Índice

1. Ecuaciones

1.1. Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que contienen una o mas variables. Esta es una expresión algebraica conformada una o mas variables y operadores numéricos; estos se relacionan mediante operaciones como suma, resta, multiplicación, división, potenciación, entre otras; y el objetivo es conseguir el valor, o valores, de las variables que satisfacen la igualdad. Una ecuación tiene la forma:

$13x$ - 9 $=$ $5 + x$

Donde cada color representa un miembro de la ecuación, x es la variable y se puede observar que en cada miembro hay operaciones suma, resta, y multiplicación

Para resolver una ecuación se procede a "despejar" la variable, este proceso consiste en agrupar todas las variables de un lado y todos los números del otro, realizar las operaciones necesarias para simplificar y que de esta forma quede una única variable igualada a un número o una expresión. (por expresión se refiere a algún tipo de función, como el valor absoluto, una raíz o una dependencia de otra variable de forma que el resultado sea mas que un único dígito). Para resolver ecuaciones se puede seguir la formula, algoritmo:

- Colocar variables de un lado y los números del otro. Esto se hace siguiendo ciertas **reglas**:
  - Las **sumas** pasan como **restas**.
  - Las **restas** pasan como **sumas**.
  - Las **multiplicaciones** pasan como **divisiones**. **PERO**, tienen que estarse multiplicando a todo ese lado de la igualdad.
  - Las **divisiones** pasan como **multiplicaciones**. **PERO**, tienen que estar dividiendo a todos los elementos de ese lado de la igualdad
  - Los **exponentes** como raíces.**PERO**, tienen que estar abarcando a todos los elementos de ese lado de la igualdad
  - Las **raíces** como exponentes. **PERO**, tienen que estar abarcando a todos los elementos de ese lado de la igualdad

  Es decir se convierte en su **función inversa**.

- realizar las operaciones necesarias a ambos lados, son independientes, para simplificar la ecuación. **Cabe resaltar:** que las operaciones deben de realizarse siguiendo las reglas del álgebra, esto significa:

  1. Paréntesis
  2. Exponentes
  3. Multiplicación y división
  4. Suma

  y si las operaciones tienen la misma jerarquía, del mismo nivel-tipo, se resuelven de izquierda a derecha. **Recordemos:** que hay un tipo especial de operación dentro de los exponentes, este se llama Referenciasproducto-notable, y ocurre cuando la variable esta entre paréntesis en una operación de **suma o resta** y el paréntesis esta elevado a un exponente. Si no recuerda como resolverlo vaya a Referenciasproducto-notable.

- En este punto deben de quedar expresiones sencillas a ambos lados de la igualdad, si no es que solo quedan números y una variable. por lo tanto:

  Si la variable esta sola: La ecuación esta resuelta(si la variable esta sola pero negativa se invierten los signos de la igualdad).

  Si la variable esta siendo multiplicada o dividida: se despeja para dejarla sola, se resuelve la operación resultante y este seria el resultado final

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 13x - 9 &= 5 + x \\ 13x - x &= 5 + 9 \\ 12x &= 14 \\ x &= \frac{14}{12} \\ x &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
124 + 18x - 40 &= (19 + 45x) \times 2 \\
\frac{124 + 18x - 40}{2} &= 19 + 45x \\
\frac{124}{2} + \frac{18x}{2} - \frac{40}{2} &= 19 + 45x \\
\frac{18x}{2} - 45x &= 19 - \frac{124}{2} + \frac{40}{2} \\
9x - 45x &= 19 - 62 + 20 \\
-36x &= -23 \\
x &= \frac{-23}{-36} \\
x &= \frac{23}{36}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(25x + 48)^2 - 10 &= 666 \\
(25x + 48)^2 &= 666 + 10 \\
25x + 48 &= \sqrt{676} \\
25x + 48 &= 26 \\
25x &= 26 - 48 \\
x &= \frac{-22}{25}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{150x+40-65}{-50x+89} &= 9 \\
150x+40-65 &= 9\times(-50x+89) \\
150x-25 &= 9\times(-50x)+9\times 89 \\
150x-25 &= -450x+801 \\
150x+450x &= 801+25 \\
600x &= 826 \\
x &= \frac{826}{600} \\
x &= \frac{413}{300}
\end{aligned}$$

Notesé que: la forma de resolver las ecuaciones siempre es la misma, se despeja hasta conseguir que todas las variables estén de un lado y todos los números del otro y se realizan las operaciones.

Consejo: cuando se tienen fracciones o denominadores de un polinomio siempre suele ser mas sencillo buscar colocar de forma lineal, para esto se suele usar M.C.M o operaciones cruzadas hasta tener un denominador común, luego ese denominador se despeja.

1.1.1. Forma canónica de la ecuación

Este es un caso particular de las ecuaciones, y es de suma importancia para el estudio y la resolución de las mismas. Se dice que una ecuación esta en su **forma canónica** cuando uno de sus miembros, lados, es 0 y el otro miembro no puede ser simplificado mas, es decir hay una expresión igualada a 0.

La importancia de este tipo de ecuaciones es que facilitan la resolución en ciertos casos y en otros permiten la interpretación de un fenómeno físico con mayor claridad. **Recordemos** que las matemáticas son utilizadas para describir el comportamiento y la evolución de fenómenos físicos para de esta forma entender a mayor profundidad el mundo que nos rodea.

La forma de resolver una ecuación en forma canónica es la misma que la explicada anteriormente. y para colocar una ecuación a su forma canónica basta con pasar todos los elementos a un mismo lado,siguiendo las reglas del despeje. Ejemplos:

Llevando las ecuaciones anteriores a su forma canónica:

$$13x - 9 = 5 + x$$
$$13x - x - 9 - 5 = 0$$
$$12x - 14 = 0$$

$$124 + 18x - 40 = (19 + 45x) \times 2$$
$$\frac{124 + 18x - 40}{2} = 19 + 45x$$
$$\frac{124}{2} + \frac{18x}{2} - \frac{40}{2} = 19 + 45x$$
$$\frac{124}{2} + \frac{18x}{2} - \frac{40}{2} - 19 - 45x = 0$$
$$62 + 9x - 20 - 19 - 45x = 0 - 36x + 23 = 0$$

$$(25x + 48)^2 - 10 = 666$$
$$(25x + 48)^2 = 666 + 10$$
$$25x + 48 = \sqrt{676}$$
$$25x + 48 = 26$$
$$25x + 48 - 26 = 0$$
$$25x + 22 = 0$$

1.1.2. Tipos de ecuaciones

Existen muchos tipos de ecuaciones, estas se clasifican por el tipo de operaciones que son necesarias para resolverlas. La clasificación mas común, y la que se estudiara es la de **ecuaciones algebraicas**, esta recibe este nombre dado que para resolverla solo hacen falta operaciones algebraicas.

Cabe resaltar que existen otro tipo de ecuaciones como las logarítmicas diferenciales, integrales y funcionales, estas no se estudiaran ya que pertenecen a cursos mas avanzados.

Las **ecuaciones algebraicas**, se suelen sub dividir según **el grado** del polinomio en:

- De primer grado o lineales.
- De segundo grado o cuadráticas.
- De tercer grado o cubicas.

  $\vdots$
- De grado n, n $\in \mathbb{N}$.

recordemos que el grado de un polinomio es **el exponente mas alto al que esta elevado la variable independiente**.

Ecuaciones 1er orden

Su forma canónica es: $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$ a es llamado coeficiente de x y b es el termino independiente.

Este tipo de ecuaciones se resuelven de la forma previamente estudiada, es decir se despeja la x siguiendo las reglas anteriormente nombradas. Ejemplo:

$$10x + 50 = 3$$
$$10x = 3 - 50$$
$$x = \frac{-47}{10}$$
$$x = -4.7$$

$$
\begin{aligned}
(95x - 10)^3 &= 27 \\
95x - 10 &= \sqrt[3]{27} \\
95x &= 3 + 10 \\
x &= \frac{13}{95}
\end{aligned}
$$

Ecuaciones 2do orden

Su forma canónica es: $a_1x^2 + a_2x + b = 0;\ a, b \in \mathbb{R}\ a_1, a_2$ son llamados coeficientes de x y b es el termino independiente.

Para resolver este tipo de ecuación se busca expresarlo en su forma canónica y aplicar una formula, a esta se le suele llamar **resolvente cuadrática**, o solo **resolvente** pero al ser tan utilizada se le conoce de muchas formas...

Cabe resaltar que: también se puede escribir la forma canónica de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, es lo mismo, pero la formula que se usa para resolver este tipo de ecuaciones suele llevar a, b, c.

La formula a usar es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde a, b, c son respectivamente los coeficientes de la formula.

También se observa que existe un símbolo $\pm$ este indica que pueden haber **2 resultados posibles que satisfacen la ecuación**. Para conseguirlos se tiene que resolver 2 veces todos los cálculos, **1 vez sumando** y **1 vez restando**, es decir, $\pm$ se va a reemplazar por un $+$ para x_1 y por un - para x_2. Ejemplos:

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

identificamos que: $a = 1, b = 5, c = -14$

entonces, procedemos a sustituir en la formula:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times -14}}{2 \times 1}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

Luego, realizamos las 2 operaciones:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-5 + 9}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 - 9}{2}$$
$$x_1 = \frac{4}{2} \qquad x_2 = \frac{-14}{2}$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -7$$

Algunas veces la raíz interna no es exacta, en esos casos se deja expresado:

$$x^2 + 5x - 9 = 0$$

identificamos que: $a = 1, b = 5, c = -9$

entonces, procedemos a sustituir en la formula:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times -9}}{2 \times 1}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 36}}{2}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$$

y entonces, queda de la forma:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{61}}{2} \; ; \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{61}}{2}$$

En otras ocasiones se tendrá que despejar antes de aplicar la formula:

$$4x + 186 = -10x + 5x^2$$

$$-5x^2 + 4x + 10x + 186 = 0$$

$$-5x^2 + 14x + 186 = 0$$

identificamos que: $a = -5, b = 14, c = 186$

entonces, procedemos a sustituir en la formula:

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times -5 \times 186}}{2 \times -5}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 3720}}{-10}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{3916}}{-10}$$

y entonces, queda de la forma:

$$x_1 = \frac{-14 + \sqrt{3916}}{-10} \quad ; \quad x_2 = \frac{-14 - \sqrt{3916}}{-10}$$

Y en algunos casos la raíz se hará 0 y se terminara con que ambos valores serán el mismo:

$$x^2 + 4xx_1 = x_2 = -2 + 4 \qquad = 0$$

identificamos que: $a = 1, b = 4, c = 4$

entonces, procedemos a sustituir en la formula:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \ \pm 0}{2}$$

y por lo tanto x_1 y x_2 valen: -2

$$x_1 = x_2 = -2$$

Ecuaciones de 3er orden o superior

Su forma canónica es: $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3 + b = 0;\ a, b \in \mathbb{R}\ a_1, a_2, a_3$ son llamados coeficientes de x y b es el termino independiente.

La forma general es:

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \cdots + a_{n+1}x + b = 0$$

donde, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}$ son los coeficientes, b es el termino independiente y todos estos son números reales. n es llamado exponente máximo, representa el grado y puede ser cualquier número natural ($n \in \mathbb{N}$)

Este tipo de ecuaciones se resuelven al factorizarla, ya que de esta forma se consiguen las raíces. La forma mas común es utilizando el método de **Ruffini**. Véase (Referencias-Factorización) para una explicación mas profunda. Ejemplos:

Recordemos que: las raíces son los valores que hacen 0 el polinomio- expresión y que por lo tanto hacen cumplir la igualdad en la forma canónica ($expresin = 0$).

Se pueden presentar varios casos, cuando no hay termino independiente:

$$x^3 + 5x^2 - 14x = 0$$

Procedemos a factorizarprimero factor común x

$$x(x^2 + 5x - 14) = 0$$

Luego, nos queda una ecuación de segundo grado, ejemplo anterior:

donde: $x_1 = 2x_2 = -7$

por lo tanto la ecuaciónfactorizada resultante es:

$$x \times (x - 2) \times (x + 7) = 0$$

y los resultadosde la ecuación son:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -7,\ x_3 = 0$$

Notemos: que se busca factorizar la expresión, al sacar factor común buscamos que nos quede un termino independiente, en ese momento procedemos, según el grado del polinomio resultante, a usar la resolvente cuadrática o Ruffini.

cuando hay termino independiente:

$$2x^3 + 9x^2 + 13x = -6$$

despejando, a su forma canónica:

$$2x^3 + 9x^2 + 13x + 6 = 0$$

Como **HAY** termino independiente, no se puede usar factor común

procedemos por Ruffini:Los coeficientes, en orden decreciente, son: 2, 9, 13, 6;

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 9 & 13 & 6 \\
-1 & & -2 & -7 & -6 \\
\hline
 & 2 & 7 & 6 & 0 \\
-2 & & -4 & -6 & \\
\hline
 & 2 & 3 & 0 & \\
\frac{-3}{2} & & -3 & & \\
\hline
 & 2 & 0 & &
\end{array}$$

La ecuación factorizada, resultante seria:

$$(x+1) \times (x+2) \times \left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

y por lo tanto, las soluciones serian: $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = \frac{-3}{2}$

1.2. Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad algebraica, estas son un equivalente de las Ecuaciones pero con los operadores relacionales $<, >, \leq, \geq$. Además, las inecuaciones dan como resultado un **conjunto de valores** los cuales cumplen la desigualdad, mientras que la ecuación daba un número, mas si era de un grado mayor.

Asimismo, las inecuaciones también obedecen a una regla la cual modifica el operador relacional entre los términos:

Si se multiplican o dividen ambos términos de una inecuación por un número negativo, el operador relacional se invierte. Esta inversión es como sigue:

- el $<$ pasa a ser $>$.

- el $>$ pasa a ser $<$.
- el $\leq$ pasa a ser $\geq$.
- el $\geq$ pasa a ser $\leq$.

Esto implica que: **si hay igualdad, esta se mantiene** ($\leq$, $\geq$). **Recuerde que:** cuando se pasa un número a multiplicar o dividir al otro lado de la desigualdad, es el equivalente a multiplicar o dividir (respectivamente) ambos lados por ese número. Entonces, **cuando se despeja un número negativo que multiplica o divide se invierte el operador relacional**.

Es importante resaltar que las inecuaciones pueden ser representadas de forma gráfica, ya que son un conjunto de puntos en la recta real. véase ReferenciasGráfica-inecuaciones.

Ejemplo y explicación:

$$\begin{aligned} 5x + 40 &< 0 \\ 5x &< -40 \\ x &< \frac{-40}{5} \\ x &< -8 \end{aligned}$$

Entonces, la solución es el conjunto de valores que puede tomar x que sean menores a -8, es decir { -9, -10, $\frac{-354}{2}$, -354,$\cdots$, $-\infty$ } Es decir todos los número $x \in \mathbb{R}$ (si se trabaja en otro conjunto $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$se usa ese conjunto en vez de $\mathbb{R}$) que cumplen $\{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$, otra forma: el conjunto $(-\infty; -8)$.

Se pueden observar que, el proceso de despeje sigue siendo el mismo mas hay un paso adicional, **conseguir el conjunto solución**; este puede ser expresado de 2 formas, como: $\{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$ o de la forma $(-\infty; -8)$. Ambos resultados son exactamente iguales, la segunda forma es la mas vista en bachillerato, sin embargo el primero suele ser usado en niveles mas avanzados ya que da mas libertad y permite definir expresiones mas complejas.

Para expresar el resultado en forma de conjunto se debe hacer lo siguiente:

Es importante saber:

Operador relacionar	Nombre	expresión como conjunto
$<$	Menor que o menor estricto	") " = paréntesis de cierre
$>$	Mayor que o mayor estricto	" (" = paréntesis de apertura
$\leq$	Menor o igual que	"] " = Bracket (corchete cuadrado) de cierre
$\geq$	Mayor o igual que	" [" = Bracket (corchete cuadrado) de apertura

Primera forma

Primero, la forma de decirlo es: $\{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$ sea x perteneciente($\in$) a los reales ($\mathbb{R}$) tal que(:) x es menor que -8 (también se puede decir: menor estricto que -8).

y para escribirlo solo hay que escribir:

$$\{\text{variable} \in \text{conjunto} : \text{inecuación final}\}$$

En el caso del ejemplo anterior

- variable: x
- conjunto no se especifico, así que asumiremos $\mathbb{R}$ ya que es el mas general, e
- expresión: $x < -8$

y al reemplazar obtenemos el resultado: $\{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$

Segunda forma

La forma de decirlo es: $(-\infty; -8)$ el conjunto formado por los números desde menos infinito hasta -8 abierto .

Para escribirlo hay que tener en cuenta

- Cuantos factores-conjuntos tiene, esto es ya que como se vera mas adelante, cuando se tienen polinomios de un grado alto, en valor absoluto o en forma de fracción se crean mas de 1 conjunto solución.
- El tipo de desigualdad, de acuerdo a esto se reemplazara según la tabla 1.2.
- **El infinito siempre va con corchete**, ya sea de apertura o de cierre, dependiendo de su ubicación.

Se toma en cuenta la forma de la desigualdad, se identifican los términos, cual es el mayor y cual es el menor y siguiendo las normas anteriormente nombradas se coloca:

- " (" o " [", dependiendo del operador, y la consideración del infinito.
- expresión de menor valor en la desigualdad.
- ;
- expresión de mayor valor de la desigualdad.
- ") " o "] ", dependiendo del operador, y la consideración del infinito.

De esta forma se tiene que:
Menor valor = $-\infty$
Mayor valor = -8
Entonces: $(-\infty; -8)$

1.2.1. Gráfica de inecuaciones

Las inecuaciones pueden ser vistas de una forma gráfica, como un conjunto de puntos en la recta real. El punto de inicio suele ser un circulo o punto abierto, o paréntesis, para los intervalos abiertos, creados con "$<$" o "$>$" y un punto o circulo coloreado, o corchetes para los intervalos cerrados, los creados con $\leq$ $\geq$.

Para crear la gráfica se debe:

1. Dibujar la **Recta real**. **Recordemos que:** esta es una linea en la cual se coloca un punto medio, 0, y a su derecha los números positivos y a su izquierda los números negativos, siguiendo el orden numérico tradicional $(\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$.

2. Marcar los puntos de especial importancia, estos son el 0, como referencia o valor, y luego todos **los puntos críticos.**

   Lo **puntos críticos** son los números en los cuales se hace 0 una ecuación, para conseguirlos lo que se hace es reemplazar **EN LA ULTIMA EXPRESIÓN DE LA INECUACIÓN**, es decir cuando se tiene resuelto, y conseguir los valores solución de esta, a veces es mas fácil expresarla en su forma canónica.

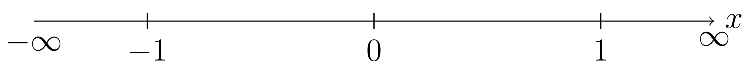
3. Comprobar hacia que lado se cumple la desigualdad y marcarlo.

   Para esto es suficiente con tomar un punto de prueba a la derecha o izquierda del punto critico, o en un intervalo especifico, y comprobar si ese valor satisface la desigualdad, si es así, todos esos puntos forman parte del intervalo solución. Por lo tanto se marcan.:w

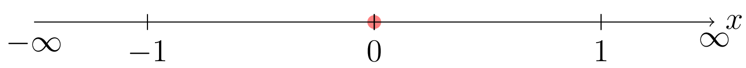
Algunos ejemplos son:

Para: $x > 0$

Recta:



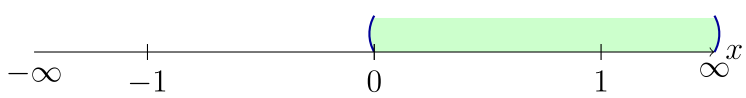
Puntos: 0 únicamente. infinitos de referencia.



Comprobando con $x = 1$, $1 > 0$? si, por ende se cumple y es hacia la derecha del **punto critico** 0.

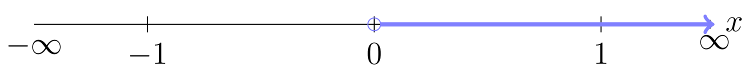
Marcas: dado que es una desigualdad abierta ($<$) el circulo va abierto o se usa un paréntesis

Con paréntesis:



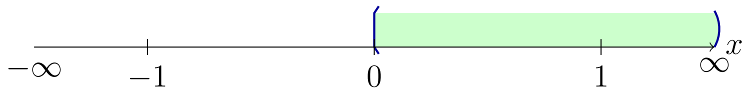
para $x \geq 0$

Con circulo y flecha:

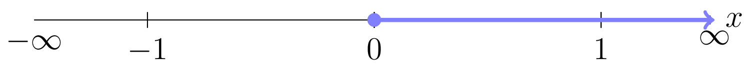


Si fuera $x \geq 0$ lo único que cambiaría seria la parte de marca. Seria un corchete y un punto cerrado:

Con corchete:



Con punto y flecha:

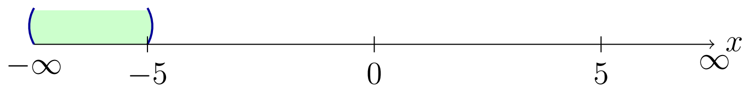


Es mas utilizado la primera forma (corchete y paréntesis) ya que facilita comparaciones en intervalos. Por esto, aunque ambos son equivalentes, de ahora en adelante se graficarán solamente estos.

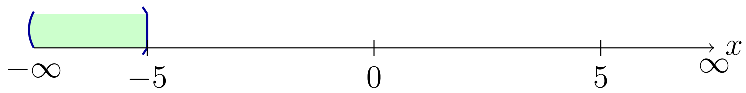
Otros ejemplos:

$x < -5$ puntos: -5 valor de la desigualdad, 0 e infinitos referencia.

valores: tomamos un punto, ej 0 (esta a la derecha de -5 en la recta real) entonces: $x < -5,\ 0 < -5?$ no, no lo es, $0 > -5$ y por ende es el otro lado de la recta la que cumple la desigualdad. El lado **izquierdo**. La gráfica es:



$x \leq -5$



1.2.2. Tipos de inecuaciones

Las inecuaciones al igual que las ecuaciones pueden ser clasificadas en distintos tipos, los mas comunes y relevantes son:

- Inecuaciones Lineales.
- Inecuaciones de grado n, $n \neq \{0, 1\}$.
- Inecuaciones con valor absoluto.
- Inecuaciones racionales.

Esta clasificación se hace porque la forma de resolverla varia considerablemente para cada uno de estos.

Inecuaciones Lineales

Las inecuaciones lineales son el equivalente a las ecuaciones algebraicas de grado 1, es decir, son la forma mas fácil de resolver y los ejemplos que se han dado hasta ahora son de este tipo. para resolver estas basta con despejar, de la forma explicada en Referenciasecuaciones, y tener en consideración la inversión de los operadores relacionales al multiplicar o dividir por un número negativo. **RECUERDE que: cuando se despeja un número negativo que multiplica o divide se invierte el operador relacional**.

Es importante saber que en este tipo de inecuaciones siempre habrá un único conjunto solución.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 8x - 45 &< 9 \\ 8x &< 9 + 45 \\ 8x &< 54 \\ x &< \frac{54}{8} \\ x &< \frac{27}{4} \end{aligned}$$

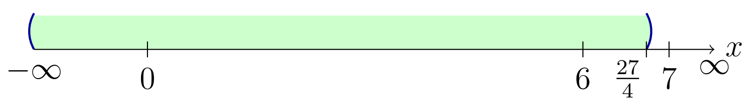
Una vez completado el despeje, se procede a crear el conjunto y graficar:

Punto único, $\frac{27}{4}$

Tomando un valor, 0 por conveniencia, a la izquierda de $\frac{27}{4}$ en la recta real, se tiene: $0 < \frac{27}{4}$? si, entonces ese es el lado del intervalo que soluciona la inecuación.

El conjunto: $\left(-\infty; \frac{27}{4}\right)$

La gráfica:



$$
\begin{aligned}
9-45x &\leq 639\\
-45x &\leq 639-9\\
-45x &\leq 630\\
x &\geq \frac{630}{-45}\\
x &\geq -14
\end{aligned}
$$

nótese: que como el despeje involucraba pasar de multiplicar a dividir un número negativo, se invirtió el operador relacional ($\leq \Rightarrow \geq$)

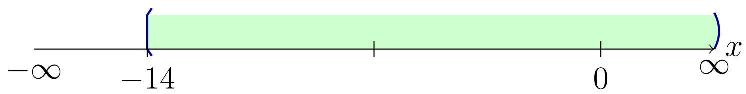
Una vez completado el despeje, se procede a crear el conjunto y graficar:

Punto único, -14

Tomando un valor, 0 por conveniencia, a la derecha de -14 en la recta real, se tiene: $0 \geq -14$? si, entonces ese es el lado del intervalo que soluciona la inecuación.

El conjunto: $[-14;\infty)$

La gráfica:



$$
\begin{aligned}
(95x-10)^3 &> 27\\
95x-10 &> \sqrt[3]{27}\\
95x &> 3+10\\
x &> \frac{13}{95}
\end{aligned}
$$

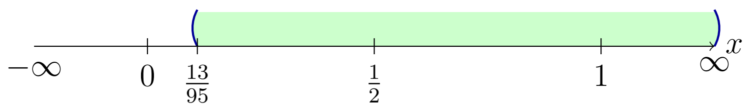
Una vez completado el despeje, se procede a crear el conjunto y graficar:

Punto único, $\frac{13}{95}$

Tomando un valor, 0 por conveniencia, a la izquierda de $\frac{13}{95}$ en la recta real, se tiene: $0 > \frac{13}{95}$? No, entonces ese no es el lado del intervalo que soluciona la inecuación, por lo tanto el lado solución es a la derecha de $\frac{13}{95}$.

El conjunto: $\left(\frac{13}{95};\infty\right)$

La gráfica:



$$\frac{3x+1}{7}-\frac{2-4x}{3}\geq\frac{-5x-4}{14}+\frac{7x}{6}$$

M.C.M(7,3,14,6)=42, multiplicamos ambos lados para eliminar denominadores

$$42\times\left(\frac{3x+1}{7}-\frac{2-4x}{3}\right)\geq 42\times\left(\frac{-5x-4}{14}+\frac{7x}{6}\right)$$

$$6(3x+1)-14(2-4x)\geq 3(-5x-4)+49x$$

$$18x+6-28+56x\geq -15x-12+49x$$

$$18x+56x+15x-49x\geq -12-6+28$$

$$40x\geq 10$$

$$x\geq\frac{10}{40}$$

$$x\geq\frac{1}{4}$$

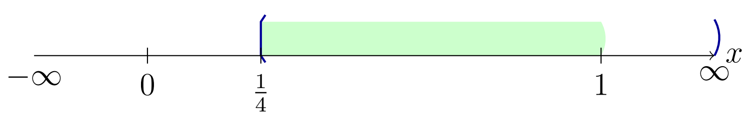
Una vez completado el despeje, se procede a crear el conjunto y graficar:

Punto único, $\frac{1}{4}$

Tomando un valor, 0 por conveniencia, a la izquierda de $\frac{1}{4}$ en la recta real, se tiene: $0\geq\frac{1}{4}$? No, entonces ese no es el lado del intervalo que soluciona la inecuación, por lo tanto el lado solución es a la derecha de $\frac{1}{4}$.

El conjunto: $\left[\frac{1}{4};\infty\right)$

La gráfica:



Inecuaciones de grado n

Una inecuaciones de grado n, es el equivalente de las ecuaciones de grado 2 hacia adelante (3,4,5,...) y la forma de resolverlas es distinta a las lineales. Esto es porque se generan mas de 1 punto que crea intervalos, mientras mayor sea el grado de la inecuación mayor puntos se dan y mayor sera la cantidad de **posibles intervalos solución**.

Para resolver una inecuación de este estilo se deben encontrar todos los posibles intervalos y **unirlos** $(A \cup B)$ **intersectarlos** $(A \cap B)$

Para resolver este tipo de inecuaciones se deben seguir los siguientes pasos:

- Despejar la inecuación hasta igualar un extremo a 0 (forma canónica).
- Factorizar la ecuación para conseguir los puntos críticos o raíces de la ecuación.
- Graficar los puntos críticos y hallar los intervalos en los que la inecuación se cumpla.
- Formar los intervalos con los puntos críticos y respetando los operadores de relación.

Los puntos 3 y 4 se pueden invertir en orden, dependiendo de los gustos y las dificultades de cada quien puede ser mas sencillo primero graficar o primero encontrar los intervalos.

Para realizar las gráficas, se debe graficar cada posible intervalo. Los posibles intervalos vienen dados por los puntos, raíces, de los **los elementos factorizados**. Cada uno de estos se observa como una inecuación nueva y se grafican, los intervalos solución vienen dados por los punto solución en los cuales se cumple la inecuación, estos puntos a su vez ya indican que tipo de relación guardan (paréntesis o corchetes), por lo tanto es fácil obtener la información.

Para proseguir, tomaremos las ecuaciones resueltas con anterioridad en 1.1.2 y 1.1.2 y nos concentraremos en resolver los intervalos.

Para: $x^2 + 5x - 14 < 0$ factorizamos $x^2 + 5x - 14 = 0$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x_1 = 2 \ ; \ x_2 = -7$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \longrightarrow (x - 2)(x + 7) = 0$$

Y la inecuación queda:

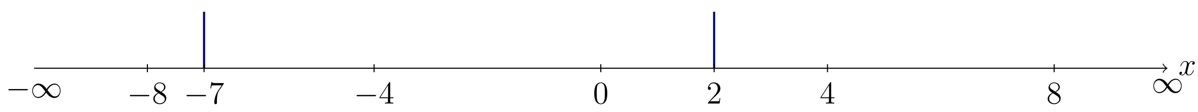
$$x^2 + 5x - 14 < 0 \longrightarrow (x-2)(x+7) < 0$$

cada factor se graficará independientemente, en la **raíz** como resultado de una inecuación lineal (la raíz es el valor que esta dentro del paréntesis pero con signo opuesto, ej para (x-2) seria x=2, esto sale del despeje... x-2=0 → x=2).

Por facilidad, se busca que las gráficas tengan la misma referencia, y de ser posible la misma escala, para esto o se dibujan en la misma recta real o se hacen rectas reales iguales o centradas con respecto al 0, ya que este es referencia.

Los puntos son: $P_1 = 2$, $P_2 = -7$

La gráfica de los puntos es::



Dela gráfica se observan los intervalos (por las separaciones) $(-\infty, -7); (-7, 2); (2, +\infty)$

Para saber si se cumple la inecuación en los intervalos, se elige un valor cualquiera que pertenezca al intervalo que se evalúa y se sustituye en la expresión.

Tenemos: Intervalos: $(-\infty, -7); (-7, 2); (2, +\infty)$ Inecuación: $(x-2)(x+7) < 0$ Valores de muestra, pueden ser cualquiera: -8; 0; 8 (tomamos estos valores por facilidad, cada uno representa su intervalo)

Sustituyendo:

Para -8

$$(-8-2)(-8+7) < 0$$
$$(-10)(-1) < 0$$
$$10 < 0$$

Se observa que no pertenece el intervalo a la solución porque no cumple la inecuación.

Para 0

$$\begin{aligned}(0-2)(0+7) &< 0\\ (-2)(7) &< 0\\ -14 &< 0\end{aligned}$$

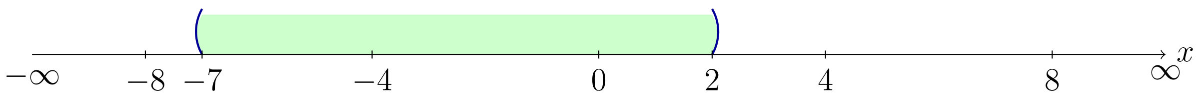
Se observa que si cumple.

Para 8

$$\begin{aligned}(8-2)(8+7) &< 0\\ (6)(15) &< 0\\ 90 &< 0\end{aligned}$$

Se observa que no pertenece el intervalo a la solución.

y de esta forma, el intervalo solución es $x \in (-7, 2)$ y la gráfica es:



Esta forma de resolver es sencilla y practica, la mayor dificultad es las multiplicaciones. Cabe resaltar que **NO ES NECESARIO** hacer las multiplicaciones, ya que con el signo es suficiente. **Recordemos** que todo número $>$ o $\geq$ que 0 (cero) es positivo y en caso contrario, es $<$ si es negativo o $\leq$ si es negativo o 0.

Se hace este énfasis por dos razones.

- Evitar cálculos innecesarios que pueden llevar mucho tiempo.
- Es la base del método de barras o tabla de signos, que es muy utilizado y sirve también para las inecuaciones racionales.

1.2.3. Método de barras

El método de barras o de tabla de signos consiste en hacer una tabla, colocar en la parte superior los intervalos posible solución, a la izquierda colocar todos los términos que impliquen una raíz. Es decir, **Todos los factores que se están multiplicando**

o dividiendo que son de la forma $(x \pm a)$, pueden convertir en 0 la multiplicación. Además, se coloca un renglón adicional para la solución, usualmente al final como si fuera una multiplicación

Posteriormente, se procede a rellenar la tabla con los signos resultantes en el intervalo, se toma un valor perteneciente al intervalo trabajado y se reemplaza en el monomio $(x \pm a)$, se coloca el signo. Luego se multiplican los signos de cada columna y el resultado se coloca en el renglón solución.

El renglón solución indicara que valores toma la inecuación final y se observa si cumple con el operador relacional.

Operador Relacional (inecuación)	Signo que lo satisface
$expresin < 0$	negativo - - - - -
$expresin \leq 0$	negativo - - - - -
$expresin > 0$	positivo $+ + + +$
$expresin \geq 0$	positivo $+ + + +$

Usando el mismo ejemplo anterior:

Inecuación: $(x-2)(x+7) < 0$

Intervalos: $(-\infty, -7); (-7, 2); (2, +\infty)$

La tabla:

	$(-\infty, -7)$	$(-7, 2)$	$(2, +\infty)$
$x-2$	$x+7$	Resultado	

Procedemos a llenar la tabla, calculando: para (x-2):

-8: $x-2 \rightarrow -8-2 \rightarrow -10$ negativo

0: $x-2 \rightarrow 0-2 \rightarrow -2$ negativo

8: $x-2 \rightarrow 8-2 \rightarrow 6$ positivo

para (x+7):

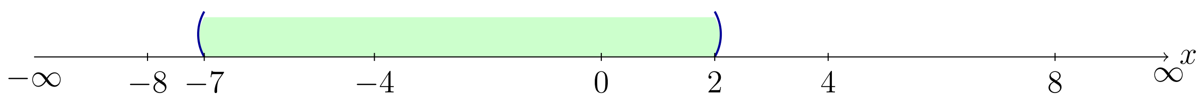
-8: $-8+7 \rightarrow -1$ negativo

0: $0+7 \rightarrow 7$ positivo

8: $8 + 7 \rightarrow 15$ positivo

binomio	Intervalos		
	$(-\infty, -7)$	$(-7, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 2$	- - - - -	- - - - -	+ + + +
$x + 7$	- - - - -	+ + + +	+ + + +
Resultado	+ + + +	- - - - -	+ + + +

y de esta forma, el intervalo solución es $x \in (-7, 2)$, ya que es el único negativo y por ende el único que cumple la inecuación y la gráfica es:



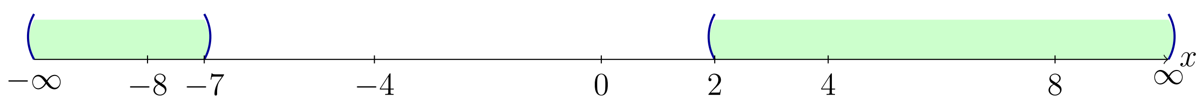
Ahora, estudiemos para el caso del operador relacional opuesto, para Inecuación: $(x - 2)(x + 7) > 0$

El procedimiento es el mismo, y se llega a la misma tabla:

binomio	Intervalos		
	$(-\infty, -7)$	$(-7, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 2$	- - - - -	- - - - -	+ + + +
$x + 7$	- - - - -	+ + + +	+ + + +
Resultado	+ + + +	- - - - -	+ + + +

Mas ahora, como se tiene la expresión $expresin > 0$ buscamos por **TODOS** los intervalos positivos, y se usa el operador de conjuntos unión ($\cup$) para indicar que ambos satisfacen la inecuación.

Entonces la gráfica resultante es:



Y el conjunto solución es $x \in \{(-\infty; -7) \cup (2; +\infty)\}$. Se lee como, el conjunto formado por la unión de -infinito a -7 con 2 a +infinito.

Además, también se puede expresar como: $\mathbb{R} - [-7; 2]$, mas la otra nomenclatura es mas sencilla y se seguirá trabajando con esa. Notesé que en este caso los intervalos son cerrados, esto es porque ni -7 ni 2 pertenecen al intervalo solución, y por esto se deben añadir al conjunto exclusión. Esta nomenclatura se lee como, todos los reales excepto el conjunto de -7 a 2.

Ahora procedamos con otro ejercicio, esta ecuación fue factorizada anteriormente en ecuaciones de 3er grado (1.1.2) $2x^3 + 9x^2 + 13x = -6 \rightarrow (x+1)(x+2)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$

Tomando la Factorización y resolviéndola para los 2 operadores relacionales que nos faltan por ver ($\leq, \geq$), tenemos:

Para: $(x+1)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) \leq 0$

Los puntos críticos son: -2,$-\frac{3}{2}$(-1.5),-1 por ende, los intervalos son:

$$(-\infty; -2], [-2; -\frac{3}{2}], [-\frac{3}{2}, -1], [-1, +\infty)$$

Luego procedemos a tomar valores para cada intervalo: $v_1 = -3, v_2 = -1.6, v_3 = -1.1, v_4 = 0$

Para (x+1):

-3: -3+1=-2 negativo

-1.6: -1.6+1=-0.6 negativo

-1.1: -1.1+1=-0.1 negativo

0: 0+1=1 positivo

Para $\left(x + \frac{3}{2}\right)$:

-3: $-3 + \frac{3}{2}$=-$\frac{3}{2}$ negativo

-1.6: $-1.6 + \frac{3}{2}$=-0.1 negativo

-1.1: $-1.1 + \frac{3}{2}$=+0.4 positivo

0: $0 + \frac{3}{2}$=1.5 positivo

Para (x+2):

-3: -3+2=-1 negativo

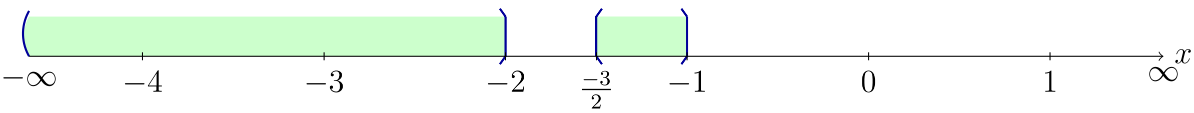
-1.6: -1.6+2=0.4 positivo

-1.1: -1.1+2=0.9 positivo

0: 0+2=2 positivo

binomio	Intervalos			
	$(-\infty;-2]$	$[-2;-\frac{3}{2}]$	$[-\frac{3}{2},-1]$	$[-1,+\infty)$
$x+1$	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +
$\left(x+\frac{3}{2}\right)$	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +
$x+2$	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
Resultado	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +

Y el conjunto solución es $x \in \{(-\infty;-2] \cup \left[-\dfrac{3}{2},-1\right]\}$ (negativos).



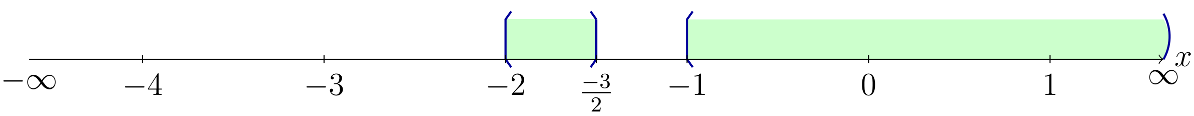
Para: $(x+1)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) \geq 0$

Tenemos lo mismo, por tanto llegamos a la tabla:

binomio	Intervalos			
	$(-\infty;-2]$	$[-2;-\frac{3}{2}]$	$[-\frac{3}{2},-1]$	$[-1,+\infty)$
$x+1$	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +
$\left(x+\frac{3}{2}\right)$	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +
$x+2$	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
Resultado	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +

Y el conjunto solución es $x \in \{\left[-2;\dfrac{-3}{2}\right] \cup [-1,+\infty)\}$ (positivos).

La gráfica resultante es:



Inecuaciones Racionales

Este tipo de inecuaciones tienen la forma $\dfrac{P(x)}{Q(X)}$ como una de las expresiones y el otro lado esta igualado a 0. $P(x), Q(x)$ son expresiones algebraicas como las que hemos venido trabajando y la forma de resolución de estos es con el método de barras (tabla de signos), con algunas consideraciones adicionales:

- Se factorizar tanto numerador como denominador y se colocan los intervalos correspondientes
- El polinomio denominador **NO** puede ser 0, ya que la división por 0 no existe, por esto esos intervalos siempre serán **ABIERTOS**, es decir, con un paréntesis "(" o ")" dependiendo si es apertura o cierre del intervalo.

Ejemplos:

Para $\frac{x^2+x-2}{x} \geq 0$ Primero factorizados tanto numerador como denominador: Numerador:

$$x^2 + x - 2 = 0.\ a = 1, b = 1, c = -2$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times -2}}{2 \times 1}$$
$$\text{Al resolver se obtiene: } x_1 = 1,\ x_2 = -2$$
$$\rightarrow (x-1)(x+2) = 0$$

Denominador: x

Y la inecuación factorizada queda de la forma:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x} \geq 0$$

Las raíces, puntos críticos, son: 1, -2, 0. Dando origen a los intervalos: $(-\infty; -2]$, $[-2, 0)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$ nótese que los intervalos son **ABIERTOS** en 0, esto es porque si el denominador se hace 0 (único punto en 0), la inecuación no existe y en los infinitos, porque estos se desconocen y por ende no se pueden tomar (misma razón que antes, por eso siempre es abierto en estos "puntos").

De igual forma, procedemos a tomar valores entre los intervalos: -3,-1,0.5,2 por facilidad de los cálculos. entonces tenemos:

Para (x-1): -3 : -3-1 = -4 negativo

-1 : -1-1 = -2 negativo

0.5 : 0.5-1 = -0.5 negativo

2 : 2-1 = 1 positivo

Para (x+2): -3 : -3+2 = -1 negativo

-1 : -1+2 = 1 positivo

-0.5 : -0.5+2 = 1.5 positivo

2 : 2+2 = 4 positivo

para x: -3 : -3 negativo

-1 : -1 negativo

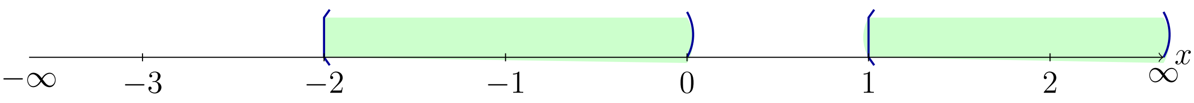
0.5 : 0.5 positivo

2 : 2 positivo

	$(-\infty;-2]$	$[-2,0)$	$(0,1]$	$[1,+\infty)$
x-1	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +
x+2	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
x	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +
resultado	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +

De lo que se obtiene el intervalo resultado:$\{x \in [-2,0) \cup [1,+\infty)\}$

Y la gráfica es:



Otro ejemplo y un truco: **Si se sigue un orden creciente, una vez se presenta el cambio de signo, para un monomio, todos los posteriores tendrán el nuevo signo**

$$\frac{(x+1)(x+3)(x-3)}{(x-5)x} \leq 0$$

Primero conseguimos los puntos críticos, raíces, estos son:

Numerador:-1,-3,3, en orden creciente, -3,-1,3

denominador:5,0 en orden creciente, 0,5

Por lo tanto, los puntos son -3,-1,0,3,5 y los intervalos son:

$(-\infty, -3]; [-3, -1]; [-1, 0); (0, 3]; [3, 5); (5, +\infty)$

Tomando puntos, estos serian, -4,-2,-0.5,1,4,6 y probando:

Para (x+1):

-4 : -4+1=-3, negativo

-2 : -2+1 = -1, negativo

-0.5 : -0.5+1=0.5 positivo **cambio de signo**

1 : 1+1= 2 positivo

4 : 4+1 = 5 positivo

6 : 6+1=7 positivo

Para (x+3):

-4 :-4+3=-1 negativo

-2 : -2+3 = 1 positivo **cambio de signo**

-0.5 : -0.5 +3 = 2.5 positivo

1 : 1+3 = 4 positivo

4 : 4+3 = 7 positivo

6 : 6+4 = 10 positivo

Para (x-3):

-4 : -4-3 =-7 negativo

-2 : -2-3 =-5 negativo

-0.5 : -0.5-3 =-3.5 negativo

1 : 1-3=-2 negativo

4 : 4-3=1 positivo **cambio de signo**

6 : 6-3=3 positivo

Para x:

-4 : -4 negativo

-2 : -2 negativo

-0.5 : -0.5 negativo

1 : 1 positivo **cambio de signo**

4 : positivo

6 : positivo

Para (x-5):

-4 : -4-5 =-9 negativo

-2 : -2-5 = -7 negativo

-0.5 : -0.5-5=-5.5 negativo

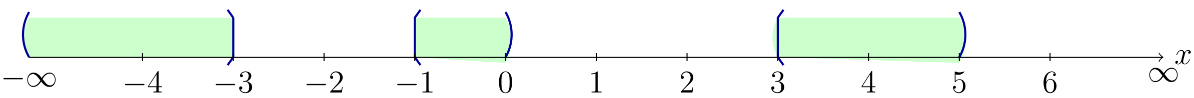
1 : 1-5 =-4 negativo

4 : 4-5=-1 negativo

6 : 6-5 = 1 positivo

	$(-\infty, -3]$	$[-3, -1]$	$[-1, 0)$	$(0, 3]$	$[3, 5)$	$(5, +\infty)$
x+1	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +
x-3	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +
x+3	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +
x	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
x-5	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +
resultado	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +

El intervalo solución es: $x \in \{(-\infty, -3] \cup [-1, 0) \cup [3, 5)\}$



Inecuaciones con valor absoluto

Las inecuaciones con valor absoluto son bastante comunes, y se resuelven de una forma diferente a lo estudiado anteriormente. Para resolverlas se utiliza la definición de valor absoluto.

Recordemos: que el valor absoluto, también conocido como modulo de un número real, se escribe $|x|$ es el valor no negativo de la expresión x. Y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para resolver las inecuaciones con valor absoluto, debemos entonces, resolver primero el valor absoluto, luego resolver las inecuaciones resultantes y finalmente conseguir los intervalos que la satisfacen.

Ejemplos:

Cuando el operador es $<$ o $\leq$, los intervalos se conectan:

$$|x| < K \rightarrow \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos las inecuaciones:

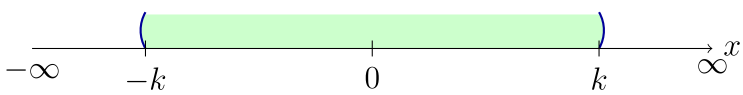
$$x < K \; ; \; -x < K$$

$$x < K \; ; \; x > -K$$

Y el resultado se escribe de la siguiente forma:

$$-K < x < K \; o \; x \in (-k; k)$$

y la gráfica resultante es:



Como se observa, solo se aplica la definición y se procede a resolver las inecuaciones por separado.

algunos ejemplos mas complejos serian:

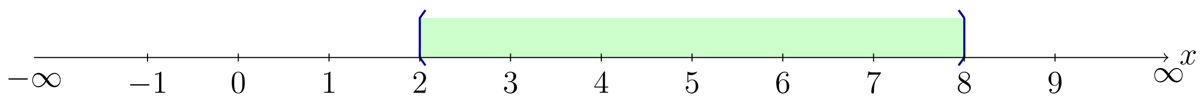
$$|x-5| \leq 3 \rightarrow \begin{cases} x-5, \text{ si } x \geq 0 \\ -x-(-5) = 5-x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos las inecuaciones:

$$\begin{aligned} x-5 &\leq 3 \\ x &\leq 3+5 \\ x &\leq 8 \\ x &\leq 8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 5-x &\leq 3 \\ -x &\leq 3-5 \\ -x &\leq -2 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

y se tiene el intervalo: $2 \leq x \leq 8$ o, de la otra forma, $x \in [2;8]$

Y la gráfica resultante es:



Cuando el operador relacional es $>$ o $\geq$, los intervalos son separados:

$$|x| > K \rightarrow \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos las inecuaciones:

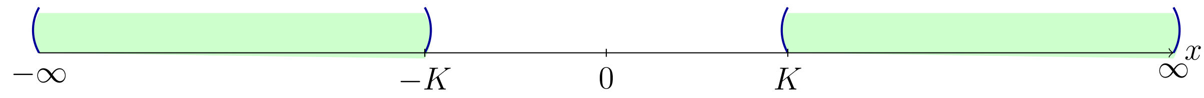
$$x > K \ ; \ -x > K$$

$$x > K \ ; \ x < -K$$

Y el resultado se escribe de la siguiente forma:

$x \in \{(-\infty; -K) \cup (K; \infty)\}$

Y la gráfica es:



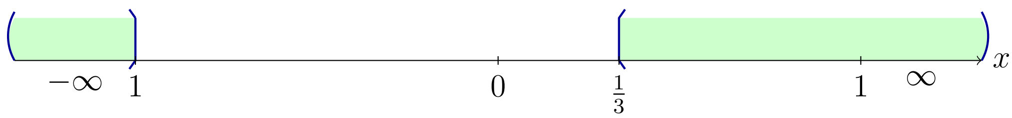
Otro ejemplo:

$$|x-1| \geq 2x \rightarrow \begin{cases} x-1, \text{ si } x \geq 0 \\ -x-(-1) = 1-x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos las inecuaciones:

$$\begin{aligned} x-1 &\geq 2x \\ x-2x &\geq 1 \\ -x &\geq 1 \\ x &\leq -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1-x &\leq 2x \\ -x-2x &\leq -1 \\ -3x &\leq -1 \\ x &\geq \frac{-1}{-3} \\ x &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

y el intervalo solución es $x \in \left\{(-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{3};\infty\right)\right\}$
Y la gráfica es:

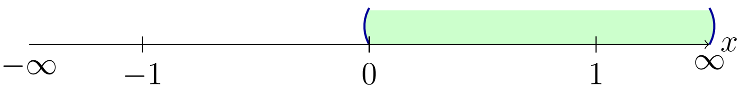


Otro ejemplo:

$$\frac{|x+1|}{x} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x+1, \text{ si } x \geq 0 \\ -x-1, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Para que la inecuación se cumpla, se tiene que cumplir que $\frac{a}{b} \geq 0$ Como el numerador siempre dará un resultado positivo (por eso tiene el valor absoluto), lo único que puede modificar el resultado es el denominador, entonces el intervalo estará dictado por que $den \geq 0$

$x \geq 0 \rightarrow$ el intervalo solución es $x \in (0; \infty)$ abierto, porque el denominador no puede ser 0.



1.3. Sistema de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones, es un conjunto de ecuaciones con mas de una incógnita, variable, las cuales conforman un problema matemático. Para resolverlo se tienen que encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen las ecuaciones.

Existen muchos tipos de sistemas de ecuaciones, estos se clasifican según que tipo de ecuaciones lo conforman. En este caso se estudiaran los **sistemas de ecuaciones algebraicas**; estos están conformados únicamente por ecuaciones algebraicas.

Una ecuación de varias variables tiene la forma: $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = 0$ o, también $aX, bY, \cdots, cZ = 0$, donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y/o a, b, z son **coeficientes** y $X_1, X_2, \cdots, X_n$ y/o $X, Y, \cdots, Z$ son **variables independientes**.

Los sistemas tienen la forma general:

$$\left.\begin{array}{c} F_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{array}\right\}$$

Y a su vez, se dividen por sus posibilidades de resolución en:

- **Compatible determinado**: El sistema siempre tiene solución única. Tiene tantas incógnitas como ecuaciones.
- **Compatible indeterminado**: El sistema tiene infinitas soluciones. Tiene mas incógnitas que ecuaciones.
- **Incompatible**: El sistema no tiene solución, esto se da por alguna incoherencia

mientras resolvemos (división por cero, raíz par de un número negativo, incompatibilidad de resultados).

El sistema compatible indeterminado siempre dependerá de alguna variable, quedara expresado en términos de función.

El compatible determinado siempre dará algún valor **único** para cada variable y es el que se estudiara.

1.3.1. Resolución sistemas de ecuaciones

Los métodos mas comunes para resolver los sistemas de ecuaciones son:

- sustitución.
- igualación.
- reducción.

Cabe resaltar que: existen otros métodos, como lo son el método gráfico y los métodos matriciales de Gauss Jordán y kramer.

Sustitución

Consiste en despejar **una** de las incógnitas, de forma que quede $incgnita = expresin$ y luego sustituir en otra ecuación la incógnita despejada por la expresión, esto da origen a una nueva ecuación la cual tiene una variable menos, repetir hasta que quede una ecuación de una sola variable y resolver. Luego se regresan en la linea sustituyendo las variables por los nuevos valores resultados.

Paso a paso se observa:

1. Elegir una ecuación (llámesele ec1) y despejar **1** incógnita.
2. Sustituir el despeje en otra ecuación (llámesele ec2), esto da origen a una nueva ecuación (llámesele sol).
3. Verificar si la nueva ecuación (sol) tiene mas de 1 variable.
   - Si sol tiene 1 sola variable, se despeja y se obtiene el resultado. Ese resultado se sustituye en ec1 y se obtienen todos los valores

- si sol no tiene 1 única variable, despejar alguna otra incógnita y sustituir todos los despejes de incógnitas, en otra ecuación (llámesele ec3) y repetir hasta obtener una única variable.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 3 \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

Tomando la primera ecuación, procedemos a despejar x:

$$(ec1) \qquad x + y = 3 \rightarrow x = 3 - y$$

Luego, sustituimos en las segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 2(3 - y) - y &= 0 \\ 2 \times 3 - 2y - y &= 0 \\ 6 - 3y &= 0 \\ -3y &= -6 \\ y &= \frac{-6}{-3} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

y sustituyendo $Y = 2$ en la $ec1$

$$x = 3 - y \rightarrow x = 3 - 2,\ x = 1$$

Y el sistema tiene una única solución, dada por los valores: $x = 1$ $y = 2$.

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{cccccccc} \frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = 0 \end{array}\right\}$$

Despejamos de la primera ecuación x:

$$\begin{aligned} (ec1) \qquad \frac{x}{2} + 3y - z &= 3 \\ \frac{x}{2} &= 3 - 3y + z \\ x &= 2 \times (3 - 3y + z) \\ x &= 6 - 6y + 2z \end{aligned}$$

Como observamos, hay mas de una variable, por lo tanto, debemos despejar una segunda ecuación, y sustituir en una tercera, todos los valores para quedar con una sola incógnita:

De la segunda ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 5z &= 1 \\ &\text{sustituyendo} \\ 2 \times (6 - 6y + 2z) + 4y + 5z &= 1 \\ 12 \ \text{-}12y \ +4z \ +4y \ +5z \ &= 1 \\ -8y + 9z &= -11 \\ &\text{Despejamos y} \\ -8y &= -11 - 9z \\ (ec2) \qquad y &= \frac{11 + 9z}{8} \end{aligned}$$

Luego, procedemos a sustituir en la tercera ecuación las expresiones obtenidas de $ec1$ y $ec2$

$$3x + 5y + 4z = 0$$

$$\text{sustituimos, } ec1:$$

$$3(6 - 6y + 2z) + 5y + 4z = 0$$

$$18 \text{ -}18y + 6z + 5y + 4z = 0$$

$$-13y + 10z + 18 = 0$$

$$\text{sustituimos, } ec2:$$

$$-13 \times (\frac{11 + 9z}{8}) + 10z = -18$$

$$\frac{-13 \times (11 + 9z) + 8 \times 10z}{8} = -18$$

$$-143 - 117z + 80z = -18 \times 8$$

$$-117z + 80z = -144 + 143$$

$$-37z = -1$$

$$z = \frac{1}{37}$$

Regresandonos en las ecuaciones obtenidas, sustituimos $z = \frac{1}{37}$ en $ec2$:

$$y = \frac{11 + 9z}{8}$$

$$y = \frac{11 + 9 \times \frac{1}{37}}{8}$$

$$y = \frac{11 \times 37 + 9}{8 \times 37}$$

$$y = \frac{52}{37}$$

Finalmente, sustituimos estos valores en $ec1$:

$$
\begin{aligned}
x &= 6 - 6y + 2z \\
x &= 6 - 6 \times \frac{52}{37} + 2 \times \frac{1}{37} \\
x &= 6 - \frac{312}{37} + \frac{2}{37} \\
x &= \frac{6 \times 37 - 312 + 2}{37} \\
x &= \frac{-88}{37}
\end{aligned}
$$

y el sistema esta resuelto con:

$$x = \frac{-88}{37}; \qquad y = \frac{52}{37}; \qquad z = \frac{1}{37}$$

Como se observa, este método se volverá mas complicado mientras mayor ecuaciones-variables se tengan.

Igualación

Este método es muy parecido al de sustitución, consiste en despejar una misma variable en las ecuaciones obtenidas e igualarlas (la variable despejada se usa como punto común), de esta forma se obtienen nuevas ecuaciones las cuales tienen 1 variable menos, se repite el proceso hasta tener 1 única ecuación de 1 sola variable, luego se despeja y los valores obtenidos se sustituyen en las ecuaciones previamente obtenidas para conseguir los resultados.

Usando los mismos ejemplos que en sustitución:

$$\left.\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 3 \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

procedemos a despejar x:

$$x + y = 3 \qquad\qquad 2x - y = 0$$
$$x = 3 - y \qquad\qquad x = \frac{y}{2}$$

Procedemos a igualar en la x:

$$\begin{aligned}
3 - y &= \frac{y}{2} \\
3 &= \frac{y}{2} + y \\
3 &= \frac{y + 2y}{2} \\
3 \times 2 &= 3y \\
y &= \frac{6}{3} \\
y &= 2
\end{aligned}$$

luego, sustituimos $y = 2$ en cualquiera de las ecuaciones anteriores, usando la segunda:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{y}{2} \\
x &= \frac{2}{2} \\
x &= 1
\end{aligned}$$

y el sistema tiene como solución $x = 1$ y $y = 2$ (mismo resultado que por sustitución ya que la solución es única).

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
\frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3 \\
2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\
3x & + & 5y & + & 4z & = 0
\end{array}\right\}$$

Despejamos la variable x:

$$\frac{x}{2}+3y-z=3 \qquad 2x+4y+5z=1 \qquad 3x+5y+4z=0$$

$$\frac{x}{2}=3-3y+z \qquad 2x=1-4y-5z \qquad 3x=-5y-4z$$

$$x=2\times(3-3y+z) \qquad x=\frac{1-4y-5z}{2} \qquad x=\frac{-5y-4z}{3}$$

$$x=6-6y+2z$$

Procedemos a igualar las ecuaciones, tenemos que usarlas todas al menos una vez, por esto se juntaran la primera con la segunda y la primera con la tercera (hay 2 variables restantes así que solo necesitamos 2 ecuaciones):

$$6-6y+2z=\frac{1-4y-5z}{2} \qquad 6-6y+2z=\frac{-5y-4z}{3}$$

$$2\times(6-6y+2z)=1-4y-5z \qquad 3\times(6-6y+2z)=-5y-4z$$

$$12-12y+4z=1-4y-5z \qquad 18-18y+6z=-5y-4z$$

Procedemos a despejar la y :

$$-12y+4y=1-5z-12-4z \qquad -18y+5y=-4z-18-6z$$

$$-8y=-11-9z \qquad -13y=-10z-18$$

$$y=\frac{-11-9z}{-8} \qquad y=\frac{-10z-18}{-13}$$

$$y=\frac{11+9z}{8} \qquad y=\frac{10z+18}{13}$$

Ahora que tenemos las 2 ecuaciones despejadas, las volvemos a igualar:

$$\frac{11+9z}{8}=\frac{10z+18}{13}$$

$$13\times(11+9z)=8\times(10z+18)$$

$$143+117z=80z+144$$

$$117z-80z=144-143$$

$$37z=1$$

$$z=\frac{1}{37}$$

Y luego, sustituyendo en alguna ecuación previa, usando la primera ecuación despejada de 2 variables (izquierda):

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{11 + 9z}{8} \\
y &= \frac{11 + 9 \times \frac{1}{37}}{8} \\
y &= \frac{11 \times 37 + 9}{37 \times 8} \\
y &= \frac{52}{37}
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituimos estos valores en la primera ecuación:

$$
\begin{aligned}
x &= 6 - 6y + 2z \\
x &= 6 - 6 \times \frac{52}{37} + 2 \times \frac{1}{37} \\
x &= 6 - \frac{312}{37} + \frac{2}{37} \\
x &= \frac{6 \times 37 - 312 + 2}{37} \\
x &= \frac{-88}{37}
\end{aligned}
$$

y el sistema esta resuelto, dando los mismos valores que por sustitución:

$$x = \frac{-88}{37}; \qquad y = \frac{52}{37}; \qquad z = \frac{1}{37}$$

Reducción

Este método consiste en reducir la cantidad de ecuaciones-incógnitas que hay presente, mediante la suma o resta de las ecuaciones, además de la multiplicación o dividiesen de las mismas por un número entero.

Para realizar esto, se busca que ambas ecuaciones tengan el mismo coeficiente en una determinada variable, luego restarlas si el signo es igual y sumarlas si el signo es distinto.

de esta forma se obtiene una(s) nueva(s) ecuación(es) y se repite el proceso hasta obtener el resultado de una variable, y se van sustituyendo los valores progresivamente, como en los métodos anteriores.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{rcll} x & + & y & = 3 \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

Por facilidad, se procede a ordenar de forma que estén los términos iguales uno debajo de otro:

$$\left.\begin{array}{rcll} x & + & y & = 3 \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

luego, se multiplica (o divide) una ecuación por un número el cual de como resultado el mismo coeficiente de la otra ecuación en una variable determinada, puede ser con el mismo signo(se restaran) o con signos contrarios (se sumaran). Usando el signo contrario, se multiplicara la primera ecuación por -2 y se sumara:

$$\left.\begin{array}{lcll} -2\times(x & + & y & = 3) \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & - & 2y & = & -6 \\ 2x & - & y & = & 0 \\ \hline 0x & - & 3y & = & -6 \end{array}$$

$$y = \frac{-6}{-3} \rightarrow y = 2$$

Luego, sustituimos en la primera ecuación:

$$x + y = 3$$

$$x + 2 = 3$$

$$x = 3 - 2$$

$$x = 1$$

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} \frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = 0 \end{array}\right\}$$

En este caso, se toman grupos de 2 ecuaciones. tomando 1 con 2 y 2 con 3:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} \frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrrrl} 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = 0 \end{array}\right\}$$

Luego, procedemos a multiplicar, para eliminar la variable x:

En el primer conjunto de ecuaciones, la primera ecuación por -4

En el segundo conjunto de ecuaciones, la primera por -3 y la segunda por 2

Y sumamos:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} -4\times(\frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3) \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrrrrl} -3\times(2x & + & 4y & + & 5z & = 1) \\ 2\times(3x & + & 5y & + & 4z & = 0) \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rrrrrrl} -2x & - & 12y & + & 4z & = -12 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\ \hline 0x & - & 8y & + & 9z & = -11 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrl} -6x & - & 12y & - & 15z & = -3 \\ 6x & + & 10y & + & 8z & = 0 \\ \hline 0x & - & 2y & - & -7 & = -3 \end{array}$$

Luego, se procede a resolver el sistema generado con las dos ecuaciones resultantes:

$$\left.\begin{array}{rrrl} -8y & + & 9z & = -11 \\ -2y & - & -7 & = -3 \end{array}\right\}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -4:

$$\left.\begin{array}{rrrl} -8y & + & 9z & = -11 \\ -4\times(-2y & - & -7 & = -3) \end{array}\right\}$$

$$
\begin{array}{rcrl}
-8y & + & 9z & = -11 \\
8y & + & 28 & = 12 \\
\hline
0y & + & 37z & = 1
\end{array}
$$

$$z = \frac{1}{37}$$

luego sustituimos en alguna de las ecuaciones anteriores, sustituyendo en la primera:

$$
\begin{aligned}
-8y+ & & 9z = -11 \\
y = \frac{-11-9z}{8} y & & = \frac{11+9z}{8} \\
y = \frac{11 + 9 \times \frac{1}{37}}{8} & & \\
y = \frac{11 \times 37 + 9}{37 \times 8} & & \\
y = \frac{52}{37} & &
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituimos estos valores en la primera ecuación:

$$
\begin{aligned}
x &= 6 - 6y + 2z \\
x &= 6 - 6 \times \frac{52}{37} + 2 \times \frac{1}{37} \\
x &= 6 - \frac{312}{37} + \frac{2}{37} \\
x &= \frac{6 \times 37 - 312 + 2}{37} \\
x &= \frac{-88}{37}
\end{aligned}
$$

y el sistema esta resuelto, dando los mismos valores que por sustitución o igualación:

$$x = \frac{-88}{37}; \qquad y = \frac{52}{37}; \qquad z = \frac{1}{37}$$