Практика по алгоритмам #8: динамика

1. Задачи на динамику

1. Задачи про паросочетание
   a) Найти максимальное по весу паросочетание на дереве за $\mathcal{O}(n)$.
   b) Найти максимальное по весу паросочетание на цикле за $\mathcal{O}(n)$.
   c) Найти максимальное по весу паросочетание на связном графе из n вершин и n ребер за $\mathcal{O}(n)$.
2. Задачи на подотрезках и префиксах
   a) Умножить матрицы $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ за минимальное количетсво умножений $\mathcal{O}(n^3)$.
   b) Разбить строку на минимальное число палиндромов за $\mathcal{O}(n^2)$.
   c) Самая длинная подпоследовательность-палиндром за $\mathcal{O}(n^2)$.
   d) Подходит ли строка под шаблон из `*?x` за $\mathcal{O}(nm)$.
3. Математика или динамика?
   a) Сколько существует правильных скобочных последовательностей из n скобок?
   b) Сколько существует почти правильных скобочных последовательностей из n скобок (несколько скобок в конце остались открытыми)?
   c) Сколько строк из n круглых скобок, которые являются подстрокой правильной скобочной последовательности?
   d) Сколько способов n одинаковых объектов разбить на k множеств?
   e) Сколько способов n разных объектов разбить на k множеств одинакового размера (две версии: множества упорядочены и нет)?
   f) Сколько способов n разных объектов разбить на k множеств произвольного размера (две версии: множества упорядочены и нет)?
   g) Сколько способов разбить число n на k упорядоченных слагаемых?
   h) Сколько способов разбить число n на k упорядоченных слагаемых, каждое не более m?
   i) Сколько способов разбить число n на k неупорядоченных слагаемых?
   j) Сколько способов разбить число n на k неупорядоченных различных слагаемых?
   k) Известно, что есть k различных деревьев из v вершин с точностью до изоморфизма. Сколько существует различных множеств из n деревьев из v вершин каждое?
   l) Сколько существует перестановок с k локальными минимумами?
4. Задача калькулятор: получить из числа 1 число N операциями `+1`, `*2`, `*3`. Минимизировать число операций. Решите ее за полилогарифм от N. Корректность и время работы решения требуется обосновать.

2. Домашнее задание

2.1. Устная часть. Нужно решить, можно не записывать.

1. Сколько существует счастливых билетов (сумма цифр в первой половине равна сумме цифр во второй) длины n?
2. Сколько существует строк из $0, 1, 2$, не содержащих, как подстроку две одинаковые цифры подряд?
3. Сколько существует строк из $0, 1, 2$, не содержащих, как подстроку два нуля подряд?
4. Сколько существует строк из $0, 1, 2$, не содержащих, как подстроку s, $|s| \le 50$?
5. Разбить число до 10^5 на сумму минимального числа кубов. А до 10^9?

2.2. Обязательная часть

1. (2) Операция: `ans += a[i+1]*a[i]*a[i-1], a[i] = 0`. Массив циклический. Придумать последовательность операций, максимизирующий `ans`.
2. (2) Найти максимальное по весу паросочетание на кактусе за $\mathcal{O}(n)$. Кактус – граф, в котором каждое ребро принадлежит не более чем одному циклу.
3. (2) Взвешанный бинарный поиск элемента x. Бинарный поиск взвешенный, если стоимость обращения к i-му элементу массива равна $c_i > 0$. Мы не знаем сам массив, не знаем x, который будем искать, знаем только массив стоимостей c. Нужно за $\mathcal{O}(n^3)$ найти стоимость поиска элемента в худшем случае. Внутри бинарного поиска не обязательно сравнивать с серединой, мы сами выбираем элемент, с которым сравнивать.
4. (2) Доказать, что в задаче `I` про котят будет $\mathcal{O}(\log n)$ состояний. Условия задач.
5. (2) Пусть вы умеете искать наибольшую **возрастающую** последовательность за $\mathcal{O}(n \log n)$, покажите, как можно найти наибольшую **общую** последовательность за $O(n \log n)$ в случае, когда в каждом из массивов все элементы различны.

2.3. Дополнительная часть

1. (3) Описать любой алоритм, который находит наибольшую общую подпоследовательность за $o(n^2)$.
2. (4) Посчитать за $\mathcal{O}(nk)$ количество поддеревьев данного дерева из n вершин, содержащих корень дерева и ровно $k \le n$ вершин. Поддеревом здесь называется связный подграф. Можно решить за $O(n^3)$, это 2 балла. Можно решить за $O(n^2)$, это 3 балла.
3. (4) Количество деревьев из n вершин с точностью до изоморфизма за $\mathcal{O}(n^3 poly(\log n))$.