

# Практика по алгоритмам #2

## Тема: суммы, циклы

9 сентября

Собрано 14 сентября 2014 г. в 12:45

---

### Содержание

<b>1</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Задачи про суммы</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Задачи про циклы for</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Бонус</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Домашнее задание</b>	<b>6</b>
5.1	Обязательная часть . . . . .	6
5.2	Необязательная часть . . . . .	6

# 1 Теория

- **Арифметическая прогрессия**

$$\sum_{n=a}^b n = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^a n = \frac{a(a+1)}{2}$$

- **Геометрическая прогрессия**

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

При  $-1 < q < 1$ :  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$

Если  $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$ :  $1 - q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^{-k} \approx \frac{1}{\varepsilon}$

- **Сумма гармонического ряда**

$$1 + \lfloor \log_2 n \rfloor \geq \frac{1}{1} + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}^1 + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^1 + \overbrace{\frac{1}{8} + \dots}^{1\dots} \geq$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \geq$$

$$\frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$$

- **Про интегралы**

Формула Ньютона-Лейбница:  $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

Пример:  $\ln'(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$

$$\int_a^b \left[ \min_{y \in [a..b]} f(y) \right] dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \left[ \max_{y \in [a..b]} f(y) \right] dx$$

Поэтому для монотонно убывающей  $f(x)$  имеем  $f(a) \geq \int_a^{a+1} f(x) dx \geq f(a+1)$ .

А для монотонно возрастающей  $f(x)$  имеем  $f(a) \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq f(a+1)$ .

Теперь оценим  $\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln x|_{x=1}^{x=n} = \ln n - \ln 1 = \ln n$ .  $\lfloor X(n) \rfloor = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ , значит,

$$X(n) - \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \geq \int_1^n \frac{1}{x} dx \geq \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = X(n) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \leq X(n) \leq \ln n + 1 \Rightarrow X(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$$

## 2 Задачи про суммы

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n \cdot 2$
2.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k} = n \cdot 101$
3.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = X(2n) - \frac{1}{2}X(n) = \ln 2n - \frac{1}{2} \ln n + O(1) = \ln \sqrt{n} + O(1)$
4.  $\prod_{k=2}^n (1 - k^{-2}) = \frac{n+1}{2n}$
5.  $\prod_{k=1}^n (2 \cdot 4^k) = 2^{n(n+2)}$

## 3 Задачи про циклы for

Во всех задачах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

1. Найти такие  $a, b, c$ :  $abc = N$ ,  $a + b + c = \min$ . Решение:

```
1. for (a = 1; a <= N; a++)
2.     for (b = 1; a * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

Ответ:  $\mathcal{O}(N \log N)$

2. Поиск делителей без деления

```
1. b = N;
2. for (a = 1; a * a <= N; a++) {
3.     while (a * b > N)
4.         b--;
5.     if (a * b == N)
6.         printf("%d %d\n", a, b);
7. }
```

Ответ:  $\mathcal{O}(N)$

3. Еще одно решение задачи (1)

```
1. for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
2.     for (b = 1; b * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

Ответ:  $\mathcal{O}(N^{1/2}N^{1/3}) = \mathcal{O}(N^{5/6})$

4. (\*) И еще одно решение задачи (1)

```
1. for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
2.     for (b = a; a * b * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

Ответ:  $\mathcal{O}(N^{2/3})$

5. Про строки

```
1. for (a = 1; a < n; a++)
2.     for (b = 0; b < n; b += a)
3.         ;
```

Ответ:  $\mathcal{O}(N \log N)$

6. Partition

```
1. a = 1, b = n;
2. while (a < b) {
3.     while (x[a] < M && a <= b) a++;
4.     while (x[b] > M && a <= b) b--;
5.     if (a <= b) swap(x[a++], x[b--]);
6. }
```

Ответ:  $\mathcal{O}(N)$

Дополнительный вопрос: что делает этот код?

7. Логарифмы

```
1. while (a >= 2)
2.     a = sqrt(a);
```

Ответ:  $\mathcal{O}(\log \log N)$  Дополнительный вопрос: а если бы вместо 2 было бы 1?

8. Решето Эратосфена

```
1. for (p = 2; p < n; p++)
2.     if (min_divisor[p] == 0) // is prime
3.         for (x = p + p; x < n; x += p)
4.             if (min_divisor[x] == 0)
5.                 min_divisor[x] = p;
```

Ответ:  $\mathcal{O}(N \log \log N)$  (пользуемся не доказанным фактом:  $p_n \approx n \ln n$ )

9. Перестановки и циклы

```
1. for (i = 0; i < n; i++)
2.     if (used[i] == 0)
3.         for (j = i; used[j] == 0; j = (j*17+2) % n)
4.             used[j] = 1;
```

Ответ:  $\mathcal{O}(N)$

## 4 Бонус

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$  (разобрано)

2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

3. Докажите, что  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}} = \mathcal{O}(1)$  (частично разобрано)

4. (\*\*)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/2}}{2^k}$

## 5 Домашнее задание

В текстовых задачах нужно описание решения, оценка времени работы, доказательство корректности. Если Вам это чем-то поможет, можно написать код.

### 5.1 Обязательная часть

1. Задача 4.2
2. Дана последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  и  $S \in \mathbb{N}$ . Найти  $l, r$  ( $1 \leq l \leq r \leq n$ ) такие, что сумма  $\sum_{i=l}^r a_i = S$ . Задачу требуется решить за линейное от  $n$  время.
3. Дано число, представленное  $n$  цифрами в десятичной записи без ведущих нулей. Из числа требуется вычеркнуть ровно  $0 \leq k < n$  цифр так, чтобы результат был бы максимальным. Задачу требуется решить за линейное от  $n$  время.

### 5.2 Необязательная часть

1. Задача 3.4, доказать  $\mathcal{O}(N^{2/3})$
2. Дана последовательность объектов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Над объектами определена операция сравнения на равенство. Известно, что в последовательности есть элемент присутствующий больше чем  $\frac{n}{2}$  раз. Требуется найти элемент  $a$  за линейное от  $n$  время и константу дополнительной памяти.