Первый курс, весенний семестр

Практика по алгоритмам #7

Потоки

1 Новые задачи

1. Дан двудольный граф. Каждой вершине сопоставлено число a_i.
Выберите максимальное количество рёбер так, чтобы степени вершин были не более a_i
2. Дан двудольный граф. Каждой вершине сопоставлен неотрицательный вес. Найдите вершинное покрытие минимального веса, независимое множество максимального веса.
3. Вам даны суммы элементов матрицы в каждом столбце и каждой строке. Необходимо восстановить матрицу, при условии, что она составлена из целых чисел от 0 до 100.
4. По правилам футбольного турнира в каждом матче должна победить одна из команд, то есть, не бывает 'ничьих'. Вам дана матрица уже сыгранный матчей. Можно ли так доиграть турнир, чтобы каждая команда выиграла заданное число раз?
   a) Каждая команда играет с каждой, для каждой команды известно, сколько игр она выиграла.
   b) Для каждой команды задано, с какими командами проводятся матчи (то есть, не каждая команда играет с каждой). Итоговое количество очков задано не для всех команд.
5. Дан неориентированный граф. Необходимо ориентировать его так, чтобы максимальная исходящая степень была минимальна.
   a) $\mathcal{O}(E^2 \log V)$
   b) $\mathcal{O}(E^2)$
6. В неориентированном графе без кратных рёбер необходимо удалить минимальное число рёбер так, чтобы увеличилось количество компонент связности. $\mathcal{O}(V \cdot Flow)$. Оценить время работы того же алгоритма более точно как $\mathcal{O}(E^2)$.
7. Рассмотрим ориентированный граф. За одно действие можно удалить все входящие в вершину i ребра за стоимость $a_i \geq 0$, или все исходящие из вершины i рёбра за стоимость $b_i \geq 0$. Необходимо удалить все рёбра графа за минимальную стоимость.
8. Дан взвешенный орграф. Веса неотрицательны. Найдите разрез между s и t минимальной стоимости.
9. Каждой вершине ориентированного графа сопоставлено число (не обязательно положительное) — её вес. Найдите замкнутое подмножество вершин максимальной суммарной стоимости вершин. Подмножество вершин называется замкнутым, если из него не исходят рёбра в другую часть графа.

10*. Какое максимальное количество уголков можно разместить на шахматной доске $n \times m$ с дырками? Уголком называется фигура, состоящая из трех клеток: центральная клетка черного цвета и две соседних с ней белых клетки со смежными сторонам.

11*. Найти разрез минимального среднего веса. Средний вес разреза — отношение суммарного веса рёбер к их количеству.

2 Домашнее задание

2.1 Обязательная часть

1. **(2) Единственность минимального разреза.**
   Дан граф и выделенные вершины s, t. За $\mathcal{O}(Polynom(V, E))$ нужно проверить, правда ли, что существует единственный минимальный разрез?
2. **(4) Грузовики. Непересекающиеся во времени пути.**
   Есть ориентированный граф с начальной и конечной вершинами. В начальной вершине есть K грузовиков. Грузовикам нужно попасть в конечную вершину. Время дискретно. За единицу времени каждый грузовик или стоит на месте, или перемещается в одну из соседних вершин. В любой вершине могут одновременно стоять несколько грузовиков. По любому из рёбер в каждый момент времени должен ехать не более чем один грузовик. Минимизируйте время, когда все грузовики окажутся в конечной вершине.
   a) **(2)** $\mathcal{O}(Polynom(V, E, K))$
   b) **(2)** $\mathcal{O}(K(V + K)E)$
3. **(3) Задача про трисочетание.**
   Даны девочки, мальчики и собачки.
   Для каждой пары “мальчик, девочка” известно, хочет ли девочка дружить с мальчиком.
   Для каждой пары “собачка, девочка” известно, нравится ли собачка девочке.
   Нужно максимальному количеству девочек выделить по мальчику и собачке так, что:
   a) Каждый мальчик не более чем с одной девочкой.
   b) Каждая собачка не более чем у одной девочки.
   c) Тройки гармоничны: девочка и хочет дружить с выбранным ей мальчиком, и собачка ей нравится.
4. **(2) Цикл через данные вершины в неорграфе.**
   Дан неориентированный граф.
   Найдите за $\mathcal{O}(E)$ вершинно простой цикл, проходящий через две данные вершины.
5. **(3) Цикл через данные вершины в орграфе.**
   Докажите, что аналогичная задача в орграфе NP-трудна.
   Указание: необходимо свести к ней задачу про два пути.
6. **(2) Глобальный вершинный разрез.**
   Удалить в связном неориентированном графе минимальное число вершин так, чтобы граф потерял связность. $\mathcal{O}(Polynom(V, E))$
7. **(3) Округление матрицы.**
   Дана матрица из вещественных положительных чисел. Необходимо так округлить элементы, чтобы суммы в строках и столбцах то же округлились. Подсказка: где-то здесь LR-поток.
8. **(3) Равномерное распределение.**
   Есть n рабочих и m работ. И есть матрица умения: “какой рабочий какие работы умеет делать”. Нужно максимально равномерно распределить работы между рабочими. То есть, каждой работе сопоставить рабочего, который умеет делать эту работу, а кроме того минимизировать $\max\limits_{i=1..n} k_i$, где k_i – количество работ, выданных i-му рабочему.

2.2 Дополнительная часть

1. **(3) Единственность разреза. $\mathcal{O}(E)$.**
   Пусть дан какой-то максимальный поток.
   a) За $\mathcal{O}(E)$ проверить единственность минимального разреза. С доказательством.
   b) За $\mathcal{O}(E)$ найти минимальный разрез $V = S \sqcup T$: $|S| = \max$.

2. **(4) Тест против Форда-Фалкерсона.**
   Найдите ориентированный граф с целочисленными пропускными способностями, на которых детерменированный алгоритм Форд-Фалкерсона с фиксированным порядком перебора рёбер, **пропускающий максимум по пути**, работает за экспоненту от V.

3. **(4) Подграф максимальной средней степени.**
   Дан неориентированнй граф. Нужно выбрать множество вершин A: $\frac{|E(A)|}{|A|} = \max$.

4. **(6) Япония. Инструменты и заказы.**
   Ситуация из Японии. Есть заказы и инструменты. Для каждого заказа известен список инструментов, который нужен, чтобы его выполнить. Каждый инструмент сделан умелыми японскими рабочими, поэтому бесконечно прочный, его можно один раз купить и много раз использовать. У каждого инструмента есть цена p_i. У каждого заказа есть прибыль, которую можно получить, выполнив заказ. Вы – бедный китайский рабочий. У вас изначально нет инструментов, но зато вы можете под нулевой процент в банке взять сколь угодно большой кредит, чтобы купить инструментов.
   a) **(3)** Вопрос: какую максимальную прибыль вы можете получить?
   b) **(3)** А теперь тот же вопрос, но ещё есть разные скидочные предложения!
   Скидка позволяет два инструмента i, j купить по специальной цене d: $\max(p_i, p_j) < d < p_i + p_j$. Каждый инструмент присутствует не более чем в одном скидочном предложении.