Índice

1. Funciones

Una función, como definición formal, es una regla que asigna a todo elemento en el conjunto de partida un **único** elemento en el conjunto de llegada. En si, esta puede verse como la relación que hay entre dos conjuntos de números, y se dice que una magnitud, numero, es función de otra si el valor de la primera depende del valor de la segunda. De esta forma, se obtienen 3 partes fundamentales de las funciones:

- Conjunto de partida, dominio:

  Es el conjunto formado por todos los posibles valores que puede **tomar** una función. Corresponde a la **variable independiente**.

- Conjunto de llegada, rango

  Es el conjunto formado por todos los posibles valores que puede **dar como resultado** una función, estos dependen del dominio y la expresión que rigen la función. Corresponde a la **variable dependiente**.

- Ecuación la cual rige la función (formula $f(x) = expresin$)

  Esta es una ecuación, la cual puede ser resuelta para una serie de valores (dominio) y da como resultado, un conjunto de valores (rango), y cada valor en el dominio puede dar un único elemento en el rango.

Una función suele tener la siguiente forma:

$$variable_d ependiente = expresin$$

Donde la expresión viene dada en términos de la variable independiente (una letra), es decir, $expresin =$ **ecuación en términos de la variable independiente**

y la variable dependiente puede ser una letra (diferente a la variable independiente) o esto: $f(variable_i ndependiente)$ una f que representa función, y entre corchetes, la variable independientes. Algunos ejemplos son:

Para identificarlas: La letra que esta sola, a un lado de la igualdad es la variable dependiente y la que esta siendo multiplicada, dividida, sumada, dentro de una raíz, etc. Es la variable independiente

$$f(x) = x^2$$

con:

$f(x)$: variable dependiente.

x: variable independiente.

$$y = x + 8$$

con:

y: variable dependiente.

x: variable independiente.

$$f(g) = g - 95$$

con:

$f(g)$: variable dependiente.

g: variable independiente.

$$h = 975x$$

con:

h: variable dependiente.

x: variable independiente.

Operaciones con funciones

Las funciones pueden ser sumadas, restadas, multiplicadas, divididas ,evaluadas y graficadas.

Suma y resta de funciones

La suma de dos funciones consiste en sumar/restar sus miembros algebraicamente y el dominio resultante vendrá dado por la intersección de los dominios de las funciones individuales.

Sean: $f(x),\ g(x)$ funciones cualesquiera, con sus dominios $Dom_f,\ Dom_g$

$$f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x) = miembros_f + miembros_g$$

y el dominio resultante va a ser dado por:

$$Dom_{f\pm g} = Dom_f \cap Dom_g$$

Ejemplos:

$f(x) = 45x,\ Dom_f = \{4, 5, 8, 70, 100\}$

$g(x) = 4 + 95x,\ Dom_g = \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\}$

$f(x) + g(x)$

$$f(x) + g(x) = 45x + 4 + 95x$$
$$f(x) + g(x) = 140x + 4$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{f+g} = Dom_f \cap Dom_g = \{4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\} = \{5, 8, 100\}$$

$f(x) - g(x)$

$$f(x) - g(x) = 45x - (4 + 95x)$$
$$f(x) - g(x) = 45x - 4 - 95x$$
$$f(x) - g(x) = -50x - 4$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{f-g} = Dom_f \cap Dom_g = \{4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\} = \{5, 8, 100\}$$

$g(x) - f(x)$

$$g(x) - f(x) = 45x - (4 + 95x)$$
$$g(x) - f(x) = 45x - 4 - 95x$$
$$g(x) - f(x) = -50x - 4$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{g-f} = Dom_f \cap Dom_g = \{4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\} = \{5, 8, 100\}$$

Multiplicación y división de funciones

La multiplicación/división de funciones se da de la misma forma que la suma o resta, es decir se multiplican o dividen los términos.

La multiplicación seguirá las propiedades asociativa y/o conmutativa para simplificarse.

En el caso de la división, esta se expresa como una fracción, siendo numerador y denominador dividendo y divisor respectivamente. Luego se procede a simplificar si es posible.

Los dominios vienen dados por la intersección en la multiplicación y la intersección con la exclusión de los puntos donde el denominador se haga 0 en la división (ya que la división por 0 no esta definida).

Ejemplos:

Sean: $f(x),\ g(x)$ funciones cualesquiera, con sus dominios $Dom_f,\ Dom_g$

$$f(x) \times g(x) = (f \times g)(x) = miembros_f \times miembros_g$$

y el dominio resultante va a ser dado por:

$$Dom_{f \times g} = Dom_f \cap Dom_g$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{f}{g})(x) = \frac{miembros_f}{miembros_g}$$

y el dominio resultante va a ser dado por:

$$Dom_{\frac{f}{g}} = Dom_f \cap Dom_g - \{x|g(x) = 0\}$$

Ejemplos:

$f(x) = 45x,\ Dom_f = \{0, -4/95, 4, 5, 8, 70, 100\}$

$g(x) = 4 + 95x,\ Dom_g = \{0, -4/95, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\}$

$f(x) \times g(x)$

$$f(x) \times g(x) = 45x \times (4 + 95x)$$

$$f(x) \times g(x) = 45x \times 4 + 45x \times 95x$$

$$f(x) \times g(x) = 180x + 4275x^2$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{g\times f} = Dom_f \cap Dom_g = \{0, -4/95, 4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{0, -4/95, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\} = \{0, -4/95, 5, 8,$$

$\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{45x}{4 + 95x}$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{\frac{f}{g}} = Dom_f \cap Dom_g - \{x|g(x) = 0\}$$

$$Dom_{\frac{f}{g}} = (\{0, -4/95, 4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{0, -4/95, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\}) - \{x|4 + 95x = 0\}$$

$$Dom_{\frac{f}{g}} = \{0, 5, 8, 100\}$$

$\frac{g(x)}{f(x)}$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{4+95x}{45x}$$
$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{4}{45x} + \frac{95}{45}$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{\frac{g}{f}} = Dom_f \cap Dom_g - \{x|f(x) = 0\}$$

$$Dom_{\frac{g}{f}} = (\{0, -4/95, 4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{0, -4/95, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\}) - \{x|45x = 0\}$$

$$Dom_{\frac{f}{g}} = \{-4/95, 5, 8, 100\}$$

Evaluación de funciones

Es una de las operaciones mas importantes, consiste en sustituir dentro de la expresión, la variable independiente por un elemento del dominio, esta operación puede repetirse tantas veces como haga falta con todos los elementos del dominio para obtener el rango de la función.

Para evaluar una función se escribe de la siguiente forma $f(a)$, la función evaluada en le punto a, donde a puede ser cualquier elemento o expresión del dominio de la función.

Para realizar esta operación, se debe sustituir la variable independiente en la expresión de la función por el termino deseado y luego simplificar de ser posible.

Ejemplos:

Sean: $f(x) = 45x$, $g(x) = 154 + 75x$, $h(x) = \frac{45x}{2} - x^2$, $z(x) = \sqrt[3]{5x+9}$.

Evaluarlas en 0,5,a-2:

$f(x) = 45x$

0: $f(0) = 45(0) = 0$

5: $f(5) = 45(5) = 225$

a-2: $f(a-2) = 45(a-2) = 45a - 90$

$g(x) = 154 + 75x$

0: $g(0) = 154 + 75(0) = 154$

5: $g(5) = 154 + 75(5) = 154 + 375 = 529$

a-2: $g(a-2) = 154 + 75(a-2) = 154 + 75a - 150 = 4 + 75a$

$h(x) = \frac{45x}{2} - x^2$

0: $h(0) = \frac{45(0)}{2} - 0^2 = 0$

5: $h(5) = \frac{45(5)}{2} - 5^2 = \frac{225}{2} - 25 = \frac{175}{2}$

a-2: $h(a-2) = \frac{45(a-2)}{2} - (a-2)^2 = \frac{45a-90}{2} - (a^2 - 4a + 4) = \frac{-2a^2+53a-98}{2}$

$z(x) = \sqrt[3]{5x+9}$

0: $z(0) = \sqrt[3]{5(0)+9} = \sqrt[3]{9}$

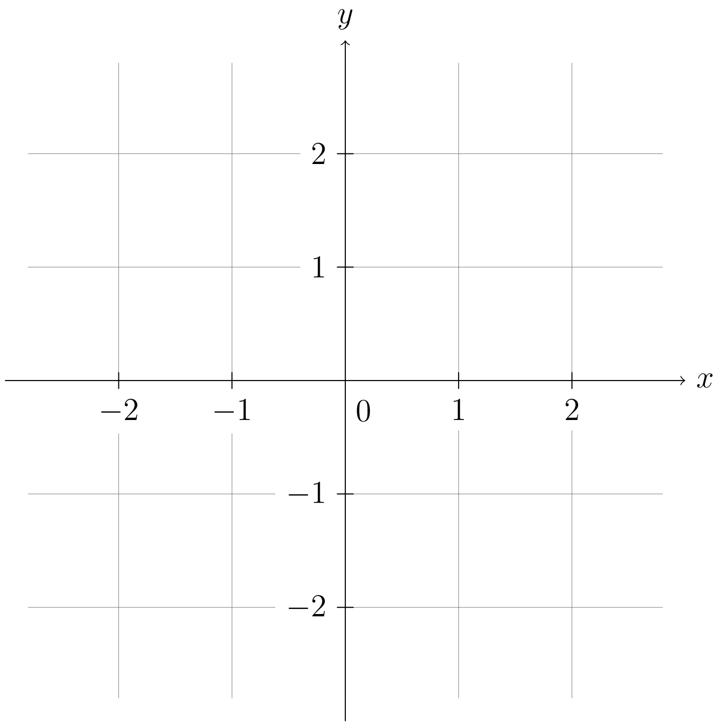
5: $z(5) = \sqrt[3]{5(5)+9} = \sqrt[3]{34}$

a-2: $z(a-2) = \sqrt[3]{5(a-2)+9} = \sqrt[3]{5a-10+9} = \sqrt[3]{5a-1}$

Gráfica de ecuaciones

La gráfica de una ecuación es el conjunto de puntos (x,y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación que define la función. Para esto se evalúan los puntos del dominio, tantos sean necesarios para conseguir la forma de la ecuación, y posteriormente se unen, mientras mas cercanos sean los puntos entre si mas precisa es la gráfica.

Los puntos se graficar en un **plano cartesiano**, también conocidas como coordenadas rectangulares, esta es una representación bidimensional creada por 2 ejes ortogonales (90° entre ellos) en donde el eje horizontal representa la **variable independiente** y el eje vertical la **variable dependiente**.

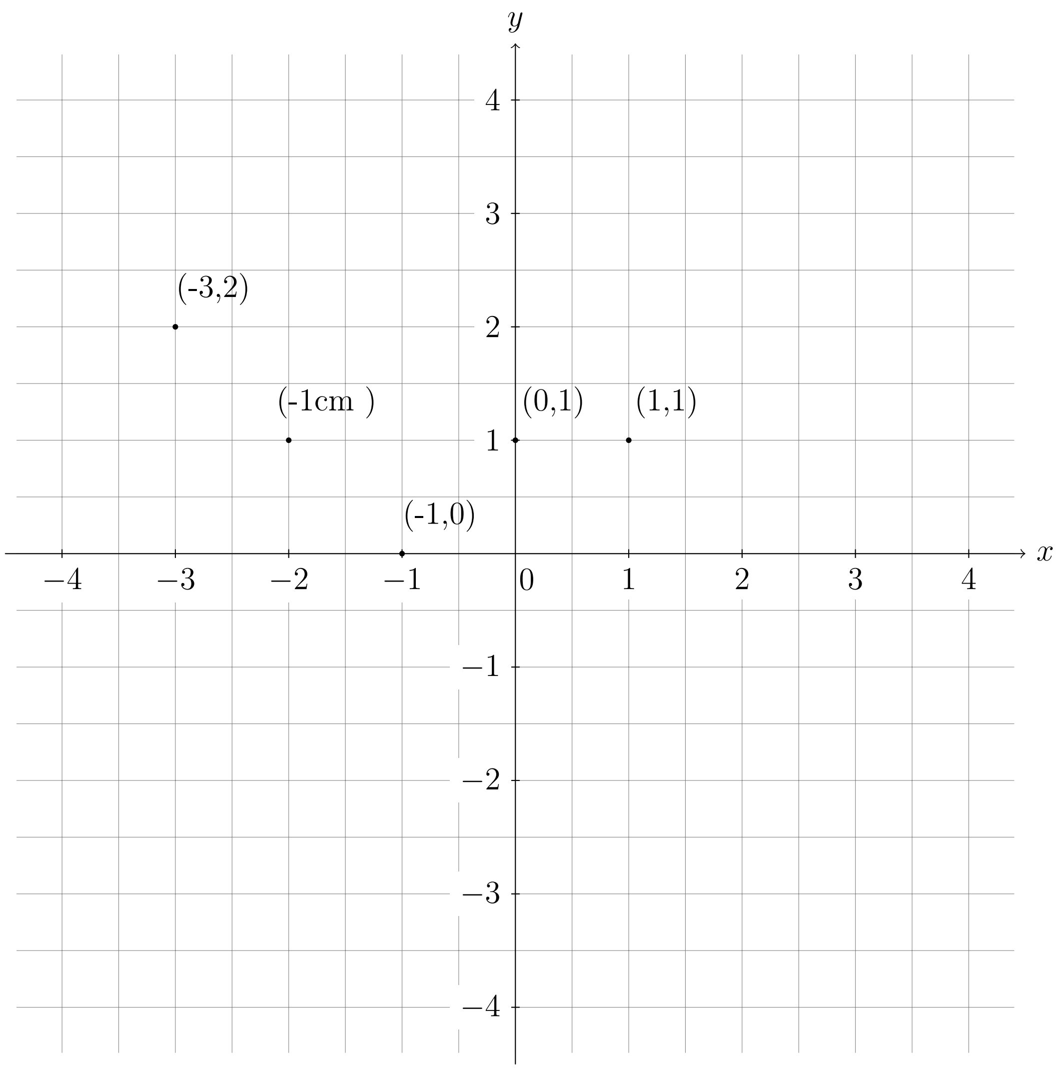


Los puntos que se grafican vienen dados por pares ordenados, estos son objetos matemáticos en los que se distingue un elemento y otro donde el primer elemento representa el eje x y el segundo el eje y (x, y).

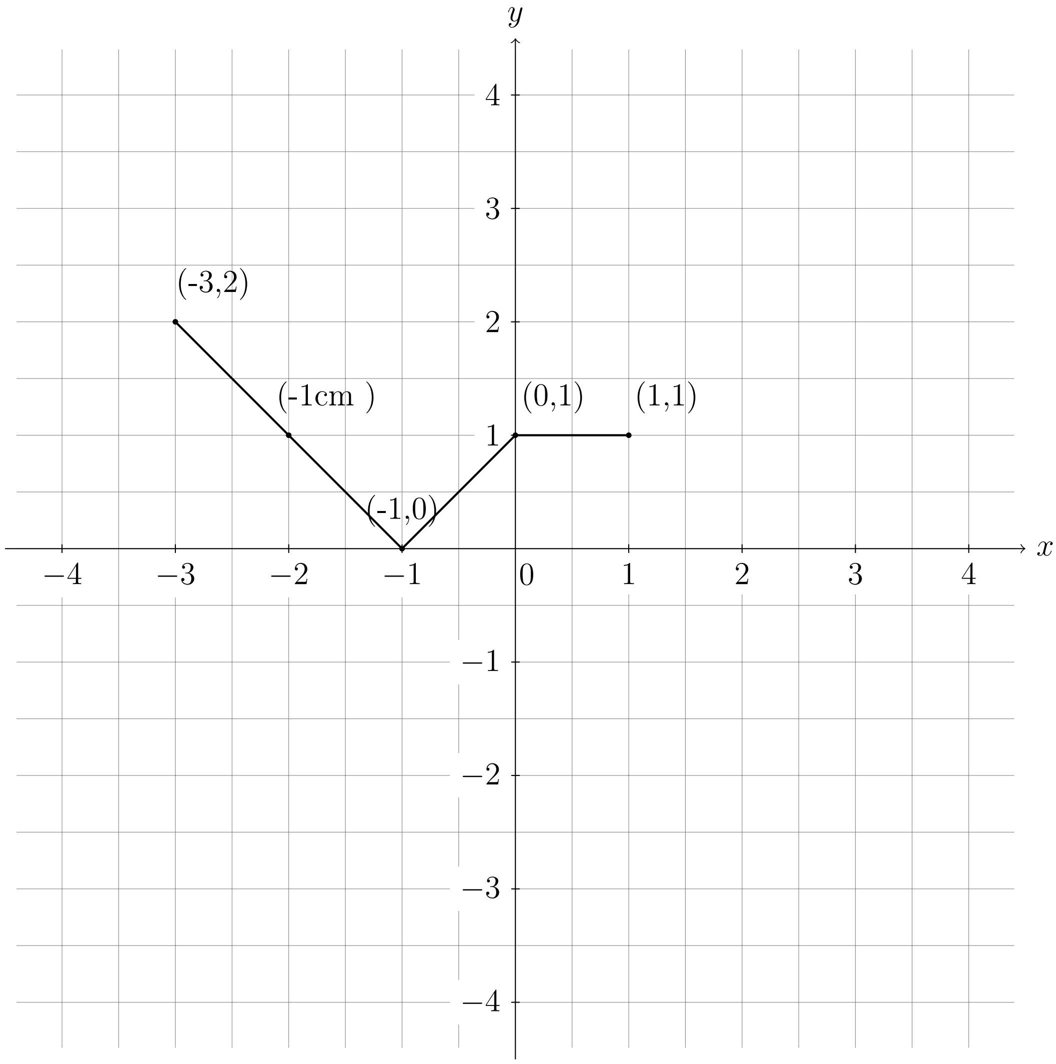
Ejemplo: Graficar el conjunto de puntos:

$$\{(-3; 2), (-2; 1), (-1; 0), (0; 1), (1; 1)\}$$

Como es un conjunto de puntos, pares ordenados, **solo deben colocarse los puntos, sin unirlos**



Si procedemos a unir los puntos, solo se hace cuando es una función, obtenemos la siguiente gráfica:



1.1. Función Lineal

Una función lineal es una función polinómica de una variable de primer grado, esto implica que es una única variable con exponente 1 y puede estar multiplicada por un coeficiente y sumada por una constante (numero).

Tiene la siguiente forma:

$$y = f(x) = mx + b$$

Donde:

x es la variable independiente.

$y = f(x)$ es la variable dependiente, puede escribirse de cualquiera de las dos formas.

m es el coeficiente, un numero no nulo ($m \neq 0$) el cual multiplica la variable.

b es una constante, es decir un numero que se suma o resta, dependiendo del signo, a la variable independiente.

Dominio y Rango: Ambos son todos los reales, es decir

$$Dom_f = \mathbb{R} \ ; \ Rg_f = \mathbb{R}$$

y su gráfica es una linea inclinada con pendiente (inclinación) m y desplazamiento b.

Ejemplo:

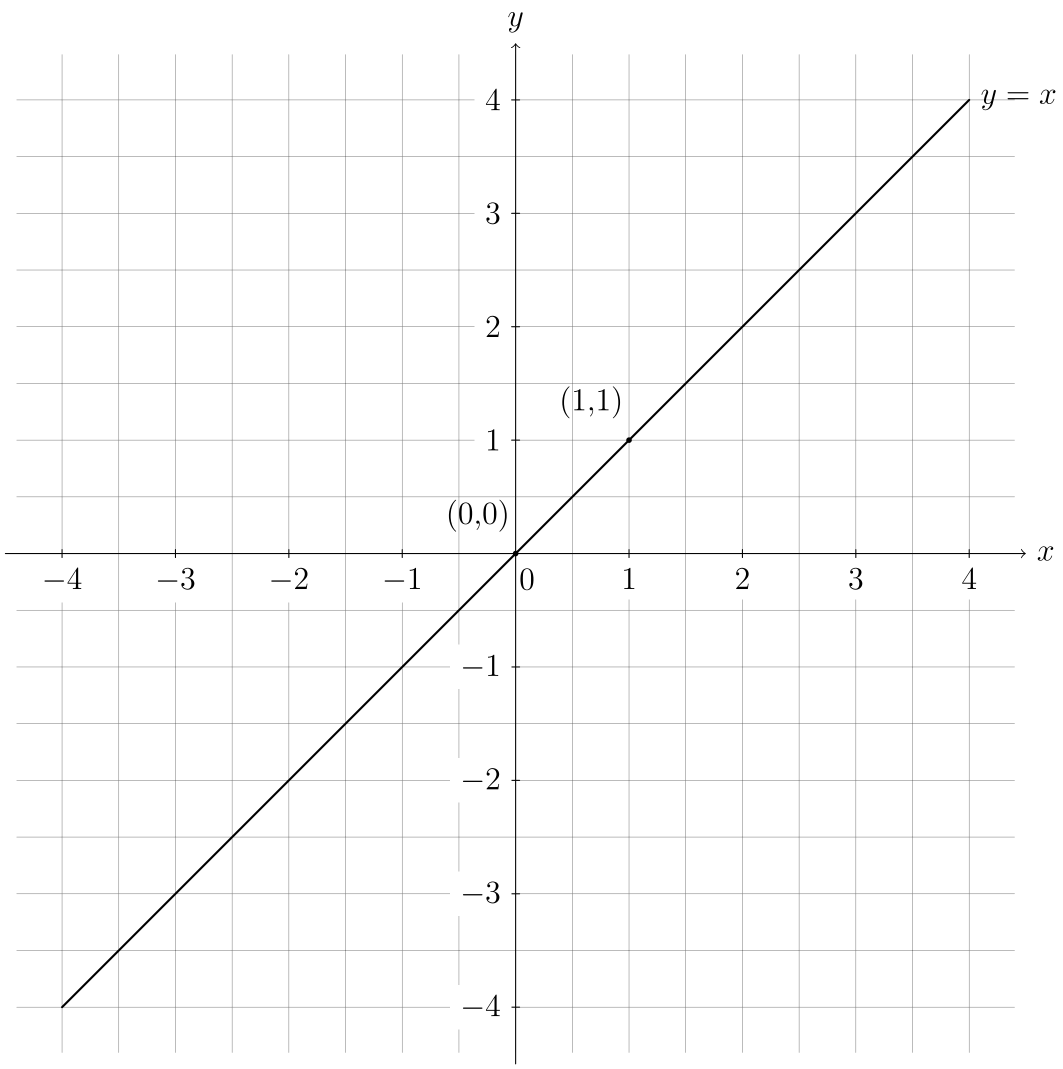
$y = x$

Procedemos a buscar 2 puntos, es lo mínimo ya que su gráfica es una linea recta.

x=0: y= 0; Par ordenado: (0;0)

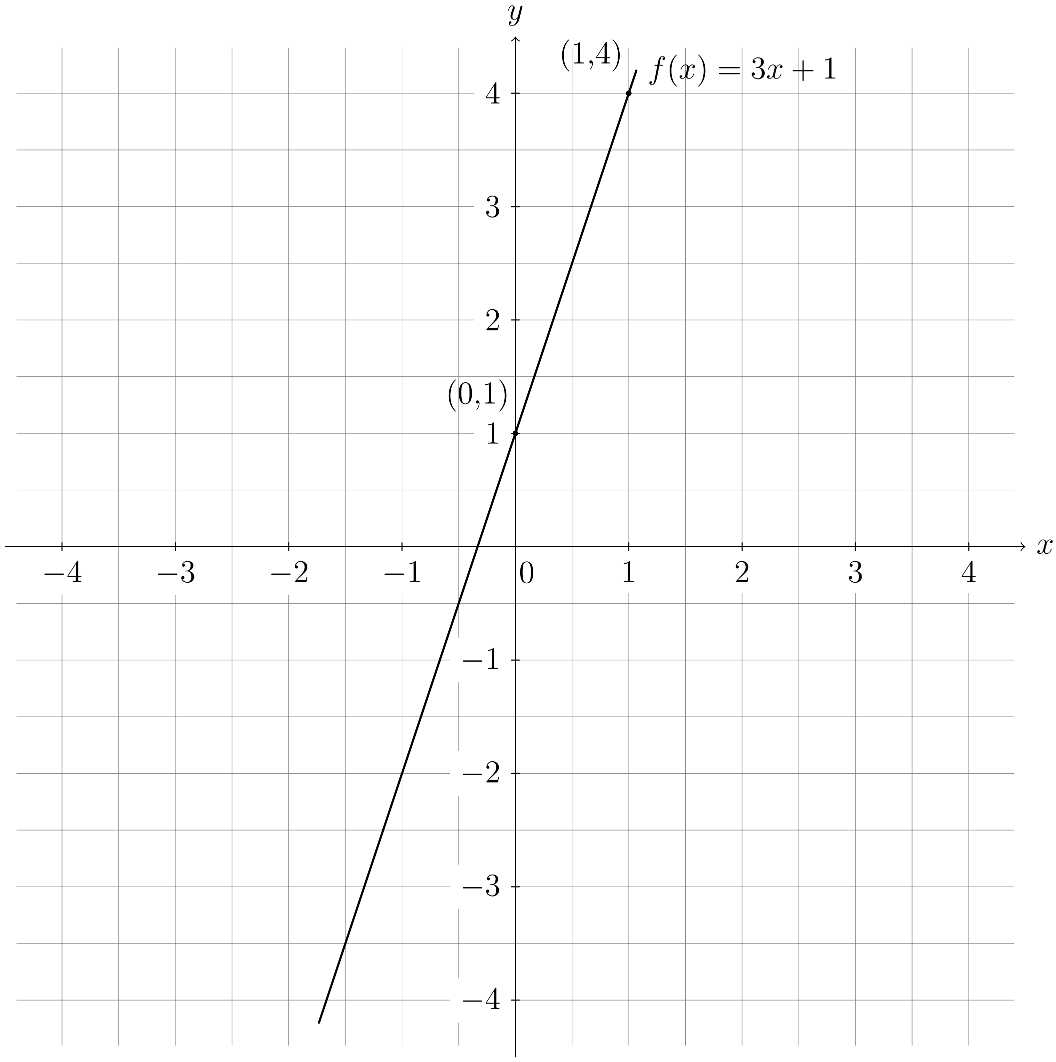
x=1: y=1; Par ordenado: (1;1)

Graficamos:



$f(x) = 3x + 1$ Procedemos a buscar 2 puntos x=0: y=0+1=1; Par ordenado (0;1)

x=1: y=3+1; Par ordenado(1;4)



1.2. Función Cuadrática

una función cuadrática, también conocido como polinomio cuadrático, o un polinomio de grado 2, es una función polinómica con una variable en la que el término de grado más alto es de segundo grado. Esto implica que, después de simplificaciones, existen dos variables sumándose, multiplicadas por coeficientes (los cuales no tienen que ser iguales) y un termino independiente. Tiene la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde: x es la variable independiente. a, b, c son números reales $(a \neq 0)$, a, b son los coeficientes de la variable y c es el termino independiente.

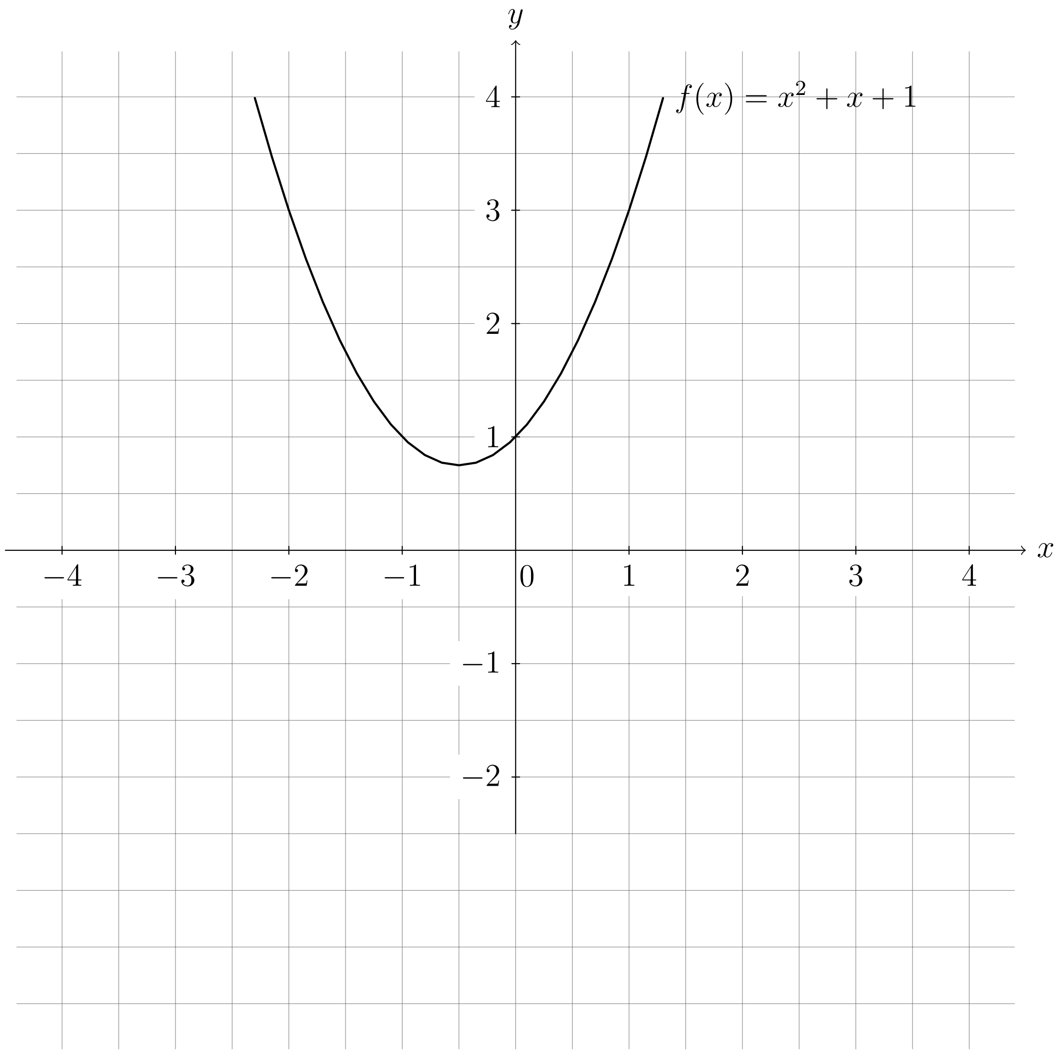
Dominio y Rango: Ambos son todos los reales, es decir

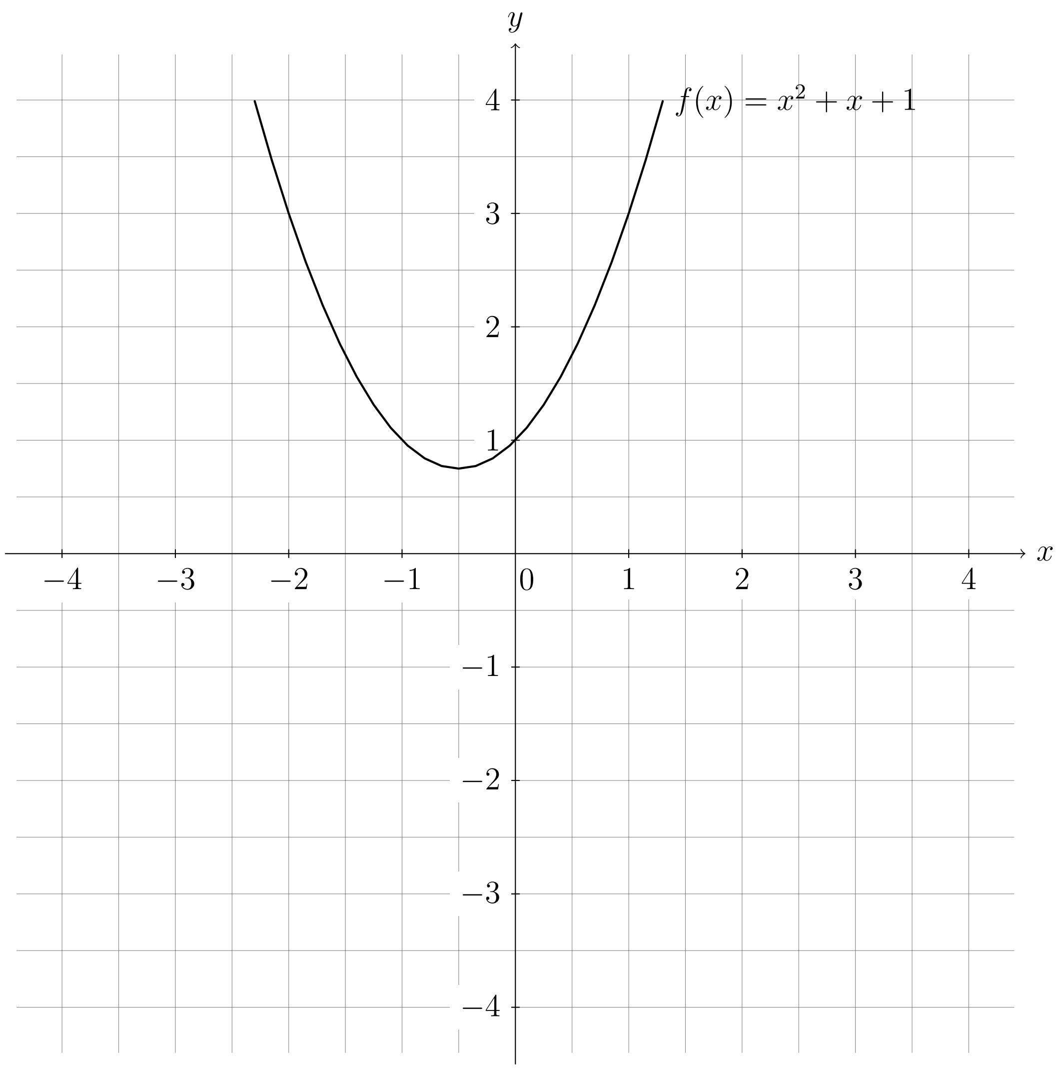
$$Dom_f = \mathbb{R}\ ;\ Rg_f = \mathbb{R}$$

La gráfica es la misma que la de una parábola.

Ejemplos:

$f(x) = x^2 + x + 1$





1.3. Función Polinómica

Una función polinómica esta compuesta por una expresión algebraica formada por varios monomios (un único termino), En ellos intervienen números y letras (ya sea como variable o constantes) relacionados mediante sumas, multiplicaciones y potencias.

Tiene la siguiente forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n - 1 + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde:

$P(x)$ es la variable dependiente.

x es la variable independiente

$a_i$con $i \in n, n-1, \cdots, 1$ los coeficientes (son los números que multiplican a las variables).

a_0 el termino independiente.

Usando una notación mas avanzada, puede escribirse como sumatoria de la forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

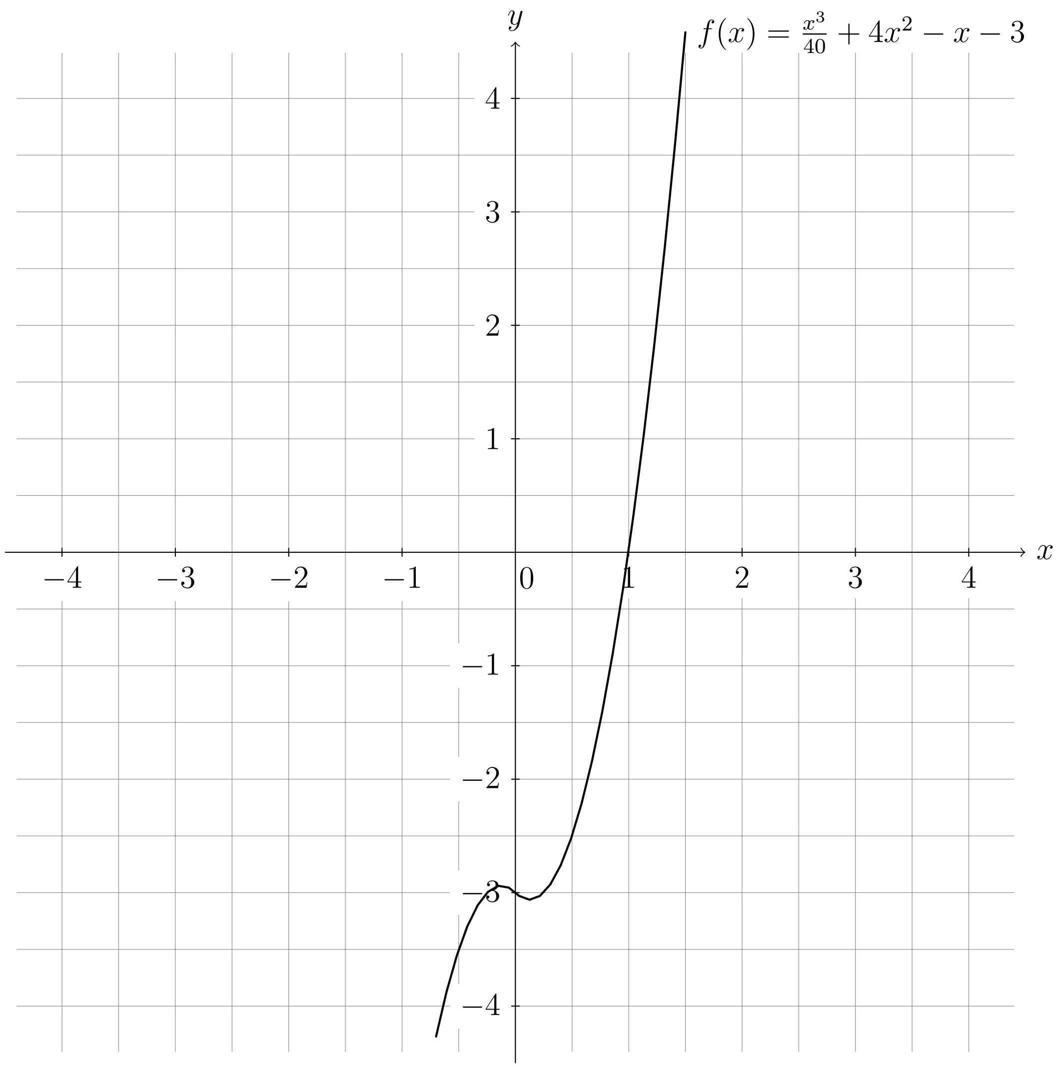
El dominio y el rango son todos los reales es decir:

$$Dom_f = \mathbb{R} \ ; \ Rg_f = \mathbb{R}$$

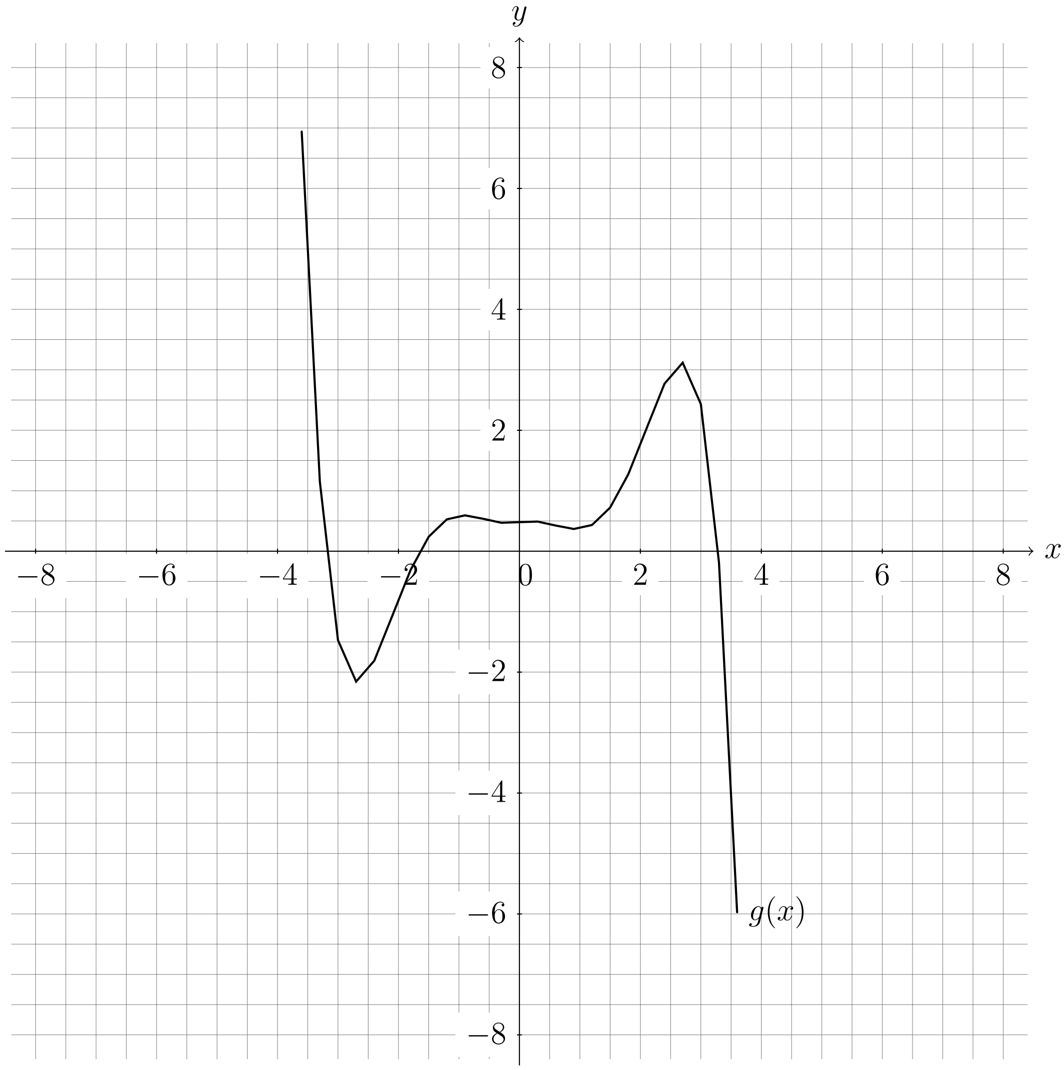
La gráfica es muy variada, no tiene una forma especifica, ya que para polinomios de grado 1 tenemos funciones lineales, de grado 2 cuadráticas y para grados superiores se hace un estudio exhaustivo para poder graficarlas a mano (normalmente se usan graficadoras o programas de computador).

Algunos ejemplos son:

$f(x) = \frac{x^3}{40} + 4x^2 - x - 3$



$g(x) = -0.1x^5 + 0.6x^4 - 0.22x^3 - 0.54x^2 + 0.2x + 0.48$



1.4. Cónicas

Una **cónica** o **sección cónica** es un lugar geométrico que se obtiene al intersectar un plano con un cono. Si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas. Se clasifican en cuatro tipos: elipse, parábola, hipérbola y circunferencia.

Las curvas cónicas son importantes en la astronomía: dos cuerpos masivos que interactúan según la ley universal de la gravitación, describen órbitas similares a secciones cónicas: elipses, hipérbolas o parábolas en función de sus distancias, velocidades y masas.

También son muy útiles en aerodinámica y otras aplicaciones industriales, ya que permiten ser reproducidas por medios simples con gran exactitud, logrando volúmenes, superficies y curvas de gran precisión.

Cabe resaltar que un cono puede ser visto como un solido en revolución (figura 3 dimensional que se obtiene al girar una figura plana (2 dimensiones)) obtenido a partir de girar un triangulo por sus catetos. También puede ser descrito como una función de múltiples variables (3 específicamente), esto atañe a un curso de calculo multi variable (Universitario) y por esto solo se nombra.

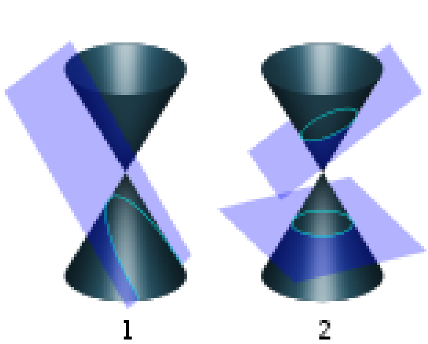


Figura 1: Secciones generadas por un plano al interactuar un cono. 1. Parábola 2. Elipse y circunferencia 3. hipérbola.

Elipse

Una elipse es una curva plana, simple y cerrada con dos ejes de simetría que resulta al cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo (inclinado) al eje de simetría con un ángulo mayor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.

Es decir es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Su ecuación, para una elipse horizontal, es la siguiente:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

Donde: x_0 y y_0 son las coordenadas x e y del centro de la elipse.

Elementos

Centro: Es el punto de intersección de los ejes. Es, además, centro de simetría.

Eje principal o focal: Es el eje en el que se encuentran los focos. Es un eje de simetría.

Eje secundario: Es el eje perpendicular al eje principal, mediatriz del segmento que une los focos.

Vértices: Puntos de intersección de la elipse con los ejes.

Distancia focal: Distancia entre los focos. Su longitud es $2 \cdot c$.

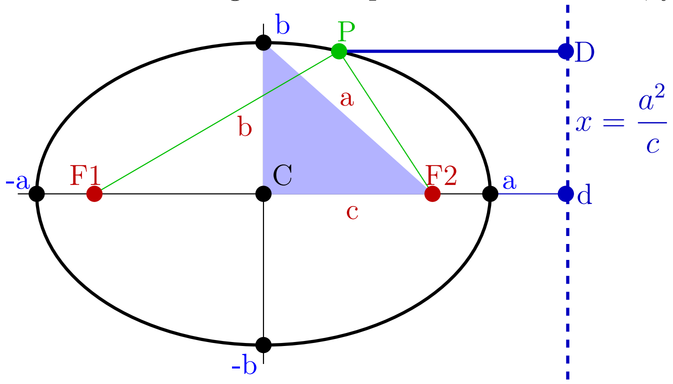
Semi-distancia focal: Distancia entre el centro y cada foco. Su longitud es c.

Semieje mayor o principal: Segmento entre el centro y los vértices del eje principal. Su longitud es a.

Semieje menor o secundario: Segmento entre el centro y los vértices del eje secundario. Su longitud es b y cumple $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Radio vectores: Cada punto de la elipse cuenta con dos radio vectores que son los segmentos que unen dicho punto a cada uno de los focos. Para un punto P(x , y) se cumple que $(P, F) = a - e \cdot xyd(P, F') = a + e \cdot x$

Cabe resaltar que estos conceptos también son aplicables para una elipse vertical, si $b > a$ en la ecuación general se produce este cambio, y los focos estarían en el eje vertical.



Parábola

una parábola es la sección cónica de excentricidad igual a 1,resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz.

Se denomina parábola al lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que equidista de una recta fija, llamada directriz y de un punto fijo en el plano, que no pertenece a la parábola ni a la directriz, llamado foco.

Su gráfica es muy parecida a la del polinomio de orden 2 y su ecuación tiene la forma:

$$(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o)$$

Donde: x_0 y y_0 son las coordenadas x e y del centro de la parábola.

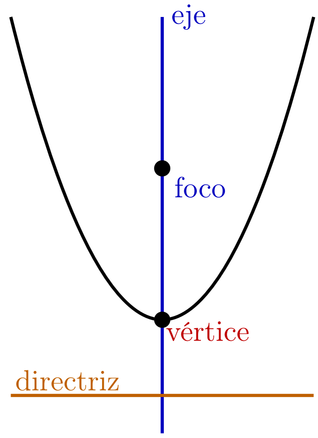
Elementos

Eje: Es un eje de simetría y por donde pasa el foco

foco: Punto equidistante a todo par de puntos (simétricos) de la parábola

Vértice: Puntos de intersección de la parábola con el eje.

directriz: Recta equidistante a los puntos de la parábola.



hipérbola

Una hipérbola es una curva abierta de dos ramas, obtenida cortando un cono recto mediante un plano no necesariamente paralelo al eje de simetría, y con ángulo menor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.

También se define como se define como el lugar geométrico de los puntos del plano en el que la diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados focos, F y F', es siempre constante.

Una hipérbola horizontal es descrita por la ecuación:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2} - \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$$

Donde: x_0 y y_0 son las coordenadas x e y del centro de la hipérbola.

Elementos

Centro: Es el punto de o, el centro de simetría.

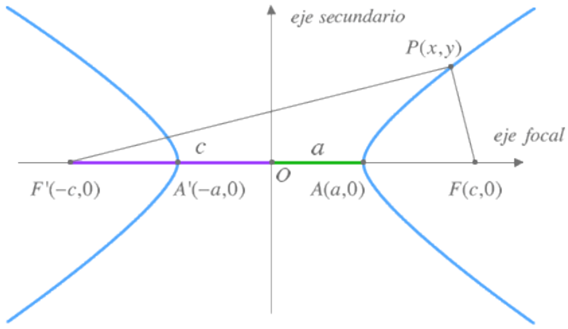
Eje principal o focal: Es el eje en el que se encuentran los focos. Es un eje de simetría.

Eje secundario: Es el eje perpendicular al eje principal, mediatriz del segmento que une los focos.

Vértices: Puntos de intersección de las hipérbolas con el eje focal.

Distancia focal: Distancia entre los focos.

Semi-distancia focal: Distancia entre el centro y cada foco.



Circunferencia

La circunferencia es una curva plana y cerrada tal que todos sus puntos están a igual distancia del centro.

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan a otro punto llamado centro.

La circunferencia es descrita por la ecuación:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Donde: x_0 y y_0 son las coordenadas x e y del centro de la circunferencia. r es el radio de la circunferencia.

Elementos

El centro es el punto equidistante a todos los puntos de una circunferencia. Señalado con el nombre C en la figura.

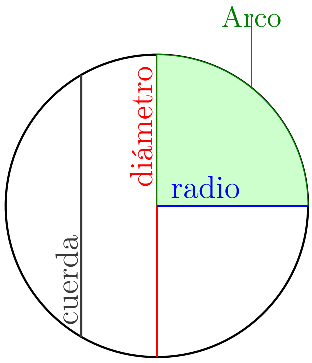
Radio es cualquier segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. El radio también es la longitud de los segmentos del mismo nombre.

Un diámetro es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por su centro. El diámetro también es la longitud de los segmento del mismo nombre.

El perímetro es el contorno de la circunferencia y su longitud.

Una cuerda es cualquier segmento que une dos puntos de una circunferencia. El diámetro es una cuerda de máxima longitud.

Un arco es cualquier porción de circunferencia delimitada por dos puntos sobre esta. Se dice también que una cuerda subtiende cada arco que determinan sus extremos.



1.5. Función Exponencial

una función exponencial es una función de la forma

$$f(x) = ab^x$$

en el que el argumento x se presenta como un exponente.

b es la base.

a es el coeficiente que multiplica a la base.

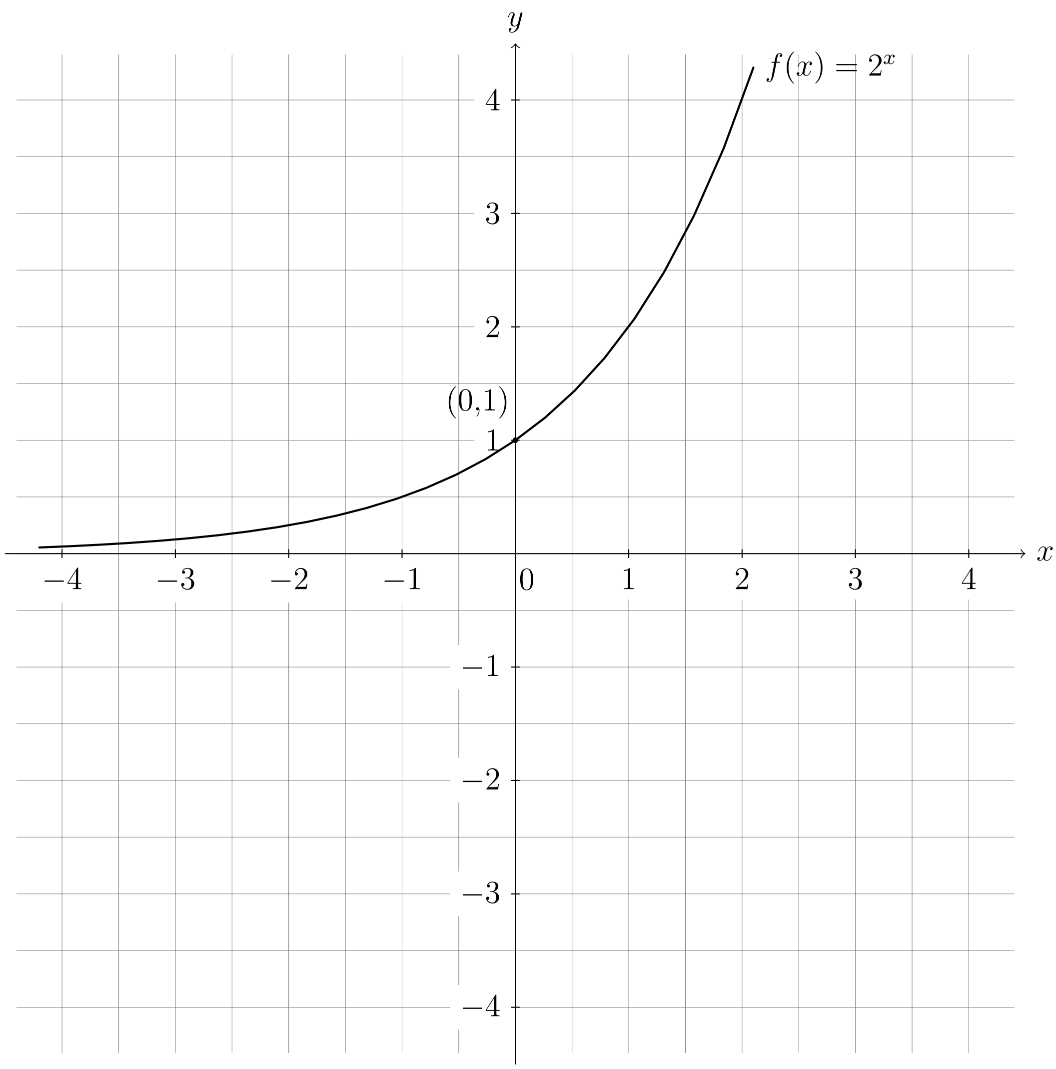
Cabe destacar que una función de la forma $f(x) = ab^{cx+d}$ también es una función exponencial, ya que puede reescribirse como: $ab^{cx+d} = (ab^d)(b^c)^x$

Dominio: Todos los reales. $\mathbb{R}$

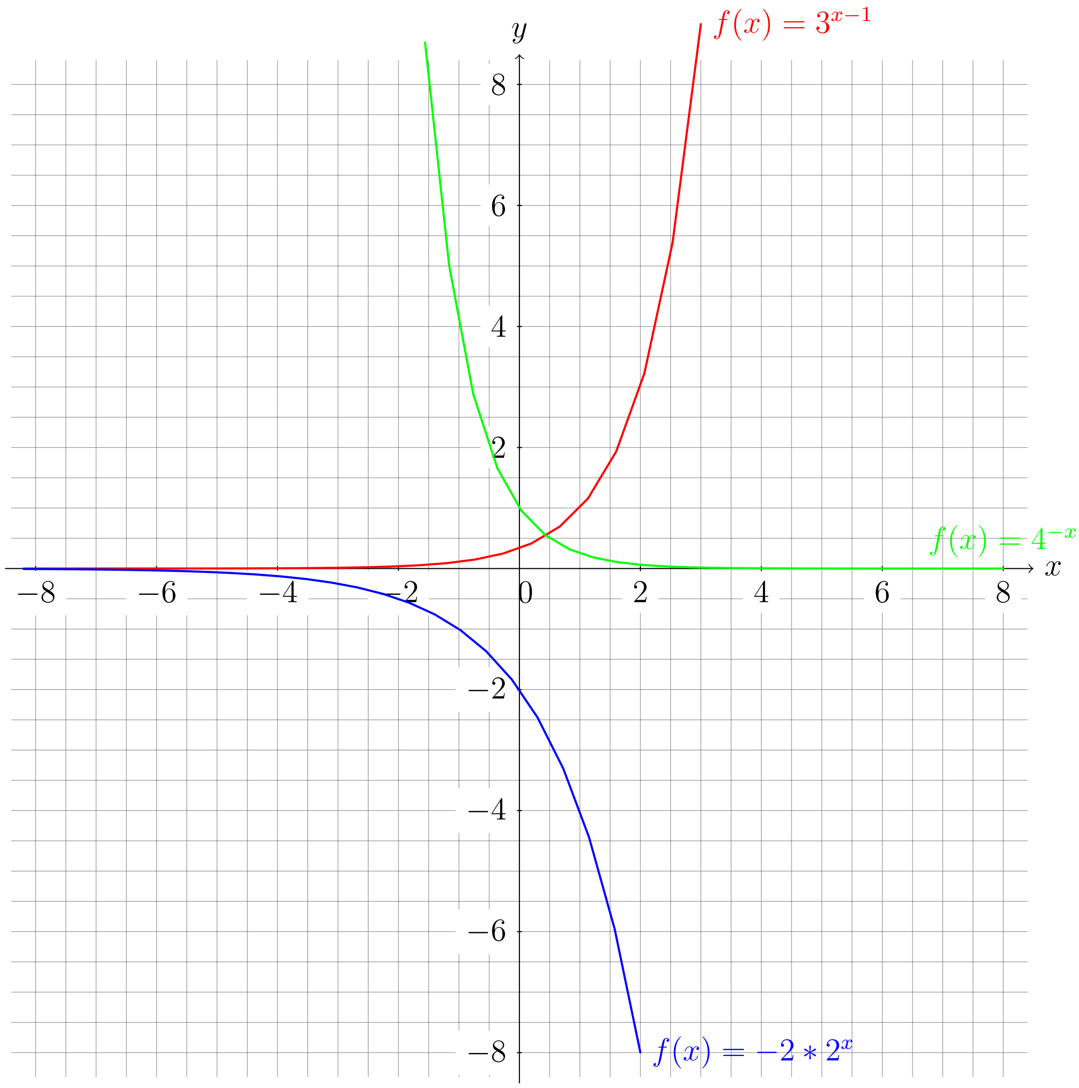
Rango: Todos los reales positivos sin incluir el 0 $\mathbb{R}^+ - \{0\}$

Ejemplos:

Para la función $f(x) = 2^x$



Otros ejemplos:



1.6. Función Logarítmica

Una función logarítmica es una función la cual esta formada por un logaritmo de base a y tiene la forma:

$$f(x) = \log_a x$$

donde: x es la variable independiente. $\log_a$ es un logaritmo, la inversa de la función exponencial y tiene como base el numero a, este puede ser un numero real positivo, distinto de 0 y 1 es decir: $a \in \{\mathbb{R} : 0 < a \neq 1\}$

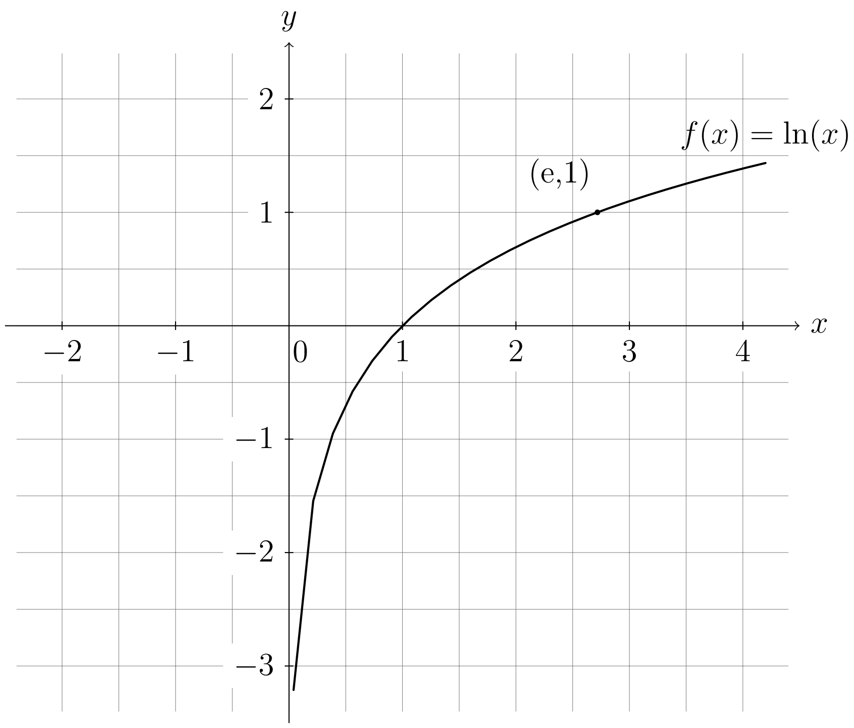
Cabe destacar que: x puede ser otra función, un argumento, sumas, multiplicaciones, etc.

$$f(x) = \log_a arg(x)$$

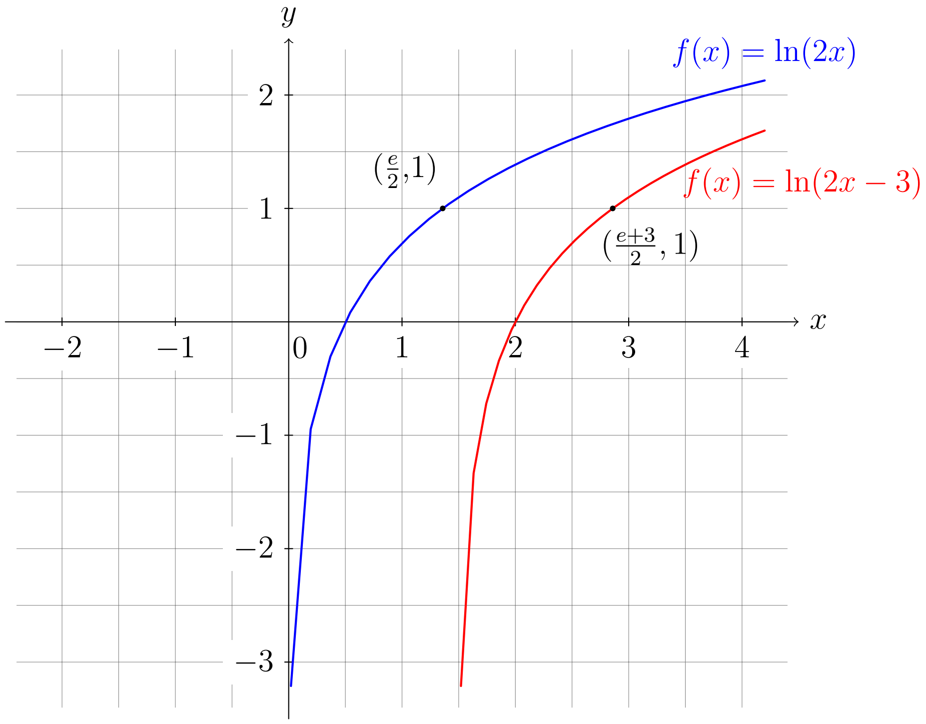
El dominio son todos los números reales que hacen que el argumento anteriormente nombrado sea mayor que 0, entonces $Dom_f = \{x : arg(x) \in \ \mathbb{R}^+ - \{0\}\}$

El rango: son todos los números reales.

La gráfica, para $\log_e(x)$ el cual es conocido como logaritmo natural o neperiano, viene dada por:



Otros ejemplos:



1.7. Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas, también llamadas funciones circulares, son las funciones que tienen el objetivo de extender la definición de las razones trigonométricas a todos los números reales y complejos.

Suelen utilizarse para la medición de ángulos por lo tanto, reciben como argumentos grados o radianes(pi radianes). Estas son las medidas mas utilizadas y su equivalencia es de $1pi\ radian = 180°$

Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física y por lo tanto en las aplicaciones de la misma como lo son la arquitectura, ingeniería, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, y la representación de fenómenos periódicos. La combinación de estas y algunos teoremas de calculo permiten la creación de aplicaciones tan comunes como los filtros de fotos y ecualizadores (musica).

Las funciones trigonométricas mas comunes son:

- Seno, se representa en términos de x como: $sen(x)$ o $sin(x)$.
- Coseno, se representa en términos de x como: $cos(x)$.
- Tangente, se representa en términos de x como: $tan(x)$ o $tg(x)$.

- Cotangente, se representa en términos de x como: $cot(x)$ o $ctg(x)$.

- Secante, se representa en términos de x como: $sec(x)$.

- Cosecante, se representa en términos de x como: $csc(x)$ o $cosec(x)$.

Estas funciones toman una serie de valores diferentes con respecto a su valor y son **periódicas**, esto significa que sus valores se repiten para una serie de valores, 2π o su equivalente $360°$ para todas menos la tangente y la cotangente que es π o $180°$. Esto puede ser modificado si se multiplica el argumento (la variable, en los ejemplos x) por un numero.

Como los ángulos se repiten (ya que es un movimiento circular y es equivalente a dar vueltas en el mismo circulo), también lo hacen los radianes. Este punto es 2π o 360○. **Recuerde que:** Una vuelta de 360° es una vuelta completa y se termina en el mismo sitio; por esto,

$$360° = 0° \text{ y } 0 = 2\pi\text{radianes}$$

$$100° = (100 + 360)° = 400° = 100° + n \times 360°; n \in \mathbb{R}$$

Existen ciertos valores llamados ángulos notables que son importantes y sus valores son:

TABLA DE ANGULOS NOTABLES

RADIANES	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE	SECANTE	COSECANTE
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Indefinido	0	Indefinido	1
π	180°	0	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	Indefinido	0	Indefinido	-1
2π	360°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido

Figura 2: Ángulos notables de las funciones mas comunes

1.7.1. Seno

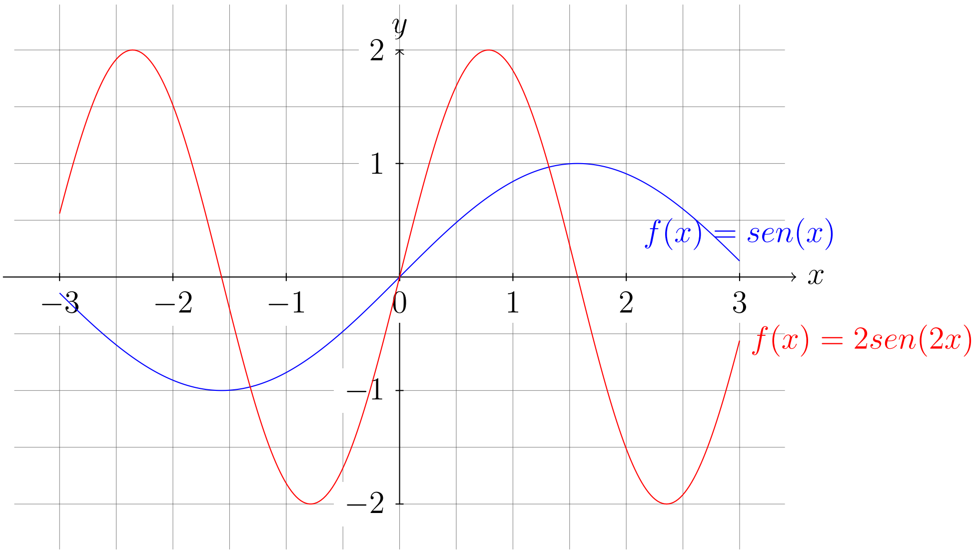
En un triangulo rectángulo se define como la relación entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa: $sen(\alpha) = \frac{C.O}{H}$.

Como función, se expresa como $sen(x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Su dominio es: $\mathbb{R}$ y su rango es: [-1,1].

Puede ser expresado como: $A \times sen(n \times x)$, donde A, nson números reales cualesquiera.

Su gráfica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1expande$



1.7.2. Coseno

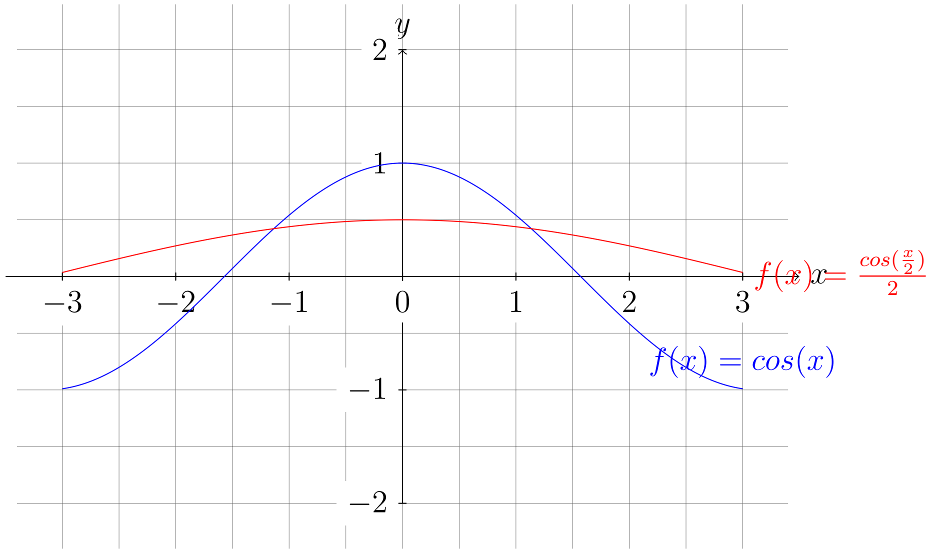
En un triangulo rectángulo se define como la relación entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa: $cos(\alpha) = \frac{C.A}{H}$.

Como función, se expresa como $cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Su dominio es: $\mathbb{R}$ y su rango es: [-1,1].

Puede ser expresado como: $A \times cos(n \times x)$, donde A, nson números reales cualesquiera.

Su gráfica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1expande$



1.7.3. Tangente

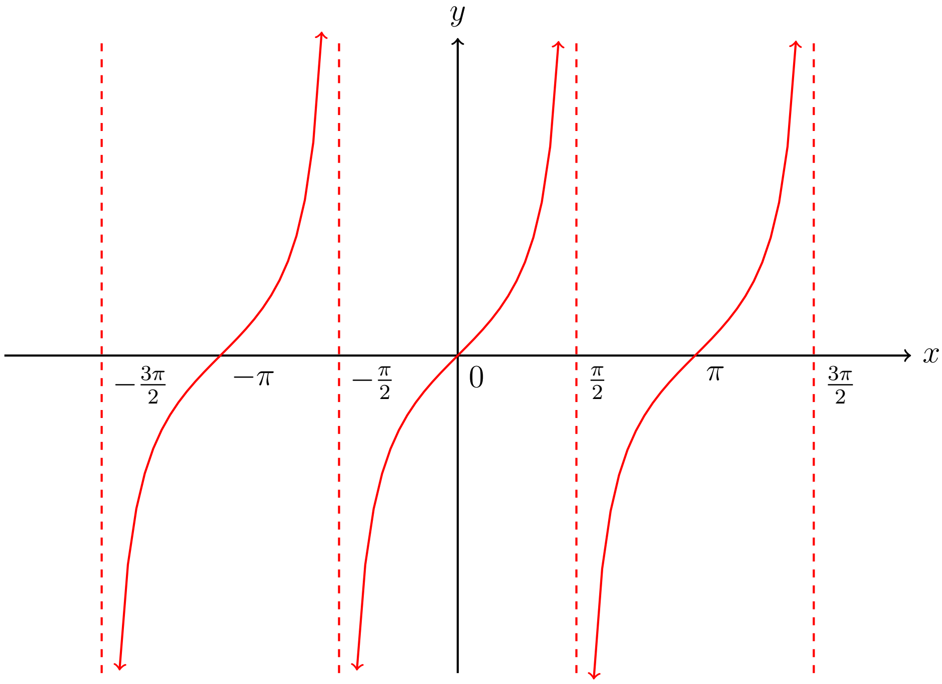
En un triangulo rectángulo se define como la relación entre el cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo: $tan(\alpha) = \frac{C.O}{C.A}$.

Como función, se expresa como $tan(x)$ con $x \in \mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Su dominio es: $\mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ y su rango es: $\mathbb{R}$.

Puede ser expresado como: $A \times tan(n \times x)$, donde A, nson números reales cualesquiera.

Su gráfica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1 comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1 expande$



1.7.4. Cotangente

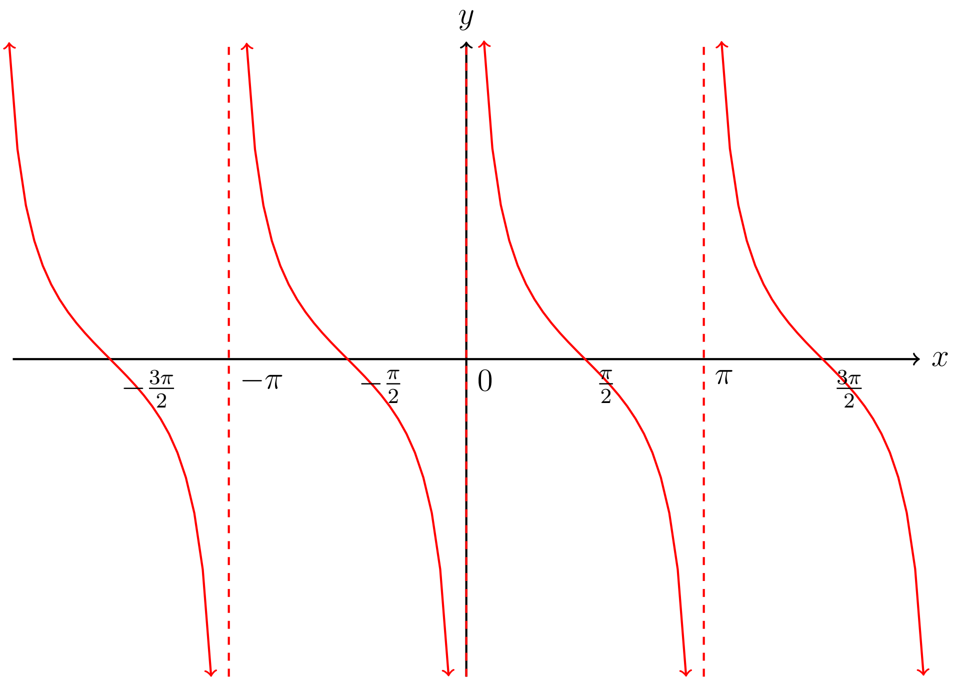
En un triangulo rectángulo se define como la relación entre el cateto adyacente y el cateto opuesto del ángulo: $cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} \frac{C.A}{C.O}$.

Como función, se expresa como $cot(x)$ con $x \in \mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Su dominio es: $\mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{Z}$ y su rango es: $\mathbb{R}$.

Puede ser expresado como: $A \times cot(n \times x)$, donde A, nson números reales cualesquiera.

Su gráfica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1expande$



1.7.5. Cosecante

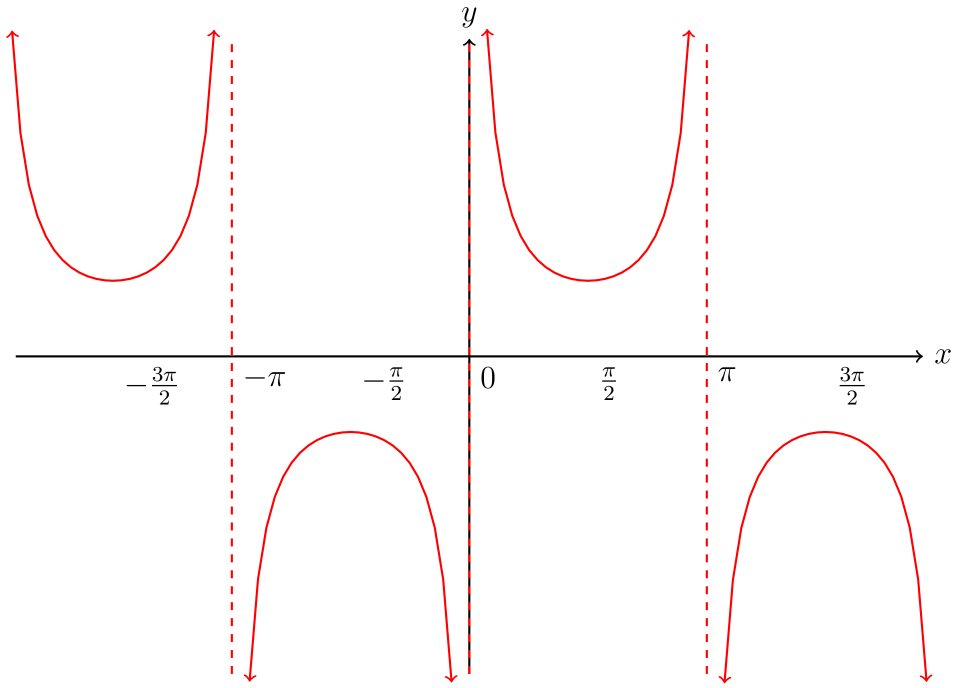
En un triangulo rectángulo se define como la relación entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo: $csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} \frac{H}{C.O}$.

Como función, se expresa como $csc(x)$ con $x \in \mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Su dominio es: $\mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{Z}$ y su rango es: $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

Puede ser expresado como: $A \times csc(n \times x)$, donde A, nson números reales cualesquiera.

Su gráfica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1expande$



1.7.6. Secante

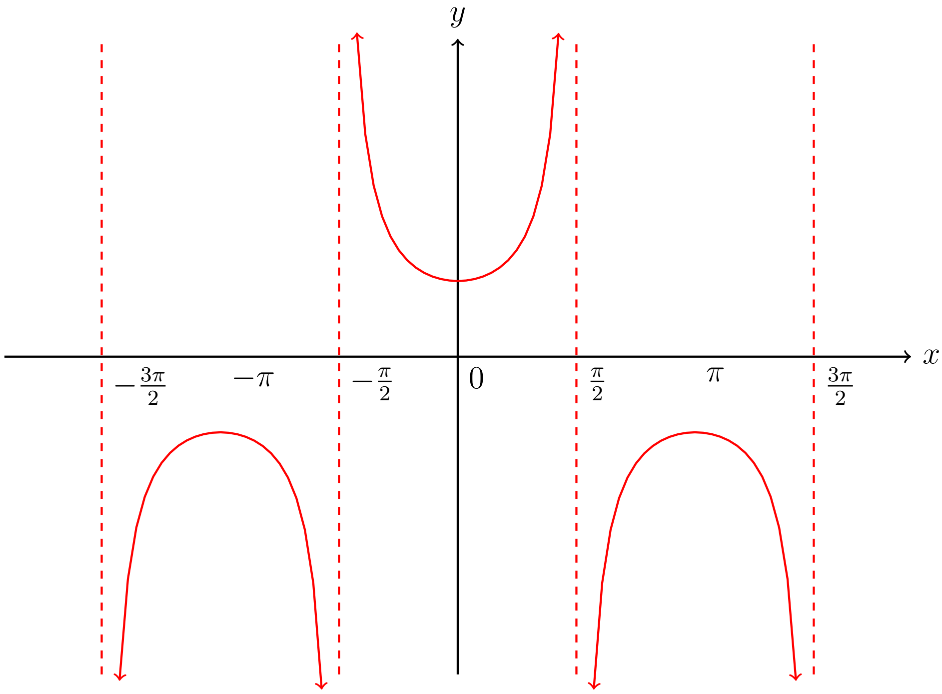
En un triangulo rectángulo se define como la relación entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo: $sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \frac{H}{C.A}$.

Como función, se expresa como $sec(x)$ con $x \in \mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Su dominio es: $\mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ y su rango es: $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

Puede ser expresado como: $A \times sec(n \times x)$, donde A, nson números reales cualesquiera.

Su gráfica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1 comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1 expande$



y
x
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$