Первый курс, весенний семестр
Практика по алгоритмам #13:
Линейная алгебра

Contents

Новые задачи

1. **Разложение вектора в базисе.**
   a) базис – произвольный набор линейно независимых векторов
   b) базис – трапецевиная матрица
   c) ортогональный базис

2. **Обратная матрица.**
   a) $\mathbb{R}, \mathcal{O}(n^4)$
   b) $\mathbb{R}, \mathcal{O}(n^3)$
   c) $\mathbb{F}_2, \mathcal{O}(n^3/w)$

3. **Точка в параллелепипеде.**
   Даны d-мерная точка и d-мерный параллелепипед.
   Проверить, лежит ли точка в параллелепипеде.

4. **Найти расстояние от точки до подпространства.**
   Дана d-мерная точка и набор из k d-мерных векторов, базис линейного подпространства. Найти расстояние от точка до подпространства.
   a) Дополнив базис до полного ортонормированного.
   b) Методом Гаусса.
   c) Решая $|Ax - b| \to \min$

5. **Выбор базиса минимального веса.**
   Дан набор векторов с весами, вектора образуют линейное пространство. Выбрать из данных векторов базис этого пространства минимального веса.

6. **Найти реккурентность.**
   Вы знаете, что последовательность $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ образована линейным реккурентным соотношением с коэффициентами $1, 1$: $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$. Решим обратную задачу: дана последовательность длины n, найти минимальное k и k коэффициентов, задающие данную последовательность, как линейную реккурентность.

7. **Минимальное квадратичное.**
   Дана точка b и вектора $a_1, \ldots, a_n$. Выразить вектор $b = \sum a_i x_i$: $\sum x_i^2 \to \min$.

8. **Вероятность выжить.**
   a) Дан грид с дырками. Вы начинаете в $(1, 1)$ за ход переходите с вероятностью $\frac{1}{2}$ вправо, с вероятностью $\frac{1}{2}$ вверх. Если пытаетесь выйти за пределы поля, ничего не происходит. Если попадаете в дырку, умираете. С какой вероятностью вы дойдёте до клетки (n, m) живым?
   б) $p_{right} = \frac{1}{3}, p_{left} = \frac{1}{6}, p_{up} = \frac{1}{3}, p_{down} = \frac{1}{6}$. То есть граф теперь содрежит циклы и вообще непонятно, сходится ли процесс.

9. **(*) Матричная игра.**
   Игра на матрице. Первый выбирает строку, второй столбец. Делают они это независимо, не зная, что делает соперaник. Выигрыш первого игрока – число в матрице. Первый его максимизирует, второй минимизирует. Вероятностная стратегия для первого: выбрать такие вероятности для строк $p_1, \ldots, p_m$, чтобы математичиеское ожидание выигрыша не зависит от хода второго игрока. Найти любой такой вектор p.

10. **(*) Задача про XOR.**
    Даны n чисел от 0 до $2^n - 1$. Выбирается случайное подмножество A этих n чисел.
    Найдите за $2^{n/2} \cdot Poly(n)$ матожидание величины $popcount(XOR(A))^2$.
    Подсказка: ответ для $\{a_1, a_2\}$ равен ответу для $\{a_1, a_2\,\hat{}\,a_1\}$

Домашнее задание

Обязательная часть

1. **(2+2) Гаусс на многочленах.**
   Дана квадратная матрица A из элементов $\mathbb{R}[x]$.
   a) Найти её определитель. Укажите время работы.
   b) В предположении, что матрица не вырожденная, решите систему уравнений $Ax = b$.

2. **(3+2) Винни-Пух и мёд.**
   У Винни-Пух есть бесконечные запасы из k видов горшочков мёда. Каждый вид горшочков характеризуется целым числом – сколько дней нужно Винни-Пуху, чтобы съесть весь мёд из одного такого горшка. Винни-Пух уже провёл серию экспериментов вида "взять несколько горшочков мёда, записать день недели, когда эксперимент начался, есть мёд, пока тот не закончится, записать день недели, когда эксперимент закончился". По понятным причинам Винни очень любит экспериментировать. А Кролик не любит мёд, но любит предсказывать будущее. Помогите Кролику, зная результаты первых k экспериментов, сказать, можно ли однозначно сказать результат следующего эксперимента. Оцените время работы алгоритма.
   a) Винни берёт произвольные множества горшков.
   b) Каждый раз Винни берёт горшки не более чем двух разных типов.

3. **(3) Matrix decomposition.**
   Дана матрица A размера $n \times m$. Найти такое представление $A = B \cdot C$, что B имеет размер $n \times k$ и k минимально.

4. **(2) Расстояние в n-мерном пространстве.**
   Даны m точек в n мерном пространстве и k линейно независимых векторов, задающих подпространство. За время $\mathcal{O}(kn(k+m))$ найти для каждой точки расстояние до подпространства.

5. **(3) Оптимальное предтавление точек.**
   Даны $m \geq n$ векторов n-мерных векторов, порождающих всё n-мерное пространство. Даны k запросов "выразить точку в виде линейной комбинации, минимизируя сумму квадратов коэффициентов". Ответить на все запросы за $\mathcal{O}((m+k)n^2)$.

6. **(2+3) Матожидание времени путешествия.**
   Дана полоска из n клеток. Изначально мы находимся в первой. За один ход выбирается случайное число x из множества
   a) $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$
   b) $\{-\frac{k}{2}, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, k\}$

   И мы смещаемся из клетки в i в клетку $\max(1, \min(i+x, n))$. Найти матожидание количества ходов до клетки n.

Дополнительная часть

1. **(4) Разбиение графа на две доли.**
   Дан неориентированный граф. Нужно разбить его вершины на две доли так, чтобы после удаления рёбер между долями степени всех вершин были чётны.
2. **(4) Пересечение сфер.**
   Даны k n-мерных сфер. Найти все точки пересечения, или сказать, что их бесконечно много.
3. **(3) Матожидание пути.**
   Дан грид со стенками и **дырками**, мы идём из $(1, 1)$ в (n, m). В каждый момент времени вероятности сдвинуться вправо и вверх равны $\frac{1}{3}$, а влево и вниз $\frac{1}{6}$. При попытки идти в стенку ничего не происходит. При попытки идти в дырку мы умираем. Грид таков, что если мы запустим марковский процесс, то мы или свалимся в дырку, или дойдём до конца. Пусть мы дошли до конца, не упав в дырку. Какая средняя длина пути была пройдена?
4. **(4) Максимальный равномерный поток.**
   Поток называется равномерным, если для любых двух вершин a и b любые два пути из a в b, по которым течёт поток, имеют одинаковую длину (количество рёбер). Найдите в неорграфе максимальный равномерный поток.