de  $\omega_d t$ :

$$t_g(\omega_d t_p + \theta) = \frac{\omega_d}{\sigma} = \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi \omega_n} = \operatorname{tg} \theta \quad (6.46)$$

La primera vuelta de  $\pi$  radianes de  $\omega_d t$  coincidirá con la amplitud máxima de la señal de salida. El tiempo de pico es inversamente proporcional a la frecuencia de amortiguamiento. Habrá tiempo de pico si hay sobreoscilación y ésta la habrá si el factor de amortiguamiento está entre 0.707 y 0.

$$\begin{aligned} \omega_d t_p = \pi &\rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \\ \uparrow \omega_d &\rightarrow \downarrow t_p \end{aligned} \quad (6.47)$$



### 6.2.3.3 Sobreoscilación, $M_p$

Hay sobreoscilación si el factor de amortiguamiento está entre 0.707 y 0. La sobreoscilación se dará en el tiempo de tipo,  $t_p$ , y corresponderá con el valor ponderado entre la máxima amplitud respecto al valor de salida en el régimen permanente. Al tener un sistema de ganancia estática  $k$ , la respuesta al escalón unitario, después de acabar el régimen transitorio, también será  $k$  veces de amplitud. Introduciendo el valor de tiempo de pico en la ec. (6. 42), para calcular el valor máximo y dando la definición de sobresocilación,  $M_p$ , quedará como:

$$M_p = \frac{y_{\max} - y_{rp}}{y_{rp}} = \frac{k \left( 1 - \frac{e^{-\sigma\pi/\omega_d}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\pi + \theta) \right) - k}{k} = \frac{1 + \left( \frac{e^{-\sigma\pi/\omega_d}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\theta) \right) - 1}{1} \quad (6. 48)$$

El seno del ángulo de apertura y el radicando son ambas iguales expresiones. La sobreoscilación dependerá exclusivamente del ángulo de apertura de los polos complejos,  $\theta$ . Obviamente, para los sistemas subamortiguados, el factor de amortiguamiento está correlado con  $\theta$ , a través del coseno, luego a menor  $\xi$  implica una mayor sobreoscilación. Por tanto, la sobreoscilación está unida a la estabilidad. Se considera que un sistema es estable y con respuesta temporal aceptable (compromiso entre estabilidad y rapidez), si el factor de amortiguamiento está entre 0.4 y 0.7, lo cual significa una sobreoscilación entre el 12% y el 30% (ver capítulo 13):

$$M_p = e^{-\pi\sigma/\omega_d} = e^{-\pi/t_g\theta} \quad ; \quad M_p [\%] = e^{-\pi/t_g\theta} \cdot 100\% \\ \downarrow \xi \rightarrow \uparrow M_p \quad (6. 49)$$

### 6.2.3.4 Tiempo de subida, $t_r$

Muy empleado en los catálogos de componentes electrónicos en el apartado de las características dinámicas. El tiempo de subida es el intervalo de tiempo que tarda el sistema o el dispositivo en pasar del 10% al 90% en una de sus señales.

Para el tratamiento matemático y con el objeto de simplificar la expresión, se considerará el paso de tiempo entre el 0% al 100% del valor final, esto es, la primera vez que pasa la señal por el valor final.

En sistemas subamortiguados excitados con una entrada en escalón, sucederá cuando el segundo término de la ec.(6. 42) se haga nulo:

$$\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t_r + \theta) = 0 \rightarrow \operatorname{sen}(\omega_d t_r + \theta) = 0 \quad (6.50)$$

La primera vez pasará cuando el arco seno pase por el valor de  $\pi$ :

$$\omega_d t_r + \theta = \pi \rightarrow t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} \quad (6.51)$$

#### 6.2.4 Respuesta de un sistema de 2<sup>o</sup> orden al impulso y a la rampa

La repuesta al impulso de un sistema de segundo orden será la derivada de la ec.(6. 42), respecto al tiempo, cuya ecuación hace referencia a la salida de un sistema de segundo orden ante una entrada en escalón. Obviamente las conclusiones deberán de coincidir con las conseguidas por descomposición en fracciones simples de los polos y dada por la ec. (6. 35):

$$y_{\text{impulso}}(t) = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma} \operatorname{sen}(\omega_d t) = \dot{y}_{\text{escalón}}(t) \quad (6.52)$$

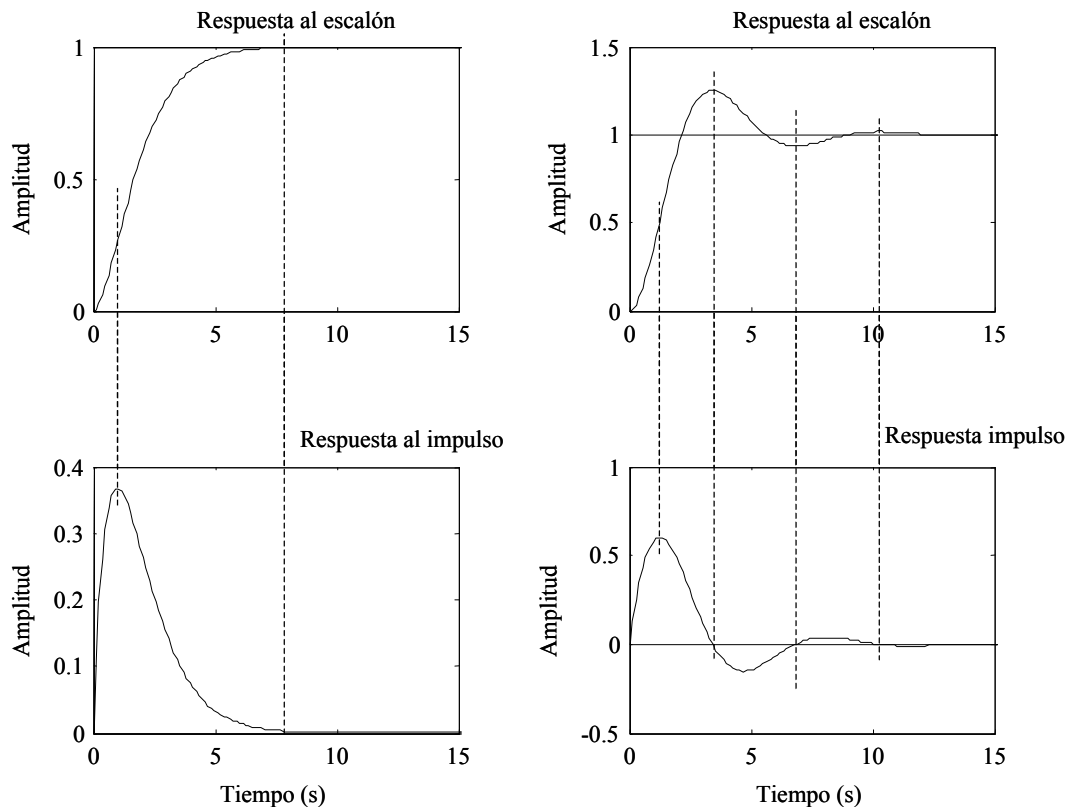


Figura 6. 9 a) Sistema sobreamortiguado b) sistema subamortiguado

La salida del sistema ante una entrada en rampa unitaria será la integral respecto al tiempo de la respuesta al escalón unitario:

$$y_{rampa}(t) = k \left( t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\sigma t}}{\omega_d} \operatorname{sen}(\omega_d t + \theta) \right) = \int_0^t y_{escalón}(\tau) d\tau \quad (6.53)$$

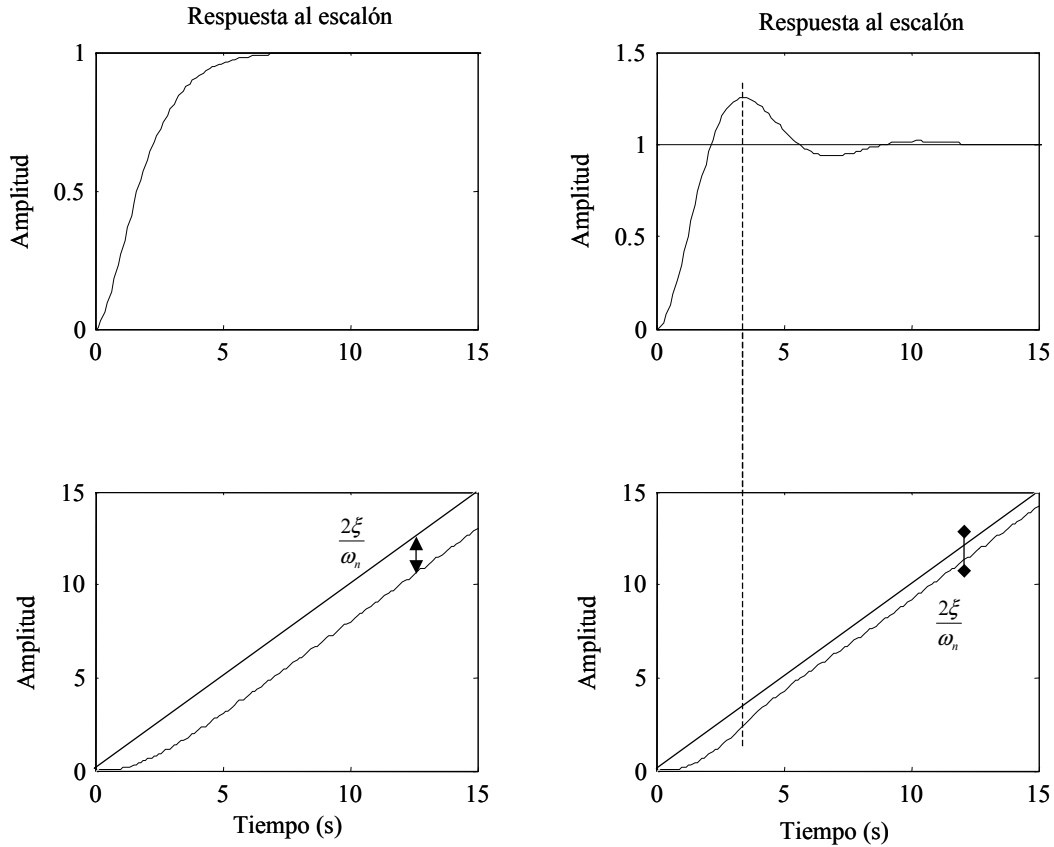


Figura 6. 10. Respuesta a la rampa unitaria con ganancia estática unitaria a) Sobreamortiguado b) Subamortiguado

### 6.3 Retardo puro

Como consecuencia de la inercia de los elementos de almacenamiento de energía que hay en los sistemas, suelen aparecer retardos netos de tiempo entre la señal de salida respecto a la excitación de entrada.

Hay muchos modelos de plantas que usan retardos puros en su función de transferencia. Así, por ejemplo, en la propuesta de Ziegler-Nichols para sistemas que ante una entrada en escalón, su salida se parezca a un sistema sobreamortiguado, el modelo del sistema se configura con un retardo en la transmisión más un polo de primer orden:

$$G_p(s) \approx e^{-sT_d} \frac{k}{1+sT} \quad (6.54)$$

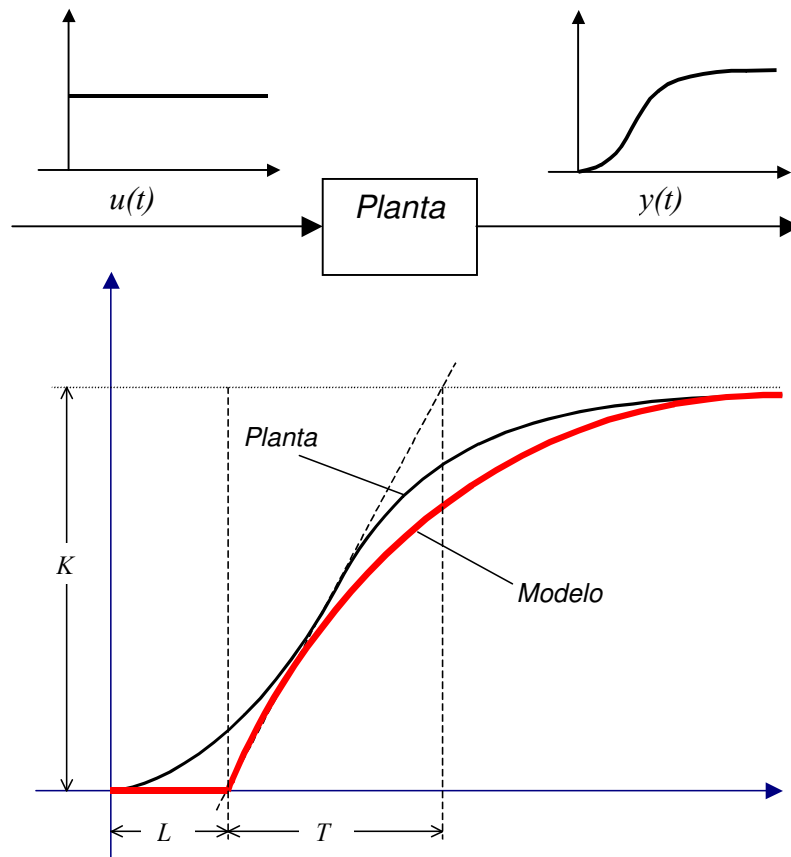


Figura 6. 11. Propuesta de modelado de plantas de Ziegler-Nichols

El término  $e^{-sT_d}$ , por el teorema de traslación temporal de las transformadas de Laplace, corresponde con un retardo puro de tiempo, siendo  $T_d$  el tiempo de ese retraso. Este concepto es empleado cuando se quiere expresar analíticamente un desfase de tiempo en la propagación de la señal al pasar por el sistema.

Esta expresión es no lineal y hace que la relación causa efecto no se pueda formalizar en una FDT de polinomios de coeficientes constantes. Por tanto, no es del tipo LTI. Sin embargo, existen varias aproximaciones de la función exponencial en términos lineales e invariante con el tiempo. Para valores pequeños de tiempo de retardo se puede aproximar a un polo de primer orden:

$$e^{-sT_d} \cong \frac{1}{1+T_d s}$$

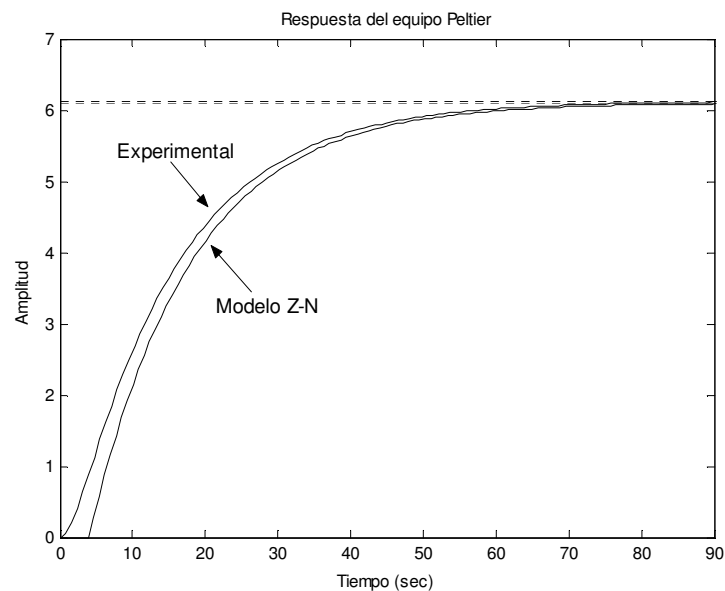
Aunque es más correcto mediante Pade:

$$e^{-sT_d} = \frac{1 - T_d \frac{s}{2}}{1 + T_d \frac{s}{2}} \quad (6.55)$$

Esta aproximación hace que las plantas que tienen un retardo puro se conviertan en sistemas de fase no mínima, al tener un cero en el semiplano positivo. Los sistemas de fase mínima son aquellos cuyos polos y ceros, de su FDT LTI, se encuentran en el semiplano negativo del dominio complejo.

### **Ejemplo 6.2**

El equipo de prácticas Peltier ante una respuesta de 5V en escalón, su salida es:



Modelar la planta según el criterio de Ziegler-Nichols y su FDT de tipo LTI.

La ganancia estática del equipo Peltier vendrá dada por el valor final en el régimen permanente ponderado por la amplitud del escalón:

$$k = \frac{6.12}{5} = 1.22$$

Sobre la gráfica se observa que hay un retardo puro de 4s y que el sistema tarda en alcanzar el 95% del valor final en 45 segundos:



$$T_d=4s \quad 3T = 45 - 4 = 41s \rightarrow T = \frac{41}{3} = 13.66s$$

El modelo de Z-N y su aproximación por Pade serán:

$$G_p(s) = e^{-sT_d} \frac{k}{1+sT} \approx \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{1 + \frac{T_d}{2}s} \frac{k}{1+sT}$$

dando valores,

$$G_p(s) = e^{-4s} \frac{1.22}{1+13.66s} \cong \frac{1-2s}{1+2s} \frac{1.22}{1+13.66s} = -\frac{s-0.5}{s+0.5} \frac{0.09}{s+0.073}$$

Empleando una aproximación más simplificado del retardo,  $e^{-sT_d} \cong \frac{1}{1+T_d s}$ , el sistema queda como:

$$G_p(s) \approx \frac{1.22/(4 \cdot 13.66)}{(s+0.25)(s+0.073)} = \frac{0.09}{(s+0.25)(s+0.073)} \approx \frac{0.045}{(s+0.07)(s+0.525)}$$

Similar a la última expresión conseguida por otra técnicas de identificación de sistemas y usadas en las prácticas de la asignatura.

## 6.4 Problemas

---

### Ejercicio 6.1

Dibujar aproximadamente, la respuesta al impulso, escalón y rampa del sistema cuya FDT es:

$$G(s) = \frac{1}{s + 10}$$

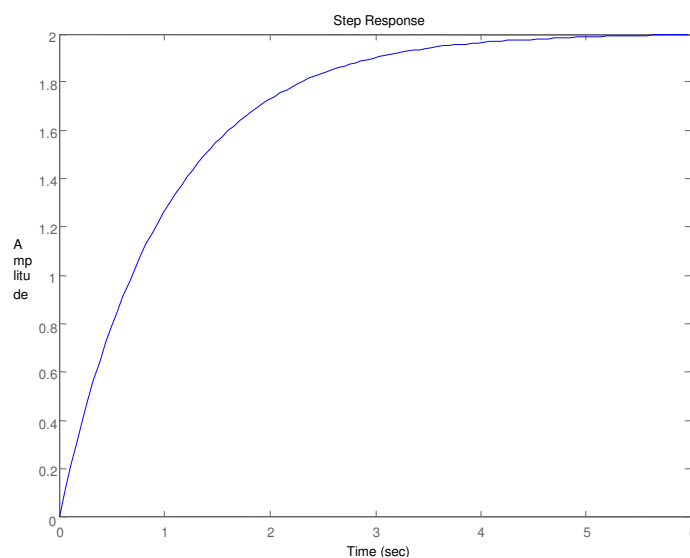
### Ejercicio 6.2

Dibujar la respuesta al escalón del sistema de:

$$G(s) = \frac{2s}{s + 2}$$

### Ejercicio 6.3

La figura representa la respuesta al escalón de un sistema de FDT desconocida. Obtener la respuesta del sistema ante una entrada en impulso:



### Ejercicio 6.4

Dibujar aproximadamente la respuesta al escalón de los siguientes sistemas:

$$G_1(s) = \frac{1}{s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{10}{s + 10}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$G_4(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

$$G_5(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$$G_6(s) = \frac{2}{(s+1)(s-2)}$$

$$G_7(s) = \frac{1}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

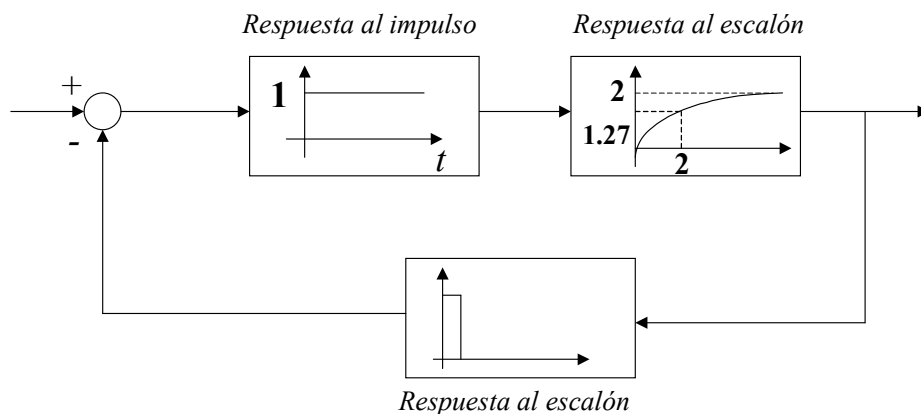
$$G_8(s) = \frac{1}{(s-1+j)(s-1-j)}$$

$$G_9(s) = \frac{1}{(s^2+1)}$$

$$G_{10}(s) = \frac{1}{(s^2-1)}$$

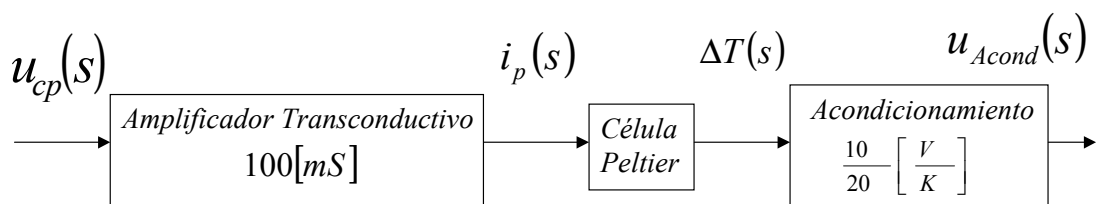
### **Ejercicio 6.5**

El sistema de la figura está formado por 3 bloques de FDT desconocidos. En su interior se ha representado la respuesta a diferentes entradas. Encuéntrese la FDT del sistema. ¿Es estable el sistema resultante?. ¿Cómo responderá al escalón?.



### **Ejercicio 6.6**

El equipo de prácticas de control de temperatura sobre una célula peltier tiene el siguiente diagrama a bloques:



La dinámica de la Peltier es aproximado por:

$$P_e(t) \cong \frac{\Delta T(t)}{R_{TH}} + C_{TH} \dot{\Delta T}(t)$$

$$P_e(t) \approx [\alpha T_c]_0 i_p(t) \quad (\text{linealización})$$

donde

$u_{cp}(t)$ : tensión de control peltier

$i_p(t)$ : corriente que circula por la Peltier

$\Delta T(t) = T_c - T_f$ ,  $T_c \equiv$  temperatura cara caliente

$T_f \equiv$  temperatura cara fría

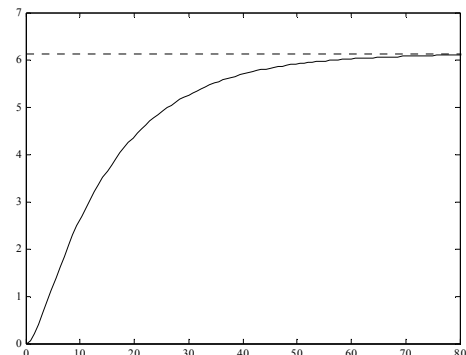
$u_{ACOND}(t)$ : tensión de salida proporcional a  $\Delta T(t)$

$P_e(t)$ : potencia eléctrica dada a la peltier

$\alpha$ : coeficiente de Seebeck 0.003 V/K

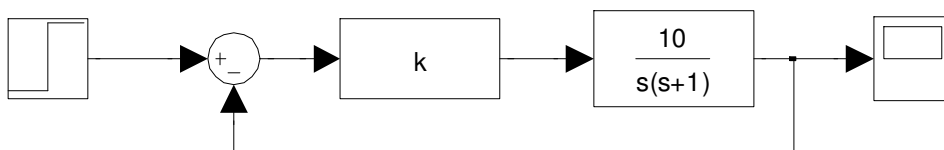
Ante una entrada en escalón de 5V, la respuesta es la dada por la figura. Considere que la temperatura ambiente es de 20°C. Determinar:

- FDT equivalente
- Diagrama de bloques
- Cálculo de  $R_{TH}$  y  $C_{TH}$



### Ejercicio 6.7

Dibujar la señal de salida ante una entrada en escalón unitario, para los siguientes valores de  $k$ : a) 0.02; b) 0.125; c) 2.5, comparándolos en cuanto a  $t_p$ ,  $t_s$ ,  $M_p$  y  $t_r$ .



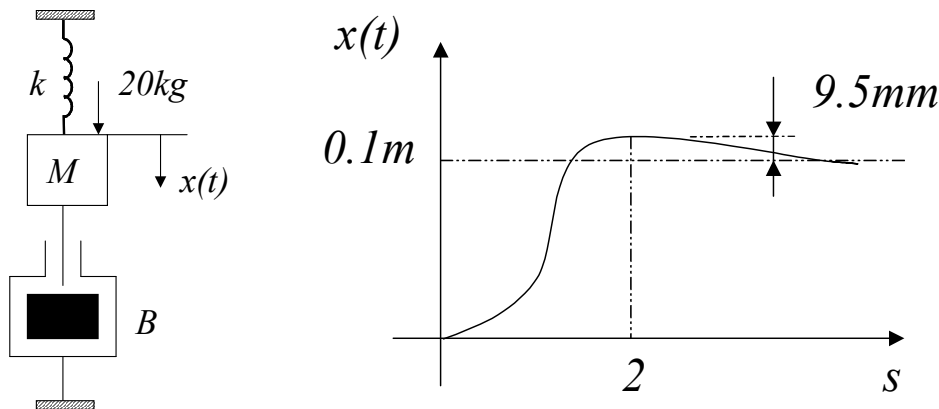
**Ejercicio 6.8**

A un sistema que ante escalón unitario responde con  $y(t)=5-5e^{-t}$  se le añade en serie un integrador y se realimenta el conjunto unitaria y negativamente.

- Obtener la respuesta impulsional del conjunto.
- Dibujar la respuesta a una entrada en escalón de 3 unidades de amplitud.

**Ejercicio 6.9**

El sistema de la figura responde ante una aplicación brusca de una fuerza de 20kg apartándose de su posición de equilibrio como se indica a continuación:



Determinar  $M$ ,  $B$  y  $k$ .

Derecho de Autor © 2008 Carlos Platero Dueñas.

Permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU, Versión 1.1 o cualquier otra versión posterior publicada por la Free Software Foundation; sin secciones invariantes, sin texto de la Cubierta Frontal, así como el texto de la Cubierta Posterior. Una copia de la licencia es incluida en la sección titulada "Licencia de Documentación Libre GNU".

La Licencia de documentación libre GNU (GNU Free Documentation License) es una licencia con [copyleft](http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) para [contenidos abiertos](http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html). Todos los contenidos de estos apuntes están cubiertos por esta licencia. La versión 1.1 se encuentra en <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>. La traducción (no oficial) al castellano de la versión 1.1 se encuentra en <http://www.es.gnu.org/Licencias/fdles.html>

**ESTA PÁGINA HA SIDO DEJADA EN BLANCO INTENCIONADAMENTE**