

Практика по алгоритмам #5

1. Задачи

1. Пусть есть структура данных, реализующая интерфейс `PriorityQueue` (`Add`, `DeleteMin`). Как расширить эту структуру данных операциями `Build`, `Delete`, `DecreaseKey`, `Merge`?
2. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков n . Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Пирожки можно менять местами. Память у робота маленькая, $O(\log n)$ бит. Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.
3. Найти отрезок массива, на котором $\min \times \sum$ максимально. $O(n)$.
 - a) Все числа положительны.
 - b) Числа целые, 32-битные. Решение с использованием минимума на отрезке за $O(1)$.
 - c) Числа целые, 32-битные. Простое решение.
4. Дана обычная бинарная куча, за сколько можно узнать k -й минимум?
 - a) $O(k \log n)$
 - b) $O(k^2)$
 - c) $O(k \log k)$
5. Оцените число сравнений, которое сделают
 - a) `MergeSort`, если в массиве ровно $n = 2^k$ элементов.
 - b) `HeapSort`, если в массиве ровно $n = 2^k - 1$ элементов.
 - c) `QuickSort`, если в массиве все элементы различны, а выбирается случайный.Во всех пунктах нужны точные константы.
6. Модифицируйте операцию `SiftUp` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $O(\log n)$, но при этом делала лишь $O(\log \log n)$ сравнений.
7. Модифицируйте операцию `SiftDown` для бинарной кучи так, чтобы она по-прежнему работала за $O(\log n)$, но при этом делала лишь $\log_2 n + O(\log \log n)$ сравнений.
8. Дан массив $A[1..n]$ из n различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти k ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.
 - a) По позиции в отсортированном массиве.

$$d(x, \text{median}) = |\text{pos}(x) - \text{pos}(\text{median})|,$$

где $\text{pos}(x)$ — позиция элемента x в отсортированном массиве.

- b) По значению.

$$d(x, \text{median}) = |x - \text{median}|.$$

2. Домашнее задание

2.1. Обязательная часть

Медианой называется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -я порядковая статистика.

1. (2) Придумайте детерминированную структуру данных на основе `heap`, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.
2. (2) Придумайте детерминированную структуру данных на основе `heap`: `Insert(x)`, `Delete{Median,Min,Max}()`, `Get{Median,Min,Max}()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.
3. (x) Какое минимальное число сравнений нужно, чтобы построить обычную бинарную кучу? Докажите максимально точную нижнюю оценку. Для простоты вычислений предположим, что в массиве $n = 2^k - 1$ элементов.
(x=2) Хотя бы $n - 1$ сравнений.
(x=4) Хотя бы n сравнений для $n \geq 10$.
(x=6) Оценка $1.3644 \cdot n + \mathcal{O}(1)$ без строгого доказательства.
(x=8) Оценка $1.4999 \cdot n + \mathcal{O}(1)$ без строгого доказательства.
Обязательным является только простая часть (x=4).
4. (2) Дан массив из n чисел и m чисел p_1, p_2, \dots, p_m , нужно за $\mathcal{O}(n \log m + m)$ для каждого i найти p_i -ую порядковую статистику.
5. (2) Практика.8а.
6. (2) Практика.8б.

2.2. Дополнительная часть

1. (2) Задача про `Insert(x)`, `DeleteMedian()` в предположении, что в куче никогда не будет больше n элементов, с использованием $n \times \text{sizeofElem} + \mathcal{O}(1)$ памяти.
2. (3) Выбрать на окружности максимальное число непересекающихся отрезков за $\mathcal{O}(n \log n)$.
3. (3) Практика.4с.
4. (3) Даны m чисел p_1, p_2, \dots, p_m . Придумайте детерминированную структуру данных на основе `heap`, которая умеет делать `Insert(x)` за $\mathcal{O}(m \log n)$, `GetStatistic(p_i)` за $\mathcal{O}(1)$ и `DelStatistic(p_i)` за $\mathcal{O}(m \log n)$.
5. (3) Практика.3с. (про $\min \times \sum \rightarrow \max$, числа могут быть отрицательны)