Первый курс, весенний семестр
Практика по алгоритмам #12
Игры и битовое сжатие

Contents

Новые задачи

1. **Флойд.**
   За $\mathcal{O}(n^3/w)$ выяснить для каждой пары вершин орграфа, есть ли путь из первой во вторую.
2. **Рюкзак.**
   Есть n предметов с весами $a_i \in \mathbb{N}$ и есть рюкзак, вмещающий вес S. За $\mathcal{O}(nS/w)$ узнать, какой максимальный вес можно набрать.
3. **Продление удовольствия.**
   Дана игра на орграфе. Предложите стратегию, гарантирующую выигрывающему максимально возможную длительность игры. По сути, можно считать, что проигрывающий стремится проиграть как можно быстрее (конечно, если ему не предоставят возможность выиграть :)), а выигрывающий выигрывать как можно дольше. Заметим, что если есть возможность играть бесконечно, находясь всегда в выигрышной позиции, то нужно ей пользоваться.
4. **Бюрократия.**
   Нужно подписать некоторый набор бумаг. Чтобы подписать бумагу номер i, нужно предварительно подписать бумаги номер $a_1, a_2, \ldots, a_{m_i}$. Ситуация настолько печальна, что могут быть циклы. Но в моменты времени $t_1 \le t_2 \le \ldots$ происходят чудеса — Самоподписываются бумаги с номерами $i_1, i_2, \ldots$! Бумаги подписываются в тот же момент, когда подписаны все нужные для этого бумаги. Выяснить для каждой бумаги, в какой момент времени она будет подписана.
5. **Симметрия.**
   Игра: игроки по очереди закрашивают квадратики в сетке $n \times n$, n нечетно, нельзя закрашивать два квадратика с общей стороной. Предложите выигрышную стратегию для одного из игроков.
6. **Игра на деке.**
   Есть ряд из n конфет, у каждой конфеты есть мера ее вкусности a_i. Каждый игрок может в свой ход съесть крайнюю справа или слева конфету. Какой максимальной суммарной вкусности может добиться каждый игрок? $\mathcal{O}(n^2)$.
7. **Малыш и Карлсон.**
   Малыш и Карлсон едят плитку трехмерной шоколадки из $n \times m \times k$ долек. Каждый по очереди разламывает шоколадку на два куска (не ломая дольки) и съедает меньший кусок. Когда остается одна долька, очередной игрок съедает ее и побеждает. Посчитайте функцию Гранди в зависимости от размеров шоколадки.
8. **Скамейки.**
   Есть ряд из n скамеек. Две команды людей по очереди сажают одного из своих участников на свободную скамейку, соседние справа и слева от которой также свободны. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитайте функцию Гранди игры в зависимости от числа скамеек.

9. **Хорды и окружности.**
Дана окружность с отмеченными на ней n точками. Игроки по очереди соединяют какую-нибудь пару точек хордой так, чтобы она не пересекала уже проведенные хорды. Касания так же запрещено. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитайте функцию Гранди.

10. **Пешки.**
Есть доска $3 \times N$. На ней стоят чёрные и белые пешки. В первой строке N белых, в третьей N чёрных. Ходят и кушают они, как пешки. Но есть не шахматное правило: если есть возможность кушать, нужно кушать! Кто не может ходить, тот проиграл. $N \leq 10^{18}$.

11. **Hucking bush.**
Дано корневое дерево. Игроки по очереди отрезают у дерева некоторое ребро, при этом пропадает компонента связности, не содержащая корень. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитайте функцию Гранди.

12. **Ним с разбиением кучек.**
Ним. В свой ход можно взять сколько-то камней из одной из кучек, а можно разбить одну из кучек на несколько произвольным образом. Посчитайте функцию Гранди.

13. **(*) 3-ним.**
Игра Ним, в которой игрок может брать камни сразу из двух кучек, причем из каждой свое число камней. Посчитайте функцию Гранди.

14. **(*) Misere Nim.**
Игра Ним, в которой выигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитайте функцию Гранди.

15. **(*) Игра Витхоффа.**
Ним из двух кучек, можно брать либо из одной кучки, либо сразу из двух, но одинаковое число камней. Посчитайте функцию Гранди.

Домашнее задание

Обязательная часть

1. **(3) Рюкзак: восстановление ответа.**
   Мы уже решили задачу о рюкзаке с использованием битового сжатия. Осталось научиться восстаналивать ответ – множество вещей, дающих в сумме нужный вес. Дополнительный балл за линейную память.

2. **(3+3) Шаблоны.**
   Проверить, подходит ли строка под шаблон, состоящий из букв, знаков `?`, `*`.
   a) За $\mathcal{O}(n^2/w)$.
   b) За $\mathcal{O}(n^2/log^2 n)$.

3. **(3) Строки и транзитивное замыкание.**
   Дана строка s длины n и словарь суммарной длины L. Всё над алфавитом Σ. За $\mathcal{O}(L\Sigma + n^3/w + n^2)$ для каждой подстроки строки s определить, представима ли она в виде конкатенации строк словаря. При конкатенации любую строку словаря можно использовать несколько раз.

4. **(3) Ретроанализ для суммы.**
   Пусть даны две симметричных игры $\langle G_1, v_1\rangle, \langle G_2, v_2\rangle$, примените ретроанализ для того, что понять выигрышная ли игра $\langle G_1 \oplus G_2, (v_1, v_2)\rangle$. Оцените время и память.

5. **(3) Шоколадка.**
   Дана прямоугольная шоколадка из $n \times m$ долек. Двое играют. За ход можно разломать любой из текущих кусков по любой линии разлома. Почти любой. Нельзя ломать куски размера $1 \times W$ и $W \times 1$ при $W < S$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? $\mathcal{O}(nm \max(n, m))$.

6. **(3) Ним$^+$.**
   Берём игру "Ним на нескольких кучках" и добавляем один дополнительный ход: разделить кучку на две равные части. Кто выиграет при правильной игре? $\mathcal{O}(1)$.

7. **(3) Игра в спички.**
   Дан n стеков из спичек. В i-м стеке a_i спичек. За ход можно взять от 1 до k спичек из любого стека. Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто выиграет при оптимальной игре обоих? $\mathcal{O}(n)$.

8. **(2+2) Максимальное число Гранди.**
   Дан ацикличный орграф из E рёбер. Оцените максимальное значение функии Гранди в этом графе. Приведите пример, на котором достигается максимум, и доказательство, что больше нельзя.

Дополнительная часть

1. **(4) Битовая строка.**
   Дана строка a из n бит. $\forall k = 1..n$ найти $\langle i, j\rangle$: $j - i = k, a_i = a_j = 1$. $\mathcal{O}(n^2/w)$.
2. **(6) Редакционное расстояние.**
   Найдите редакционное расстояние двух строк за время $\mathcal{O}(n^2/w)$.
3. **(4) Упорядоченный Ним.**
   Дан массив размеров кучек $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, двое играют в Ним с запретом нарушать неравенства. Кто выиграет при правильной игре? $\mathcal{O}(n)$.
4. **(4) Ним с делением.**
   Двое играют в Ним с дополнительным ходом: можно делить любую кучку на любые две части. Кто выиграет? $\mathcal{O}(n)$.
5. **(5) Hacking Bush на кактусе**. Вершинным кактусом называется граф, в котором каждая вершина лежит на не более чем одном цикле. Игра: дан кактус с выделенной вершиной v за ход можно удалить любое одно ребро, если какие-то вершины/рёбра перестали быть достижимы из v они то же удаляются. Двое ходят по очереди, кто не может делать ход, проигрывает. Кто выиграет?