

Первый курс, весенний семестр
Практика по алгоритмам #2
STL, B-tree, RB-tree, RBST, Persistent

Contents

1	Новые задачи	2
2	Домашнее задание	3
2.1	Обязательная часть	3
2.2	Дополнительная часть	3

1 Новые задачи

1. Каждый работник характеризуется своим уникальным `id` (autoincrement), именем, фамилией и зарплатой. Придумайте структуру данных для обработки следующих запросов. Разрешается использовать только стандартные STL-контейнеры.
 - a) По заданным имени\фамилии выведите сумму зарплат всех работников с таким именем\фамилией.
 - b) Выведите `id`\фамилии\зарплаты всех работников с заданным именем.
 - c) Выведите `id`\имена\зарплаты всех работников с заданной фамилией.
 - d) Выведите `id`\имена\фамилии всех работников с заданной зарплатой.
 - e) Выведите все `id` работников, зарплата которых находится в заданном диапазоне $[salary_min, salary_max]$

Задание в том, чтобы выписать структуры, которыми вы хотите воспользоваться, а после на словах объяснить, как ими воспользоваться для ответов на запросы.
2. Дано множество точек на плоскости. Нужно быстро обрабатывать запросы:
 - a) добавить точку
 - b) удалить точку
 - c) вывести любую точку внутри области $d_i \leq y \leq u_i, x \leq r_i$.
3. В красно-черном дереве хранятся числа $\{1, 2, \dots, n\}$. Какие из этих чисел могут находиться в корне дерева?
4. Мальчик Петя взял пары (x_i, y_i) и построил на них декартово дерево. Привидите пример, на котором, полученное дерево не является статически оптимальным для ключей x_i и их частот y_i .
5. Придумайте операции `split` и `merge` для skip-list'a. Операции должны работать за $\mathcal{O}(\log n)$
6. Данные с диска читаются блоками размера ровно 4 килобайта, размер ключа равен 8 байт. Предложите конкретную реализацию B-дерева с конкретным k , в предположении, что в дереве всегда будет меньше 2^{32} вершин.
- 7*. Дан невыпуклый многоугольник из n вершин.
 - a) Даны m точек.
За $\mathcal{O}((m + n) \log n)$ для каждой точки определить, внутри она или снаружи.
 - b) Используя предподсчёт за $\mathcal{O}(n \log n)$ научиться в online по точке за $\mathcal{O}(\log n)$ определять, внутри она или снаружи.

2 Домашнее задание

2.1 Обязательная часть

1. (2) Придумайте структуру данных, которая для некоторого фиксированного $k = \mathcal{O}(1)$ позволяет за $\mathcal{O}(\log n)$ находить k минимальных элементов на отрезке $[l_i, r_i]$.
2. (2) Докажите, что очередная версия persistent RBST может не быть RBST (по определению RBST).
3. (3) Напишите код операции insert в AA-дерево в явном виде.
4. (3) Пусть дано произвольное Balanced Search Tree по ключу x , хранящее пары $\langle x, y \rangle$. Можно сохранить в вершинах дерева дополнительную информацию, если её можно пересчитывать через детей. Нужно обрабатывать запрос “на отрезке $l \leq x \leq r$ найти k минимальных y ” за время $\mathcal{O}(k \log k \log n)$.
5. (3) Необходимо отвечать на запросы для точек на плоскости:
 - a) добавить точку
 - b) удалить точку
 - c) перечислить все точки в области $d_i \leq y \leq u_i, x \leq r_i$.За сколько вы можете обработать последний из запросов?

2.2 Дополнительная часть

1. (5) По аналогии с рассказанной на лекции Persistent Queue за $\mathcal{O}(1)$ опишите Persistent Deque за $\mathcal{O}(1)$.
2. (6) Найдите матожидание максимальной глубины вершины в случайном дереве. На частичный балл можно доказать асимптотическую оценку.
3. (5) Пусть дано произвольное Balanced Search Tree по ключу x , хранящее пары $\langle x, y \rangle$. Можно сохранить в вершинах дерева дополнительную информацию, если её можно пересчитывать через детей. Докажите, что запрос “на отрезке $l \leq x \leq r$ найти k минимальных y и удалить их” **нельзя** обработать за время $\mathcal{O}(k + \log n)$.