

Первый курс, весенний семестр  
Практика по алгоритмам #6  
Matching, Cover, Independent Set

---

## 1 Новые задачи

1. Необходимо покрыть клетчатое поле  $n \times m$  с дырками доминошками. Каждая клетка поля должна быть покрыта доминошкой ровно один раз.  $\mathcal{O}(\text{Polynom}(n, m))$ .
2. Найти максимальную двудольную клику в двудольном графе за время  $\mathcal{O}(VE)$ . “Двудольная клика” – полный двудольный подграф.
3. Выбрать в двудольном графе подмножество вершин первой доли  $A$  такое, что величина  $|A| - |N(A)|$  максимальна, где  $N(A)$  – множество соседей  $A$  во второй доле.  $\mathcal{O}(VE)$ .
4. По данному максимальному паросочетанию в **двудольном** графе необходимо проверить, является ли оно единственным.  $\mathcal{O}(E)$ .
5. Верно ли утверждение, что в любом двудольном графе чётное число совершенных паросочетаний? Если верно, то докажите его, иначе приведите контрпример.
6. Рассмотрим ориентированный граф. За одно действие можно удалить все входящие или все исходящие (но не одновременно) из одной вершины рёбра. Необходимо удалить все рёбра графа за минимальное число действий.
7. За один ход можно покрасить один произвольный вертикальный или горизонтальный отрезок матрицы в белый цвет, мазки могут перекрываться. Необходимо за минимальное число действий привести чёрную матрицу к заданному виду.
8. Разбить массив на минимальное число подпоследовательностей таких, что в каждой подпоследовательности разность соседних элементов по модулю не превышает  $X$ .  $\mathcal{O}(n^3)$ .
9. По графу с заданной метрикой (расстояние между вершинами) ездят такси. Заказ на такси характеризуется тремя параметрами: начальная вершина, конечная вершина и время отправления из начальной вершины. Необходимо выполнить все заказы, используя минимальное число машин.
10. Придумайте алгоритм, который строит паросочетание, покрывающее множество  $A$  вершин первой доли за время  $\mathcal{O}(VE)$ , докажите его корректность.
- 11\*. Дана матрица, состоящая из неотрицательных вещественных чисел, обладающая следующим свойством: сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равна 1. Необходимо разложить заданную матрицу на сумму перестановочных матриц с коэффициентами за время
  - a)  $\mathcal{O}(n^5)$
  - b)  $\mathcal{O}(n^4)$Перестановочная матрица — перестановка единичной матрицы.
- 12\*\*. Классифицируйте рёбра заданного графа: какие обязательно лежат в максимальном паросочетании, какие могут лежать, и какие точно не лежат, за время:
  - a)  $\mathcal{O}(E^2)$
  - b)  $\mathcal{O}(VE)$
  - c)  $\mathcal{O}(E)$  по данному максимальному паросочетанию

## 2 Домашнее задание

### 2.1 Обязательная часть

1. (2) Для заданного клетчатого поля с дырками выберите максимальное количество попарно не смежных клеток. Смежными считаются клетки с общей стороной.
2. (3) Дан граф (возможно не двудольный) и алгоритм, который за  $\mathcal{O}(E)$  ищет дополняющую чередующуюся цепь. Для каждого ребра графа необходимо проверить, обязательно ли оно лежит в максимальном паросочетании.  $\mathcal{O}(VE)$ .
3. (2) В двудольном графе найдите лексикографически минимальное из минимальных по размеру контролирующих множеств.  $\mathcal{O}(\text{Polynom}(V, E))$ .
4. (3) Разбейте вершины ориентированного графа на циклы. Т.е. каждая вершина должна быть покрыта ровно одним циклом.
5. (2) Докажите, что в регулярном двудольном графе есть полное паросочетание.
6. (3) Дан произвольный неориентированный граф. Найдите максимальное по количеству мультиподмножество ребёр графа такое, что степень каждой вершины не более двух. Любое ребро можно брать два раза.
7. (3) Дано  $N$  различных прямых. Нужно выбрать максимальное по размеру подмножество прямых такое, что никакие две прямые не параллельны, и никакие прямые не пересекаются в точке с  $x = 0$

### 2.2 Дополнительная часть

1. (3) Найти за  $\mathcal{O}(VE)$  лексикографически минимальное из минимальных по размеру контролирующее множество.
2. (3) В двудольном графе сопоставим каждой вершине первой доли число  $a_i$  — её вес. Вес ребра задается весом его конца из первой доли, найдите паросочетание максимального веса за время  $\mathcal{O}(VE)$ .
3. (3) В двудольном графе сопоставим каждой вершине первой доли число  $a_i$ , а каждой вершине второй доли число  $b_i$  — их веса. Тогда вес ребра задается суммой весов его концов. Найдите паросочетание максимального веса за время  $\mathcal{O}(VE)$ .
4. (3) Приведите полиномиальный алгоритм для нахождения чётности количества совершенных паросочетаний в двудольном графе.