Índice

1. Vectores

1.1. vectores

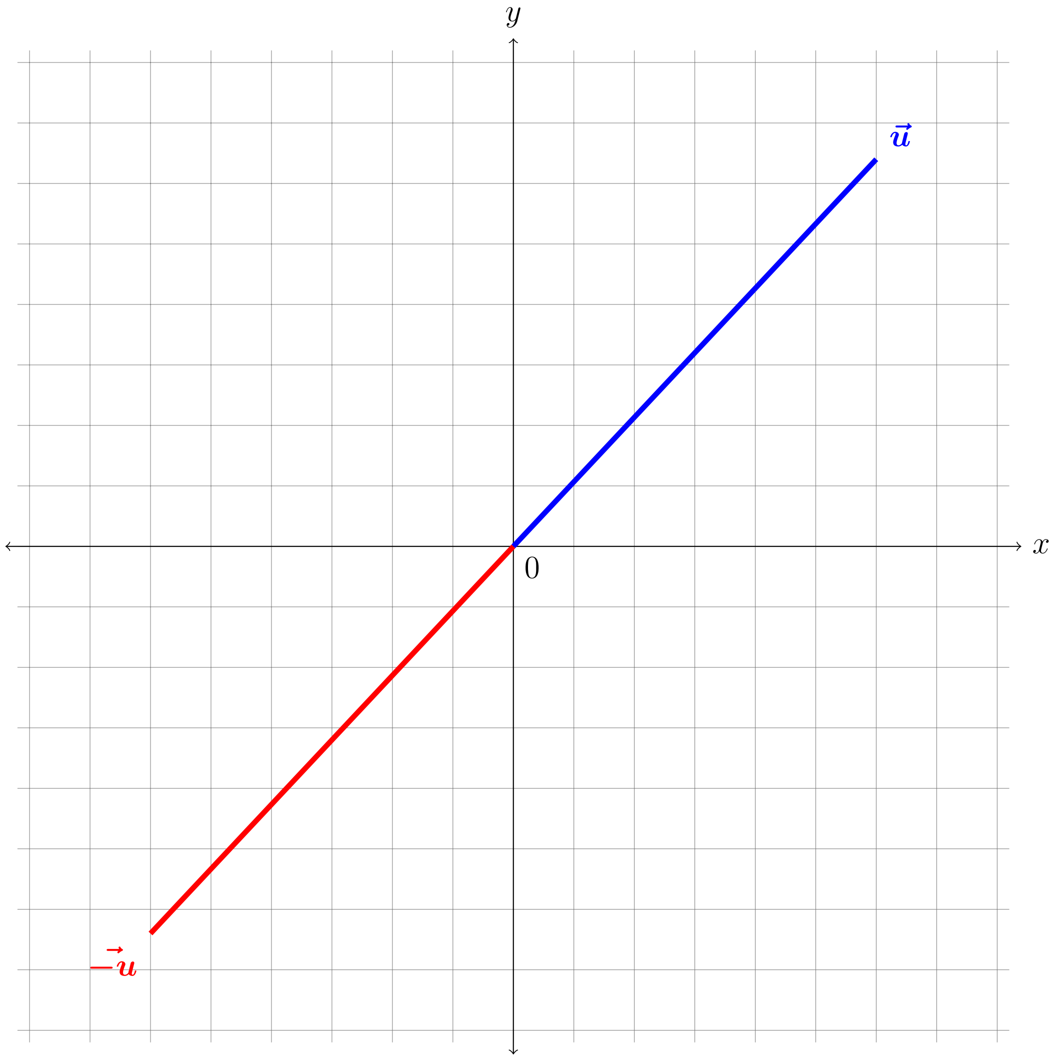
un vector es un ente matemático, es decir, es una figura creada para dar forma a la realidad como lo son la recta o el plano. Fue creada para representar fenómenos que no pueden ser descritos solamente con números, por ejemplo, la velocidad y las fuerzas. Son, por tanto, una construcción mas compleja que la de los números y representan **una magnitud con dirección y sentido**. Gráficamente son representados como una recta con cierto ángulo de inclinación y un sentido marcado por una flecha, la dirección a la que apuntan. Para poder representar un vector se necesitan al menos 2 puntos, el inicio del vector y el final (gráficamente, si unes 2 puntos obtienes una recta, algebraicamente se restan $punto_{final} - punto_{inicial} = magnitud_{vector}$)

Existen muchos vectores,y estos son utilizados para dar representación a fenómenos físicos. En general un vector de dimensión n es una tupla (un conjunto ordenado invariable de la forma $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de números reales.

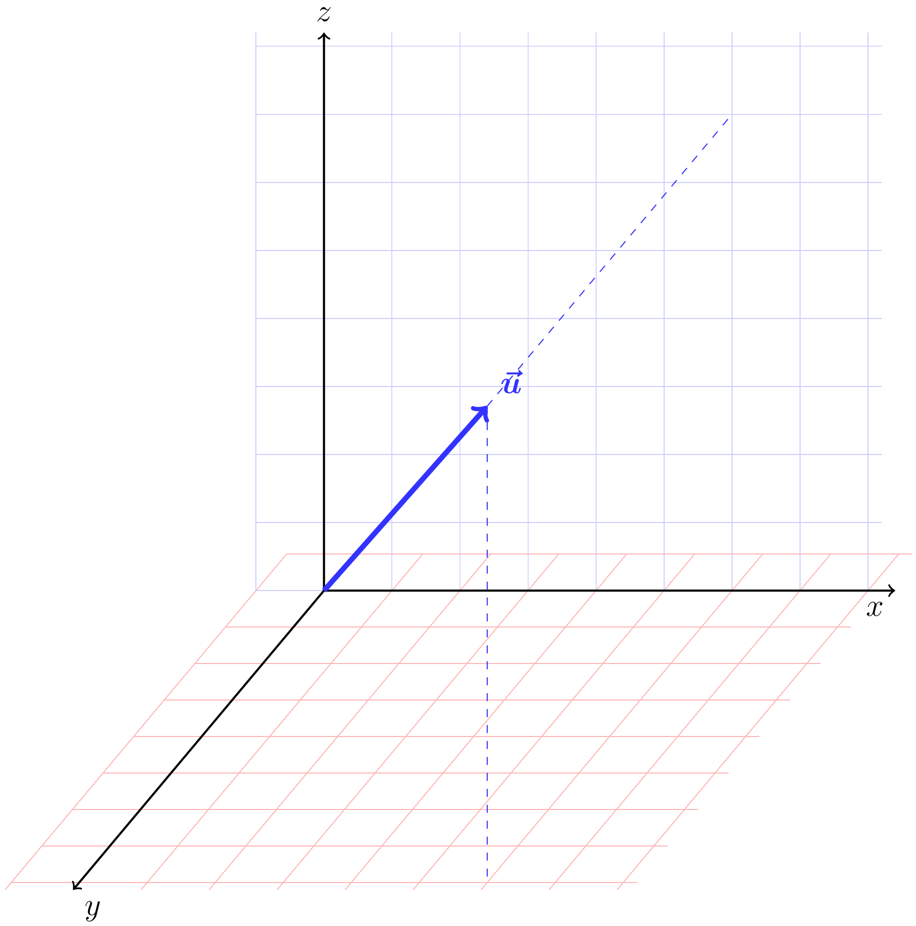
Un vector posee 2 características:

- Modulo, es su valor, la longitud del segmento o la cantidad de espacios que se mueve en un determinado eje (o ejes).
- Dirección, En algunos textos se descompone como dirección y sentido. Es el ángulo del segmento con respecto a un eje (normalmente x) y su sentido con respecto al origen (va o no hacia ese punto). Ejemplo: 29^o noreste sentido hacia arriba.

Gráficamente un vector de 2 dimensiones en el origen se ve de la forma:



y de 3 dimensiones, en el origen se ve de la forma:



Adicionalmente, los vectores poseen una **dimensión**, esta representa la cantidad de coordenadas las cuales cubre. Los vectores mas usados son los bidimensionales, que poseen 2 coordenadas, X, Y y representan el plano o espacio bidimensional, son duplas ordenadas y pertenecen al espacio $\mathbb{R}^2$ y los tridimensionales, que utilizan 3 coordenadas X, Y, Z y representan el espacio tridimensional perteneciendo al espacio $\mathbb{R}^3$.

De igual forma, pueden utilizarse tantas dimensiones como hagan falta y el vector pertenecerá al espacio $\mathbb{R}^n$ donde n es la cantidad de coordenadas que posee y es un numero natural.

Cabe destacar que estos vectores también son muy utilizados ya que permiten extrapolar fenómenos físicos de mas variables, como por ejemplo el comportamiento de una caldera, o en el caso de 4 dimensiones cubrir también el tiempo (x, y, z, t) y describir una fuerza o suceso en un espacio y tiempo determinado.

Los vectores normalmente se utilizan para representar fuerzas, movimientos, variaciones, es decir cualquier condición física que implica una potencia o cambio ejercido en una dirección particular.

Por simplificación, se trabajara en su mayoría con vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ mas todos los conceptos son Extrapolables.

Las operaciones, básicas, que se realizan con vectores son la suma algebraica, multiplicación por un escalar. Adicionalmente esta definida la multiplicación entre vectores como **producto punto** y **producto cruz**.

la división vectorial no esta definida!, sin embargo, para ciertos tipos de vectores como fasores o números complejos se define una multiplicación y una división especial.

1.1.1. Representación

Los vectores pueden ser representados de 2 formas, mediante la descripción individual de sus características o mediante una magnitud y uno ángulos de referencia. Ambas formas de representación son equivalentes y se pueden llevar de una forma a otra.

La forma de magnitud y ángulo suele ser utilizada para vectores en $\mathbb{R}^2$ y mas específicamente en un conjunto de vectores con propiedades adicionales como lo son los números complejos, ya que es fácil la transformación, el producto y la división definido **únicamente para ellos** y para representarlos solamente se necesita un ángulo. Para vectores de mayor dimensión suele usarse la representación por coordenadas, esto es debido a que para representar una linea en 3 direcciones hacen falta al menos 2 ángulos, uno de giro horizontal y otro vertical (a esto se le conoce como coordenadas esféricas).

1.1.2. Representación en coordenadas rectangulares

Esta forma de representación se basa en descomponer el vector en los valores asociados que poseen en cada eje. Por ejemplo, si el vector es de $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas x e y, por lo tanto el vector puede ser representado como la unión del origen (o un punto de referencia cualquiera) y los desplazamientos correspondientes en los ejes X,Y , si el vector es de 3 coordenadas, entonces serian X,Y,Z y así sucesivamente. A este tipo de coordenadas se le conocen como **coordenadas cartesianas o rectangulares**.

De esta forma, un vector puede escribirse de 2 formas, como tupla ordenada o como suma de componentes, en donde cada componente va a estar indicada por un **vector unitario**, el cual no es mas que una letra la cual indica a que eje corresponde; $\hat{\imath}$ para x, $\hat{\jmath}$ para y, $\hat{k}$ para k.

De esta forma, un vector puede ser escrito de la forma:

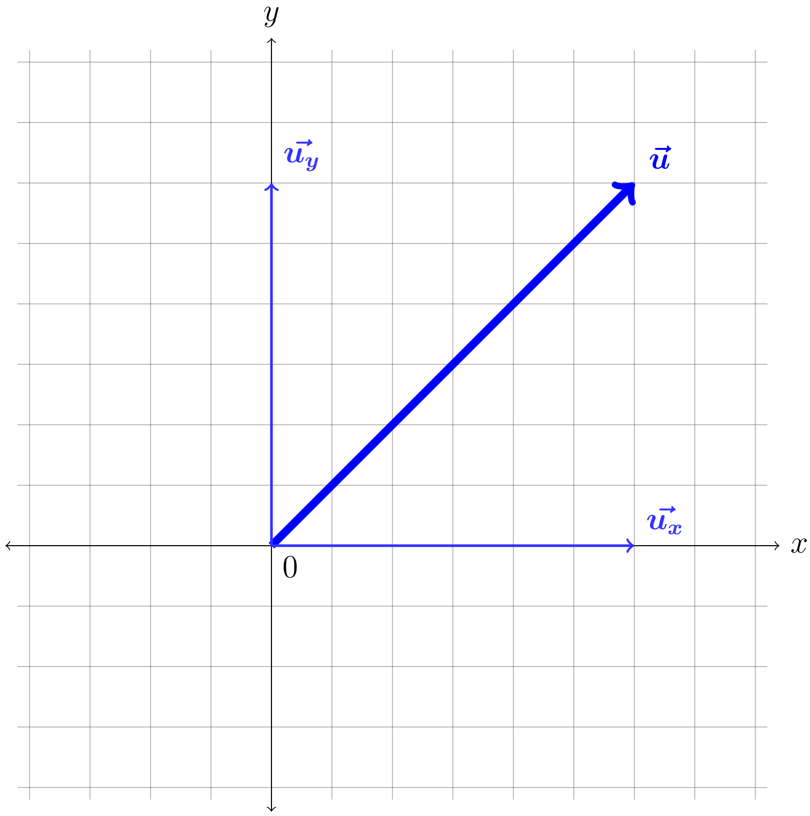
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n),\ \ v_i \in \mathbb{R}$$

o de la forma:

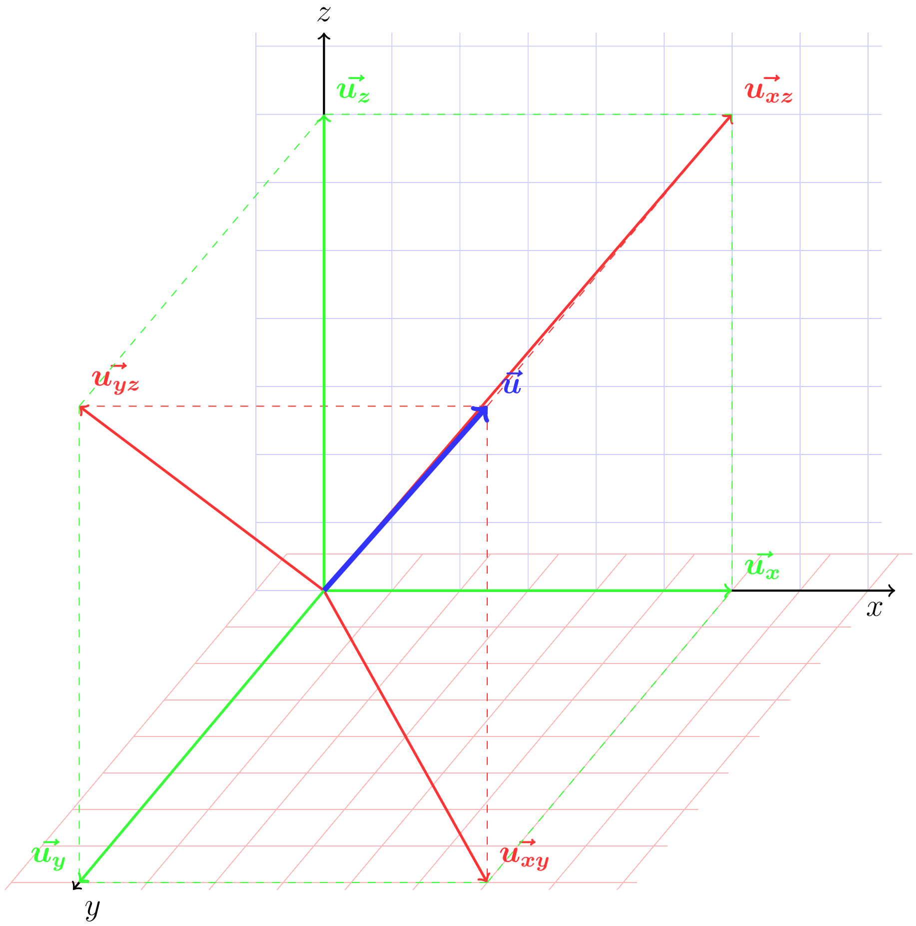
$$\vec{v} = v_1 \cdot \hat{\imath} + v_2 \cdot \hat{\jmath} + v_3 \cdot \hat{k} + \cdots$$

Gráficamente, estas composiciones son:

Para 2 dimensiones:



Para 3 dimensiones:



Ejemplos:

$$\vec{V} = (2,1) = 2\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$$

$$\vec{V} = (-3,8) = -3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$$

$$\vec{V} = (-21,-35) = -21\hat{\imath} - 35\hat{\jmath}$$

$$\vec{V} = (3,4,7) = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$$

$$\vec{V} = (-2,13,9) = -2\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

$$\vec{V} = (32,-4,-22) = 32\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 22\hat{k}$$

1.1.3. Representación en magnitud y ángulos

La otra forma de representar un vector es mediante una magnitud (que representa el tamaño del segmento-recta) y uno o mas ángulos, los cuales son tomados con respecto a un punto de referencia y permiten orientar el vector en el espacio. Este tipo de coordenadas es conocido como **coordenadas polares** para 2 variables-ejes y **coordenadas esféricas** para 3 variables-ejes. Se escribe de la forma:

$$\vec{V} = magnitud\underline{/\theta}$$

$$\vec{V} = magnitud\underline{/\theta}\underline{/\phi}$$

Donde, *magnitud* se suele representar con la letra r y los ángulos suelen venir expresados en grados, además, θ mide el plano XY y ϕ el ángulo con el eje Z. Y están limitados por:

$$0 \leq r < \infty \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$0 \leq r < \infty \qquad 0^\circ \leq \theta < 360^\circ \qquad 0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$$

Cabe resaltar que la nomenclatura puede variar y en algunos textos θ se cambia por ϕ, esto es debido a una falta de estandarización (como los cm y pulgadas, kg y libras, etc) en este texto se utilizara la convención antes descrita para evitar confusiones, ya que en polares se usa θ para el plano XY.

Ejemplos:

$$\vec{V} = 12\underline{/38^\circ}$$

$$\vec{V} = 23,22\underline{/98^\circ}$$

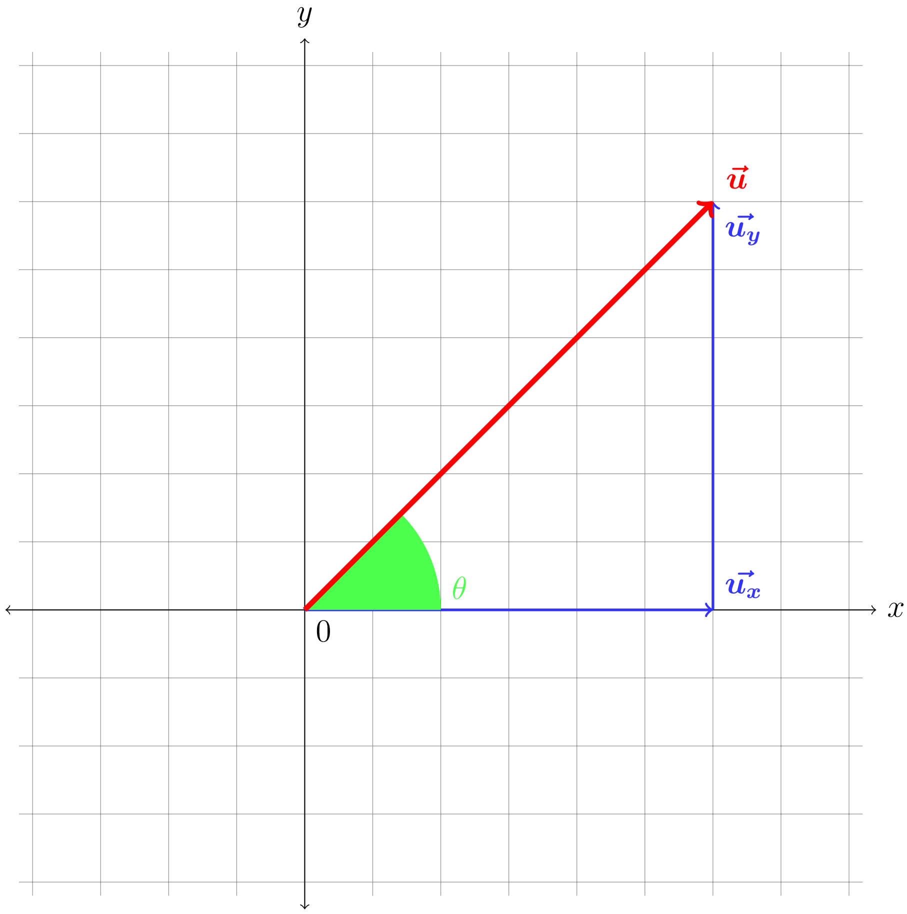
$$\vec{V} = 87,9\underline{/128^\circ}$$

$$\vec{V} = 45\underline{/12^\circ}\underline{/30^\circ}$$

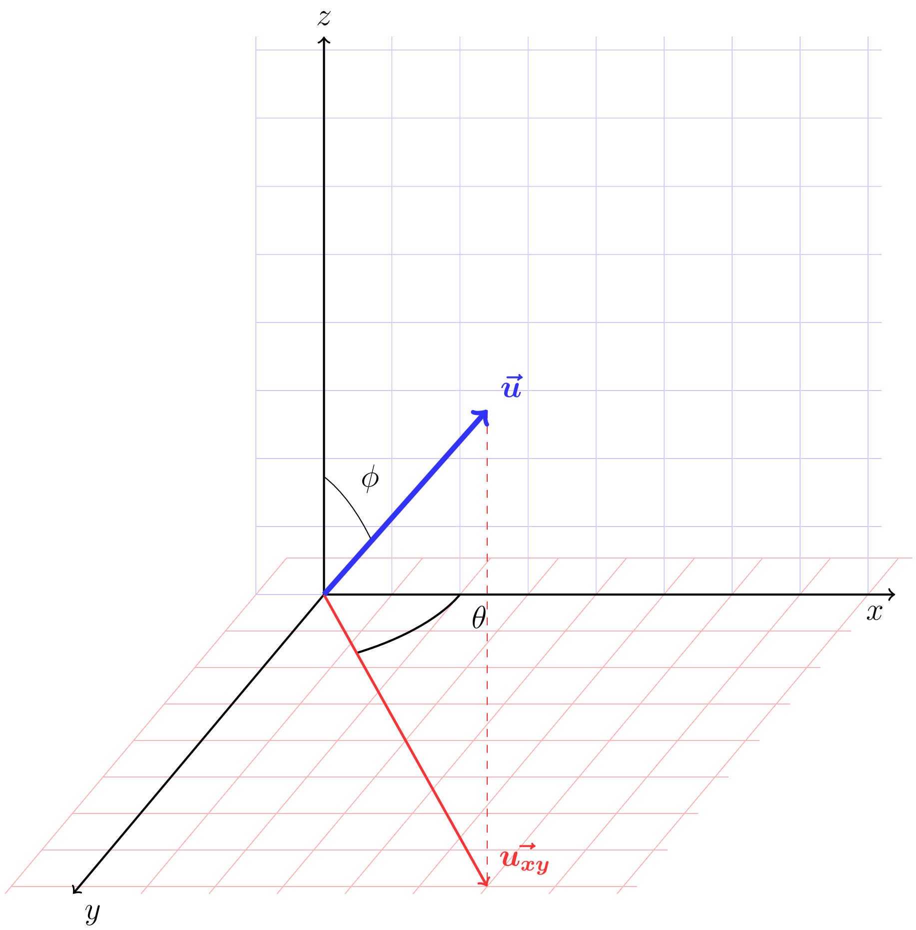
$$\vec{V} = 5\underline{/342^\circ}\underline{/120^\circ}$$

$$\vec{V} = 23\underline{/2^\circ}\underline{/180^\circ}$$

Ambas representaciones son equivalentes,y esta equivalencia se logra mediante la trigonometría, mas específicamente un triangulo rectángulo.



y
$\vec{u}$
$\vec{u_y}$
θ
$\vec{u_x}$
x
0



z
$\vec{u}$
ϕ
θ
x
$\vec{u_{xy}}$
y

Como se observa en la imagen, y se sabe de la representación por coordenadas, un vector puede representarse como sus coordenadas en los ejes, estas representaciones forman los catetos del triangulo y la magnitud total representa la hipotenusa del mismo. De esta forma, se tiene que:

Para 2 variables:

polares a cartesianas

$$\vec{V_x} = r \cdot cos(\theta)$$

$$\vec{V_y} = r \cdot sen(\theta)$$

cartesianas a polares

$$r = \sqrt{V_x^2 + v_y^2}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

para3 variables:

esféricas a cartesianas

$$\vec{V_x} = r \cdot cos(\theta) \cdot sin(\phi)$$

$$\vec{V_y} = r \cdot sen(\theta) \cdot sin(\phi)$$

$$\vec{V_z} = r \cdot cos(\phi)$$

cartesianas a esféricas

$$r = \sqrt{V_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

$$\phi = arcos\left(\frac{V_z}{r}\right)$$

Ejemplos:

Transformar a polares:

$$\vec{V} = (2, 1)$$

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} \to r = \sqrt{5}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{1}{2}\right) \to \theta = 26,57^\circ$$

$$\vec{V} = (-3, 8)$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} \to r = \sqrt{73}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{8}{-3}\right) \to \theta = -69,44^\circ = -69,44^\circ + 360^\circ = 290.56$$

$$\vec{V} = (-21, -35)$$

$$r = \sqrt{(-21)^2 + (-35)^2} \to r = 7\sqrt{34}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{-35}{-21}\right) \to \theta = 59,04^\circ$$

Transformar a esféricas:

$$\vec{V} = (3, 4, 7)$$

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2} \to w = \sqrt{74}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{4}{3}\right) \to \theta = 53,13^\circ$$

$$\phi = arcos\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right) \to \phi = 35,54^\circ$$

$$\vec{V} = (-2, 13, 9)$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 13^2 + 9^2} \rightarrow w = \sqrt{254}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{13}{-2}\right) \rightarrow \theta = -81,25^\circ = 278.75^\circ$$

$$\phi = arcos\left(\frac{9}{\sqrt{254}}\right) \rightarrow \phi = 55,62^\circ$$

$$\vec{V} = (32, -4, -22)$$

$$r = \sqrt{32^2 + (-4)^2 + 22^2} \rightarrow w = 2\sqrt{381}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{13}{-2}\right) \rightarrow \theta = -7,13^\circ = 352,87^\circ$$

$$\phi = arcos\left(\frac{-22}{2\sqrt{381}}\right) \rightarrow \phi = 124,3^\circ$$

Transformar a rectangulares

$$\vec{V} = 12\underline{/38^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 12 \cdot cos(38^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{9,456}$$

$$\vec{V_y} = 12 \cdot sen(38^\circ) \rightarrow \vec{V_y} = \sqrt{7,388}$$

$$\vec{V} = 23,22\underline{/98^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 23,22 \cdot cos(98^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{18,298}$$

$$\vec{V_y} = 23,22 \cdot sen(98^\circ) \rightarrow \vec{V_y} = \sqrt{14.296}$$

$$\vec{V} = 87,9\underline{/128^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 87,9 \cdot cos(128^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{-54,117}$$

$$\vec{V_y} = 87,9 \cdot sen(128^\circ) \rightarrow \vec{V_y} = \sqrt{69.266}$$

$$\vec{V} = 45\underline{/12^\circ/30^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 45 \cdot cos(12^\circ) \cdot sin(30^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{22,008}$$

$$\vec{V_y} = 45 \cdot sen(12^\circ) \cdot sin(30^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{4,678}$$

$$\vec{V_z} = 45 \cdot cos(30^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{38,971}$$

$$\vec{V} = 5\underline{/342^\circ/120^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 5 \cdot cos(342^\circ) \cdot sin(120^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{4,118}$$

$$\vec{V_y} = 5r \cdot sen(342^\circ) \cdot sin(120^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{-1,338}$$

$$\vec{V_z} = 5 \cdot cos(120^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{-2,5}$$

$$\vec{V} = 23\underline{/0^\circ/180^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 23 \cdot cos(2^\circ) \cdot sin(180^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{0}$$

$$\vec{V_y} = 23 \cdot sen(2^\circ) \cdot sin(180^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{0}$$

$$\vec{V_z} = 23 \cdot cos(180^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{-23}$$

1.1.4. Suma

La suma de vectores se realiza con los vectores en su forma cartesiana, es decir, **para poder sumar 2 vectores debemos llevarlo a su forma rectangular**, La forma en la que se hace la suma es simplemente sumar sus componentes internas, es decir su representación en x con su respectivo par, la de y con y y así sucesivamente.

Sean $\vec{v}, \vec{u}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ tal que:

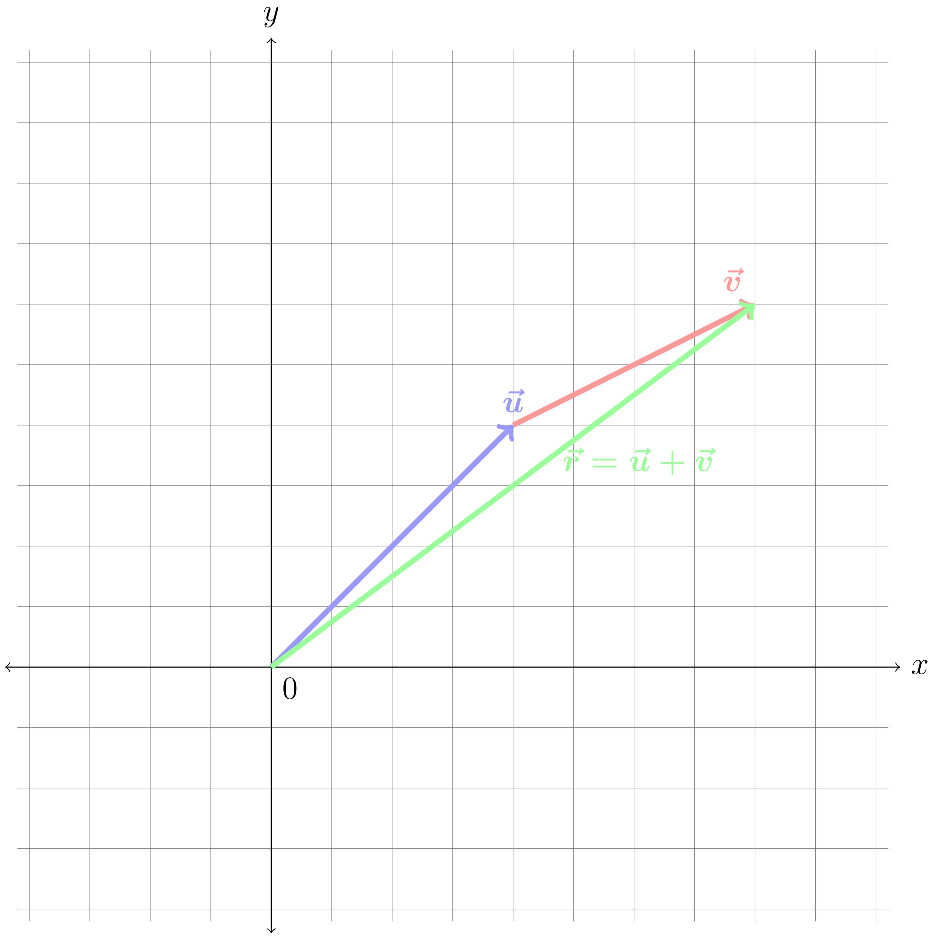
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \text{ ; } \vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$$

$$\vec{r} = v \vec{+} u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, \cdots, v_n + u_n)$$

Recuerde que, una suma algebraica es la suma con signo de los elementos, esto quiere decir que incluye a la resta ya que si se suman números de signos opuestos es lo mismo a restarlos.

Gráficamente, la forma mas sencilla es dibujar el primer vector en el origen y en su extremo dibujar el siguiente vector (el que se le sumara algebraicamente), luego se unen el origen del primer vector (corresponde con el origen del plano por como se definió) y el fin del segundo vector y este es el vector suma resultante.

Gráficamente, para $\mathbb{R}^2$:



Ejemplos: Sumar los siguientes vectores

$$\vec{V} = (2,1) \quad ; \quad \vec{U} = (-3,8)$$
$$\vec{R} = (2-3, 1+8) \rightarrow \vec{R} = (-1,9)$$

$$\vec{V} = (-21,-35) \quad ; \quad \vec{U} = (-3,8)$$
$$\vec{R} = (-21-3, -35+8) \rightarrow \vec{R} = (-24,-27)$$

$$\vec{V} = (-21,-35) \quad ; \quad \vec{U} = (2,1)$$
$$\vec{R} = (-21+2, -35+1) \rightarrow \vec{R} = (-19,-34)$$

$$\vec{V} = (3,4,7) \;\; ; \quad \vec{U} = (-2,13,9)$$
$$\vec{R} = (3-2, 4+13, 7+9) \to \vec{R} = (4,17,16)$$

$$\vec{V} = (3,4,7) \;\; ; \quad \vec{U} = (32,-4,-22)$$
$$\vec{R} = (3+32, 4-4, 7-22) \qquad \to \vec{R} = (35,0,-15)$$

$$\vec{V} = (-2,13,9) \;\; ; \quad \vec{U} = (32,-4,-22)$$
$$\vec{R} = (-2+32, 13-4, 9-22) \to \vec{R} = (30,9,-13)$$

1.1.5. Producto por escalar

El producto por escalar es una operación que toma un vector cualesquiera $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y un escalar (numero) cualquiera $\alpha \in \mathbb{R}$. Consiste en multiplicar ese escalar por todos los elementos del vector modificando de esta forma su magnitud. Cuando el vector se encuentra en coordenadas polares o esféricas solamente se modifica la magnitud, multiplicándola por el escalar, el ángulo permanece igual.

Sean $\vec{v}$ un vector cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ tal que:

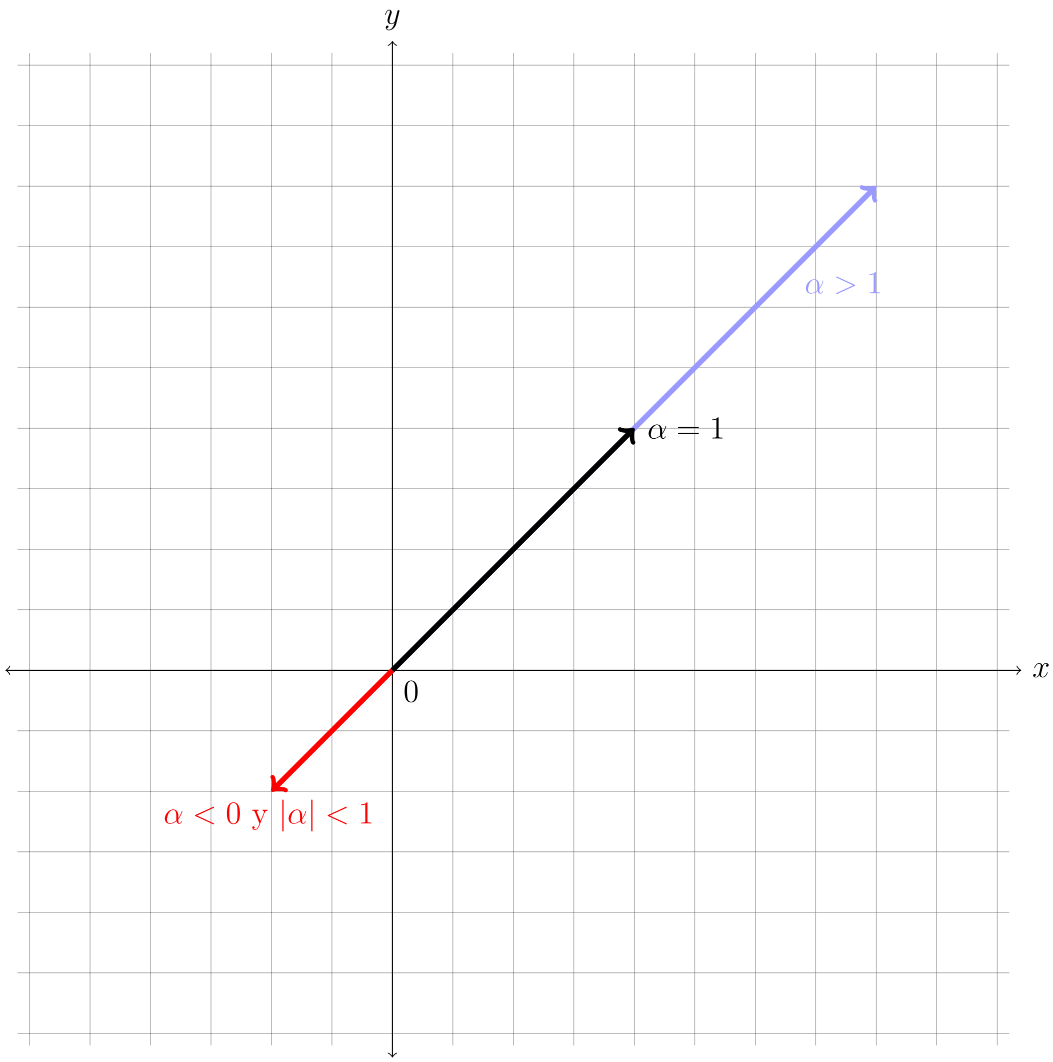
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \; ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{r} = \alpha \cdot \vec{v} = (v_1 \cdot \alpha, v_2 \cdot \alpha, v_3 \cdot \alpha, \cdots, v_n \cdot \alpha)$$

Gráficamente:

- Aumenta su tamaño si $|\alpha| > 1$.
- Reduce su tamaño si $|\alpha| < 1$.
- Invierte su dirección y sigue las reglas de la magnitud anteriores si $\alpha < 0$.
- Permanece igual si $\alpha = 1$.

- Se anula se $\alpha = 0$.



Ejemplos, multiplicar los siguientes vectores por los escalares:

$$\vec{V} = (2, 1) \quad ; \quad \alpha = 3$$
$$\vec{R} = (2 \times 3, 1 \times 3) \rightarrow \vec{R} = (6, 3)$$

$$\vec{V} = (-3, 8) \quad ; \quad \alpha = 8$$
$$\vec{R} = (-3 \times 8, 8 \times 8) \rightarrow \vec{R} = (-24, 64)$$

$$\vec{V} = (-21, -35) \;\; ; \quad \alpha = -5$$
$$\vec{R} = (-21 \times -5, -35 \times -5) \rightarrow \vec{R} = (105, 175)$$

$$\vec{V} = (3, 4, 7) \;\; ; \quad \alpha = -9$$
$$\vec{R} = (3 \times -9, 4 \times -9, 7 \times -9) \rightarrow \vec{R} = (-27, -36, -63)$$

$$\vec{V} = (-2, 13, 9) \;\; ; \quad \alpha = 12$$
$$\vec{R} = (-2 \times 12, 13 \times 12, 9 \times 12) \rightarrow \vec{R} = (-24, 156, 108)$$

$$\vec{V} = (32, -4, -22) \;\; ; \quad \alpha = -1$$
$$\vec{R} = (32 \times -1, -4 \times -1, -22 \times -1) \rightarrow \vec{R} = (-32, 4, 22)$$

1.1.6. Multiplicación entre vectores

La multiplicación entre vectores es una propiedad definida de una forma muy distinta a la multiplicación numérica. Esto se debe a la complejidad de los vectores la cual permite definí varios tipos de multiplicaciones posibles las cuales tienen sentido. Las 2 Multiplicaciones mas conocidas son **el producto punto y el producto cruz**, además de esto existen otras formas de realizar multiplicaciones como la es la de los números complejos, siendo esta definida de tal forma que permite incluso crear una división.

Los producto punto y producto cruz **No tienen operación inversa** y es por esto que **no existe la división vectorial**.

1.1.7. Producto punto

Este tipo de multiplicación es realizable par todos los vectores y da como resultado un escalar, es decir un numero.

Se escribe de la forma: $\vec{r} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, con $\vec{v}, \vec{u}$ vectores cualesquiera.

La forma de definir este producto varia, existen varios procedimientos equivalentes, las dos mas conocidas son con la norma de cada uno de los vectores y el ángulo entre vectores, y el que se trabajara acá que es una suma del producto entre los componentes del vector. Es decir:

Sean $\vec{v}, \vec{u}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \quad ; \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$$
$$\vec{r} = \vec{v} \cdot \vec{u} = (v_1 \cdot u_1, v_2 \cdot u_2, v_3 \cdot u_3, \cdots, v_n \cdot u_n) \to \vec{r} = \sum_{i=0}^{n} v_i \cdot u_i$$

Ejemplos:

$$\vec{V} = (2,1) \quad ; \quad \vec{U} = (-3,8)$$
$$\vec{R} = 2 \cdot -3 + 1\dot{8} \to \vec{R} = 2$$

$$\vec{V} = (-21,-35) \quad ; \quad \vec{U} = (-3,8)$$
$$\vec{R} = -21 \cdot -3 + \ -35 \cdot 8 \to \vec{R} = -217$$

$$\vec{V} = (-21,-35) \quad ; \quad \vec{U} = (2,1)$$
$$\vec{R} = -21 \cdot 2 + -35 \cdot 1 \to \vec{R} = -77$$

$$\vec{V} = (3,4,7) \quad ; \quad \vec{U} = (-2,13,9)$$
$$\vec{R} = 3 \cdot -2 + 4 \cdot 13 + 7 \cdot 9 \to \vec{R} = 109$$

$$\vec{V} = (3,4,7) \quad ; \quad \vec{U} = (32,-4,-22)$$
$$\vec{R} = 3 \cdot 32 + 4 \cdot -4 + 7 \cdot 22 \rightarrow \vec{R} = -74$$

$$\vec{V} = (-2,13,9) \quad ; \quad \vec{U} = (32,-4,-22)$$
$$\vec{R} = -2 \cdot 32 + 13 \cdot -4 + 9 \cdot -22) \rightarrow \vec{R} = -314$$

1.1.8. Producto cruz

Este tipo de multiplicación da como resultado un vector, gráficamente, da como resultado un vector perpendicular al plano (90°) formado por los dos vectores que se multiplican, no es conmutativa ya que si se invierten los vectores se invierte la dirección del vector resultante y es utilizada mayormente en $\mathbb{R}^3$, en $\mathbb{R}^2$ esta división es un producto externo ya que la multiplicación da como resultado un vector que no existe en este espacio (al ser perpendicular al plano X,Y se encuentra en el eje z el cual no esta definido en el plano cartesiano) y por esto no se realiza.

Este producto vectorial es de mucha utilidad por su capacidad de entregar un vector perpendicular a los multiplicados y es una base fundamental para muchas aplicaciones de la ingeniería, arquitectura y física en general.

Puede escribirse como calculo de determinantes, es lo que se utiliza en su mayoría para cálculos de $\mathbb{R}^n$, pero para $\mathbb{R}^3$ se utiliza mucho mas una formula.

Se escribe de la forma: $\vec{r} = \vec{u} \times \vec{v}$, con $\vec{u}, \vec{v}$ vectores cualesquiera.

y para $\mathbb{R}^3$ específicamente, con $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z), \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ esto es:

$$\vec{r} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)\hat{\imath} - (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x)\hat{\jmath} + (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)\hat{k}$$

Esto significa que con $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$, las componentes del vector son :

$$\vec{r_x} = (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)$$
$$\vec{r_y} = -(u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x)$$
$$\vec{r_z} = (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)$$

Ejemplos:

$$\vec{u} = (3, 4, 7) \;\; ; \quad \vec{v} = (-2, 13, 9)$$
$$\vec{r_x} = (4 \cdot 9 - 7 \cdot 13) = -55$$
$$\vec{r_y} = -(3 \cdot 9 - 7 \cdot -2) = -41$$
$$\vec{r_z} = (3 \cdot 13 - 4 \cdot -2) = 47$$
$$\vec{r_z} = \vec{u} \times \vec{v} = (-55, -41, 47)$$

$$\vec{u} = (3, 4, 7) \;\; ; \quad \vec{v} = (32, -4, -22)$$
$$\vec{r_x} = (4 \cdot -22 - 7 \cdot -4) = -60$$
$$\vec{r_y} = -(3 \cdot -22 - 7 \cdot 32) = 290$$
$$\vec{r_z} = (3 \cdot -4 - 4 \cdot 32) = -140$$
$$\vec{r_z} = \vec{u} \times \vec{v} = (-60, -290, -140)$$

$$\vec{u} = (-2, 13, 9) \;\; ; \quad \vec{v} = (32, -4, -22)$$
$$\vec{r_x} = (13 \cdot -22 - 9 \cdot -4) = -250$$
$$\vec{r_y} = -(-2 \cdot -22 - 9 \cdot 32) = 244$$
$$\vec{r_z} = (-2 \cdot -4 - 13 \cdot 32) = -408$$
$$\vec{r_z} = \vec{u} \times \vec{v} = (-250, 244, -408)$$

1.2. matrices

una matriz es un arreglo bidimensional de números. Es decir, es una ampliación de los vectores con 2 dimensiones, usualmente a las operaciones que se pueden hacer con las matrices se le conoce como álgebra matricial. Cabe resaltar que también existes arreglos de mas dimensiones llamados tensores que son tema de matemáticas muy avanzadas.

Hay 2 tipos de matrices, las cuadradas, conocidas como orden $n \times n$ las cuales tienen el mismo numero de filas y columnas, n y las rectangulares o mejor conocidas como de orden $n \times m$ donde n representa la cantidad de filas y m la cantidad de columnas. donde: $1 \leq n < \infty$ y $1 \leq m < \infty$. En el caso de que la matriz tenga 1 fila o 1 columna es un vector,

Una matriz se suele escribir por una letra mayúscula y sus componentes con la misma letra minúscula y dos subíndices, uno para las filas y otro para las columnas típicamente simbolizado por las letras $ij(a_{filas\ columnas} = a_{i\ j})$. Es decir, tienen la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} & \cdots & a_{1\ m} \\ a_{2\ 1} & a_{2\ 2} & \cdots & a_{2\ m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\ 1} & a_{n\ 2} & \cdots & a_{n\ m} \end{bmatrix}$$

En las matrices se definen 3 operaciones básicas, estas son suma algebraica, multiplicación por un escalar y multiplicación entre matrices. **La división no esta definida**, además, existen muchas otras aplicaciones que se pueden realizar con matrices como lo son la resolución de sistemas de ecuaciones y todo lo que esto implica.

Ejemplos:

Matriz de 4×1

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Matriz de 1×4

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz de 3×3

$$C = \begin{bmatrix} 47 & -8 & 35 \\ 9 & 0 & -784 \\ 2 & 99 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de 5×2

$$D = \begin{bmatrix} 47 & 35 \\ 9 & -784 \\ 99 & 14 \\ 7 & 8541 \\ -568 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

1.2.1. multiplicación por escalar

este tipo de operación no tiene limitaciones en cuanto al tamaño de las matrices y esta definida de igual forma que con los vectores, es decir, el escalar que multiplica a la matriz multiplica a todos los elementos internos de la matriz.

sea α un escalar cualquiera en $\setminus$ y a, r matrices de orden $n \times m$, se tiene:

$$r = \alpha \cdot a = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1m} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{n1} & \alpha \cdot a_{n2} & \cdots & \alpha \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

ejemplos:

calcular $\alpha \cdot a$

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \alpha = 3$$

$$r = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 \\ 7 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Calcular $\alpha \cdot B$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 12 & -5 \end{bmatrix} \quad \alpha = 20$$

$$R = \begin{bmatrix} 4 \cdot 20 & 1 \cdot 20 & 12 \cdot 20 & -5 \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 20 & 240 & -100 \end{bmatrix}$$

Calcular $\alpha \cdot C$

$$C = \begin{bmatrix} 47 & -8 & 35 \\ 9 & 0 & -784 \\ 2 & 99 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha = 2$$

$$R = \begin{bmatrix} 47 \cdot 2 & -8 \cdot 2 & 35 \cdot 2 \\ 9 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & -784 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 99 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 & -16 & 70 \\ 18 & 0 & -1568 \\ 4 & 198 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular $\alpha \cdot D$

$$D = \begin{bmatrix} 47 & 35 \\ 9 & -784 \\ 99 & 14 \\ 7 & 8541 \\ -568 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \alpha = 10$$

$$R = \begin{bmatrix} 47 \cdot 10 & 35 \cdot 10 \\ 9 \cdot 10 & -784 \cdot 10 \\ 99 \cdot 10 & 14 \cdot 10 \\ 7 \cdot 10 & 8541 \cdot 10 \\ -568 \cdot 10 & \frac{3}{2} \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 470 & 350 \\ 90 & -7840 \\ 990 & 140 \\ 70 & 85410 \\ -5680 & 15 \end{bmatrix}$$

1.2.2. Suma de matrices

Esta operación esta limitada a las matrices de igual orden, es decir ambas matrices deben de ser orden $n \times m$ para que la operación pueda ser realizada y esto es porque esta definida de forma que la suma de las matrices da como resultado una nueva matriz del mismo tamaño $(n \times m)$ en donde cada elemento es la suma de los elementos que estaban en la misma posición que el resultante. Igual que la suma de vectores.

Sean A, B, R matrices de orden $n \times m$, se tiene que :

$$R = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} +$$

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

Calcular A + B

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} ; b = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 9 \\ 72 \end{bmatrix}$$

$$R = A + B = \begin{bmatrix} 2+12 \\ 3+7 \\ 4+9 \\ 7+72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 13 \\ 79 \end{bmatrix}$$

Calcular C + G

$$C = \begin{bmatrix} 47 & -8 & 35 \\ 9 & 0 & -784 \\ 2 & 99 & 1 \end{bmatrix} ; G = \begin{bmatrix} 7 & 23 & -35 \\ 2 & 8 & 4 \\ -54 & 12 & -14 \end{bmatrix}$$

$$R = C + G \begin{bmatrix} 47+7 & -8+23 & 35-35 \\ 9+2 & 0+8 & -784+4 \\ 2-54 & 99+12 & 1-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 & 15 & 0 \\ 11 & 8 & -780 \\ -52 & 11 & -13 \end{bmatrix}$$

Calcular D + F

$$D = \begin{bmatrix} 47 & 35 \\ 9 & -784 \\ 99 & 14 \\ 7 & 8541 \\ -568 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} ; F = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 39 & 85 \\ -8 & -14 \\ -45 & 8 \\ 19 & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$R = D - F = \begin{bmatrix} 47-7 & 35-(-1) \\ 9-39 & -784-85 \\ 99-(-8) & 14-(-14) \\ 7-(-45) & 8541-8 \\ -568-19 & \frac{3}{2}-\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 36 \\ -30 & -869 \\ -107 & 28 \\ 52 & 8533 \\ -587 & \frac{15}{14} \end{bmatrix}$$

1.2.3. Multiplicación de matrices

Esta operación no es conmutativa y esta sujeta a la condición de que el numero de columnas de la primera matriz debe ser igual al numero de filas de la segunda matriz y da como resultado una matriz que tiene la cantidad de filas de la primera matriz y la cantidad de columnas de la segunda matriz.

Sean A, B matrices de orden $n \times k$ y $k \times m$ respectivamente la matriz resultante de su multiplicación, $R = A \times B$ será de orden $n \times m$.

Notesé que la multiplicación es posible ya que el numero de columnas de A (k) es el mismo que el de filas de B (k).

Cada elemento individual de la matriz viene dado por el producto punto correspondiente a la fila de la primera matriz indicada en el primer subíndice del elemento por la columna de la segunda matriz indicada en el segundo subíndice, Es decir:

$$r_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}n_{kj} = \sum_{f=1}^{k} a_{if}b_{fj}$$

Esto significa que para la posición r_{32}:

$$r_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + ... + a_{3k}n_{k2}$$

Ejemplos

Matriz de 1×4 por Matriz de 4×1da como resultado una matriz de 1×1

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 12 & -5 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$R = B \times A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 12 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + -5 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \end{bmatrix}$$

Matriz de 4×1 por Matriz de 1×4 da como resultado una matriz de 4×4 como las filas y columnas tienen una longitud de 1, parece una multiplicación normal.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

$$R = A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 12 & 2 \cdot -5 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 12 & 3 \cdot -5 \\ 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 & 4 \cdot 12 & 4 \cdot -5 \\ 7 \cdot 4 & 7 \cdot 1 & 7 \cdot 12 & 7 \cdot -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 24 & -10 \\ 12 & 3 & 36 & -15 \\ 16 & 4 & 48 & -20 \\ 28 & 7 & 84 & -35 \end{bmatrix}$$

Matriz de 3×3 por una matriz de 3×2 da como resultado una matriz de 3×2.

$$C = \begin{bmatrix} 47 & -8 & 35 \\ 9 & 0 & -784 \\ 2 & 99 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = C \times D = \begin{bmatrix} 47 & -8 & 35 \\ 9 & 0 & -784 \\ 2 & 99 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 47 \cdot 5 + -8 \cdot 1 + 35 \cdot -2 & 47 \cdot -1 + -8 \cdot 3 + 35 \cdot 0 \\ 9 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + -784 \cdot -2 & 9 \cdot -1 + 0 \cdot 3 + -784 \cdot 0 \\ 2 \cdot 5 + 99 \cdot 1 + 1 \cdot -2 & 2 \cdot -1 + 99 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157 & -71 \\ 1613 & -9 \\ 107 & 295 \end{bmatrix}$$