Практика по алгоритмам #10: графы и DFS

1. Задачи

1. Даны два множества вершин: A и B, за $\mathcal{O}(V+E)$ проверить, есть ли путь из некоторой вершины $a \in A$ в некоторую вершину $b \in B$.
2. Циклы
   a) Найти цикл в орграфе через данное ребро за $\mathcal{O}(E)$.
   b) Найти цикл в орграфе через данную вершину за $\mathcal{O}(E)$
   c) Найти цикл в неорграфе через данное ребро за $\mathcal{O}(E)$.
   d) Найти цикл в неорграфе через данную вершину за $\mathcal{O}(E)$.
   e) Найти в орграфе кратчайший цикл за $\mathcal{O}(VE)$.
   f) Найти в неориентированом графе какой-нибудь цикл за $\mathcal{O}(V)$.
3. Дан ациклчный орграф, найти в нем гамильтонов путь за $\mathcal{O}(V+E)$.
4. Дан ацикличный орграф, проверить единственность топсорта за $\mathcal{O}(V+E)$.
5. Ориентировать граф так, чтобы он стал сильносвязным за $\mathcal{O}(V+E)$.
6. Разделить неорграф на две клики, или проверить, что это невозможно за $\mathcal{O}(V+E)$.
7. У каждой вершины не более 3 врагов. Разбить на 2 доли так, чтобы с вершиной в долю попало не более 1 врага. $\mathcal{O}(V+E)$.
8. Эйлеровость
   a) Дополнение неорграфа до Эйлерова за $\mathcal{O}(V+E)$ минимальным числом ребер.
   b) Разбиение всех ребер графа на минимальное количество путей за $\mathcal{O}(V+E)$
   c) Найти гамильтонов цикл на графе бинарных строк длины n. Ребро между строками есть, если $n-1$-суффикс первой совпадает с $n-1$-префиксом второй.
9. Дополнение связного графа до сильносвязного
   a) Перейдем к конденсации
   b) Заметим стоки и истоки, построим новый граф
   c) Угадаем ответ (количество стоков и истоков)
   d) Решение #1: попытаемся провести ребро, которое на 1 уменьшает число истоков и стоков.
   e) Решение #2: попробуем замкнуть в цикл любое максимальное по включению паросочетание.
   f) Решение #3: $\mathcal{O}(V+E)$ возьмем любой максимальный по включению непересекающийся по вершинам набор путей из истоков в стоки.
10. Есть неорграф, нужно выбрать max число циклов так, чтобы каждый следующий содержал хотя бы одно новое ребро. $\mathcal{O}(E)$.

2. Домашнее задание

2.1. Обязательная часть

1. (2) Найти в неорграфе такой цикл, что максимальный вес ребра этого цикла минимален. $\mathcal{O}((V+E)\log E)$.
2. (2) Есть комнаты и двери между комнатами. Нужно каждую дверь покрасить с одной стороны в зеленый цвет, с другой в оранжевый цвет так, чтобы для каждой комнаты количества зеленых и оранжевых дверей отличались не более чем на один. $\mathcal{O}(V+E)$.
3. (2) Найти все вершины, которые обязательно будут лежать на пути от a до b. $\mathcal{O}(V+E)$.
4. (2) У каждой вершины есть вес. Вес любого ребра – сумма весов концов. Дан неорграф, дополнить его до Эйлерова, добавив ребра минимального суммарного веса.
5. (3) Дан 2^k-регулярный двудольный граф (все степени равны 2^k). Нужно разбить все его ребра на *совершенные* паросочетания за $\mathcal{O}(kE)$.
6. (3) Разбить множество вершин на две доли так, чтобы у каждой вершины был сосед в другой доли.

2.2. Дополнительная часть

1. (4) Нужно найти количество способов удалить из связного неорграфа два ребра так, чтобы он перестал быть связным. $\mathcal{O}(V^2)$.
2. (4) Дан неорграф. Ориентировать его так, что максимальная исходящая степень была минимальна. $\mathcal{O}(E^2)$. Можно еще на полилог.
3. (4) Сильная связность (9-я задача с практики). Решение за $\mathcal{O}(V+E)$: построим конденсацию, выделим стоки и истоки. Затем найдем за $\mathcal{O}(V+E)$ максимальное по включению множество непересекающихся по вершинам путей из истоков в стоки. Т.е. не существует еще одного пути из истоков в стоки, не пересекающегося с уже выбранным. Пусть i-й путь начинается в a_i, заканчивается в b_i, всего путей k. Добавим ребра $(b_1, a_2), (b_2, a_3), \ldots, (b_n, a_1)$. Это неполное описание решения. Задача в том, чтобы довести его до конца, доказать корректность, доказать линейность времени работы.
4. (4) Есть n проводов. Есть круг из $2n$ разъемов, каждый разъем имеет тип от 1 до n (соответствующий номеру провода, который можно туда воткнуть), каждый тип встречается ровно два раза. У каждого провода есть цвет. В целях безопасности нельзя втыкать провода одинакового цвета в соседние разъемы. Найти способ соединить каждый из n проводов с одним из двух подходящих разъемов, не нарушив правила на цвета соседних.