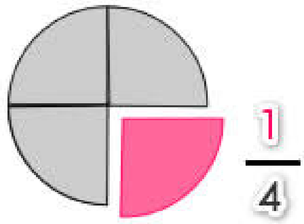
Índice

1. General

1.1. Fracciones

una fracción, número fraccionario, o numero **racional** , es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad; es decir que representa un cociente no efectuado de 2 números. Las fracciones, como se observan en la imagen Fracción, comunes se componen de: numerador, denominador y línea divisora entre ambos (barra horizontal u oblicua). En una fracción común a/b el denominador "b" expresa la cantidad de partes iguales que representan la unidad y **no puede ser 0** , y el numerador "a" indica cuántas de ellas se toman.

Figura 1: Fracción



El conjunto matemático que contiene a las fracciones de la forma a/b, donde a y b son números enteros y b $\neq 0$ es el conjunto de los números racionales, denotado como $\mathbb{Q}$.

Toda fracción es una división y toda división es una fracción. Debido a eso una división se puede convertir en una fracción para ser simplificada.

Las fracciones pueden ser representadas como $num \div denom$, $numdenom$ o $\frac{num}{denom}$ en una operación matemática.

1.1.1. Operaciones con fracciones

Dado que las fracciones, el conjunto $\mathbb{Q}$, son una extensión de los números previamente estudiados (conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$), se pueden realizar las mismas operaciones, es decir, simplificación, Suma y Resta,Comparación, Multiplicación, División, Potenciación y Radicalización (Raíces).

simplificación

Simplificar una fracción consiste en reducir tanto el numerador como el denominador en iguales proporciones hasta llevarlo a su mínima expresión. Para esto, se deben descomponer en su base y simplificar, eliminar, los números que sean iguales en numerador y denominador. Ejemplo:

$$\frac{21}{9} = \frac{factores(21)}{factores9} = \frac{7 \times \boxed{3}}{\boxed{3} \times 3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{154}{22} = \frac{factores(154)}{factores22} = \frac{\boxed{2} \times 7 \times \boxed{11}}{\boxed{2} \times \boxed{11}} = \frac{7}{1} = 7$$

$$\frac{6}{8} = \frac{factores(6)}{factores8} = \frac{\boxed{2} \times 3}{\boxed{2} \times 2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

Los 0 a la izquierda se pueden eliminar dividiendo entre 10 tantas veces sea posible:

$$\frac{10}{200} = \frac{1 \times \boxed{10}}{2 \times \boxed{10} \times 10} = \frac{1}{20}$$

Suma y Resta

La suma y la resta entre fracciones puede dividirse en 2 posibilidades:

- Los denominadores son **iguales** En este caso, se deja el mismo denominador y se suman o restan, dependiendo del signo y la operación, los numeradores. Se emplean las mismas reglas con respecto a los signos. Ejemplos:

  Suma de fracciones

  $$\frac{7}{5} + \frac{19}{5} = \frac{7+19}{5} = \frac{26}{5}$$

  Resta de fracciones

  $$\frac{7}{5} - \frac{19}{5} = \frac{7-19}{5} = \frac{-12}{5}$$

  Recordemos que cuando se restan números pueden haber resultados negativos.

  Suma de fracciones (signos distintos)

  $$\frac{10}{9} + \frac{-8}{9} = \frac{10+(-8)}{9} = \frac{2}{9}$$

  Cabe resaltar que siempre hay que tener en cuenta los signos.

Suma algebraica, varias funciones

$$\frac{7}{8}+\frac{-5}{8}-\frac{-9}{8}+\frac{10}{8}=\frac{7+(-5)-(-9)+10}{8}=\frac{21}{8}$$

- Los denominadores son **diferentes** Cuando esto pasa, hay que llevar las fracciones a un denominador común, para de esta forma aplicar lo que ya vimos. Esto se puede hacer de 2 formas, consiguiendo el **mínimo común múltiplo (mcm)** o haciendo una operación “cruzada" y luego multiplicamos el numerador por el mismo numero que multiplicamos el denominador de esa fracción. Ejemplos:

  Suma de fracciones con distinto denominador

  mcm:

$$\frac{5}{3}+\frac{10}{9}$$
$$\textit{buscamos el } M.C.M:$$
$$M.C.M(3)=3 \;\&\; M.C.M(9)=3^2 \Rightarrow M.C.M(3;9)=3^2$$
$$\frac{5\times 3}{3\times 3}+\frac{10\times 1}{9\times 1}=\frac{5\times 3+10}{9}=\frac{25}{9}$$

cruzado: En este método se multiplican directamente los denominadores para crear el nuevo denominador y luego se multiplican los numeradores por los denominadores opuestos.

$$\frac{5}{3}+\frac{10}{9}$$
$$numerador\ 1=\frac{5}{3}\searrow\frac{10}{9}=5\times 9=45$$
$$numerador\ 2=\frac{5}{3}\nearrow\frac{10}{9}=3\times 10=30$$
$$denominador=\frac{5}{3}\rightarrow\frac{10}{9}=3\times 9=27$$
$$\frac{5\times 9}{3\times 9}+\frac{10\times 3}{9\times 3}=\frac{45+30}{27}=\frac{75}{27}$$

Nota: aunque las fracciones se vean diferentes, tienen el mismo valor, a estas se les conoce como **fracciones equivalentes** y se puede comprobar fácilmente al ver que $25\times 3=75$ y $3\times 9=27$.

Comparación

Para comparar 2 fracciones se de deben tomar en cuenta tanto el numerador como el denominador. Primero se debe asegurar que el denominador sea el mismo y luego comparar los numeradores. Para esto se puede usar cualquiera de los métodos vistos en la suma (M.C.M o cruzado).

La forma mas rápida de hacerlo es con el método de el **cruzado** de la suma, dado que solo hay que conseguir los numeradores, ya que estos métodos (también aplica con el M.C.M) aseguran un denominador común. Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{5}{3}\,;\,\frac{10}{9}\\
&numerador\ 1 = \frac{5}{3} \searrow \frac{10}{9} = 5 \times 9 = 45\\
&numerador\ 2 = \frac{5}{3} \nearrow \frac{10}{9} = 3 \times 10 = 30\\
&\Rightarrow como\ 45 > 30\ \frac{5}{3} > \frac{10}{9}
\end{aligned}
$$

Multiplicación

La multiplicación se hace de forma lineal, es decir, se multiplican los numeradores para obtener el numerador y los denominadores para obtener el denominador. Ejemplos:

Multiplicación

$$\frac{7}{5} \times \frac{6}{11} = \frac{7 \times 6}{5 \times 11} = \frac{42}{55}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{10}{9} = \frac{5 \times 10}{3 \times 9} = \frac{50}{27}$$

División

La división se puede hacer de dos formas:

Invirtiendo el denominador

en este caso, se invierte la fracción del denominador (el numerador pasa a ser el denominador y el denominador al numerador) y se multiplica por esta. Ejemplos:

$$\frac{7}{5} \div \frac{6}{11} = \frac{7}{5} \times \frac{11}{6} = \frac{7 \times 11}{5 \times 6} = \frac{77}{30}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{10}{9} = \frac{5}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{5 \times 9}{3 \times 10} = \frac{45}{30}$$

Doble C

Se coloca el denominador debajo del numerador de forma que queden 4 números verticales, los extremos se multiplican para dar el numerador y los internos se multiplican y dan como resultado el denominador. Ejemplos:

$$\frac{7}{5} \div \frac{6}{11} = \cfrac{\frac{7}{5}}{\frac{6}{11}} = \frac{7 \times 11}{5 \times 6} = \frac{77}{30}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{10}{9} = \cfrac{\frac{5}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{5 \times 9}{3 \times 10} = \frac{45}{30}$$

Potenciación

Una fracción puede tener potencia en su numerador, denominador, ambos o un exponente común para ambos. En el caso de que sea en el numerador o denominador, se resuelve como se acostumbra. Si la potenciación se aplica a ambos elementos, esta se puede dividir, es decir la potencia de una fracción es igual a la potencia del numerador entre la del denominador y con estos se procede de la misma forma que para los conjuntos previamente estudiados, y tienen las mismas propiedades. Ejemplos:

Potencia en el numerador

$$\frac{5^3}{9} = \frac{5 \times 5 \times 5}{9} = \frac{125}{9}$$

Potencia en el denominador

$$\frac{5}{3^4} = \frac{5}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{5}{81}$$

Potencias distintas en numerador y denominador

$$\frac{5^3}{3^4} = \frac{5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{125}{81}$$

Potencia afectando a numerador y a denominador

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

Hay que resaltar que la operación opuesta puede realizarse también, es decir, si el numerador y el denominador tienen la misma potencia, se puede colocar una única potencia que afecte a toda la fracción.

$$\frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$\frac{2^{4\times 2}}{5^{3\times 2}} = \left(\frac{2^4}{5^3}\right)^2$$

Radicalización (Raíces)

Una fracción puede contener radicales en su numerador, denominador, ambos o una raíz en común para ambos, y se procede de la misma forma que con la potencia pero siendo este caso una raíz. Si el denominador contiene radicales, puede ser de gran ayuda **racionalizar** estos, especialmente si se van a realizar operaciones, tales como la adición o la comparación de una fracción con otra. Es también conveniente si la división tiene que realizarse explícitamente. Para racionalizar necesitamos elevar la raíz al mismo termino que esta (2 si es cuadrada, 3 si es cubica, etc), esto se consigue al multiplicar tanto el numerador como el denominador por la raíz que se quiera eliminar, tantas veces como sea necesario (como ya hay 1, seria 1 si es cuadrática, 2 si es cubica, etc). ejemplos:

Nota: una raíz puede ser expresada como una potencia fraccionaria, de esta forma se pueden facilitar cálculos. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}},\ \cdots,\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Raíz en el numerador

$$\frac{\sqrt{9}}{5} = \frac{3}{5}$$

Raíz en el denominador

$$\frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$$

Raíz distintas en numerador y denominador

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Raíz afectando a numerador y a denominador

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

Racionalización

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{3 \times \sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3}{\sqrt[3]{7}}\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}}\right)^2 = \frac{3 \times (\sqrt[3]{7})^2}{\sqrt[3]{7} \times (\sqrt[3]{7})^2} = \frac{3 \times (\sqrt[3]{7})^2}{7}$$

Propiedades

Las propiedades de el conjunto $\mathbb{Q}$, las mismas que en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, siendo estas extrapoladas a fracciones.

Nota: Todo numero entero puede escribirse como fracción, la forma mas simple es colocarle un denominador de 1:

$$10 = \frac{10}{1} \qquad 4431 = \frac{4431}{1} \qquad -75 = \frac{-75}{1}$$

y mas general, con letras: $A = \dfrac{A}{1}\ ;\ A \in \mathbb{Z}$

Sean $\dfrac{A}{J}$, $\dfrac{B}{K}$, $\dfrac{C}{L}$ fracciones cualquiera.

- **Propiedad Conmutativa** Tanto para la suma como la multiplicación se cumple que:

  Aditiva:

$$\frac{A}{J} + \frac{B}{K} = \frac{B}{K} + \frac{A}{J}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{5} = \frac{17}{10} = \frac{1}{5} + \frac{3}{2}$$

  Multiplicativa:

$$\frac{A}{J} \times \frac{B}{K} = \frac{B}{K} \times \frac{A}{J}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2}$$

- **Propiedad Asociativa** Tanto para la suma como la multiplicación se cumple que:

  Aditiva:

$$\frac{A}{J} + \left(\frac{B}{K} + \frac{C}{L}\right) = \left(\frac{A}{J} + \frac{B}{K}\right) + \frac{C}{L}$$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3} + \left(\frac{1}{8} + \frac{7}{6}\right) &= \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{8}\right) + \frac{7}{6} \\
\frac{5}{3} + \frac{1 \times 6 + 7 \times 8}{8 \times 6} &= \frac{5 \times 8 + 1 \times 3}{3 \times 8} + \frac{7}{6} \\
\frac{5}{3} + \frac{62}{48} &= \frac{43}{24} + \frac{7}{6} \\
\frac{5 \times 48 + 62 \times 3}{48 \times 3} &= \frac{43 \times 6 + 7 \times 24}{24 \times 6} \\
\frac{426}{144} &= \frac{426}{144}
\end{aligned}$$

  Multiplicativa:

$$\frac{A}{J} \times \left(\frac{B}{K} \times \frac{C}{L}\right) = \left(\frac{A}{J} \times \frac{B}{K}\right) \times \frac{C}{L}$$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{8} \times \frac{7}{6}\right) &= \left(\frac{5}{3} \times \frac{1}{8}\right) \times \frac{7}{6} \\
\frac{5}{3} \times \frac{1 \times 7}{8 \times 6} &= \frac{1 \times 5}{8 \times 3} \times \frac{7}{6} \\
\frac{5}{3} \times \frac{7}{48} &= \frac{5}{24} \times \frac{7}{6} \\
\frac{5 \times 7}{3 \times 48} &= \frac{5 \times 7}{24 \times 6} \\
\frac{35}{144} &= \frac{35}{144}
\end{aligned}$$

- **Propiedad distributiva** se cumple que:

$$\frac{A}{J} \times \left(\frac{B}{K} + \frac{C}{L}\right) = \left(\frac{A}{J} \times \frac{B}{K}\right) + \left(\frac{A}{J} \times \frac{C}{L}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) &= \left(\frac{1}{7} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{7} \times \frac{4}{5}\right) \\
\frac{1}{7} \times \frac{2 \times 5 + 4 \times 3}{3 \times 5} &= \left(\frac{1 \times 2}{7 \times 3}\right) + \left(\frac{1 \times 4}{7 \times 5}\right) \\
\frac{1}{7} \times \frac{22}{15} &= \frac{2}{21} + \frac{4}{35} \\
\frac{1 \times 22}{7 \times 15} &= \frac{2 \times 35 + 4 \times 21}{21 \times 35} \\
\frac{22}{105} &= \frac{154}{735}
\end{aligned}
$$

aunque los resultados parezcan diferentes, se puede observar que son **fracciones equivalentes** ya que

$$22 \times 7 = 154$$

y

$$105 \times 7 = 735$$

- **Elemento neutro de la suma** Este sigue siento el numero 0, ya que al sumarlo queda igual.

$$\frac{A}{J} + 0 = \frac{A}{J}$$

$$\frac{57}{3} + 0 = \frac{57}{3}$$

- **Elemento neutro de la multiplicación** Este es el 1 ya que cualquier numero multiplicado por 1 sigue siendo el mismo

$$\frac{A}{J} \times 1 = \frac{A}{J}$$

$$\frac{28}{9} \times 1 = \frac{28}{9}$$

Fracciones Equivalentes

Como se ha observado, una fracción representa una cantidad especifica. Y por ende, las fracciones equivalentes son aquellas que expresan el mismo número, o cantidad, aunque el numerador y denominador de estas sean distintas. Esto es posible ya que, si se multiplica, o divide, el numerador y denominador de una fracción por el mismo numero, se obtiene una nueva forma de describir la misma cantidad original. **(esto es ya que al multiplicar el numerador y el denominador por una misma cantidad, es equivalente a multiplicarlo por 1)** $5 \div 5 = 1,\ 485 \div 485 = 1, -4684 \div -4684 = 1 \rightarrow n \div n = 1$ Ejemplos:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20}$$
$$\frac{-95}{3} = \frac{-95 \times 2}{3 \times 2} = \frac{190}{6}$$
$$\frac{451}{9} = \frac{451 \times 3}{9 \times 3} = \frac{1353}{27}$$
$$\vdots$$
$$\frac{A}{B} = \frac{A \times N}{B \times N}\ ;\ con\{A, B, N\} \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, para conseguir una fracción equivalente solo hace falta multiplicar el numerador y el denominador, de la función dada, por un numero cualquiera.

Fracción Generatriz

La fracción generatriz es aquella que da como resultado un número decimal, ya sea exacto o periódico, mediante una fracción irreducible, es decir, donde el numerador y el denominador no tienen divisores en común, de manera que la fracción no se puede simplificar en números más pequeños. Para encontrar la fracción generatriz de una expresión en particular se debe distinguir en 3 casos:

- **el numero es decimal exacto.** Tomamos el número sin la coma decimal y lo dividimos entre diez elevado al número de decimales, y luego simplificamos la fracción. Ejemplos:

$$0,46 = \frac{46}{10^2} = \frac{46}{100} = \frac{2 \times 23}{50 \times 2}\frac{23}{50}$$

$$1,125 = \frac{1125}{10^3} = \frac{1125}{1000} = \frac{3^2 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{9}{8}$$

$$2,4 = \frac{24}{10} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{12}{5}$$

- **El numero es periódico puro.** Tomamos el número sin la coma decimal, usando una única vez el periodo, y le restamos la parte entera. Luego, al resultado lo dividimos entre un número que tenga tantos nueves como cifras tiene el periodo, y finalmente simplificamos hasta hallar la fracción irreductible.

$$1,\widehat{5} = \frac{15-1}{9} = \frac{14}{9}$$

$$4,\widehat{789} = \frac{4789-4}{999} = \frac{4785}{999} = \frac{1595 \times 3}{333 \times 3} = \frac{1595}{333}$$

$$11,\widehat{45} = \frac{1145-11}{99} = \frac{1134}{99} = \frac{2 \times 3^4 \times 7}{3^2 \times 11} = \frac{2 \times 3^2 \times 7}{11} = \frac{126}{11}$$

- **El numero es periódico mixto.** Tomamos el número, sin la coma decimal y repitiendo el periodo solo una vez. A este le restamos el numero formado por la parte entera y la no periódica. Dividimos el resultado entre tantos 9 como el periodo y tantos 0 como la parte decimal.

$$1,2\widehat{31} = \frac{1231-12}{990} = \frac{1219}{990}$$

$$31,42\widehat{5} = \frac{31425-3142}{900} = \frac{28283}{900}$$

$$0.4\widehat{243} = \frac{4243-4}{9990} = \frac{4239}{9990} = \frac{157 \times 3^3}{2 \times 5 \times 37 \times 3^3} = \frac{157}{2 \times 5 \times 37} = \frac{157}{370}$$

Cabe resaltar que: de manera más general, se puede extender el concepto de fracción a un cociente cualquiera de expresiones matemáticas (no necesariamente números), dando origen a funciones, ecuaciones y, permitiendo de esta forma, modelar todo tipo de fenómenos físicos.

1.2. Notación Científica

La notación científica es una forma de escribir números muy grandes o muy pequeños de forma mas sencilla y eficiente. Para esto, se utilizan las propiedades de la potenciación, y que si se multiplica por una potencia de 10 se mueve la coma decimal, si la potencia de 10 es > 0 se mueve hacia la derecha, y si es < 0, se mueve hacia la izquierda.

La idea de la notación científica es escribir el numero resultante de forma **Normalizada**, es decir con un numero distinto de 0 como unidad, luego la coma decimal, el resto de números en el mismo orden que se encontraban (si a partir de un punto solo quedan 0 a la derecha no se colocan), y luego "$\times 10^{exp}$" donde "exp" seria el numero de veces que se corrió la coma.

De numero a notación científica

se quiere llevar desde un numero sin potencia hacia la forma $unidad, decimales \times 10^{exp}$. Para esto se debe:

1. Conseguir el dígito mas significativo ya que este sera la nueva unidad, único dígito de la parte entera, este es el dígito mas a la izquierda que sea distinto de 0. Ejemplos:

$$235,39\ MSD = 2$$
$$0,12\ MSD = 1$$
$$0,00000924\ MSD = 9$$
$$-4500000\ MSD = 4$$
$$1507800,2\ MSD = 1$$

2. Conseguir el signo, este es el mismo que el del numero.

3. Conseguir la nueva parte decimal. Esta esta conformada por todos los dígitos a la derecha del MSD, este se consiguió en el paso 1. Cabe resaltar que si estos son todos 0, o a partir de cierto punto todos los números hacia la derecha son 0, se omitirán. Ejemplos:

$$235,39 \ decimal = 3539$$

$$0,12 \ decimal = 2$$

$$0,00000924 \ decimal = 24$$

$$-4500000 \ decimal = 5$$

$$1507800,2 \ decimal = 5078002$$

4. Calcular el exponente. Esta compuesto en 2 partes, el signo y el valor.

   - El signo sera:
     - $+$ si el MSD esta a la izquierda de la coma “,"
     - - si el MSD esta a la derecha de la coma “,"
   - El valor sera: la cantidad de espacios, números, que se tiene que correr el MSD hasta llegar a ser el único dígito a la izquierda de la coma “,"

   Ejemplos:

$$2\,35,39 \ exp = +\,2$$

$$0,12 \ exp = -\,1$$

$$0{,}000\,00\,924 \ exp = -\,6$$

$$-4\,500\,000 \ exp = +\,6$$

$$1\,507800,2 \ exp = +\,6$$

Finalmente:

$$235,39 = 2,3539 \times 10^2$$

$$0,12 = 1,2 \times 10^{-1}$$

$$0,000\ 009\ 24 = 9,24 \times 10^{-6}$$

$$-4\ 500\ 000 = -4,5 \times 10^6$$

$$1\ 507\ 800,2 = 1,507\ 800\ 2 \times 10^6$$

de notación científica a numero

se quiere llevar desde la forma $unidad, decimales \times 10^{exp}$ hacia un numero sin potencia. Para esto se debe correr la coma tantas veces lo diga el exponente y de acuerdo al signo, si es positivo($+$, $exp > 0$) hacia la derecha, si es negativo (-, $exp < 0$) hacia la izquierda. Cuando no hay mas elementos a la derecha o izquierda(respectivamente del signo del exponente) después de la coma se completa con 0 (ceros).

nota: para ayudar a recordar hacia donde se mueve la coma, es útil usar el menor o mayor como la punta de una flecha, así se tiene que: $-5 < 0$ entonces hacia la izquierda y $5 > 0$ entonces hacia la derecha.

$$2,3539 \times 10^2 = 2,\ 35\,39 = 235,39$$

$$1,2 \times 10^{-1} = 0\,1\,,2 = 0,12$$

$$9,24 \times 10^{-6} = \text{Completamos con 0 a la izquierda: } 0\,000\ 009\,,24 = 0,000\ 009\ 24$$

$$-4,5 \times 10^6 = \text{Completamos con 0 a la derecha: } -4,\ 500\ 000\ = -4\ 500\ 000$$

$$1,507\ 800\ 2 \times 10^6 = 1,\ 507\ 800\ \ 2 = 1\ 507\ 800,2$$

Dato curioso: se usan potencias de 10 ya que esta es la base del sistema decimal, es decir, tenemos 10 posibles opciones para la unidad ($\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, en otros sistemas se utilizan potencias de la base para desplazar la coma, en binario potencias de 2, hexadecimal potencias de 16, etc.

1.3. Teorema de Pitágoras

En matemáticas, el teorema de Pitágoras es una relación fundamental en geometría euclidiana entre los tres lados de un triángulo **rectángulo**. Este teorema se puede escribir como una ecuación que relaciona las longitudes de los lados a, b y c, (catetos e hipotenusa) y a menudo se le llamada ecuación pitagórica y estipula que:

"*En todo triangulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*".

Sean $a,\ b$ los catetos y c la hipotenusa, como se observa en 2:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

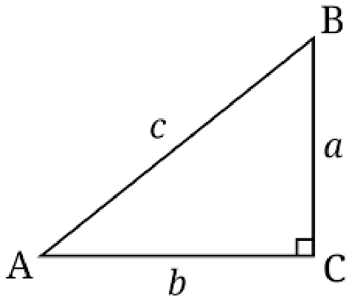
y despejando para hipotenusa y cada cateto:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Figura 2: Triangulo rectángulo



Recordemos: que la hipotenusa de todo triangulo es el lado mas grande y siempre esta opuesta al ángulo de 90°

1.4. Potenciación

La potenciación es una operación matemática entre 2 términos, **base** y **exponente** y se escribe de la forma: $base^{exp}$, la potenciación se puede aplicar a cualquier conjunto de números $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ y consiste en:

Multiplicar tantas veces la base como lo indique el exponente

Cuando el exponente es 2 se le suele que esta elevado a **cuadrado** y al exponente 3 se le dice elevado al **cubo** y ante exponentes mayores se suele leer a la cuarta, quinta, etc potencia. O el numero esta elevado a cuatro, cinco, etc.

Nota: Cuando la base es un numero negativo, se encierra este entre paréntesis para evitar confusión, ya que **el signo si afecta y se multiplica**.

Es importante: saber que todo numero elevado a 0 tiene como resultado 1. ejemplos: $5^0 = 1,\ 5441^0 = 1,\ (-443148)^0 = 1,\ n^0 = 1$, con n siendo distinto de 0. si la base y el exponente son ambos 0 la operación no esta definida, es decir 0^0 es indeterminado, no existe. Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
15^2 =& 15 \times 15 = 225 \\
6^4 =& 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296 \\
(-8)^3 =& -8 \times -8 \times -8 = -512 \\
(-24)^2 =& -24 \times -24 = 576
\end{aligned}
$$

De los ejemplos se observa que:

- Los resultados de la potenciación crecen muy rápido, mientras mayor sea el exponente, mayor sera el valor absoluto del numero resultante siempre que la base sea distinta de 1 o 0.
- todo numero elevado a 1 es el mismo numero.
- Si la base es 1 el resultado siempre sera 1.
- **Todo numero elevado a una potencia par da resultado positivo**

para las fracciones, se utiliza una propiedad de la potenciación, y se elevan tanto el numerador como el denominador al exponente común. Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{10}{8}\right)^3 &= \frac{10^3}{8^3} = \frac{10 \times 10 \times 10}{8 \times 8 \times 8} = \frac{1000}{512} \\
\left(\frac{5}{3}\right)^2 &= \frac{5^2}{3^2} = \frac{5 \times 5}{3 \times 3} = \frac{25}{9} \\
\left(\frac{-8}{7}\right)^4 &= \frac{(-8)^4}{7^4} = \frac{-8 \times -8 \times -8 \times -8}{7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{4096}{2401} \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \frac{a \times a \times \cdots \times a}{b \times b \times \cdots \times a}
\end{aligned}$$

Propiedades de la potenciación

Potencia Par

Como se menciono anteriormente, **todo numero elevado a una potencia par da como resultado un numero positivo**, además, es bueno recordar que un numero par tiene la forma $2 \times N$, con N $\in \mathbb{Z}$ o dicho de otra forma, es divisible entre 2.

$$\begin{aligned}
(-8)^4 &= -8 \times -8 \times -8 \times -8 = & 4096 \\
9^3 &= 9 \times 9 \times 9 = & 729 \\
(-864)^2 &= -864 \times -864 = -746496 \\
(-1)^8 8 &= -1 \times -1 \times -1 \times \cdots \times -1 = 1
\end{aligned}$$

Potencia Impar

En este caso, todo numero elevado a potencia impar tendrá el mismo signo que la base. De nuevo, recordemos que un numero impar tiene la forma $(2 \times N) + 1$, es decir, no es divisible entre 2.

$$
\begin{aligned}
(-3)^3 &= -\,3 \times -3 \times -3 = -27 \\
(-745)^1 &= -\,745 \\
(-2)^7 &= -\,2 \times -2 \times -2 \times \cdots \times -2 = -128 \\
(-1)^{97} &= -\,1 \times -1 \times -1 \times \cdots \times -1 = -1
\end{aligned}
$$

Exponente Negativo

Un exponente negativo en una potencia implica que la base es una fracción con numerador 1 y denominador base, como el numerador es 1 el exponente solo afectara en el denominador y sera un numero positivo, es decir:

$$A^{-n} = \frac{1}{A^n}$$

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
7^{-1} &= \frac{1}{7} \\
5^{-4} &= \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} \\
(-4)^{-3} &= \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{64} \\
98^{-2} &= \frac{1}{98}\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}
\end{aligned}
$$

Multiplicación de potencias de igual base

Cuando se multiplican 2 o mas potencias de igual base, se deja la misma base y se **suman** los exponentes. Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
2^{10} \times 2^5 =& 2^{10+5} = 2^{15} = 32768 \\
5^2 \times 5^3 =& 5^{2+3} = 5^5 = 3125 \\
9 \times 9^2 =& 9^{1+2} = 9^3 = 729 \\
& \vdots \\
A^m \times A^n =& A^{m+n}
\end{aligned}
$$

División de potencia de igual base

Cuando se dividen 2 o mas potencias de igual base, se deja la misma base y se **restan** los exponentes. Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
2^{10} \div 2^5 =& 2^{10-5} = 2^5 = 32 \\
5^2 \div 5^2 =& 5^{2-2} = 5^0 = 1 \\
9^4 \div 9^2 =& 9^{4-2} = 9^2 = 81 \\
& \vdots \\
A^m \div A^n =& A^{m-n}
\end{aligned}
$$

Potencia de un producto

La potencia de un producto es igual al producto de los operandos elevados al exponente original, esto es **La potencia puede repartirse a los multiplicandos**, $(A \times B)^n = A^n \times B^n$.

Se hace especial énfasis en que es en **productos**, esto **no aplica ni en suma ni en restas**, en esos casos se usan **productos notables**.

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
(3 \times 5)^2 =& 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225 \\
(10 \times (-3))^3 =& 10^3 \times (-3)^3 = 1000 \times (-27) = -27000 \\
(5 \times 4)^4 =& 5^4 \times 4^4 = 625 \times 256 = 160000
\end{aligned}
$$

potencia de un cociente

La potencia de un cociente es igual al cociente de los operandos elevados al exponente original, es decir, **La potencia puede repartirse al numerador y al denominador**. De nuevo se recuerda que **LA POTENCIA NO SE PUEDE REPARTIR EN SUMA O RESTA**, de presentarse una operación de ese estilo se aplica un producto notable (véase Referenciasproducto-notable).

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27} \\
\left(\frac{7}{5}\right)^2 &= \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25} \\
\left(\frac{8}{9}\right)^4 &= \frac{8^4}{9^4} = \frac{4096}{6561} \\
\left(\frac{-1}{2}\right)^{10} &= \frac{(-1)^10}{2^10} = \frac{1}{1024}
\end{aligned}$$

Potencia de una potencia

La potencia de una potencia es igual a una nueva potencia, esta tiene como base la original y como exponente el producto de los dos exponentes de la original. De esta forma: $(B^{exp1})^{exp2} = B^{exp1 \times exp2}$ donde B es la base y $exp1$, $exp2$ los exponentes.

$$\begin{aligned}
\left(5^2\right)^3 &= 5^{2\times 3} = 5^6 = 15625 \\
\left(7^2\right)^2 &= 7^{2\times 2} = 7^4 = 2401 \\
\left(2^3\right)^4 &= 2^{3\times 4} = 2^12 = 4096 \\
\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^5\right)^2 &= \left(\frac{-1}{2}\right)^{2\times 5} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{10} = \frac{(-1)^{10}}{2^{10}} = \frac{1}{1024}
\end{aligned}$$

Exponente Racional

Un exponente racional implica que el numero que es el exponente pertenece al conjunto $\mathbb{Q}$, es una fracción. De este tipo de expresiones es que se crearon las raíces, ya que son un caso particular del mismo (cuando el numerador es 1), esto significa que: $A^{\frac{1}{den}} = \sqrt[den]{A}$

Por otro lado, el numerador actúa como un exponente normal, siendo la expresión general:

$A^{\frac{num}{den}} = \sqrt[den]{A^{num}}$

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
10^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{10} \\
5^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \\
44^{\frac{-2}{5}} &= \frac{1}{44^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{44^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1936}} \\
(-3)^{\frac{4}{5}} &= \sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[5]{81}
\end{aligned}
$$

Potencia Indeterminada

La potencia 0^0 es una potencia indeterminada, es decir no existe, para referirse a este tipo de resultados se dice que **presenta una forma indeterminada** 0^0.

Como dato curioso: Existen otras formas indeterminadas por ejemplo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ los cuales se estudian en cursos universitarios y superiores con **limites**.

Cabe resaltar: que es posible encontrarse mas de una propiedad en la misma potencia, y para resolverla basta con aplicar las propiedades que hagan falta, paso a paso.

2. Ecuaciones

2.1. Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que contienen una o mas variables. Esta es una expresión algebraica conformada una o mas variables y operadores numéricos; estos se relacionan mediante operaciones como suma, resta, multiplicación, división, potenciación, entre otras; y el objetivo es conseguir el valor, o valores, de las variables que satisfacen la igualdad. Una ecuación tiene la forma:

$13x$ - 9 $=$ $5 + x$

Donde cada color representa un miembro de la ecuación, x es la variable y se puede observar que en cada miembro hay operaciones suma, resta, y multiplicación

Para resolver una ecuación se procede a “despejar" la variable, este proceso consiste en agrupar todas las variables de un lado y todos los números del otro, realizar las operaciones necesarias para simplificar y que de esta forma quede una única variable igualada a un número o una expresión. (por expresión se refiere a algún tipo de función, como el valor absoluto, una raíz o una dependencia de otra variable de forma que el resultado sea mas que un único dígito). Para resolver ecuaciones se puede seguir la formula, algoritmo:

- Colocar variables de un lado y los números del otro. Esto se hace siguiendo ciertas **reglas**:

  - Las **sumas** pasan como **restas**.
  - Las **restas** pasan como **sumas**.
  - Las **multiplicaciones** pasan como **divisiones**. **PERO**, tienen que estarse multiplicando a todo ese lado de la igualdad.
  - Las **divisiones** pasan como **multiplicaciones**. **PERO**, tienen que estar dividiendo a todos los elementos de ese lado de la igualdad
  - Los **exponentes** como raíces.**PERO**, tienen que estar abarcando a todos los elementos de ese lado de la igualdad
  - Las **raíces** como exponentes. **PERO**, tienen que estar abarcando a todos los elementos de ese lado de la igualdad

  Es decir se convierte en su **función inversa**.

- realizar las operaciones necesarias a ambos lados, son independientes, para simplificar la ecuación. **Cabe resaltar:** que las operaciones deben de realizarse siguiendo las reglas del álgebra, esto significa:

  1. Paréntesis
  2. Exponentes
  3. Multiplicación y división
  4. Suma

  y si las operaciones tienen la misma jerarquía, del mismo nivel-tipo, se resuelven de izquierda a derecha. **Recordemos:** que hay un tipo especial de operación dentro de los exponentes, este se llama Referenciasproducto-notable, y ocurre cuando la variable esta entre paréntesis en una operación de **suma o resta** y el paréntesis esta elevado a un exponente. Si no recuerda como resolverlo vaya a Referenciasproducto-notable.

- En este punto deben de quedar expresiones sencillas a ambos lados de la igualdad, si no es que solo quedan números y una variable. por lo tanto:

  Si la variable esta sola: La ecuación esta resuelta(si la variable esta sola pero negativa se invierten los signos de la igualdad).

  Si la variable esta siendo multiplicada o dividida: se despeja para dejarla sola, se resuelve la operación resultante y este seria el resultado final

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 13x - 9 &= 5 + x \\ 13x - x &= 5 + 9 \\ 12x &= 14 \\ x &= \frac{14}{12} \\ x &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
124 + 18x - 40 &= (19 + 45x) \times 2 \\
\frac{124 + 18x - 40}{2} &= 19 + 45x \\
\frac{124}{2} + \frac{18x}{2} - \frac{40}{2} &= 19 + 45x \\
\frac{18x}{2} - 45x &= 19 - \frac{124}{2} + \frac{40}{2} \\
9x - 45x &= 19 - 62 + 20 \\
-36x &= -23 \\
x &= \frac{-23}{-36} \\
x &= \frac{23}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(25x + 48)^2 - 10 &= 666 \\
(25x + 48)^2 &= 666 + 10 \\
25x + 48 &= \sqrt{676} \\
25x + 48 &= 26 \\
25x &= 26 - 48 \\
x &= \frac{-22}{25}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{150x + 40 - 65}{-50x + 89} &= 9 \\
150x + 40 - 65 &= 9 \times (-50x + 89) \\
150x - 25 &= 9 \times (-50x) + 9 \times 89 \\
150x - 25 &= -450x + 801 \\
150x + 450x &= 801 + 25 \\
600x &= 826 \\
x &= \frac{826}{600} \\
x &= \frac{413}{300}
\end{aligned}
$$

Notesé que: la forma de resolver las ecuaciones siempre es la misma, se despeja hasta conseguir que todas las variables estén de un lado y todos los números del otro y se realizan las operaciones.

Consejo: cuando se tienen fracciones o denominadores de un polinomio siempre suele ser mas sencillo buscar colocar de forma lineal, para esto se suele usar M.C.M o operaciones cruzadas hasta tener un denominador común, luego ese denominador se despeja.

2.1.1. Forma canónica de la ecuación

Este es un caso particular de las ecuaciones, y es de suma importancia para el estudio y la resolución de las mismas. Se dice que una ecuación esta en su **forma canónica** cuando uno de sus miembros, lados, es 0 y el otro miembro no puede ser simplificado mas, es decir hay una expresión igualada a 0.

La importancia de este tipo de ecuaciones es que facilitan la resolución en ciertos casos y en otros permiten la interpretación de un fenómeno físico con mayor claridad. **Recordemos** que las matemáticas son utilizadas para describir el comportamiento y la evolución de fenómenos físicos para de esta forma entender a mayor profundidad el mundo que nos rodea.

La forma de resolver una ecuación en forma canónica es la misma que la explicada anteriormente. y para colocar una ecuación a su forma canónica basta con pasar todos los elementos a un mismo lado,siguiendo las reglas del despeje. Ejemplos:

Llevando las ecuaciones anteriores a su forma canónica:

$$13x - 9 = 5 + x$$
$$13x - x - 9 - 5 = 0$$
$$12x - 14 = 0$$

$$124 + 18x - 40 = (19 + 45x) \times 2$$
$$\frac{124 + 18x - 40}{2} = 19 + 45x$$
$$\frac{124}{2} + \frac{18x}{2} - \frac{40}{2} = 19 + 45x$$
$$\frac{124}{2} + \frac{18x}{2} - \frac{40}{2} - 19 - 45x = 0$$
$$62 + 9x - 20 - 19 - 45x = 0 - 36x + 23 = 0$$

$$(25x + 48)^2 - 10 = 666$$
$$(25x + 48)^2 = 666 + 10$$
$$25x + 48 = \sqrt{676}$$
$$25x + 48 = 26$$
$$25x + 48 - 26 = 0$$
$$25x + 22 = 0$$

2.1.2. Tipos de ecuaciones

Existen muchos tipos de ecuaciones, estas se clasifican por el tipo de operaciones que son necesarias para resolverlas. La clasificación mas común, y la que se estudiara es la de **ecuaciones algebraicas**, esta recibe este nombre dado que para resolverla solo hacen falta operaciones algebraicas.

Cabe resaltar que existen otro tipo de ecuaciones como las logarítmicas diferenciales, integrales y funcionales, estas no se estudiaran ya que pertenecen a cursos mas avanzados.

Las **ecuaciones algebraicas**, se suelen sub dividir según **el grado** del polinomio en:

- De primer grado o lineales.
- De segundo grado o cuadráticas.
- De tercer grado o cubicas.

  ⋮

- De grado n, n $\in \mathbb{N}$.

recordemos que el grado de un polinomio es **el exponente mas alto al que esta elevado la variable independiente**.

Ecuaciones 1er orden

Su forma canónica es: $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$ a es llamado coeficiente de x y b es el termino independiente.

Este tipo de ecuaciones se resuelven de la forma previamente estudiada, es decir se despeja la x siguiendo las reglas anteriormente nombradas. Ejemplo:

$$\begin{aligned} 10x + 50 &= 3 \\ 10x &= 3 - 50 \\ x &= \frac{-47}{10} \\ x &= -4.7 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(95x-10)^3 &= 27\\
95x-10 &= \sqrt[3]{27}\\
95x &= 3+10\\
x &= \frac{13}{95}
\end{aligned}
$$

Ecuaciones 2do orden

Su forma canónica es: $a_1x^2 + a_2x + b = 0;\ a, b \in \mathbb{R}\ a_1, a_2$ son llamados coeficientes de x y b es el termino independiente.

Para resolver este tipo de ecuación se busca expresarlo en su forma canónica y aplicar una formula, a esta se le suele llamar **resolvente cuadrática**, o solo **resolvente** pero al ser tan utilizada se le conoce de muchas formas...

Cabe resaltar que: también se puede escribir la forma canónica de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, es lo mismo, pero la formula que se usa para resolver este tipo de ecuaciones suele llevar a, b, c.

La formula a usar es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde a, b, c son respectivamente los coeficientes de la formula.

También se observa que existe un símbolo $\pm$ este indica que pueden haber **2 resultados posibles que satisfacen la ecuación**. Para conseguirlos se tiene que resolver 2 veces todos los cálculos, **1 vez sumando** y **1 vez restando**, es decir, $\pm$ se va a reemplazar por un $+$ para x_1 y por un - para x_2. Ejemplos:

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

identificamos que: $a = 1, b = 5, c = -14$

entonces, procedemos a sustituir en la formula:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times -14}}{2 \times 1}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

Luego, realizamos las 2 operaciones:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-5 + 9}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 - 9}{2}$$
$$x_1 = \frac{4}{2} \qquad x_2 = \frac{-14}{2}$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -7$$

Algunas veces la raíz interna no es exacta, en esos casos se deja expresado:

$$x^2 + 5x - 9 = 0$$

identificamos que: $a = 1, b = 5, c = -9$

entonces, procedemos a sustituir en la formula:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times -9}}{2 \times 1}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 36}}{2}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$$

y entonces, queda de la forma:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{61}}{2} \;; \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{61}}{2}$$

En otras ocasiones se tendrá que despejar antes de aplicar la formula:

$$4x + 186 = -10x + 5x^2$$

$$-5x^2 + 4x + 10x + 186 = 0$$

$$-5x^2 + 14x + 186 = 0$$

identificamos que: $a = -5, b = 14, c = 186$

entonces, procedemos a sustituir en la formula:

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times -5 \times 186}}{2 \times -5}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 3720}}{-10}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{3916}}{-10}$$

y entonces, queda de la forma:

$$x_1 = \frac{-14 + \sqrt{3916}}{-10} \;\; ; \quad x_2 = \frac{-14 - \sqrt{3916}}{-10}$$

Y en algunos casos la raíz se hará 0 y se terminara con que ambos valores serán el mismo:

$$x^2 + 4xx_1 = x_2 = -2 + 4 \qquad = 0$$

identificamos que: $a = 1, b = 4, c = 4$

entonces, procedemos a sustituir en la formula:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \;\pm 0}{2}$$

y por lo tanto x_1 y x_2 valen: -2

$$x_1 = x_2 = -2$$

Ecuaciones de 3er orden o superior

Su forma canónica es: $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3 + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$ a_1, a_2, a_3 son llamados coeficientes de x y b es el termino independiente.

La forma general es:

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \cdots + a_{n+1}x + b = 0$$

donde, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}$ son los coeficientes, b es el termino independiente y todos estos son números reales. n es llamado exponente máximo, representa el grado y puede ser cualquier número natural ($n \in \mathbb{N}$)

Este tipo de ecuaciones se resuelven al factorizarla, ya que de esta forma se consiguen las raíces. La forma mas común es utilizando el método de **Ruffini**. Véase (Referencias-Factorización) para una explicación mas profunda. Ejemplos:

Recordemos que: las raíces son los valores que hacen 0 el polinomio- expresión y que por lo tanto hacen cumplir la igualdad en la forma canónica ($expresin = 0$).

Se pueden presentar varios casos, cuando no hay termino independiente:

$$x^3 + 5x^2 - 14x = 0$$

Procedemos a factorizarprimero factor común x

$$x(x^2 + 5x - 14) = 0$$

Luego, nos queda una ecuación de segundo grado, ejemplo anterior:

donde: $x_1 = 2x_2 = -7$

por lo tanto la ecuaciónfactorizada resultante es:

$$x \times (x - 2) \times (x + 7) = 0$$

y los resultadosde la ecuación son:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -7,\ x_3 = 0$$

Notemos: que se busca factorizar la expresión, al sacar factor común buscamos que nos quede un termino independiente, en ese momento procedemos, según el grado del polinomio resultante, a usar la resolvente cuadrática o Ruffini.

cuando hay termino independiente:

$$2x^3 + 9x^2 + 13x = -6$$

despejando, a su forma canónica:

$$2x^3 + 9x^2 + 13x + 6 = 0$$

Como **HAY** termino independiente, no se puede usar factor común

procedemos por Ruffini:Los coeficientes, en orden decreciente, son: 2, 9, 13, 6;

	2	9	13	6
-1		-2	-7	-6
	2	7	6	0
-2		-4	-6	
	2	3	0	
$\frac{-3}{2}$		-3		
	2	0		

La ecuación factorizada, resultante seria:

$$(x+1) \times (x+2) \times \left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

y por lo tanto, las soluciones serian: $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = \frac{-3}{2}$

2.2. Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad algebraica, estas son un equivalente de las Ecuaciones pero con los operadores relacionales $<, >, \leq, \geq$. Además, las inecuaciones dan como resultado un **conjunto de valores** los cuales cumplen la desigualdad, mientras que la ecuación daba un número, mas si era de un grado mayor.

Asimismo, las inecuaciones también obedecen a una regla la cual modifica el operador relacional entre los términos:

Si se multiplican o dividen ambos términos de una inecuación por un número negativo, el operador relacional se invierte. Esta inversión es como sigue:

- el $<$ pasa a ser $>$.

- el $>$ pasa a ser $<$.
- el $\leq$ pasa a ser $\geq$.
- el $\geq$ pasa a ser $\leq$.

Esto implica que: **si hay igualdad, esta se mantiene** ($\leq$, $\geq$). **Recuerde que:** cuando se pasa un número a multiplicar o dividir al otro lado de la desigualdad, es el equivalente a multiplicar o dividir (respectivamente) ambos lados por ese número. Entonces, **cuando se despeja un número negativo que multiplica o divide se invierte el operador relacional**.

Es importante resaltar que las inecuaciones pueden ser representadas de forma gráfica, ya que son un conjunto de puntos en la recta real. véase ReferenciasGráfica-inecuaciones.

Ejemplo y explicación:

$$\begin{aligned} 5x + 40 < 0 \\ 5x < -40 \\ x < \frac{-40}{5} \\ x < -8 \end{aligned}$$

Entonces, la solución es el conjunto de valores que puede tomar x que sean menores a -8, es decir { -9, -10, $\frac{-354}{2}$, -354,$\cdots$, $-\infty$ } Es decir todos los número $x \in \mathbb{R}$ (si se trabaja en otro conjunto $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$se usa ese conjunto en vez de $\mathbb{R}$) que cumplen $\{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$, otra forma: el conjunto $(-\infty; -8)$.

Se pueden observar que, el proceso de despeje sigue siendo el mismo mas hay un paso adicional, **conseguir el conjunto solución**; este puede ser expresado de 2 formas, como: $\{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$ o de la forma $(-\infty; -8)$. Ambos resultados son exactamente iguales, la segunda forma es la mas vista en bachillerato, sin embargo el primero suele ser usado en niveles mas avanzados ya que da mas libertad y permite definir expresiones mas complejas.

Para expresar el resultado en forma de conjunto se debe hacer lo siguiente:

Es importante saber:

Operador relacionar	Nombre	expresión como conjunto
$<$	Menor que o menor estricto	") " = paréntesis de cierre
$>$	Mayor que o mayor estricto	" (" = paréntesis de apertura
$\leq$	Menor o igual que	"] " = Bracket (corchete cuadrado) de cierre
$\geq$	Mayor o igual que	" [" = Bracket (corchete cuadrado) de apertura

Primera forma

Primero, la forma de decirlo es: $\{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$ sea x perteneciente($\in$) a los reales ($\mathbb{R}$) tal que(:) x es menor que -8 (también se puede decir: menor estricto que -8).

y para escribirlo solo hay que escribir:

$$\{\text{variable} \in \text{conjunto} : \text{inecuación final}\}$$

En el caso del ejemplo anterior

- variable: x
- conjunto no se especifico, así que asumiremos $\mathbb{R}$ ya que es el mas general, e
- expresión: $x < -8$

y al reemplazar obtenemos el resultado: $\{x \in \mathbb{R} : x < -8\}$

Segunda forma

La forma de decirlo es: $(-\infty; -8)$ el conjunto formado por los números desde menos infinito hasta -8 abierto .

Para escribirlo hay que tener en cuenta

- Cuantos factores-conjuntos tiene, esto es ya que como se vera mas adelante, cuando se tienen polinomios de un grado alto, en valor absoluto o en forma de fracción se crean mas de 1 conjunto solución.
- El tipo de desigualdad, de acuerdo a esto se reemplazara según la tabla 2.2.
- **El infinito siempre va con corchete**, ya sea de apertura o de cierre, dependiendo de su ubicación.

Se toma en cuenta la forma de la desigualdad, se identifican los términos, cual es el mayor y cual es el menor y siguiendo las normas anteriormente nombradas se coloca:

- " (" o " [", dependiendo del operador, y la consideración del infinito.
- expresión de menor valor en la desigualdad.
- ;
- expresión de mayor valor de la desigualdad.
- ") " o "] ", dependiendo del operador, y la consideración del infinito.

De esta forma se tiene que:
Menor valor = $-\infty$
Mayor valor = -8
Entonces: $(-\infty; -8)$

2.2.1. Gráfica de inecuaciones

Las inecuaciones pueden ser vistas de una forma gráfica, como un conjunto de puntos en la recta real. El punto de inicio suele ser un circulo o punto abierto, o paréntesis, para los intervalos abiertos, creados con "$<$" o "$>$" y un punto o circulo coloreado, o corchetes para los intervalos cerrados, los creados con $\leq$ $\geq$.

Para crear la gráfica se debe:

1. Dibujar la **Recta real**. **Recordemos que:** esta es una linea en la cual se coloca un punto medio, 0, y a su derecha los números positivos y a su izquierda los números negativos, siguiendo el orden numérico tradicional $(\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$.

2. Marcar los puntos de especial importancia, estos son el 0, como referencia o valor, y luego todos **los puntos críticos.**

   Lo **puntos críticos** son los números en los cuales se hace 0 una ecuación, para conseguirlos lo que se hace es reemplazar **EN LA ULTIMA EXPRESIÓN DE LA INECUACIÓN**, es decir cuando se tiene resuelto, y conseguir los valores solución de esta, a veces es mas fácil expresarla en su forma canónica.

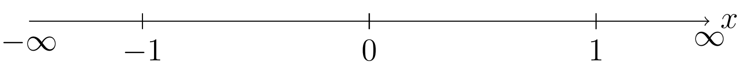
3. Comprobar hacia que lado se cumple la desigualdad y marcarlo.

   Para esto es suficiente con tomar un punto de prueba a la derecha o izquierda del punto critico, o en un intervalo especifico, y comprobar si ese valor satisface la desigualdad, si es así, todos esos puntos forman parte del intervalo solución. Por lo tanto se marcan.:w

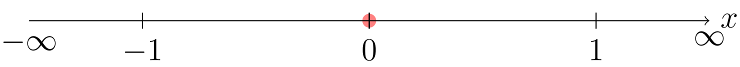
Algunos ejemplos son:

Para: $x > 0$

Recta:



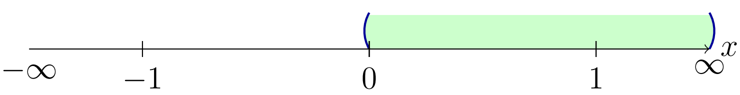
Puntos: 0 únicamente. infinitos de referencia.



Comprobando con $x = 1,\ 1 > 0$? si, por ende se cumple y es hacia la derecha del **punto critico** 0.

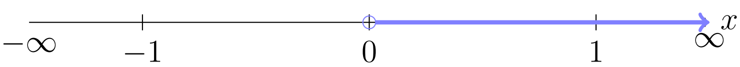
Marcas: dado que es una desigualdad abierta ($<$) el circulo va abierto o se usa un paréntesis

Con paréntesis:



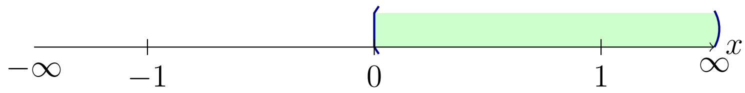
para $x \geq 0$

Con circulo y flecha:

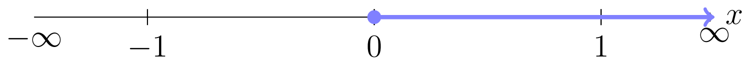


Si fuera $x \geq 0$ lo único que cambiaría seria la parte de marca. Seria un corchete y un punto cerrado:

Con corchete:



Con punto y flecha:

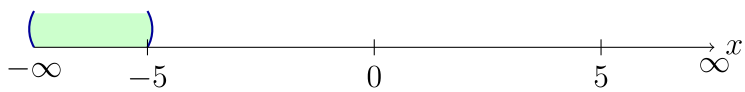


Es mas utilizado la primera forma (corchete y paréntesis) ya que facilita comparaciones en intervalos. Por esto, aunque ambos son equivalentes, de ahora en adelante se graficarán solamente estos.

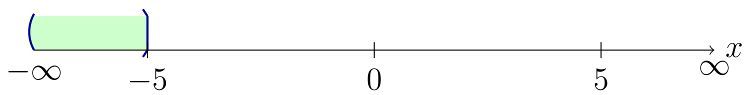
Otros ejemplos:

$x < -5$ puntos: -5 valor de la desigualdad, 0 e infinitos referencia.

valores: tomamos un punto, ej 0 (esta a la derecha de -5 en la recta real) entonces: $x < -5,\ 0 < -5$? no, no lo es, $0 > -5$ y por ende es el otro lado de la recta la que cumple la desigualdad. El lado **izquierdo**. La gráfica es:



$x \leq -5$



2.2.2. Tipos de inecuaciones

Las inecuaciones al igual que las ecuaciones pueden ser clasificadas en distintos tipos, los mas comunes y relevantes son:

- Inecuaciones Lineales.
- Inecuaciones de grado n, $n \neq \{0, 1\}$.
- Inecuaciones con valor absoluto.
- Inecuaciones racionales.

Esta clasificación se hace porque la forma de resolverla varia considerablemente para cada uno de estos.

Inecuaciones Lineales

Las inecuaciones lineales son el equivalente a las ecuaciones algebraicas de grado 1, es decir, son la forma mas fácil de resolver y los ejemplos que se han dado hasta ahora son de este tipo. para resolver estas basta con despejar, de la forma explicada en Referenciasecuaciones, y tener en consideración la inversión de los operadores relacionales al multiplicar o dividir por un número negativo. **RECUERDE que: cuando se despeja un número negativo que multiplica o divide se invierte el operador relacional**.

Es importante saber que en este tipo de inecuaciones siempre habrá un único conjunto solución.

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
8x - 45 &< 9 \\
8x &< 9 + 45 \\
8x &< 54 \\
x &< \frac{54}{8} \\
x &< \frac{27}{4}
\end{aligned}
$$

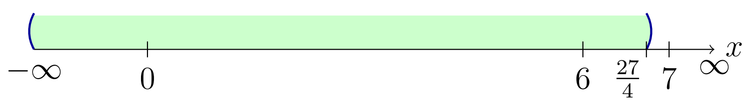
Una vez completado el despeje, se procede a crear el conjunto y graficar:

Punto único, $\frac{27}{4}$

Tomando un valor, 0 por conveniencia, a la izquierda de $\frac{27}{4}$ en la recta real, se tiene: $0 < \frac{27}{4}$? si, entonces ese es el lado del intervalo que soluciona la inecuación.

El conjunto: $\left(-\infty; \frac{27}{4}\right)$

La gráfica:



$$9 - 45x \leq 639$$
$$-45x \leq 639 - 9$$
$$-45x \leq 630$$
$$x \geq \frac{630}{-45}$$
$$x \geq -14$$

nótese: que como el despeje involucraba pasar de multiplicar a dividir un número negativo, se invirtió el operador relacional ($\leq \Rightarrow \geq$)

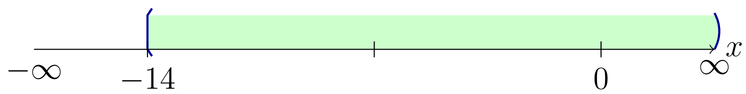
Una vez completado el despeje, se procede a crear el conjunto y graficar:

Punto único, -14

Tomando un valor, 0 por conveniencia, a la derecha de -14 en la recta real, se tiene: $0 \geq -14$? si, entonces ese es el lado del intervalo que soluciona la inecuación.

El conjunto: $[-14; \infty)$

La gráfica:



$$(95x - 10)^3 > 27$$
$$95x - 10 > \sqrt[3]{27}$$
$$95x > 3 + 10$$
$$x > \frac{13}{95}$$

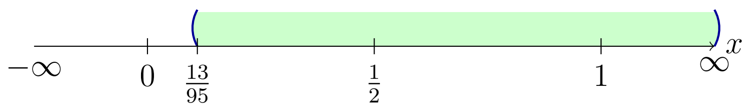
Una vez completado el despeje, se procede a crear el conjunto y graficar:

Punto único, $\frac{13}{95}$

Tomando un valor, 0 por conveniencia, a la izquierda de $\frac{13}{95}$ en la recta real, se tiene: $0 > \frac{13}{95}$? No, entonces ese no es el lado del intervalo que soluciona la inecuación, por lo tanto el lado solución es a la derecha de $\dfrac{13}{95}$.

El conjunto: $\left(\dfrac{13}{95}; \infty\right)$

La gráfica:



$$\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} \geq \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$$

M.C.M(7,3,14,6)=42, multiplicamos ambos lados para eliminar denominadores

$$42 \times \left(\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3}\right) \geq 42 \times \left(\frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}\right)$$

$$6(3x+1) - 14(2-4x) \geq 3(-5x-4) + 49x$$

$$18x + 6 - 28 + 56x \geq -15x - 12 + 49x$$

$$18x + 56x + 15x - 49x \geq -12 - 6 + 28$$

$$40x \geq 10$$

$$x \geq \frac{10}{40}$$

$$x \geq \frac{1}{4}$$

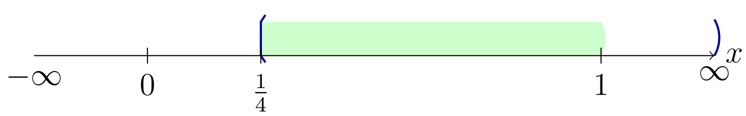
Una vez completado el despeje, se procede a crear el conjunto y graficar:

Punto único, $\dfrac{1}{4}$

Tomando un valor, 0 por conveniencia, a la izquierda de $\dfrac{1}{4}$ en la recta real, se tiene: $0 \geq \dfrac{1}{4}$? No, entonces ese no es el lado del intervalo que soluciona la inecuación, por lo tanto el lado solución es a la derecha de $\dfrac{1}{4}$.

El conjunto: $\left[\dfrac{1}{4}; \infty\right)$

La gráfica:



Inecuaciones de grado n

Una inecuaciones de grado n, es el equivalente de las ecuaciones de grado 2 hacia adelante (3,4,5,...) y la forma de resolverlas es distinta a las lineales. Esto es porque se generan mas de 1 punto que crea intervalos, mientras mayor sea el grado de la inecuación mayor puntos se dan y mayor sera la cantidad de **posibles intervalos solución**.

Para resolver una inecuación de este estilo se deben encontrar todos los posibles intervalos y **unirlos** $(A \cup B)$ **intersectarlos** $(A \cap B)$

Para resolver este tipo de inecuaciones se deben seguir los siguientes pasos:

- Despejar la inecuación hasta igualar un extremo a 0 (forma canónica).
- Factorizar la ecuación para conseguir los puntos críticos o raíces de la ecuación.
- Graficar los puntos críticos y hallar los intervalos en los que la inecuación se cumpla.
- Formar los intervalos con los puntos críticos y respetando los operadores de relación.

Los puntos 3 y 4 se pueden invertir en orden, dependiendo de los gustos y las dificultades de cada quien puede ser mas sencillo primero graficar o primero encontrar los intervalos.

Para realizar las gráficas, se debe graficar cada posible intervalo. Los posibles intervalos vienen dados por los puntos, raíces, de los **los elementos factorizados**. Cada uno de estos se observa como una inecuación nueva y se grafican, los intervalos solución vienen dados por los punto solución en los cuales se cumple la inecuación, estos puntos a su vez ya indican que tipo de relación guardan (paréntesis o corchetes), por lo tanto es fácil obtener la información.

Para proseguir, tomaremos las ecuaciones resueltas con anterioridad en 2.1.2 y 2.1.2 y nos concentraremos en resolver los intervalos.

Para: $x^2 + 5x - 14 < 0$ factorizamos $x^2 + 5x - 14 = 0$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x_1 = 2 \ ; \ x_2 = -7$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \longrightarrow (x-2)(x+7) = 0$$

Y la inecuación queda:

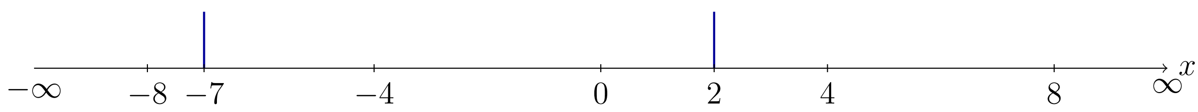
$$x^2 + 5x - 14 < 0 \longrightarrow (x-2)(x+7) < 0$$

cada factor se graficará independientemente, en la **raíz** como resultado de una inecuación lineal (la raíz es el valor que esta dentro del paréntesis pero con signo opuesto, ej para (x-2) seria x=2, esto sale del despeje... x-2=0 → x=2).

Por facilidad, se busca que las gráficas tengan la misma referencia, y de ser posible la misma escala, para esto o se dibujan en la misma recta real o se hacen rectas reales iguales o centradas con respecto al 0, ya que este es referencia.

Los puntos son: $P_1 = 2$, $P_2 = -7$

La gráfica de los puntos es::



Dela gráfica se observan los intervalos (por las separaciones) $(-\infty, -7); (-7, 2); (2, +\infty)$

Para saber si se cumple la inecuación en los intervalos, se elige un valor cualquiera que pertenezca al intervalo que se evalúa y se sustituye en la expresión.

Tenemos: Intervalos: $(-\infty, -7); (-7, 2); (2, +\infty)$ Inecuación: $(x-2)(x+7) < 0$ Valores de muestra, pueden ser cualquiera: -8; 0; 8 (tomamos estos valores por facilidad, cada uno representa su intervalo)

Sustituyendo:

Para -8

$$(-8-2)(-8+7) < 0$$
$$(-10)(-1) < 0$$
$$10 < 0$$

Se observa que no pertenece el intervalo a la solución porque no cumple la inecuación.

Para 0

$$\begin{aligned}(0-2)(0+7) &< 0\\ (-2)(7) &< 0\\ -14 &< 0\end{aligned}$$

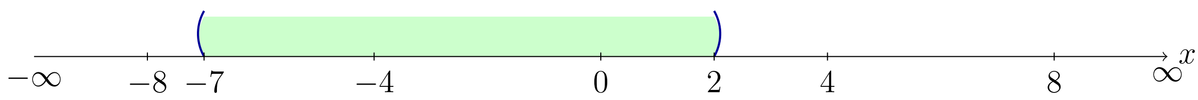
Se observa que si cumple.

Para 8

$$\begin{aligned}(8-2)(8+7) &< 0\\ (6)(15) &< 0\\ 90 &< 0\end{aligned}$$

Se observa que no pertenece el intervalo a la solución.

y de esta forma, el intervalo solución es $x \in (-7, 2)$ y la gráfica es:



Esta forma de resolver es sencilla y practica, la mayor dificultad es las multiplicaciones. Cabe resaltar que **NO ES NECESARIO** hacer las multiplicaciones, ya que con el signo es suficiente. **Recordemos** que todo número $>$ o $\geq$ que 0 (cero) es positivo y en caso contrario, es $<$ si es negativo o $\leq$ si es negativo o 0.

Se hace este énfasis por dos razones.

- Evitar cálculos innecesarios que pueden llevar mucho tiempo.
- Es la base del método de barras o tabla de signos, que es muy utilizado y sirve también para las inecuaciones racionales.

2.2.3. Método de barras

El método de barras o de tabla de signos consiste en hacer una tabla, colocar en la parte superior los intervalos posible solución, a la izquierda colocar todos los términos que impliquen una raíz. Es decir, **Todos los factores que se están multiplicando**

o dividiendo que son de la forma $(x \pm a)$, pueden convertir en 0 la multiplicación. Además, se coloca un renglón adicional para la solución, usualmente al final como si fuera una multiplicación

Posteriormente, se procede a rellenar la tabla con los signos resultantes en el intervalo, se toma un valor perteneciente al intervalo trabajado y se reemplaza en el monomio $(x \pm a)$, se coloca el signo. Luego se multiplican los signos de cada columna y el resultado se coloca en el renglón solución.

El renglón solución indicara que valores toma la inecuación final y se observa si cumple con el operador relacional.

Operador Relacional (inecuación)	Signo que lo satisface
$expresin < 0$	negativo - - - - -
$expresin \leq 0$	negativo - - - - -
$expresin > 0$	positivo + + + +
$expresin \geq 0$	positivo + + + +

Usando el mismo ejemplo anterior:

Inecuación: $(x-2)(x+7) < 0$

Intervalos: $(-\infty, -7); (-7, 2); (2, +\infty)$

La tabla:

	$(-\infty, -7)$	$(-7, 2)$	$(2, +\infty)$
$x-2$	$x+7$	Resultado	

Procedemos a llenar la tabla, calculando: para (x-2):

-8: $x - 2 \rightarrow -8 - 2 \rightarrow -10$ negativo

0: $x - 2 \rightarrow 0 - 2 \rightarrow -2$ negativo

8: $x - 2 \rightarrow 8 - 2 \rightarrow 6$ positivo

para (x+7):

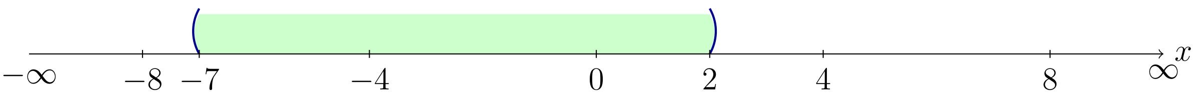
-8: $-8 + 7 \rightarrow -1$ negativo

0: $0 + 7 \rightarrow 7$ positivo

8: $8 + 7 \rightarrow 15$ positivo

binomio	Intervalos		
	$(-\infty, -7)$	$(-7, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 2$	- - - - -	- - - - -	+ + + +
$x + 7$	- - - - -	+ + + +	+ + + +
Resultado	+ + + +	- - - - -	+ + + +

y de esta forma, el intervalo solución es $x \in (-7, 2)$, ya que es el único negativo y por ende el único que cumple la inecuación y la gráfica es:



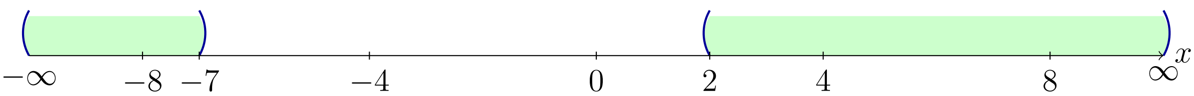
Ahora, estudiemos para el caso del operador relacional opuesto, para Inecuación: $(x - 2)(x + 7) > 0$

El procedimiento es el mismo, y se llega a la misma tabla:

binomio	Intervalos		
	$(-\infty, -7)$	$(-7, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 2$	- - - - -	- - - - -	+ + + +
$x + 7$	- - - - -	+ + + +	+ + + +
Resultado	+ + + +	- - - - -	+ + + +

Mas ahora, como se tiene la expresión $expresin > 0$ buscamos por **TODOS** los intervalos positivos, y se usa el operador de conjuntos unión ($\cup$) para indicar que ambos satisfacen la inecuación.

Entonces la gráfica resultante es:



Y el conjunto solución es $x \in \{(-\infty; -7) \cup (2; +\infty)\}$. Se lee como, el conjunto formado por la unión de -infinito a -7 con 2 a +infinito.

Además, también se puede expresar como: $\mathbb{R} - [-7; 2]$, mas la otra nomenclatura es mas sencilla y se seguirá trabajando con esa. Notesé que en este caso los intervalos son cerrados, esto es porque ni -7 ni 2 pertenecen al intervalo solución, y por esto se deben añadir al conjunto exclusión. Esta nomenclatura se lee como, todos los reales excepto el conjunto de -7 a 2.

Ahora procedamos con otro ejercicio, esta ecuación fue factorizada anteriormente en ecuaciones de 3er grado (2.1.2) $2x^3 + 9x^2 + 13x = -6 \rightarrow (x+1)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) = 0$

Tomando la Factorización y resolviéndola para los 2 operadores relacionales que nos faltan por ver ($\leq, \geq$), tenemos:

Para: $(x+1)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) \leq 0$

Los puntos críticos son: -2,$-\frac{3}{2}$(-1.5),-1 por ende, los intervalos son:

$$(-\infty; -2], [-2; -\frac{3}{2}], [-\frac{3}{2}, -1], [-1, +\infty)$$

Luego procedemos a tomar valores para cada intervalo: $v_1 = -3, v_2 = -1.6, v_3 = -1.1, v_4 = 0$

Para (x+1):

-3: -3+1=-2 negativo

-1.6: -1.6+1=-0.6 negativo

-1.1: -1.1+1=-0.1 negativo

0: 0+1=1 positivo

Para $\left(x+\frac{3}{2}\right)$:

-3: $-3+\frac{3}{2}$=-$\frac{3}{2}$ negativo

-1.6: $-1.6+\frac{3}{2}$=-0.1 negativo

-1.1: $-1.1+\frac{3}{2}$=+0.4 positivo

0: $0+\frac{3}{2}$=1.5 positivo

Para (x+2):

-3: -3+2=-1 negativo

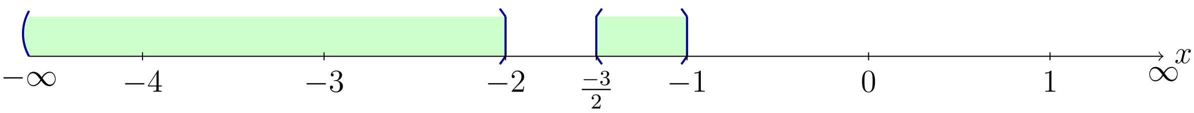
-1.6: -1.6+2=0.4 positivo

-1.1: -1.1+2=0.9 positivo

0: 0+2=2 positivo

binomio	Intervalos			
	$(-\infty;-2]$	$[-2;-\frac{3}{2}]$	$[-\frac{3}{2},-1]$	$[-1,+\infty)$
$x+1$	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +
$\left(x+\frac{3}{2}\right)$	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +
$x+2$	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
Resultado	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +

Y el conjunto solución es $x \in \{(-\infty;-2] \cup \left[-\dfrac{3}{2},-1\right]\}$ (negativos).



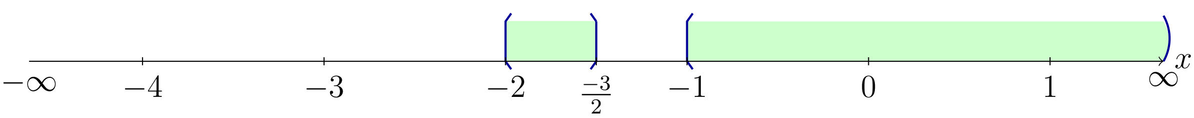
Para: $(x+1)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) \geq 0$

Tenemos lo mismo, por tanto llegamos a la tabla:

binomio	Intervalos			
	$(-\infty;-2]$	$[-2;-\frac{3}{2}]$	$[-\frac{3}{2},-1]$	$[-1,+\infty)$
$x+1$	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +
$\left(x+\frac{3}{2}\right)$	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +
$x+2$	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
Resultado	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +

Y el conjunto solución es $x \in \{\left[-2;\dfrac{-3}{2}\right] \cup [-1,+\infty)\}$ (positivos).

La gráfica resultante es:



Inecuaciones Racionales

Este tipo de inecuaciones tienen la forma $\dfrac{P(x)}{Q(X)}$ como una de las expresiones y el otro lado esta igualado a 0. $P(x), Q(x)$ son expresiones algebraicas como las que hemos venido trabajando y la forma de resolución de estos es con el método de barras (tabla de signos), con algunas consideraciones adicionales:

- Se factorizar tanto numerador como denominador y se colocan los intervalos correspondientes
- El polinomio denominador **NO** puede ser 0, ya que la división por 0 no existe, por esto esos intervalos siempre serán **ABIERTOS**, es decir, con un paréntesis "(" o ")" dependiendo si es apertura o cierre del intervalo.

Ejemplos:

Para $\frac{x^2+x-2}{x} \geq 0$ Primero factorizados tanto numerador como denominador: Numerador:

$$x^2 + x - 2 = 0.\ a = 1, b = 1, c = -2$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times -2}}{2 \times 1}$$
Al resolver se obtiene: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$
$$\rightarrow (x-1)(x+2) = 0$$

Denominador: x

Y la inecuación factorizada queda de la forma:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x} \geq 0$$

Las raíces, puntos críticos, son: 1, -2, 0. Dando origen a los intervalos: $(-\infty; -2]$, $[-2, 0)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$ nótese que los intervalos son **ABIERTOS** en 0, esto es porque si el denominador se hace 0 (único punto en 0), la inecuación no existe y en los infinitos, porque estos se desconocen y por ende no se pueden tomar (misma razón que antes, por eso siempre es abierto en estos "puntos").

De igual forma, procedemos a tomar valores entre los intervalos: -3,-1,0.5,2 por facilidad de los cálculos. entonces tenemos:

Para (x-1): -3 : -3-1 = -4 negativo

-1 : -1-1 = -2 negativo

0.5 : 0.5-1 = -0.5 negativo

2 : 2-1 = 1 positivo

Para (x+2): -3 : -3+2 = -1 negativo

-1 : -1+2 = 1 positivo

-0.5 : -0.5+2 = 1.5 positivo

2 : 2+2 = 4 positivo

para x: -3 : -3 negativo

-1 : -1 negativo

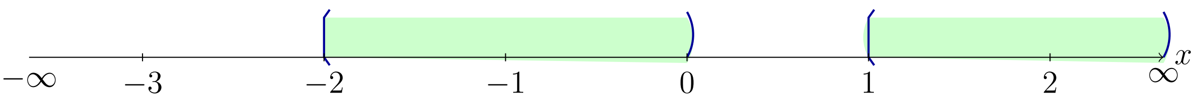
0.5 : 0.5 positivo

2 : 2 positivo

	$(-\infty; -2]$	$[-2, 0)$	$(0, 1]$	$[1, +\infty)$
x-1	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +
x+2	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
x	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +
resultado	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +

De lo que se obtiene el intervalo resultado:$\{x \in [-2, 0) \cup [1, +\infty)\}$

Y la gráfica es:



Otro ejemplo y un truco: **Si se sigue un orden creciente, una vez se presenta el cambio de signo, para un monomio, todos los posteriores tendrán el nuevo signo**

$$\frac{(x+1)(x+3)(x-3)}{(x-5)x} \leq 0$$

Primero conseguimos los puntos críticos, raíces, estos son:

Numerador:-1,-3,3, en orden creciente, -3,-1,3

denominador:5,0 en orden creciente, 0,5

Por lo tanto, los puntos son -3,-1,0,3,5 y los intervalos son:

$(-\infty,-3]; [-3,-1]; [-1,0); (0,3]; [3,5); (5,+\infty)$

Tomando puntos, estos serian, -4,-2,-0.5,1,4,6 y probando:

Para (x+1):

-4 : -4+1=-3, negativo

-2 : -2+1 = -1, negativo

-0.5 : -0.5+1=0.5 positivo **cambio de signo**

1 : 1+1= 2 positivo

4 : 4+1 = 5 positivo

6 : 6+1=7 positivo

Para (x+3):

-4 :-4+3=-1 negativo

-2 : -2+3 = 1 positivo **cambio de signo**

-0.5 : -0.5 +3 = 2.5 positivo

1 : 1+3 = 4 positivo

4 : 4+3 = 7 positivo

6 : 6+4 = 10 positivo

Para (x-3):

-4 : -4-3 =-7 negativo

-2 : -2-3 =-5 negativo

-0.5 : -0.5-3 =-3.5 negativo

1 : 1-3=-2 negativo

4 : 4-3=1 positivo **cambio de signo**

6 : 6-3=3 positivo

Para x:

-4 : -4 negativo

-2 : -2 negativo

-0.5 : -0.5 negativo

1 : 1 positivo **cambio de signo**

4 : positivo

6 : positivo

Para (x-5):

-4 : -4-5 =-9 negativo

-2 : -2-5 = -7 negativo

-0.5 : -0.5-5=-5.5 negativo

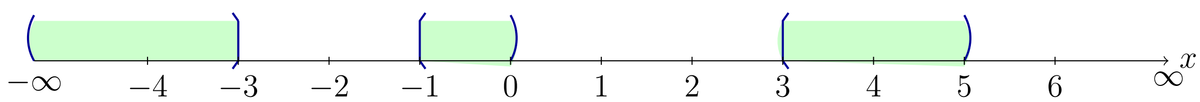
1 : 1-5 =-4 negativo

4 : 4-5=-1 negativo

6 : 6-5 = 1 positivo

	$(-\infty,-3]$	$[-3,-1]$	$[-1,0)$	$(0,3]$	$[3,5)$	$(5,+\infty)$
x+1	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +
x-3	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +
x+3	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +
x	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
x-5	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	+ + + +
resultado	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +	- - - - -	+ + + +

El intervalo solución es: $x \in \{(-\infty,-3] \cup [-1,0) \cup [3,5)\}$



Inecuaciones con valor absoluto

Las inecuaciones con valor absoluto son bastante comunes, y se resuelven de una forma diferente a lo estudiado anteriormente. Para resolverlas se utiliza la definición de valor absoluto.

Recordemos: que el valor absoluto, también conocido como modulo de un número real, se escribe $|x|$ es el valor no negativo de la expresión x. Y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Para resolver las inecuaciones con valor absoluto, debemos entonces, resolver primero el valor absoluto, luego resolver las inecuaciones resultantes y finalmente conseguir los intervalos que la satisfacen.

Ejemplos:

Cuando el operador es $<$ o $\leq$, los intervalos se conectan:

$$|x| < K \rightarrow \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos las inecuaciones:

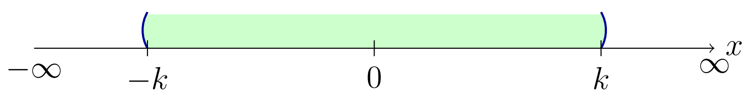
$$x < K \ ; \ -x < K$$

$$x < K \ ; \ x > -K$$

Y el resultado se escribe de la siguiente forma:

$$-K < x < K \ o \ x \in (-k; k)$$

y la gráfica resultante es:



Como se observa, solo se aplica la definición y se procede a resolver las inecuaciones por separado.

algunos ejemplos mas complejos serian:

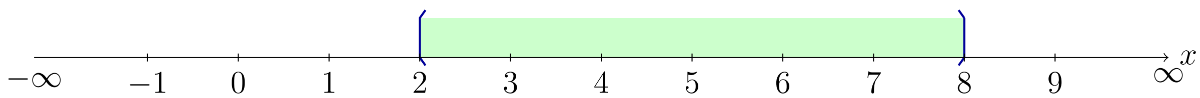
$$|x-5| \leq 3 \rightarrow \begin{cases} x-5, \text{ si } x \geq 0 \\ -x-(-5) = 5-x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos las inecuaciones:

$$\begin{aligned} x-5 &\leq 3 \\ x &\leq 3+5 \\ x &\leq 8 \\ x &\leq 8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 5-x &\leq 3 \\ -x &\leq 3-5 \\ -x &\leq -2 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

y se tiene el intervalo: $2 \leq x \leq 8$ o, de la otra forma, $x \in [2; 8]$

Y la gráfica resultante es:



Cuando el operador relacional es $>$ o $\geq$, los intervalos son separados:

$$|x| > K \rightarrow \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos las inecuaciones:

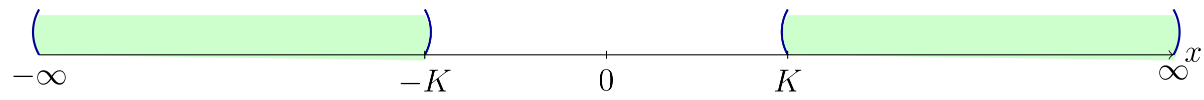
$$x > K \; ; \; -x > K$$

$$x > K \; ; \; x < -K$$

Y el resultado se escribe de la siguiente forma:

$$x \in \{(-\infty; -K) \cup (K; \infty)\}$$

Y la gráfica es:



Otro ejemplo:

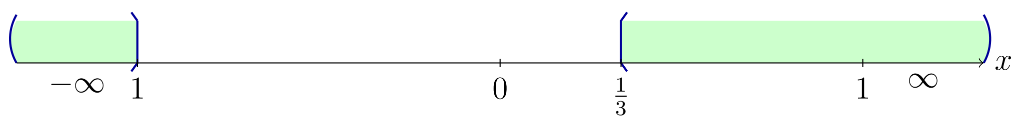
$$|x-1| \geq 2x \rightarrow \begin{cases} x-1, \text{ si } x \geq 0 \\ -x-(-1) = 1-x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos las inecuaciones:

$$\begin{aligned} x-1 &\geq 2x \\ x-2x &\geq 1 \\ -x &\geq 1 \\ x &\leq -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1-x &\leq 2x \\ -x-2x &\leq -1 \\ -3x &\leq -1 \\ x &\geq \frac{-1}{-3} \\ x &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

y el intervalo solución es $x \in \left\{(-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{3};\infty\right)\right\}$

Y la gráfica es:

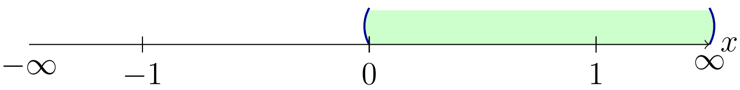


Otro ejemplo:

$$\frac{|x+1|}{x} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x+1, \text{ si } x \geq 0 \\ -x-1, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Para que la inecuación se cumpla, se tiene que cumplir que $\frac{a}{b} \geq 0$ Como el numerador siempre dará un resultado positivo (por eso tiene el valor absoluto), lo único que puede modificar el resultado es el denominador, entonces el intervalo estará dictado por que $den \geq 0$

$x \geq 0 \to$ el intervalo solución es $x \in (0; \infty)$ abierto, porque el denominador no puede ser 0.



2.3. Sistema de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones, es un conjunto de ecuaciones con mas de una incógnita, variable, las cuales conforman un problema matemático. Para resolverlo se tienen que encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen las ecuaciones.

Existen muchos tipos de sistemas de ecuaciones, estos se clasifican según que tipo de ecuaciones lo conforman. En este caso se estudiaran los **sistemas de ecuaciones algebraicas**; estos están conformados únicamente por ecuaciones algebraicas.

Una ecuación de varias variables tiene la forma: $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = 0$ o, también $aX, bY, \cdots, cZ = 0$, donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y/o a, b, z son **coeficientes** y $X_1, X_2, \cdots, X_n$ y/o $X, Y, \cdots, Z$ son **variables independientes**.

Los sistemas tienen la forma general:

$$\left.\begin{array}{c} F_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{array}\right\}$$

Y a su vez, se dividen por sus posibilidades de resolución en:

- **Compatible determinado**: El sistema siempre tiene solución única. Tiene tantas incógnitas como ecuaciones.
- **Compatible indeterminado**: El sistema tiene infinitas soluciones. Tiene mas incógnitas que ecuaciones.
- **Incompatible**: El sistema no tiene solución, esto se da por alguna incoherencia

mientras resolvemos (división por cero, raíz par de un número negativo, incompatibilidad de resultados).

El sistema compatible indeterminado siempre dependerá de alguna variable, quedara expresado en términos de función.

El compatible determinado siempre dará algún valor **único** para cada variable y es el que se estudiara.

2.3.1. Resolución sistemas de ecuaciones

Los métodos mas comunes para resolver los sistemas de ecuaciones son:

- sustitución.
- igualación.
- reducción.

Cabe resaltar que: existen otros métodos, como lo son el método gráfico y los métodos matriciales de Gauss Jordán y kramer.

Sustitución

Consiste en despejar **una** de las incógnitas, de forma que quede $incgnita = expresin$ y luego sustituir en otra ecuación la incógnita despejada por la expresión, esto da origen a una nueva ecuación la cual tiene una variable menos, repetir hasta que quede una ecuación de una sola variable y resolver. Luego se regresan en la linea sustituyendo las variables por los nuevos valores resultados.

Paso a paso se observa:

1. Elegir una ecuación (llámesele ec1) y despejar **1** incógnita.
2. Sustituir el despeje en otra ecuación (llámesele ec2), esto da origen a una nueva ecuación (llámesele sol).
3. Verificar si la nueva ecuación (sol) tiene mas de 1 variable.
   - Si sol tiene 1 sola variable, se despeja y se obtiene el resultado. Ese resultado se sustituye en ec1 y se obtienen todos los valores

- si sol no tiene 1 única variable, despejar alguna otra incógnita y sustituir todos los despejes de incógnitas, en otra ecuación (llámesele ec3) y repetir hasta obtener una única variable.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 3 \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

Tomando la primera ecuación, procedemos a despejar x:

$$(ec1) \qquad x + y = 3 \rightarrow x = 3 - y$$

Luego, sustituimos en las segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 2(3 - y) - y &= 0 \\ 2 \times 3 - 2y - y &= 0 \\ 6 - 3y &= 0 \\ -3y &= -6 \\ y &= \frac{-6}{-3} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

y sustituyendo $Y = 2$ en la $ec1$

$$x = 3 - y \rightarrow x = 3 - 2, \; x = 1$$

Y el sistema tiene una única solución, dada por los valores: $x = 1$ $y = 2$.

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl}\frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = 0\end{array}\right\}$$

Despejamos de la primera ecuación x:

$$\begin{aligned}(ec1) \qquad \frac{x}{2} + 3y - z &= 3 \\ \frac{x}{2} &= 3 - 3y + z \\ x &= 2 \times (3 - 3y + z) \\ x &= 6 - 6y + 2z\end{aligned}$$

Como observamos, hay mas de una variable, por lo tanto, debemos despejar una segunda ecuación, y sustituir en una tercera, todos los valores para quedar con una sola incógnita:

De la segunda ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}2x + 4y + 5z &= 1 \\ &\text{sustituyendo} \\ 2 \times (6 - 6y + 2z) + 4y + 5z &= 1 \\ 12 \; \text{-}12y \; +4z \; +4y \; +5z &= 1 \\ -8y + 9z &= -11 \\ &\text{Despejamos y} \\ -8y &= -11 - 9z \\ (ec2) \qquad y &= \frac{11 + 9z}{8}\end{aligned}$$

Luego, procedemos a sustituir en la tercera ecuación las expresiones obtenidas de $ec1$ y $ec2$

$$3x + 5y + 4z = 0$$

$$\text{sustituimos, } ec1:$$

$$3(6 - 6y + 2z) + 5y + 4z = 0$$

$$18 \; \text{-18}y \; +6z \; +5y \; +4z = 0$$

$$-13y + 10z + 18 = 0$$

$$\text{sustituimos, } ec2:$$

$$-13 \times (\frac{11 + 9z}{8}) + 10z = -18$$

$$\frac{-13 \times (11 + 9z) + 8 \times 10z}{8} = -18$$

$$-143 - 117z + 80z = -18 \times 8$$

$$-117z + 80z = -144 + 143$$

$$-37z = -1$$

$$z = \frac{1}{37}$$

Regresandonos en las ecuaciones obtenidas, sustituimos $z = \frac{1}{37}$ en $ec2$:

$$y = \frac{11 + 9z}{8}$$

$$y = \frac{11 + 9 \times \frac{1}{37}}{8}$$

$$y = \frac{11 \times 37 + 9}{8 \times 37}$$

$$y = \frac{52}{37}$$

Finalmente, sustituimos estos valores en $ec1$:

$$
\begin{aligned}
x &= 6 - 6y + 2z \\
x &= 6 - 6 \times \frac{52}{37} + 2 \times \frac{1}{37} \\
x &= 6 - \frac{312}{37} + \frac{2}{37} \\
x &= \frac{6 \times 37 - 312 + 2}{37} \\
x &= \frac{-88}{37}
\end{aligned}
$$

y el sistema esta resuelto con:

$$
x = \frac{-88}{37}; \qquad y = \frac{52}{37}; \qquad z = \frac{1}{37}
$$

Como se observa, este método se volverá mas complicado mientras mayor ecuaciones-variables se tengan.

Igualación

Este método es muy parecido al de sustitución, consiste en despejar una misma variable en las ecuaciones obtenidas e igualarlas (la variable despejada se usa como punto común), de esta forma se obtienen nuevas ecuaciones las cuales tienen 1 variable menos, se repite el proceso hasta tener 1 única ecuación de 1 sola variable, luego se despeja y los valores obtenidos se sustituyen en las ecuaciones previamente obtenidas para conseguir los resultados.

Usando los mismos ejemplos que en sustitución:

$$
\left.
\begin{array}{rcrl}
x & + & y & = 3 \\
2x & - & y & = 0
\end{array}
\right\}
$$

procedemos a despejar x:

$$x + y = 3 \qquad\qquad 2x - y = 0$$

$$x = 3 - y \qquad\qquad x = \frac{y}{2}$$

Procedemos a igualar en la x:

$$\begin{aligned}
3 - y &= \frac{y}{2} \\
3 &= \frac{y}{2} + y \\
3 &= \frac{y + 2y}{2} \\
3 \times 2 &= 3y \\
y &= \frac{6}{3} \\
y &= 2
\end{aligned}$$

luego, sustituimos $y = 2$ en cualquiera de las ecuaciones anteriores, usando la segunda:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{y}{2} \\
x &= \frac{2}{2} \\
x &= 1
\end{aligned}$$

y el sistema tiene como solución $x = 1$ y $y = 2$ (mismo resultado que por sustitución ya que la solución es única).

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
\frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3 \\
2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\
3x & + & 5y & + & 4z & = 0
\end{array}\right\}$$

Despejamos la variable x:

$$\frac{x}{2}+3y-z=3 \qquad 2x+4y+5z=1 \qquad 3x+5y+4z=0$$

$$\frac{x}{2}=3-3y+z \qquad 2x=1-4y-5z \qquad 3x=-5y-4z$$

$$x=2\times(3-3y+z) \qquad x=\frac{1-4y-5z}{2} \qquad x=\frac{-5y-4z}{3}$$

$$x=6-6y+2z$$

Procedemos a igualar las ecuaciones, tenemos que usarlas todas al menos una vez, por esto se juntaran la primera con la segunda y la primera con la tercera (hay 2 variables restantes así que solo necesitamos 2 ecuaciones):

$$6-6y+2z=\frac{1-4y-5z}{2} \qquad 6-6y+2z=\frac{-5y-4z}{3}$$

$$2\times(6-6y+2z)=1-4y-5z \qquad 3\times(6-6y+2z)=-5y-4z$$

$$12-12y+4z=1-4y-5z \qquad 18-18y+6z=-5y-4z$$

Procedemos a despejar la y :

$$-12y+4y=1-5z-12-4z \qquad -18y+5y=-4z-18-6z$$

$$-8y=-11-9z \qquad -13y=-10z-18$$

$$y=\frac{-11-9z}{-8} \qquad y=\frac{-10z-18}{-13}$$

$$y=\frac{11+9z}{8} \qquad y=\frac{10z+18}{13}$$

Ahora que tenemos las 2 ecuaciones despejadas, las volvemos a igualar:

$$\frac{11+9z}{8}=\frac{10z+18}{13}$$

$$13\times(11+9z)=8\times(10z+18)$$

$$143+117z=80z+144$$

$$117z-80z=144-143$$

$$37z=1$$

$$z=\frac{1}{37}$$

Y luego, sustituyendo en alguna ecuación previa, usando la primera ecuación despejada de 2 variables (izquierda):

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{11 + 9z}{8} \\
y &= \frac{11 + 9 \times \frac{1}{37}}{8} \\
y &= \frac{11 \times 37 + 9}{37 \times 8} \\
y &= \frac{52}{37}
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituimos estos valores en la primera ecuación:

$$
\begin{aligned}
x &= 6 - 6y + 2z \\
x &= 6 - 6 \times \frac{52}{37} + 2 \times \frac{1}{37} \\
x &= 6 - \frac{312}{37} + \frac{2}{37} \\
x &= \frac{6 \times 37 - 312 + 2}{37} \\
x &= \frac{-88}{37}
\end{aligned}
$$

y el sistema esta resuelto, dando los mismos valores que por sustitución:

$$
x = \frac{-88}{37}; \qquad y = \frac{52}{37}; \qquad z = \frac{1}{37}
$$

Reducción

Este método consiste en reducir la cantidad de ecuaciones-incógnitas que hay presente, mediante la suma o resta de las ecuaciones, además de la multiplicación o dividiesen de las mismas por un número entero.

Para realizar esto, se busca que ambas ecuaciones tengan el mismo coeficiente en una determinada variable, luego restarlas si el signo es igual y sumarlas si el signo es distinto.

de esta forma se obtiene una(s) nueva(s) ecuación(es) y se repite el proceso hasta obtener el resultado de una variable, y se van sustituyendo los valores progresivamente, como en los métodos anteriores.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{cccc} x & + & y & = 3 \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

Por facilidad, se procede a ordenar de forma que estén los términos iguales uno debajo de otro:

$$\left.\begin{array}{cccc} x & + & y & = 3 \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

luego, se multiplica (o divide) una ecuación por un número el cual de como resultado el mismo coeficiente de la otra ecuación en una variable determinada, puede ser con el mismo signo(se restaran) o con signos contrarios (se sumaran). Usando el signo contrario, se multiplicara la primera ecuación por -2 y se sumara:

$$\left.\begin{array}{cccc} -2 \times (x & + & y & = 3) \\ 2x & - & y & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccccc} -2x & - & 2y & = & -6 \\ 2x & - & y & = & 0 \\ \hline 0x & - & 3y & = & -6 \end{array}$$

$$y = \frac{-6}{-3} \rightarrow y = 2$$

Luego, sustituimos en la primera ecuación:

$$x + y = 3$$

$$x + 2 = 3$$

$$x = 3 - 2$$

$$x = 1$$

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = 0 \end{array}\right\}$$

En este caso, se toman grupos de 2 ecuaciones. tomando 1 con 2 y 2 con 3:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = 0 \end{array}\right\}$$

Luego, procedemos a multiplicar, para eliminar la variable x:

En el primer conjunto de ecuaciones, la primera ecuación por -4

En el segundo conjunto de ecuaciones, la primera por -3 y la segunda por 2

Y sumamos:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} -4\times(\frac{x}{2} & + & 3y & - & z & = 3) \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ccccccc} -3\times(2x & + & 4y & + & 5z & = 1) \\ 2\times(3x & + & 5y & + & 4z & = 0) \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} -2x & - & 12y & + & 4z & = -12 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = 1 \\ \hline 0x & - & 8y & + & 9z & = -11 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} -6x & - & 12y & - & 15z & = -3 \\ 6x & + & 10y & + & 8z & = 0 \\ \hline 0x & - & 2y & - & -7 & = -3 \end{array}$$

Luego, se procede a resolver el sistema generado con las dos ecuaciones resultantes:

$$\left.\begin{array}{cccc} -8y & + & 9z & = -11 \\ -2y & - & -7 & = -3 \end{array}\right\}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -4:

$$\left.\begin{array}{cccc} -8y & + & 9z & = -11 \\ -4\times(-2y & - & -7 & = -3) \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcrl} -8y & + & 9z & = -11 \\ 8y & + & 28 & = 12 \\ \hline 0y & + & 37z & = 1 \end{array}$$

$$z = \frac{1}{37}$$

luego sustituimos en alguna de las ecuaciones anteriores, sustituyendo en la primera:

$$\begin{aligned} -8y+ & 9z = -11 \\ y = \frac{-11-9z}{8}y & = \frac{11+9z}{8} \\ y = & \frac{11+9\times\frac{1}{37}}{8} \\ y = & \frac{11\times 37+9}{37\times 8} \\ y = & \frac{52}{37} \end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos estos valores en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x &= 6-6y+2z \\ x &= 6-6\times\frac{52}{37}+2\times\frac{1}{37} \\ x &= 6-\frac{312}{37}+\frac{2}{37} \\ x &= \frac{6\times 37-312+2}{37} \\ x &= \frac{-88}{37} \end{aligned}$$

y el sistema esta resuelto, dando los mismos valores que por sustitución o igualación:

$$x = \frac{-88}{37}; \qquad y = \frac{52}{37}; \qquad z = \frac{1}{37}$$

3. Funciones

Una función, como definición formal, es una regla que asigna a todo elemento en el conjunto de partida un **único** elemento en el conjunto de llegada. En si, esta puede verse como la relación que hay entre dos conjuntos de números, y se dice que una magnitud, numero, es función de otra si el valor de la primera depende del valor de la segunda. De esta forma, se obtienen 3 partes fundamentales de las funciones:

- Conjunto de partida, dominio:

  Es el conjunto formado por todos los posibles valores que puede **tomar** una función. Corresponde a la **variable independiente**.

- Conjunto de llegada, rango

  Es el conjunto formado por todos los posibles valores que puede **dar como resultado** una función, estos dependen del dominio y la expresión que rigen la función. Corresponde a la **variable dependiente**.

- Ecuación la cual rige la función (formula $f(x) = expresin$)

  Esta es una ecuación, la cual puede ser resuelta para una serie de valores (dominio) y da como resultado, un conjunto de valores (rango), y cada valor en el dominio puede dar un único elemento en el rango.

Una función suele tener la siguiente forma:

$$variable_d ependiente = expresin$$

Donde la expresión viene dada en términos de la variable independiente (una letra), es decir, $expresin =$ **ecuación en términos de la variable independiente**

y la variable dependiente puede ser una letra (diferente a la variable independiente) o esto: $f(variable_i ndependiente)$ una f que representa función, y entre corchetes, la variable independientes. Algunos ejemplos son:

Para identificarlas: La letra que esta sola, a un lado de la igualdad es la variable dependiente y la que esta siendo multiplicada, dividida, sumada, dentro de una raíz, etc. Es la variable independiente

$$f(x) = x^2$$

con:

$f(x)$: variable dependiente.

x: variable independiente.

$$y = x + 8$$

con:

y: variable dependiente.

x: variable independiente.

$$f(g) = g - 95$$

con:

$f(g)$: variable dependiente.

g: variable independiente.

$$h = 975x$$

con:

h: variable dependiente.

x: variable independiente.

Operaciones con funciones

Las funciones pueden ser sumadas, restadas, multiplicadas, divididas ,evaluadas y graficadas.

Suma y resta de funciones

La suma de dos funciones consiste en sumar/restar sus miembros algebraicamente y el dominio resultante vendrá dado por la intersección de los dominios de las funciones individuales.

Sean: $f(x),\ g(x)$ funciones cualesquiera, con sus dominios $Dom_f,\ Dom_g$

$$f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x) = miembros_f + miembros_g$$

y el dominio resultante va a ser dado por:

$$Dom_{f \pm g} = Dom_f \cap Dom_g$$

Ejemplos:

$f(x) = 45x,\ Dom_f = \{4, 5, 8, 70, 100\}$

$g(x) = 4 + 95x,\ Dom_g = \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\}$

$f(x) + g(x)$

$$f(x) + g(x) = 45x + 4 + 95x$$
$$f(x) + g(x) = 140x + 4$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{f+g} = Dom_f \cap Dom_g = \{4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\} = \{5, 8, 100\}$$

$f(x) - g(x)$

$$f(x) - g(x) = 45x - (4 + 95x)$$
$$f(x) - g(x) = 45x - 4 - 95x$$
$$f(x) - g(x) = -50x - 4$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{f-g} = Dom_f \cap Dom_g = \{4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\} = \{5, 8, 100\}$$

$g(x) - f(x)$

$$g(x) - f(x) = 45x - (4 + 95x)$$

$$g(x) - f(x) = 45x - 4 - 95x$$

$$g(x) - f(x) = -50x - 4$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{g-f} = Dom_f \cap Dom_g = \{4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\} = \{5, 8, 100\}$$

Multiplicación y división de funciones

La multiplicación/división de funciones se da de la misma forma que la suma o resta, es decir se multiplican o dividen los términos.

La multiplicación seguirá las propiedades asociativa y/o conmutativa para simplificarse.

En el caso de la división, esta se expresa como una fracción, siendo numerador y denominador dividendo y divisor respectivamente. Luego se procede a simplificar si es posible.

Los dominios vienen dados por la intersección en la multiplicación y la intersección con la exclusión de los puntos donde el denominador se haga 0 en la división (ya que la división por 0 no esta definida).

Ejemplos:

Sean: $f(x),\ g(x)$ funciones cualesquiera, con sus dominios $Dom_f,\ Dom_g$

$$f(x) \times g(x) = (f \times g)(x) = miembros_f \times miembros_g$$

y el dominio resultante va a ser dado por:

$$Dom_{f \times g} = Dom_f \cap Dom_g$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{f}{g})(x) = \frac{miembros_f}{miembros_g}$$

y el dominio resultante va a ser dado por:

$$Dom_{\frac{f}{g}} = Dom_f \cap Dom_g - \{x|g(x) = 0\}$$

Ejemplos:

$f(x) = 45x,\ Dom_f = \{0, -4/95, 4, 5, 8, 70, 100\}$

$g(x) = 4 + 95x,\ Dom_g = \{0, -4/95, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\}$

$f(x) \times g(x)$

$$f(x) \times g(x) = 45x \times (4 + 95x)$$

$$f(x) \times g(x) = 45x \times 4 + 45x \times 95x$$

$$f(x) \times g(x) = 180x + 4275x^2$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{g\times f} = Dom_f \cap Dom_g = \{0, -4/95, 4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{0, -4/95, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\} = \{0, -4/95, 5, 8,$$

$\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{45x}{4 + 95x}$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{\frac{f}{g}} = Dom_f \cap Dom_g - \{x|g(x) = 0\}$$

$$Dom_{\frac{f}{g}} = (\{0, -4/95, 4, 5, 8, 70, 100\} \cap \{0, -4/95, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 100\}) - \{x|4 + 95x = 0\}$$

$$Dom_{\frac{f}{g}} = \{0, 5, 8, 100\}$$

$\frac{g(x)}{f(x)}$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{4+95x}{45x}$$
$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{4}{45x} + \frac{95}{45}$$

y el dominio viene dado por:

$$Dom_{\frac{g}{f}} = Dom_f \cap Dom_g - \{x|f(x)=0\}$$

$$Dom_{\frac{g}{f}} = (\{0,-4/95,4,5,8,70,100\} \cap \{0,-4/95,1,2,3,5,8,10,100\}) - \{x|45x=0\}$$

$$Dom_{\frac{f}{g}} = \{-4/95,5,8,100\}$$

Evaluación de funciones

Es una de las operaciones mas importantes, consiste en sustituir dentro de la expresión, la variable independiente por un elemento del dominio, esta operación puede repetirse tantas veces como haga falta con todos los elementos del dominio para obtener el rango de la función.

Para evaluar una función se escribe de la siguiente forma $f(a)$, la función evaluada en le punto a, donde a puede ser cualquier elemento o expresión del dominio de la función.

Para realizar esta operación, se debe sustituir la variable independiente en la expresión de la función por el termino deseado y luego simplificar de ser posible.

Ejemplos:

Sean: $f(x) = 45x$, $g(x) = 154 + 75x$, $h(x) = \frac{45x}{2} - x^2$, $z(x) = \sqrt[3]{5x+9}$.

Evaluarlas en 0,5,a-2:

$f(x) = 45x$

0: $f(0) = 45(0) = 0$

5: $f(5) = 45(5) = 225$

a-2: $f(a-2) = 45(a-2) = 45a - 90$

$g(x) = 154 + 75x$

0: $g(0) = 154 + 75(0) = 154$

5: $g(5) = 154 + 75(5) = 154 + 375 = 529$

a-2: $g(a-2) = 154 + 75(a-2) = 154 + 75a - 150 = 4 + 75a$

$h(x) = \frac{45x}{2} - x^2$

0: $h(0) = \frac{45(0)}{2} - 0^2 = 0$

5: $h(5) = \frac{45(5)}{2} - 5^2 = \frac{225}{2} - 25 = \frac{175}{2}$

a-2: $h(a-2) = \frac{45(a-2)}{2} - (a-2)^2 = \frac{45a-90}{2} - (a^2 - 4a + 4) = \frac{-2a^2+53a-98}{2}$

$z(x) = \sqrt[3]{5x+9}$

0: $z(0) = \sqrt[3]{5(0)+9} = \sqrt[3]{9}$

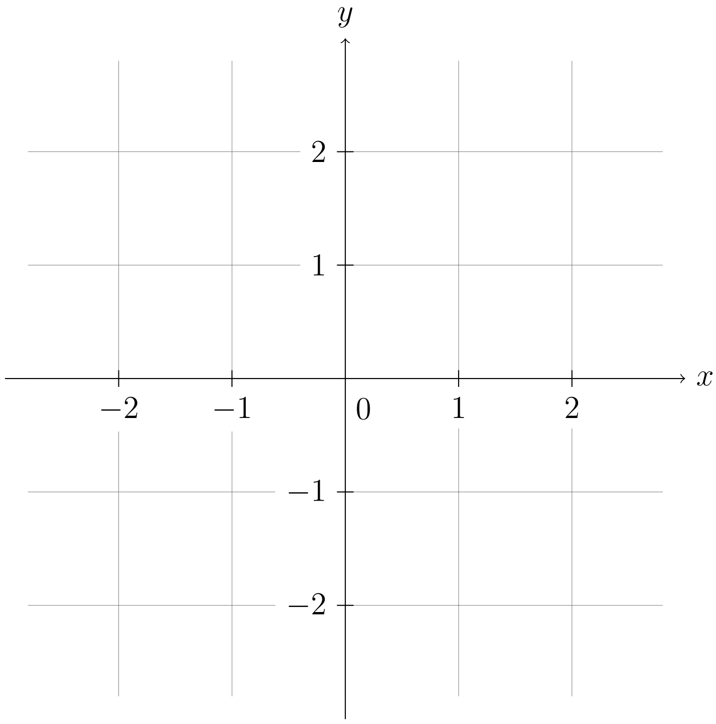
5: $z(5) = \sqrt[3]{5(5)+9} = \sqrt[3]{34}$

a-2: $z(a-2) = \sqrt[3]{5(a-2)+9} = \sqrt[3]{5a-10+9} = \sqrt[3]{5a-1}$

Gráfica de ecuaciones

La gráfica de una ecuación es el conjunto de puntos (x,y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación que define la función. Para esto se evalúan los puntos del dominio, tantos sean necesarios para conseguir la forma de la ecuación, y posteriormente se unen, mientras mas cercanos sean los puntos entre si mas precisa es la gráfica.

Los puntos se graficar en un **plano cartesiano**, también conocidas como coordenadas rectangulares, esta es una representación bidimensional creada por 2 ejes ortogonales (90° entre ellos) en donde el eje horizontal representa la **variable independiente** y el eje vertical la **variable dependiente**.

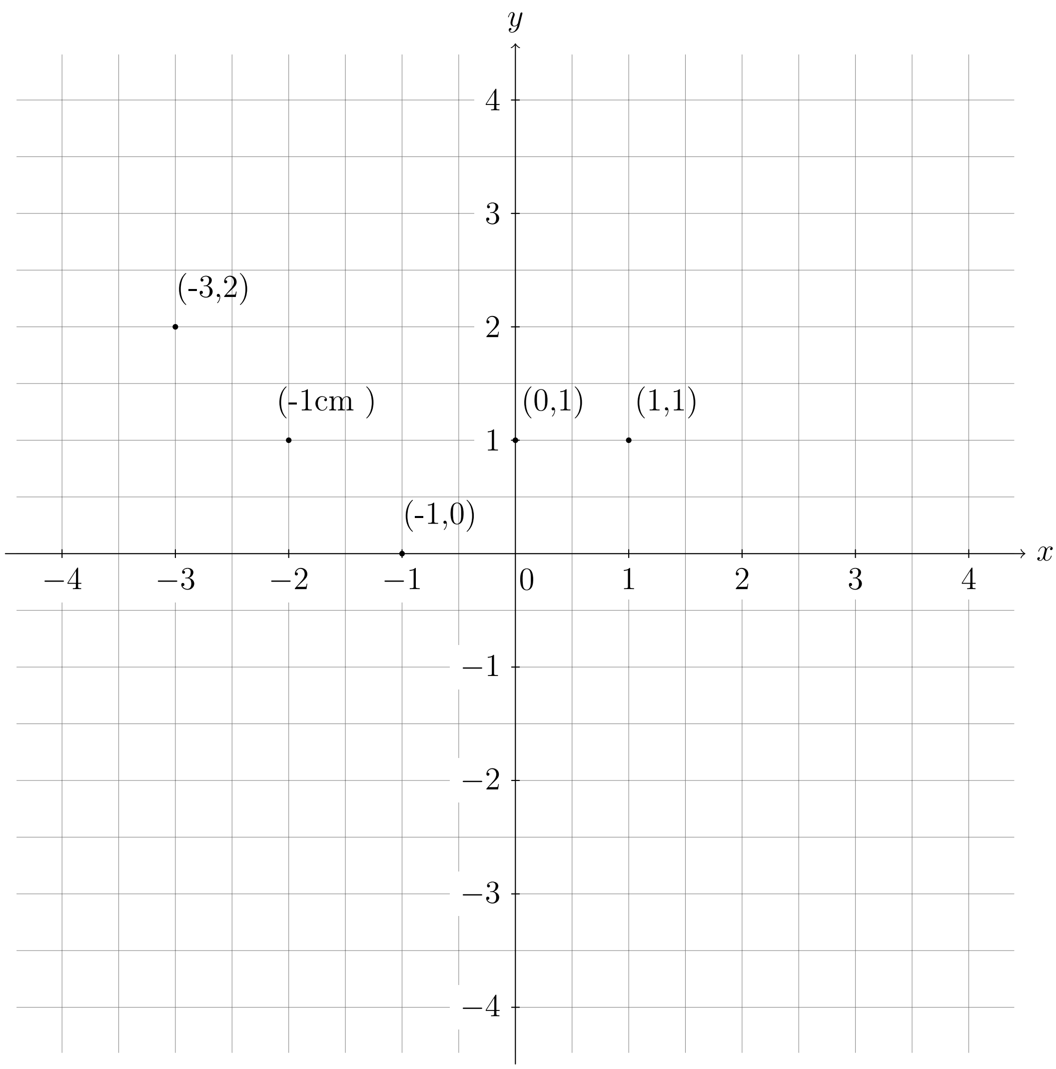


Los puntos que se grafican vienen dados por pares ordenados, estos son objetos matemáticos en los que se distingue un elemento y otro donde el primer elemento representa el eje x y el segundo el eje y (x, y).

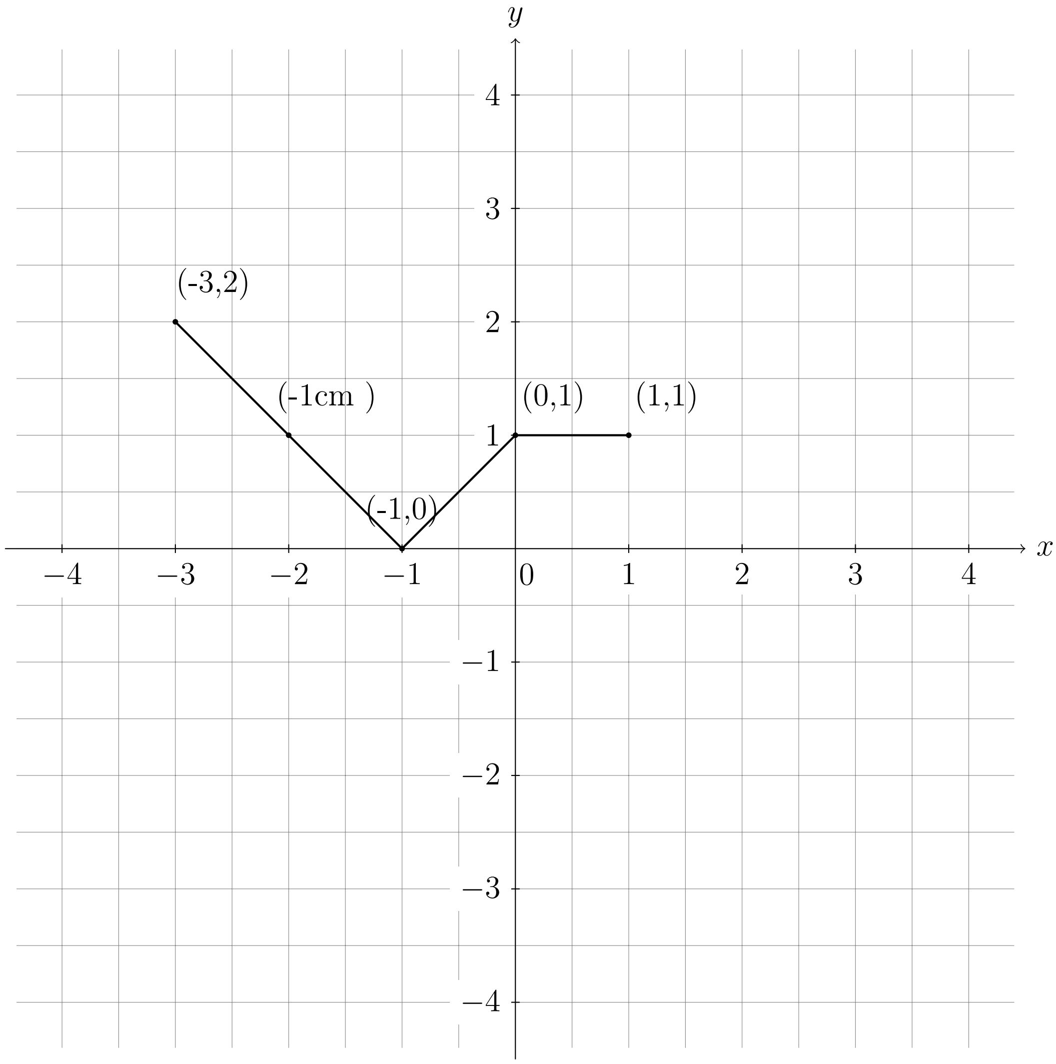
Ejemplo: Graficar el conjunto de puntos:

$$\{(-3; 2), (-2; 1), (-1; 0), (0; 1), (1; 1)\}$$

Como es un conjunto de puntos, pares ordenados, **solo deben colocarse los puntos, sin unirlos**



Si procedemos a unir los puntos, solo se hace cuando es una función, obtenemos la siguiente gráfica:



3.1. Función Lineal

Una función lineal es una función polinómica de una variable de primer grado, esto implica que es una única variable con exponente 1 y puede estar multiplicada por un coeficiente y sumada por una constante (numero).

Tiene la siguiente forma:

$$y = f(x) = mx + b$$

Donde:

x es la variable independiente.

$y = f(x)$ es la variable dependiente, puede escribirse de cualquiera de las dos formas.

m es el coeficiente, un numero no nulo ($m \neq 0$) el cual multiplica la variable.

b es una constante, es decir un numero que se suma o resta, dependiendo del signo, a la variable independiente.

Dominio y Rango: Ambos son todos los reales, es decir

$$Dom_f = \mathbb{R} \ ; \ Rg_f = \mathbb{R}$$

y su gráfica es una linea inclinada con pendiente (inclinación) m y desplazamiento b.

Ejemplo:

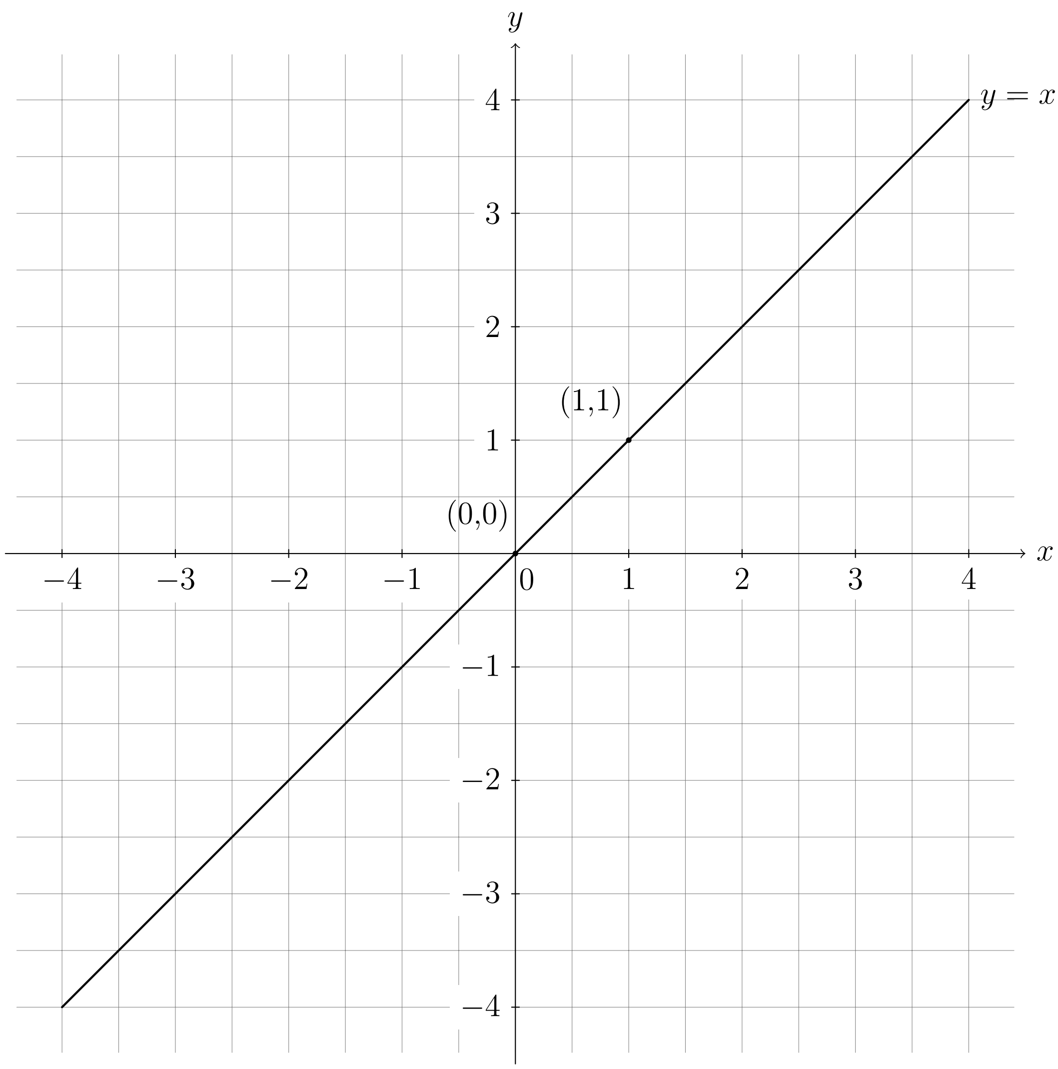
$y = x$

Procedemos a buscar 2 puntos, es lo mínimo ya que su gráfica es una linea recta.

x=0: y= 0; Par ordenado: (0;0)

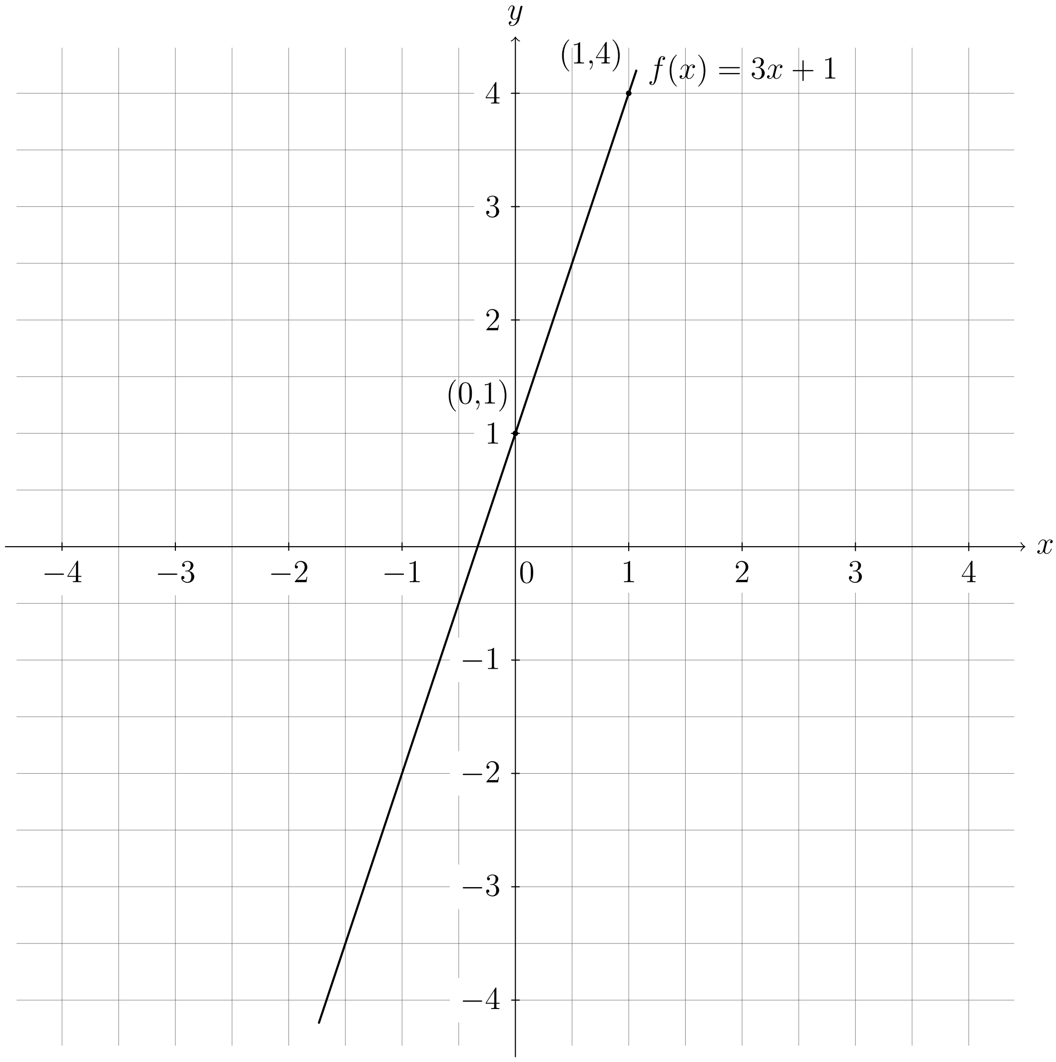
x=1: y=1; Par ordenado: (1;1)

Graficamos:



$f(x) = 3x + 1$ Procedemos a buscar 2 puntos x=0: y=0+1=1; Par ordenado (0;1)

x=1: y=3+1; Par ordenado(1;4)



3.2. Función Cuadrática

una función cuadrática, también conocido como polinomio cuadrático, o un polinomio de grado 2, es una función polinómica con una variable en la que el término de grado más alto es de segundo grado. Esto implica que, después de simplificaciones, existen dos variables sumándose, multiplicadas por coeficientes (los cuales no tienen que ser iguales) y un termino independiente. Tiene la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde: x es la variable independiente. a, b, c son números reales $(a \neq 0)$, a, b son los coeficientes de la variable y c es el termino independiente.

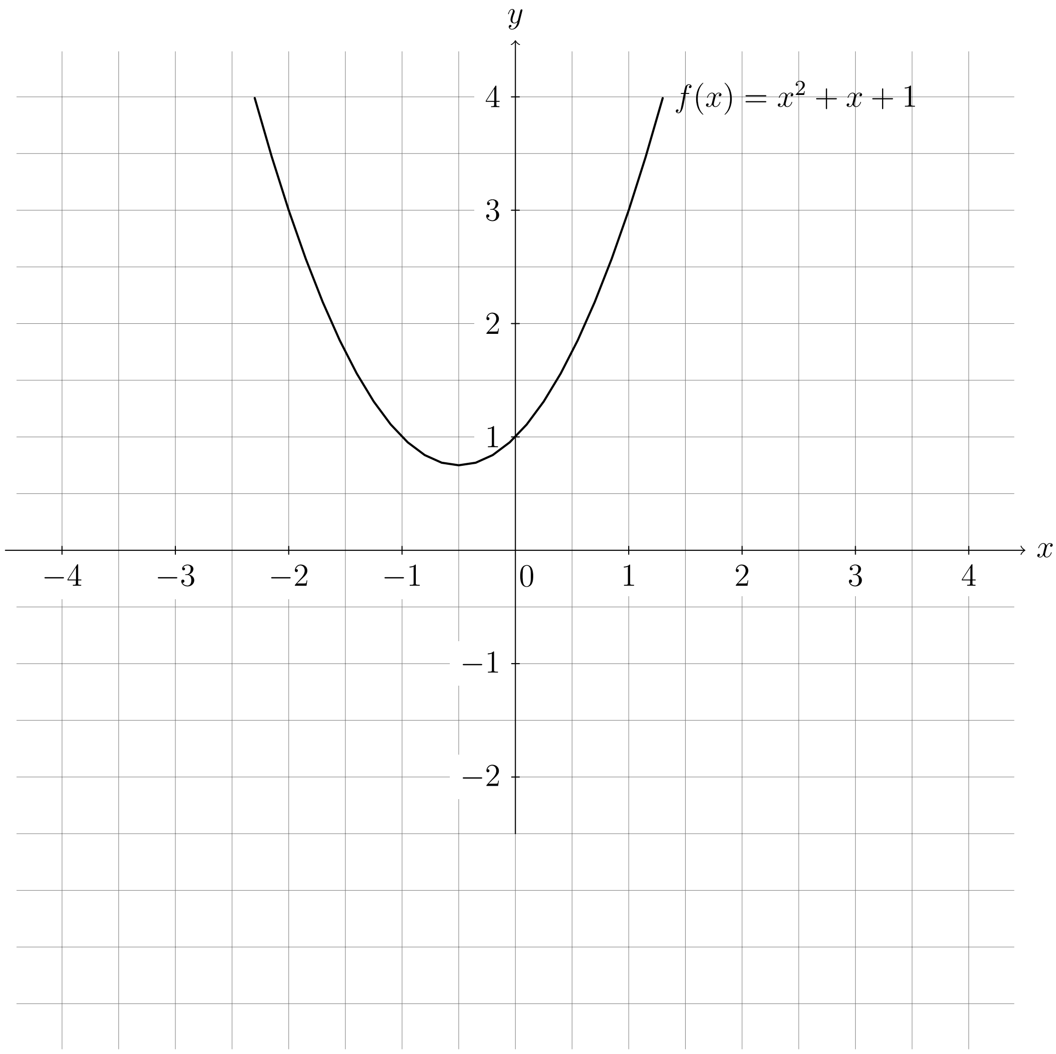
Dominio y Rango: Ambos son todos los reales, es decir

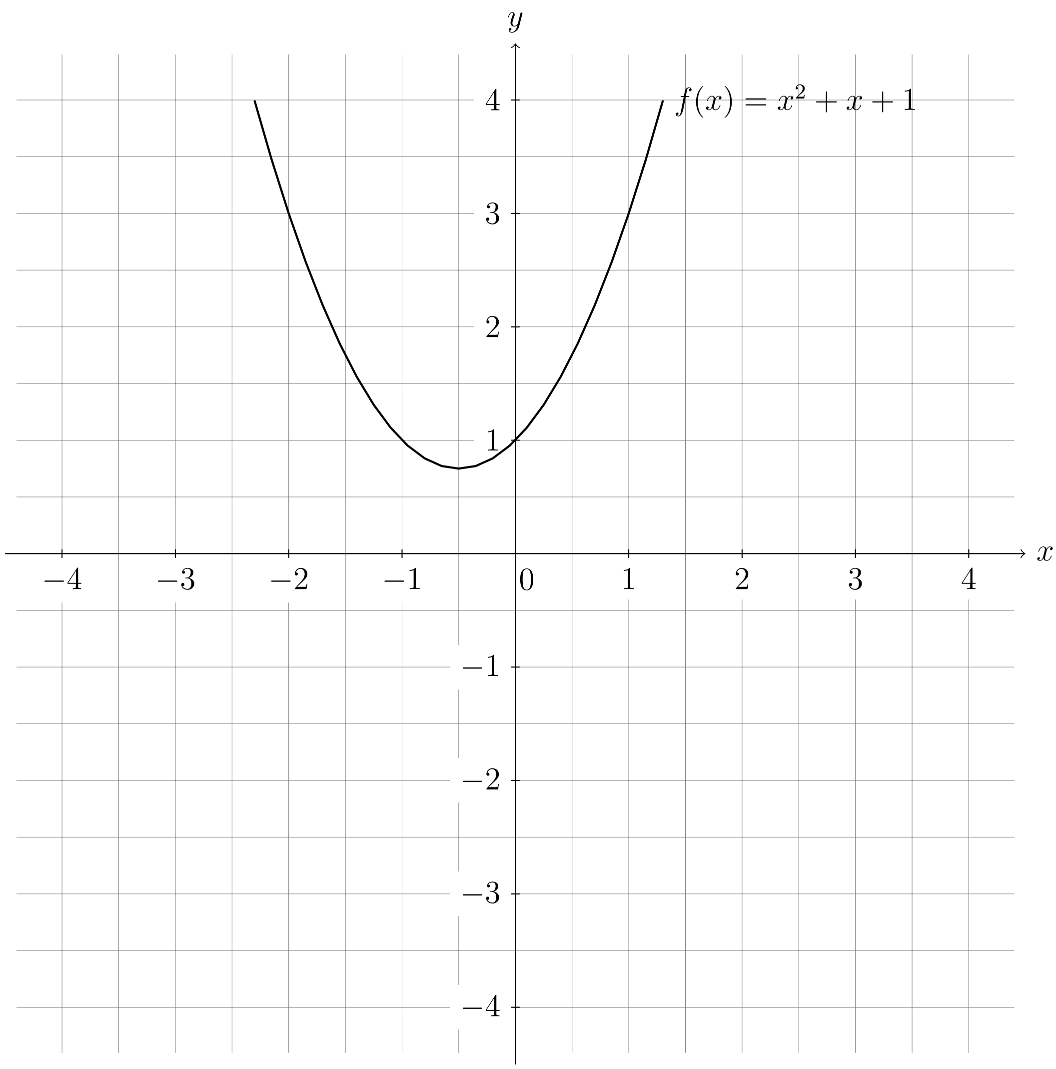
$$Dom_f = \mathbb{R} \ ; \ Rg_f = \mathbb{R}$$

La gráfica es la misma que la de una parábola.

Ejemplos:

$f(x) = x^2 + x + 1$





3.3. Función Polinómica

Una funcion polinomica esta compuesta por una expresion algebraica formada por varios monomios (un unico termino), En ellos intervienen números y letras (ya sea como variable o constantes) relacionados mediante sumas, multiplicaciones y potencias.

Tiene la siguiente forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n - 1 + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde:

$P(x)$ es la variable dependiente.

x es la variable independiente

$a_i$con $i \in n, n-1, \cdots, 1$ los coeficientes (son los numeros que multiplican a las variables).

a_0 el termino independiente.

Usando una notacion mas avanzada, puede escribirse como sumatoria de la forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

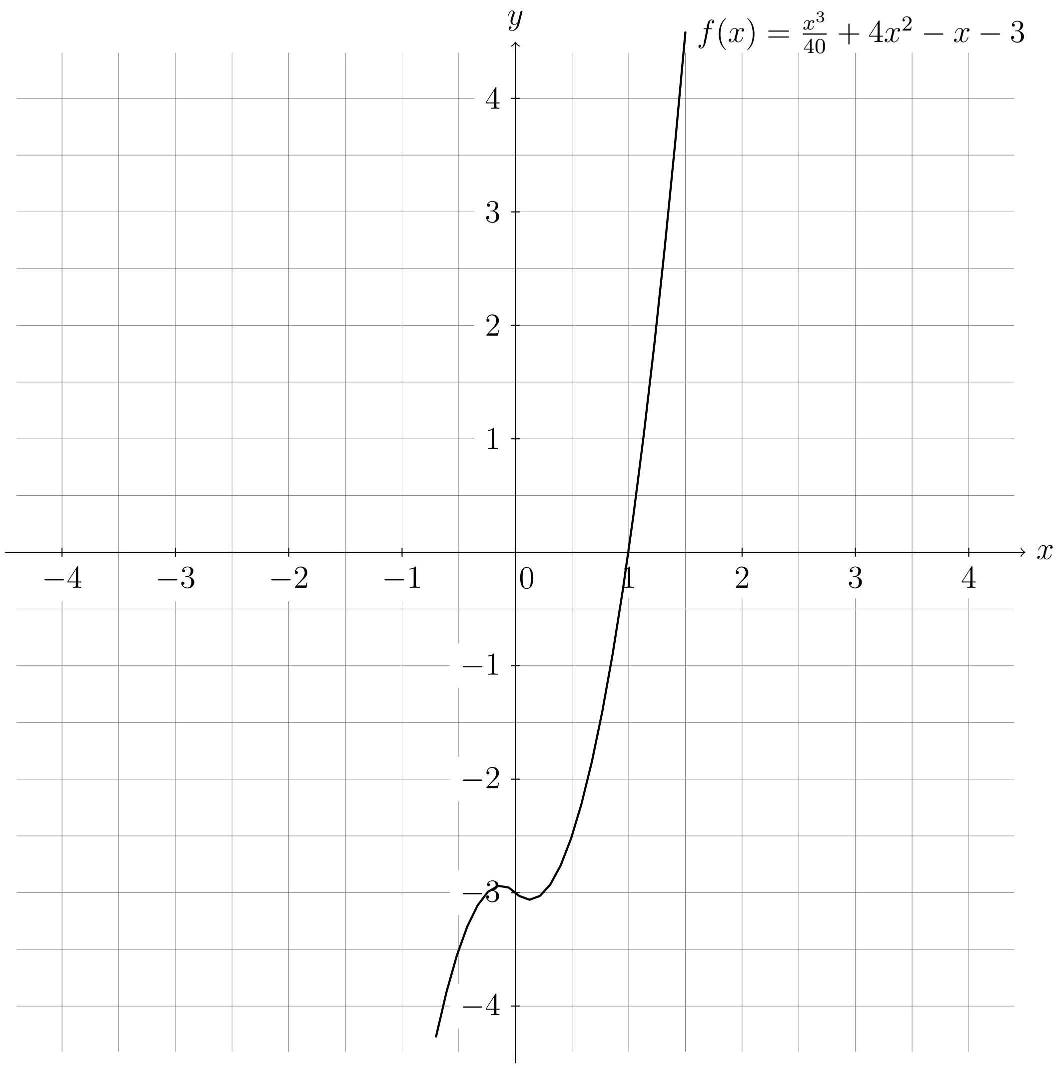
El dominio y el rango son todos los reales es decir:

$$Dom_f = \mathbb{R} \ ; \ Rg_f = \mathbb{R}$$

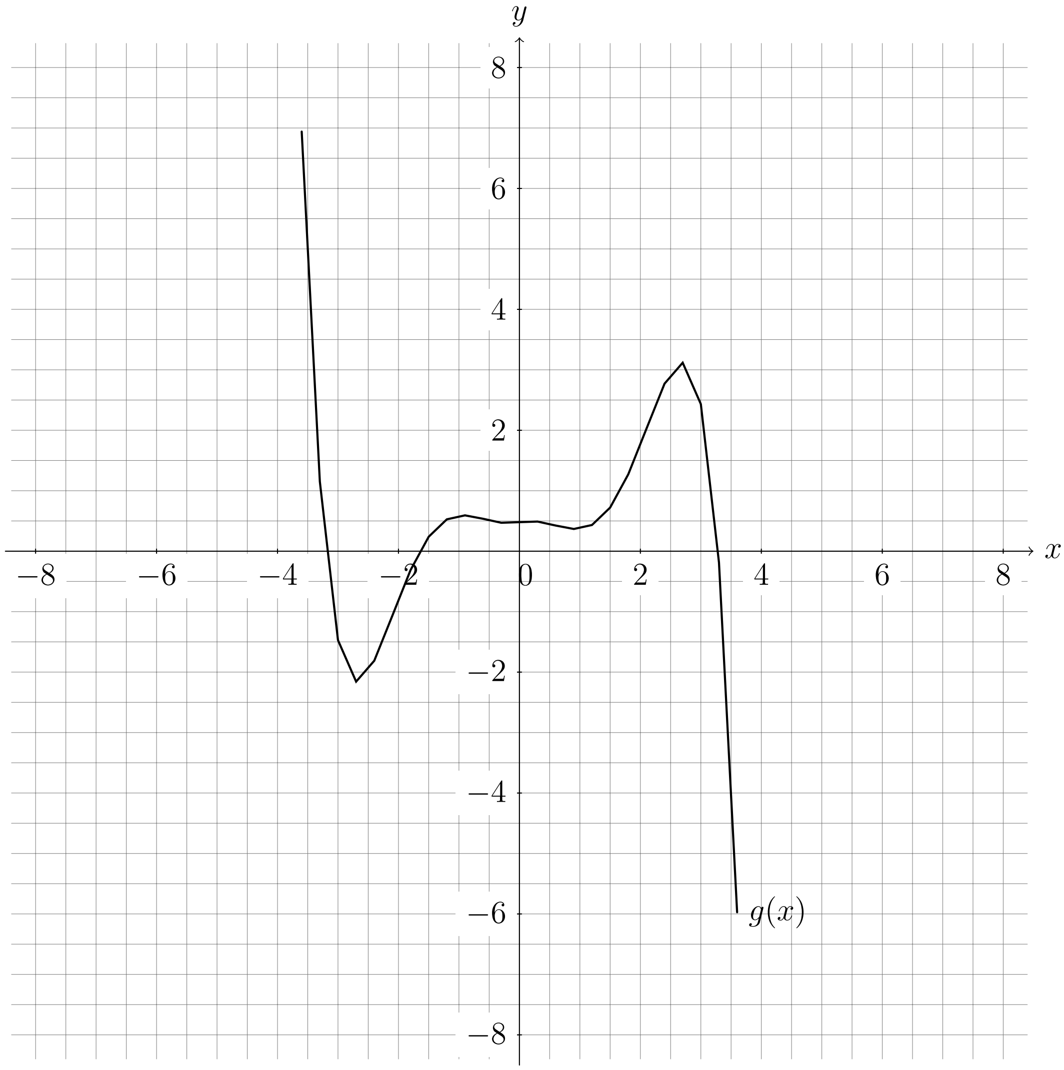
La grafica es muy variada, no tiene una forma especifica, ya que para polinomios de grado 1 tenemos funciones lineales, de grado 2 cuadraticas y para grados superiores se hace un estudio exhaustivo para poder graficarlas a mano (normalmente se usan graficadoras o programas de computador).

Algunos ejemplos son:

$f(x) = \frac{x^3}{40} + 4x^2 - x - 3$



$g(x) = -0.1x^5 + 0.6x^4 - 0.22x^3 - 0.54x^2 + 0.2x + 0.48$



3.4. Cónicas

Una **cónica** o **sección cónica** es un lugar geométrico que se obtiene al intersectar un plano con un cono. Si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas. Se clasifican en cuatro tipos: elipse, parábola, hipérbola y circunferencia.

Las curvas cónicas son importantes en la astronomía: dos cuerpos masivos que interactúan según la ley universal de la gravitación, describen órbitas similares a secciones cónicas: elipses, hipérbolas o parábolas en función de sus distancias, velocidades y masas.

También son muy útiles en aerodinámica y otras aplicaciones industriales, ya que permiten ser reproducidas por medios simples con gran exactitud, logrando volúmenes, superficies y curvas de gran precisión.

Cabe resaltar que un cono puede ser visto como un solido en revolucion (figura 3 dimensional que se obtiene al girar una figura plana (2 dimensiones)) obtenido a partir de girar un triangulo por sus catetos. Tambien puede ser descrito como una funcion de multiples variables (3 especificamente), esto atañe a un curso de calculo multi variable (Universitario) y por esto solo se nombra.

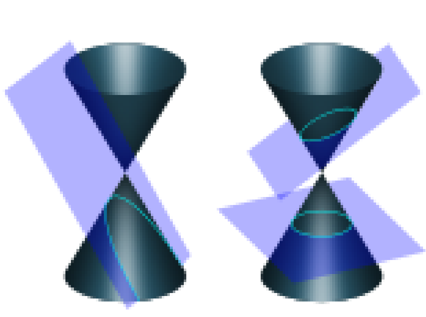


Figura 3: Secciones generadas por un plano al intersectar un cono. 1. Parabola 2. Elipse y circunferencia 3. hiperbola.

Elipse

Una elipse es una curva plana, simple y cerrada con dos ejes de simetría que resulta al cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo (inclinado) al eje de simetría con un ángulo mayor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.

Es decir es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Su ecuacion, para una elipse horizontal, es la siguiente:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$$

Donde: x_0 y y_0 son las coordenadas x e y del centro de la elipse.

Elementos

Centro: Es el punto de intersección de los ejes. Es, además, centro de simetría.

Eje principal o focal: Es el eje en el que se encuentran los focos. Es un eje de simetría.

Eje secundario: Es el eje perpendicular al eje principal, mediatríz del segmento que une los focos.

Vértices: Puntos de intersección de la elipse con los ejes.

Distancia focal: Distancia entre los focos. Su longitud es $2 \cdot c$.

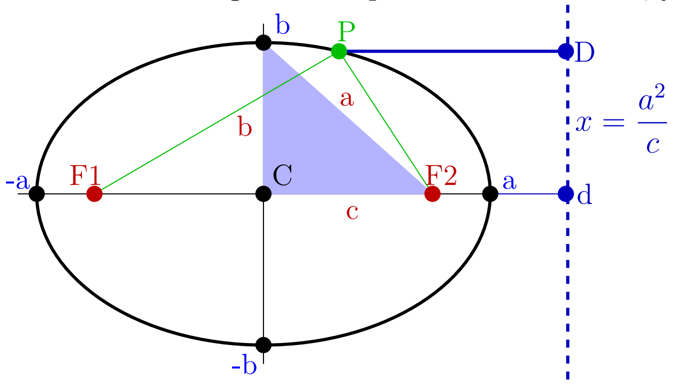
Semidistancia focal: Distancia entre el centro y cada foco. Su longitud es c.

Semieje mayor o principal: Segmento entre el centro y los vértices del eje principal. Su longitud es a.

Semieje menor o secundario: Segmento entre el centro y los vértices del eje secundario. Su longitud es b y cumple $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Radio vectores: Cada punto de la elipse cuenta con dos radio vectores que son los segmentos que unen dicho punto a cada uno de los focos. Para un punto P(x , y) se cumple que $(P, F) = a - e \cdot xyd(P, F') = a + e \cdot x$

Cabe resaltar que estos conceptos tambien son aplicables para una elipse vertical, si $b > a$ en la ecuacion general se produce este cambio, y los focos estarian en el eje vertical.



Parábola

una parábola es la sección cónica de excentricidad igual a 1,resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz.

Se denomina parábola al lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que equidista de una recta fija, llamada directriz y de un punto fijo en el plano, que no pertenece a la parábola ni a la directriz, llamado foco.

Su grafica es muy parecida a la del polinomio de orden 2 y su ecuación tiene la forma:

$$(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o)$$

Donde: x_0 y y_0 son las coordenadas x e y del centro de la parabola.

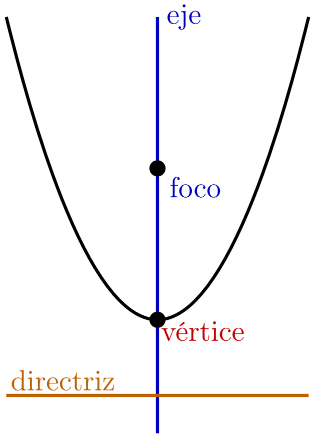
Elementos

Eje: Es un eje de simetría y por donde pasa el foco

foco: Punto equidistante a todo par de puntos (simetricos) de la parabola

Vértice: Puntos de intersección de la parabola con el eje.

directriz: Recta equidistante a los puntos de la parabola.



hipérbola

Una hipérbola es una curva abierta de dos ramas, obtenida cortando un cono recto mediante un plano no necesariamente paralelo al eje de simetría, y con ángulo menor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.

Tambien se define como se define como el lugar geométrico de los puntos del plano en el que la diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados focos, F y F', es siempre constante.

Una hiperbola horizontal es descrita por la ecuacion:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2} - \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$$

Donde: x_0 y y_0 son las coordenadas x e y del centro de la hiperbola.

Elementos

Centro: Es el punto de o, el centro de simetría.

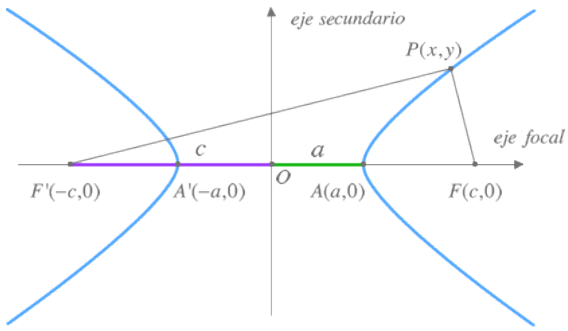
Eje principal o focal: Es el eje en el que se encuentran los focos. Es un eje de simetría.

Eje secundario: Es el eje perpendicular al eje principal, mediatríz del segmento que une los focos.

Vértices: Puntos de intersección de las hiperbolas con el eje focal.

Distancia focal: Distancia entre los focos.

Semidistancia focal: Distancia entre el centro y cada foco.



Circunferencia

La circunferencia es una curva plana y cerrada tal que todos sus puntos están a igual distancia del centro.

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan a otro punto llamado centro.

La circunferencua es descrita por la ecuacion:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Donde: x_0 y y_0 son las coordenadas x e y del centro de la circunferencia. r es el radio de la circunferencia.

Elementos

El centro es el punto equidistante a todos los puntos de una circunferencia. Señalado con el nombre C en la figura.

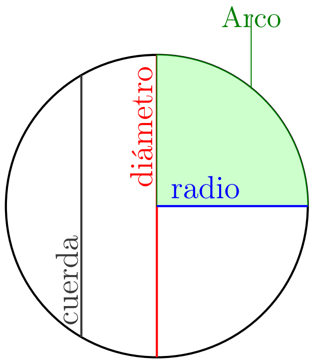
Radio es cualquier segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. El radio también es la longitud de los segmentos del mismo nombre.

Un diámetro es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por su centro. El diámetro también es la longitud de los segmento del mismo nombre.

El perímetro es el contorno de la circunferencia y su longitud.

Una cuerda es cualquier segmento que une dos puntos de una circunferencia. El diámetro es una cuerda de máxima longitud.

Un arco es cualquier porción de circunferencia delimitada por dos puntos sobre esta. Se dice también que una cuerda subtiende cada arco que determinan sus extremos.



3.5. Función Exponencial

una función exponencial es una función de la forma

$$f(x) = ab^x$$

en el que el argumento x se presenta como un exponente.

b es la base.

a es el coeficiente que multiplica a la base.

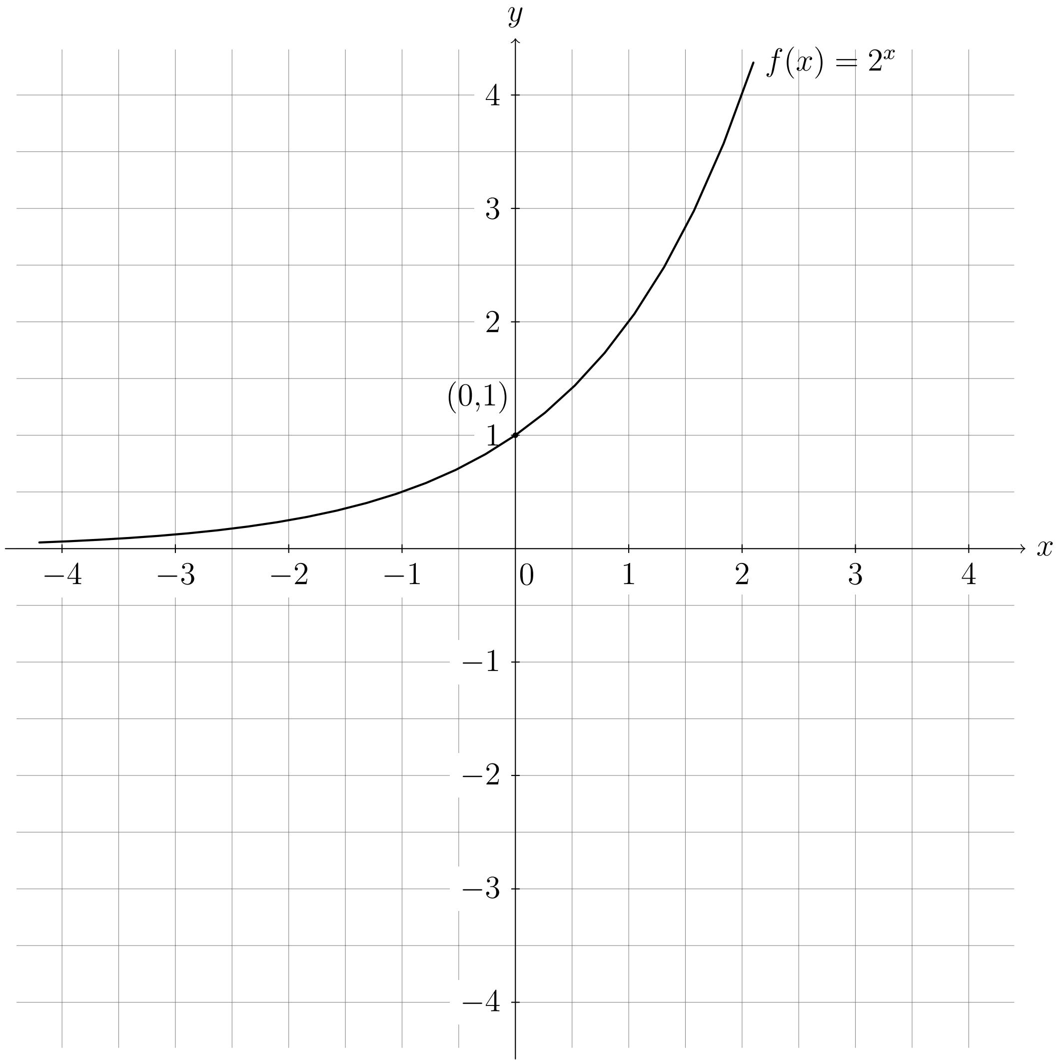
Cabe destacar que una función de la forma $f(x) = ab^{cx+d}$ también es una función exponencial, ya que puede reescribirse como: $ab^{cx+d} = (ab^d)(b^c)^x$

Dominio: Todos los reales. $\mathbb{R}$

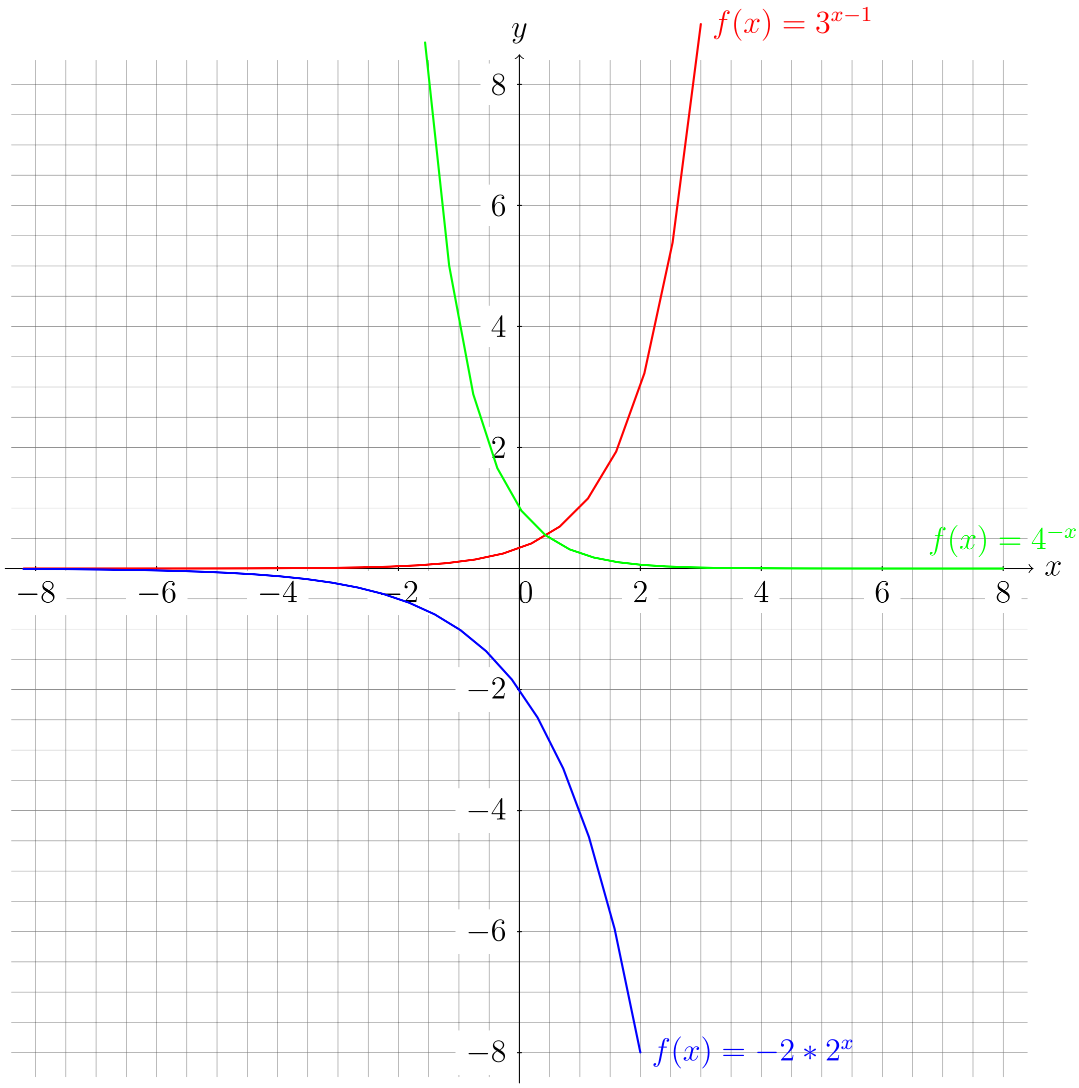
Rango: Todos los reales positivos sin incluir el 0 $\mathbb{R}^+ - \{0\}$

Ejemplos:

Para la función $f(x) = 2^x$



Otros ejemplos:



3.6. Función Logarítmica

Una función logarítmica es una función la cual esta formada por un logaritmo de base a y tiene la forma:

$$f(x) = \log_a x$$

donde: x es la variable independiente. $\log_a$ es un logaritmo, la inversa de la función exponencial y tiene como base el numero a, este puede ser un numero real positivo, distinto de 0 y 1 es decir: $a \in \{\mathbb{R} : 0 < a \neq 1\}$

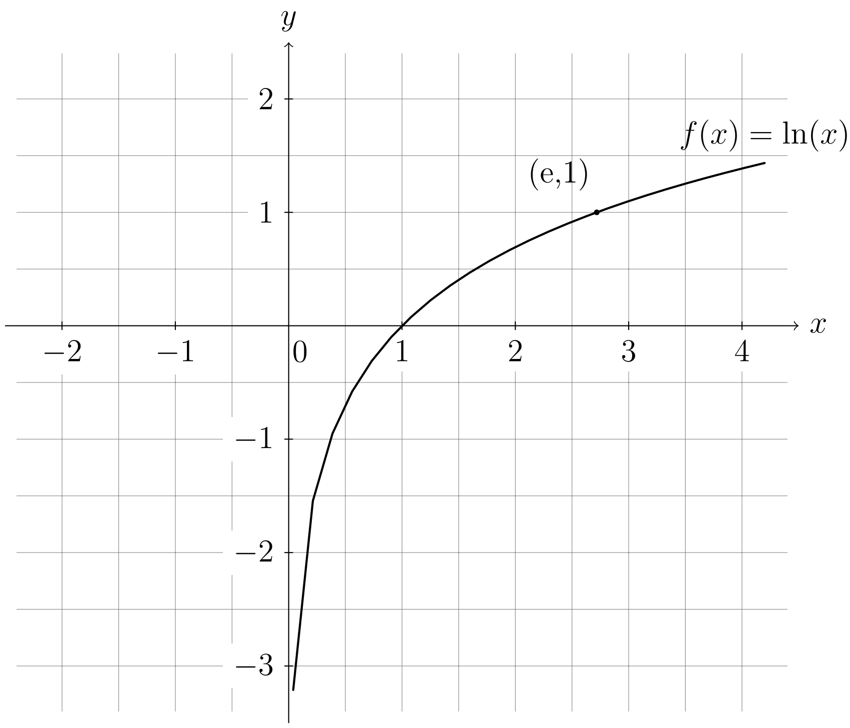
Cabe destacar que: x puede ser otra función, un argumento, sumas, multiplicaciones, etc.

$$f(x) = \log_a arg(x)$$

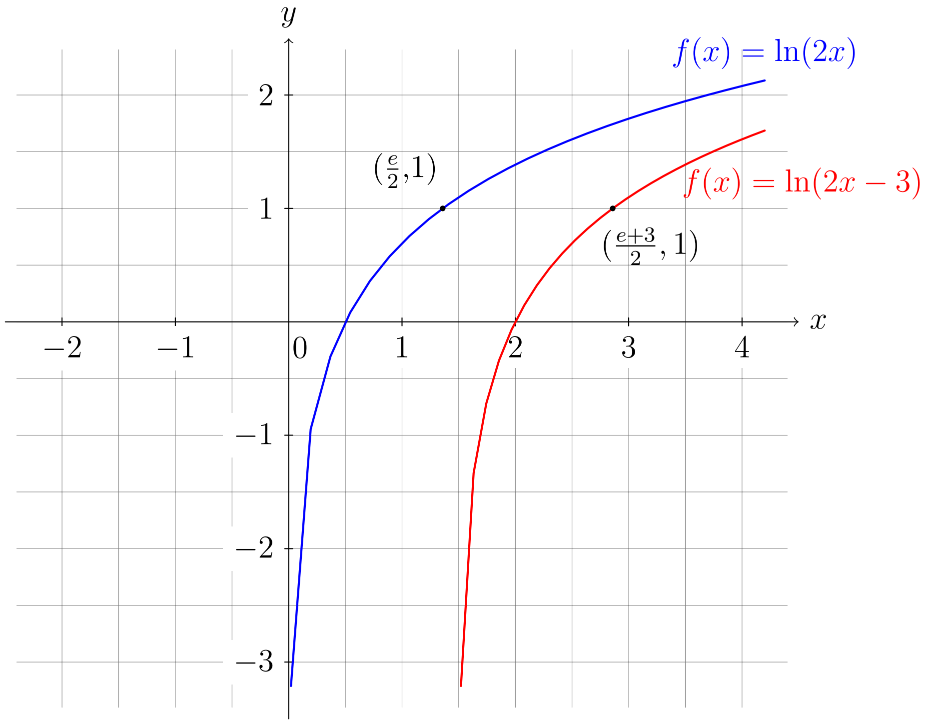
El dominio son todos los números reales que hacen que el argumento anteriormente nombrado sea mayor que 0, entonces $Dom_f = \{x : arg(x) \in \mathbb{R}^+ - \{0\}\}$

El rango: son todos los números reales.

La gráfica, para $\log_e(x)$ el cual es conocido como logaritmo natural o neperiano, viene dada por:



Otros ejemplos:



3.7. Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas, tambien llamadas funciones circulares, son las funciones que tienen el objetivo de extender la definición de las razones trigonométricas a todos los números reales y complejos.

Suelen utilizarse para la medicion de angulos por lo tanto, reciben como argumentos grados o radianes(pi radianes). Estas son las medidas mas utilizadas y su equivalencia es de $1pi\ radian = 180°$

Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física y por lo tanto en las aplicaciones de la misma como lo son la arquitectura, ingenieria, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, y la representación de fenómenos periódicos. La combinacion de estas y algunos teoremas de calculo permiten la creacion de aplicaciones tan comunes como los filtros de fotos y ecualizadores (musica).

Las funciones trigonometricas mas comunes son:

- Seno, se representa en terminos de x como: $sen(x)$ o $sin(x)$.
- Coseno, se representa en terminos de x como: $cos(x)$.
- Tangente, se representa en terminos de x como: $tan(x)$ o $tg(x)$.

- Cotangente, se representa en terminos de x como: $cot(x)$ o $ctg(x)$.
- Secante, se representa en terminos de x como: $sec(x)$.
- Cosecante, se representa en terminos de x como: $csc(x)$ o $cosec(x)$.

Estas funciones toman una serie de valores diferentes con respecto a su valor y son **periodicas**, esto significa que sus valores se repiten para una serie de valores, 2π o su equivalente 360° para todas menos la tangente y la cotangente que es π o 180°. Esto puede ser modificado si se multiplica el argumento (la variable, en los ejemplos x) por un numero.

Como los angulos se repiten (ya que es un movimiento circular y es equivalente a dar vueltas en el mismo circulo), tambien lo hacen los radianes. Este punto es 2π o 360○. **Recuerde que:** Una vuelta de 360° es una vuelta completa y se termina en el mismo sitio; por esto,

$$360^\circ = 0^\circ \text{ y } 0 = 2\pi \text{radianes}$$

$$100^\circ = (100 + 360)^\circ = 400^\circ = 100^\circ + n \times 360^\circ; n \in \mathbb{R}$$

Existen ciertos valores llamados angulos notables que son importantes y sus valores son:

TABLA DE ANGULOS NOTABLES

RADIANES	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE	SECANTE	COSECANTE
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Indefinido	0	Indefinido	1
π	180°	0	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	Indefinido	0	Indefinido	-1
2π	360°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido

Figura 4: Angulos notables de las funciones mas comunes

3.7.1. Seno

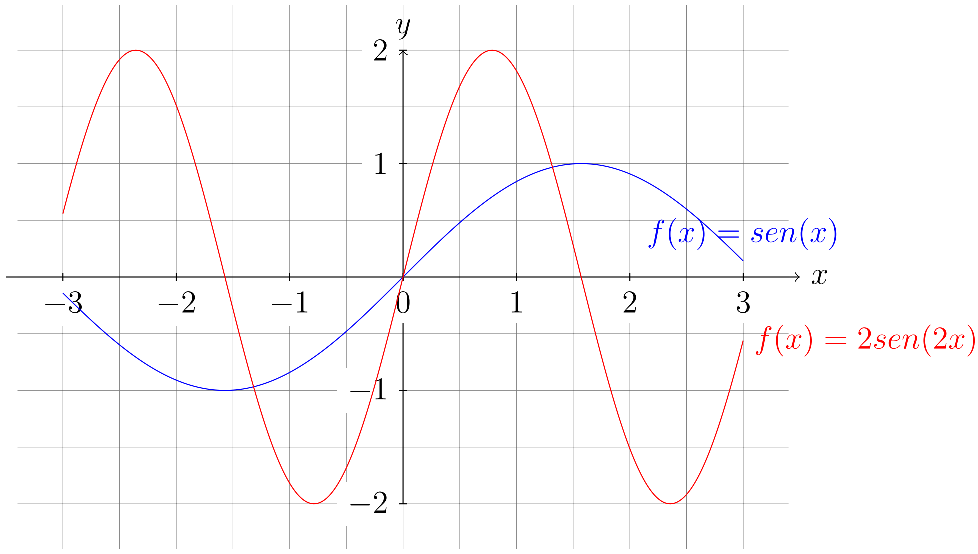
En un triangulo rectangulo se define como la relacion entre el cateto opuesto al angulo y la hipotenusa: $sen(\alpha) = \frac{C.O}{H}$.

Como funcion, se expresa como $sen(x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Su dominio es: $\mathbb{R}$ y su rango es: [-1,1].

Puede ser expresado como: $A \times sen(n \times x)$, donde A, nson numeros reales cualesquiera.

Su grafica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1expande$



3.7.2. Cosesno

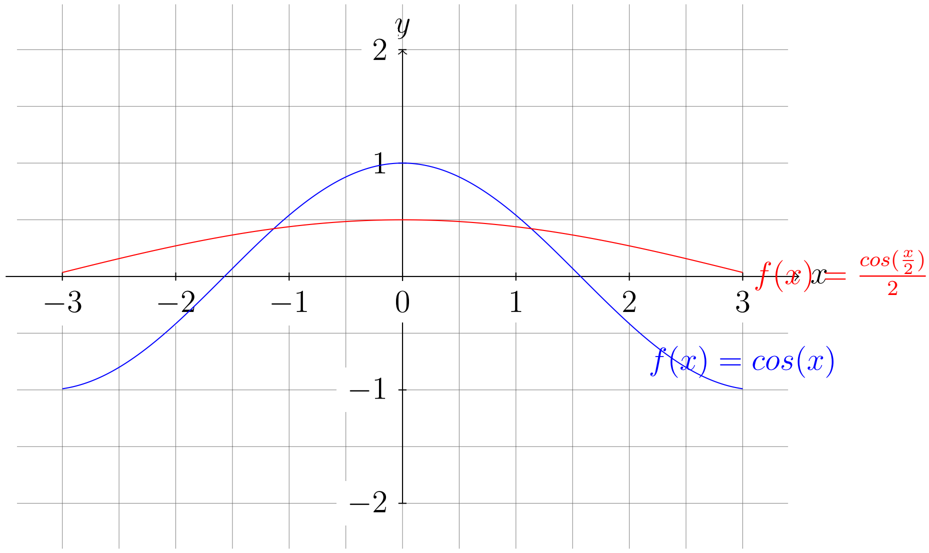
En un triangulo rectangulo se define como la relacion entre el cateto adyacente al angulo y la hipotenusa: $cos(\alpha) = \frac{C.A}{H}$.

Como funcion, se expresa como $cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Su dominio es: $\mathbb{R}$ y su rango es: [-1,1].

Puede ser expresado como: $A \times cos(n \times x)$, donde A, nson numeros reales cualesquiera.

Su grafica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1expande$



3.7.3. Tangente

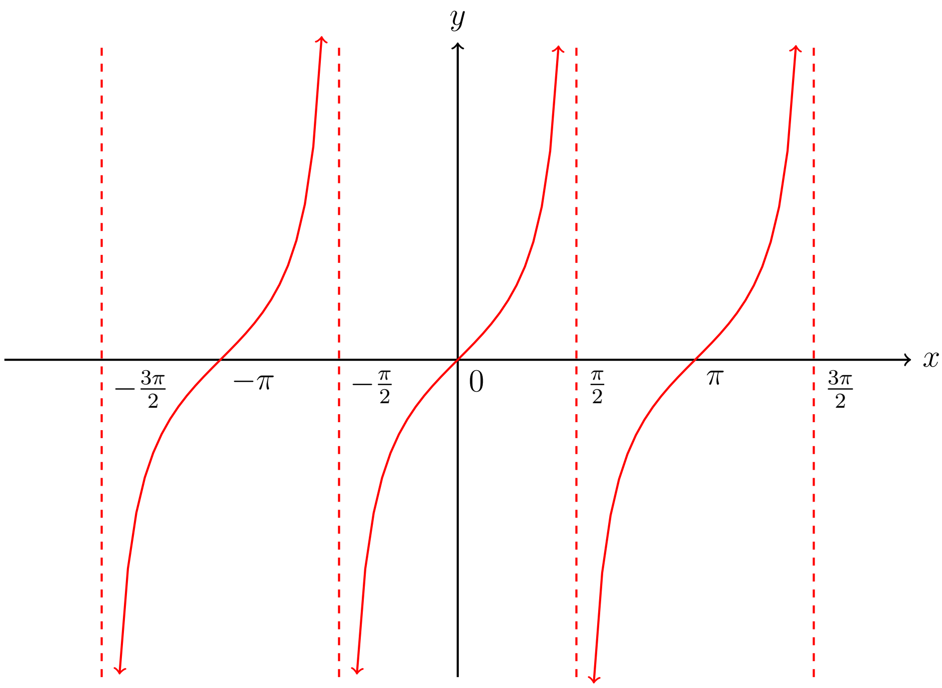
En un triangulo rectangulo se define como la relacion entre el cateto opuesto y el cateto adyacente del angulo: $tan(\alpha) = \frac{C.O}{C.A}$.

Como funcion, se expresa como $tan(x)$ con $x \in \mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Su dominio es: $\mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ y su rango es: $\mathbb{R}$.

Puede ser expresado como: $A \times tan(n \times x)$, donde A, nson numeros reales cualesquiera.

Su grafica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; sin > 1comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; siA > 1expande$



3.7.4. Cotangente

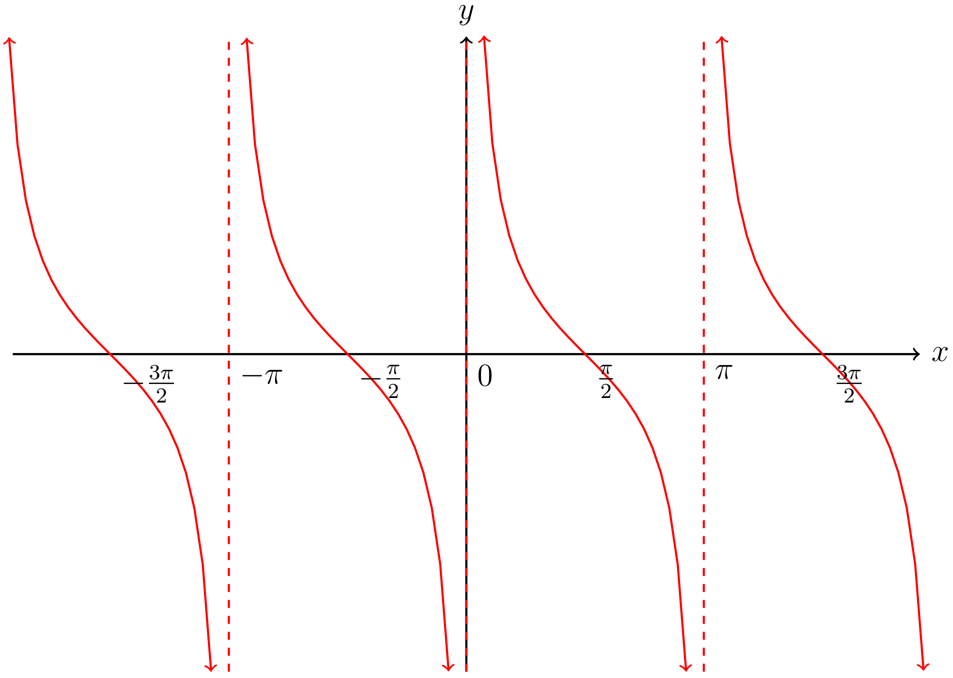
En un triangulo rectangulo se define como la relacion entre el cateto adyacente y el cateto opuesto del angulo: $cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} \frac{C.A}{C.O}$.

Como funcion, se expresa como $cot(x)$ con $x \in \mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Su dominio es: $\mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{Z}$ y su rango es: $\mathbb{R}$.

Puede ser expresado como: $A \times cot(n \times x)$, donde A, nson numeros reales cualesquiera.

Su grafica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; si n > 1 comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; si A > 1 expande$



3.7.5. Cosecante

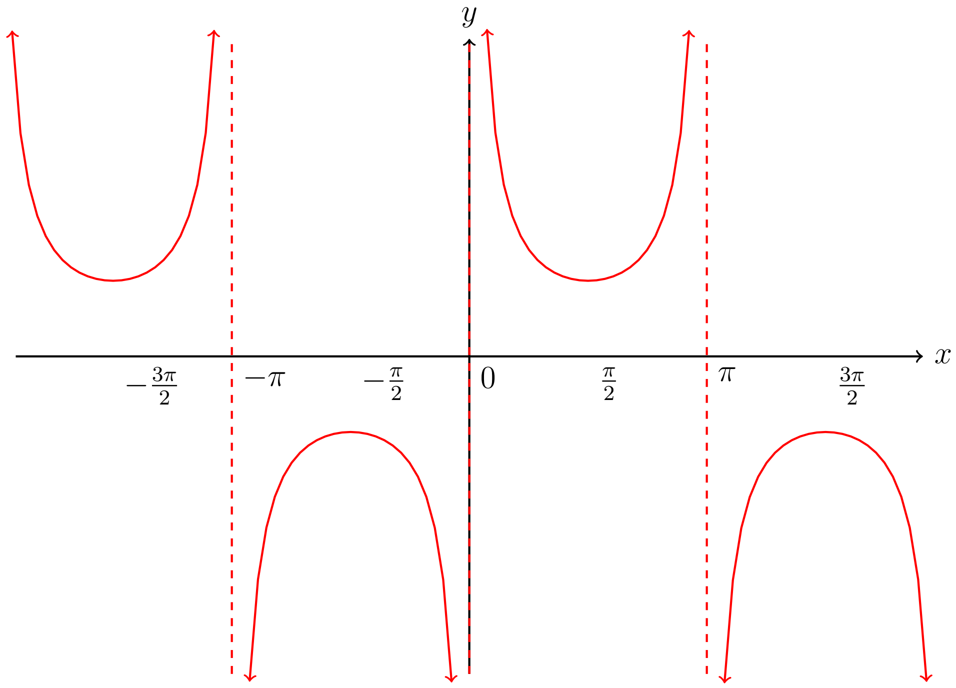
En un triangulo rectangulo se define como la relacion entre la hipotenusa y el cateto opuesto al angulo: $csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} \frac{H}{C.O}$.

Como funcion, se expresa como $csc(x)$ con $x \in \mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Su dominio es: $\mathbb{R} - n\pi, n \in \mathbb{Z}$ y su rango es: $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

Puede ser expresado como: $A \times csc(n \times x)$, donde A, nson numeros reales cualesquiera.

Su grafica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; si n > 1 comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; si A > 1 expande$



3.7.6. Secante

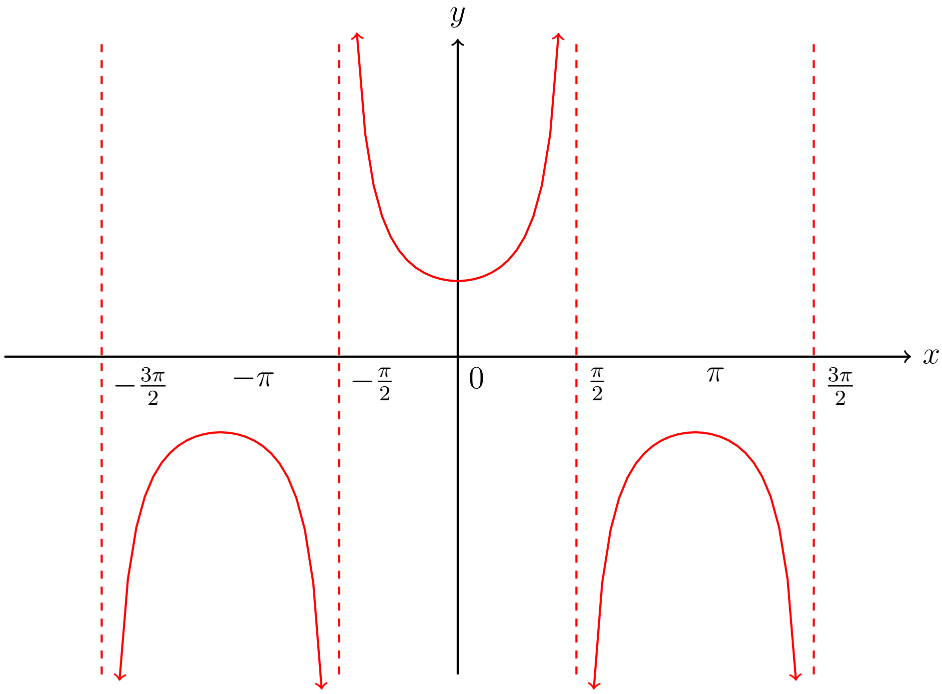
En un triangulo rectangulo se define como la relacion entre la hipotenusa y el cateto adyacente al angulo: $sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \frac{H}{C.A}$.

Como funcion, se expresa como $sec(x)$ con $x \in \mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Su dominio es: $\mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ y su rango es: $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

Puede ser expresado como: $A \times sec(n \times x)$, donde A, nson numeros reales cualesquiera.

Su grafica puede ser expandida o comprimida en el eje x mediante el valor de n, con $n \neq 0; si n > 1 comprime$ y expandida o comprimida en el eje y mediante el valor de A, con $A \neq 0; si A > 1 expande$



y
x
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

4. Polinomios

4.1. Productos notables

- cuadraticos

4.2. Factorizacion

4.3. Regla de Ruffini

4.4. Coeficientes indeterminados

4.5. Radicales

5. Vectores

5.1. vectores

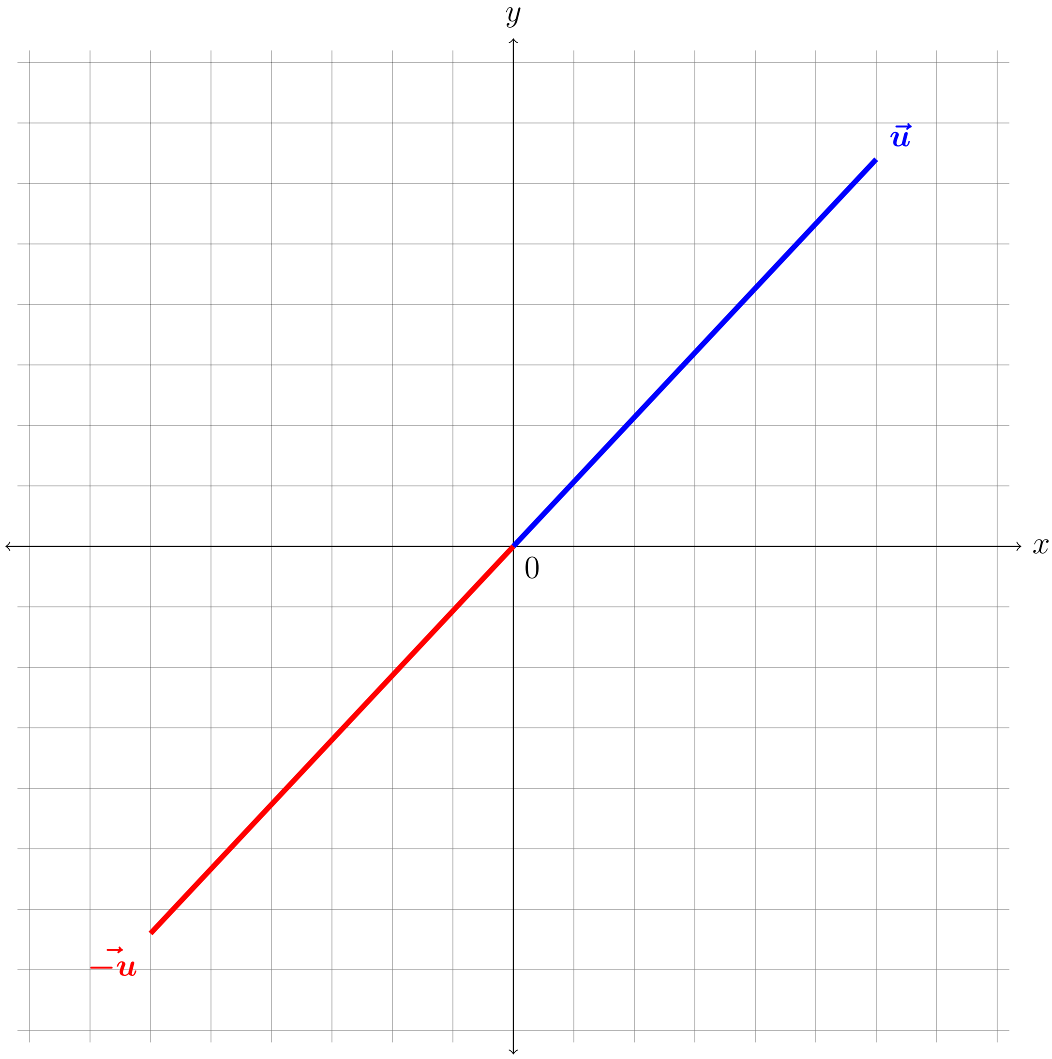
un vector es un ente matematico, es decir, es una figura creada para dar forma a la realidad como lo son la recta o el plano. Fue creada para representar fenomenos que no pueden ser descritos solamente con numeros, por ejemplo, la velocidad y las fuerzas. Son, por tanto, una construccion mas compleja que la de los numeros y representan **una magnitud con direccion y sentido**. Graficamente son representados como una recta con cierto angulo de inclinacion y un sentido marcado por ua flechita, la direccion a la que apuntan. Para poder representar un vector se necesitan al menos 2 puntos, el inicio del vector y el final (graficamente, si unes 2 puntos obtienes una recta, algebraicamente se restan $punto_{final} - punto_{inicial} = magnitud_{vector}$)

Existen muchos vectores,y estos son utilizados para dar representacion a fenomenos fisicos. En general un vector de dimension n es una tupla (un conjunto ordenado invariable de la forma $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de numeros reales.

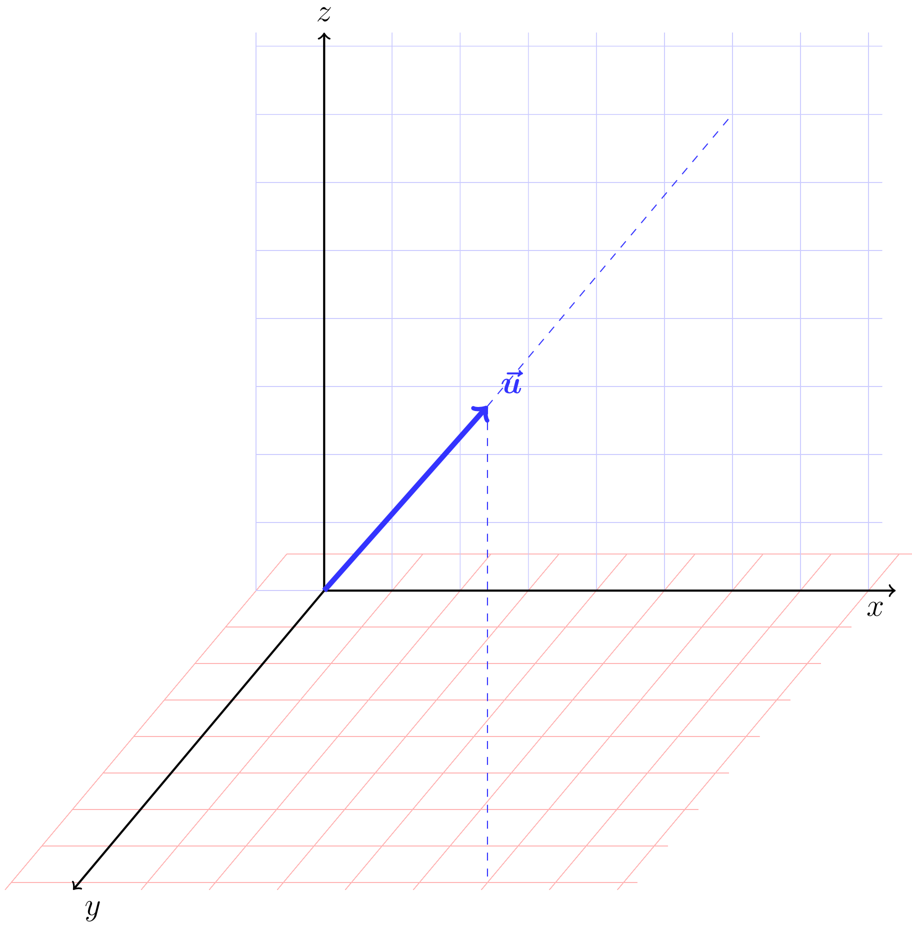
Un vector posee 2 caracteristicas:

- Modulo, es su valor, la longitud del segmento o la cantidad de espacios que se mueve en un determinado eje (o ejes).
- Direccion, En algunos textos se descompone como direccion y sentido. Es el angulo del segmento con respecto a un eje (normalmente x) y su sentido con respecto al origen (va o no hacia ese punto). Ejemplo: 29^o noreste sentido hacia arriba.

Graficamente un vector de 2 dimensiones en el origen se ve de la forma:



y de 3 dimensiones, en el origen se ve de la forma:



Adicionalmente, los vectores poseen una **dimension**, esta representa la cantidad de coordenadas las cuales cubre. Los vectores mas usados son los bidimensionales, que poseen 2 coordenadas, X, Y y representan el plano o espacio bidimensiona, son duplas ordenadas y pertenecen al espacio $\mathbb{R}^2$ y los tridimensionales, que utilizan 3 coordenadas X, Y, Z y representan el espacio tridimensional perteneciendo al espacio $\mathbb{R}^3$.

De igual forma, pueden utilizarse tantas dimensiones como hagan falta y el vector pertenecera al espacio $\mathbb{R}^n$ donde n es la cantidad de coordenadas que posee y es un numero natural.

Cabe destacar que estos vectores tambien son muy utilizados ya que permiten extrapolar fenomenos fisicos de mas variables, como por ejemplo el comportamiento de una caldera, o en el caso de 4 dimensiones cubrir tambien el tiempo (x, y, z, t) y describir una fuerza o suceso en un espacio y tiempo determinado.

Los vectores normalmente se utilizan para representar fuerzas, movimientos, variaciones, es decir cualquier condicion fisica que implica una potencia o cambio ejercido en una direccion particular.

Por simplificacion, se trabajara en su mayotia con vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ mas todos los conceptos son Extrapolables.

Las operaciones, basicas, que se realizan con vectores son la suma algebraica, multiplicacion por un escalar. Adicionalmente esta definida la multiplicacion entre vectores como **producto punto** y **producto cruz**.

la division vectorial no esta definida!, sin embargo, para ciertos tipos de vectores como fasores o numeros complejos se define una multiplicacion y una division especial.

5.1.1. Representacion

Los vectores pueden ser representados de 2 formas, mediante la descripcion individual de sus caracteristicas o mediante una magnitud y uno angulos de referencia. Ambas formas de representacion son equivalentes y se pueden llevar de una forma a otra.

La forma de magnitud y angulo suele ser utilizada para vectores en $\mathbb{R}^2$ y mas especificamente en un conjunto de vectores con propiedades adicionales como lo son los numeros complejos, ya que es facil la transformacion, el producto y la division definido **unicamente para ellos** y para representarlos solamente se necesita un angulo. Para vectores de mayor dimension suele usarse la representacion por coordenadas, esto es debido a que para representar una linea en 3 direcciones hacen falta al menos 2 angulos, uno de giro horizontal y otro vertical (a esto se le conoce como coordenadas esfericas).

5.1.2. Representacion en coordenadas rectangulares

Esta forma de representacion se basa en descomponer el vector en los valores asociados que poseen en cada eje. Por ejemplo, si el vector es de $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas x e y, por lo tanto el vector puede ser representado como la union del origen (o un punto de referencia cualquiera) y los desplazamientos correspondientes en los ejes X,Y , si el vector es de 3 coordenadas, entonces serian X,Y,Z y asi sucesivamente. A este tipo de coordenadas se le conocen como **coordenadas cartesianas o rectangulares**.

De esta forma, un vector puede escribirse de 2 formas, como tupla ordenada o como suma de componentes, en donde cada componente va a estar indicada por un **vector unitario**, el cual no es mas que una letra la cual indica a que eje corresponde; $\hat{\imath}$ para x, $\hat{\jmath}$ para y, $\hat{k}$ para k.

De esta forma, un vector puede ser escrito de la forma:

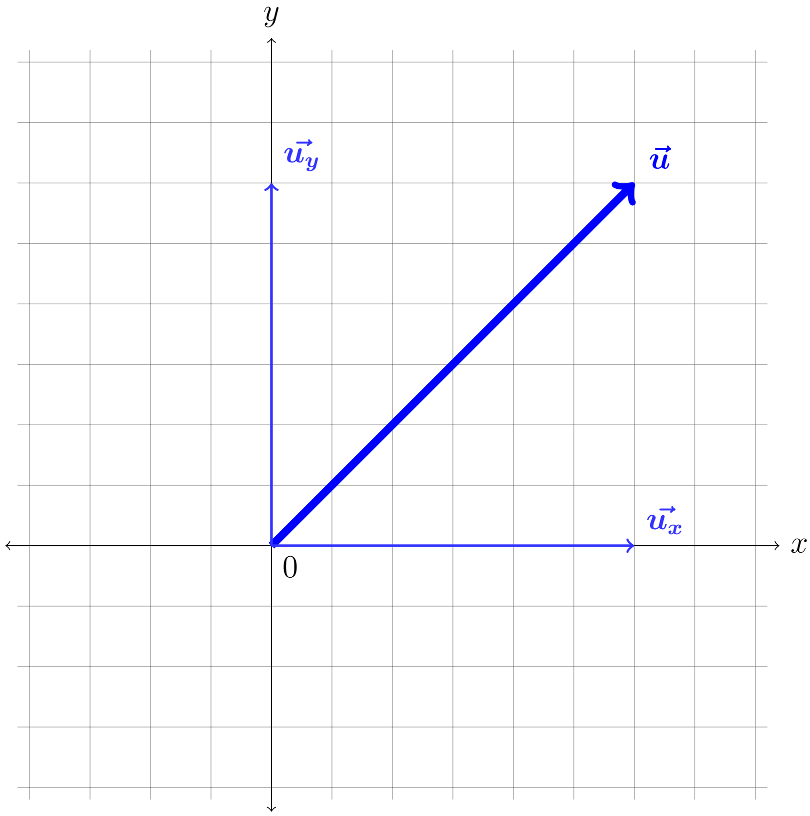
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n),\ \ v_i \in \mathbb{R}$$

o de la forma:

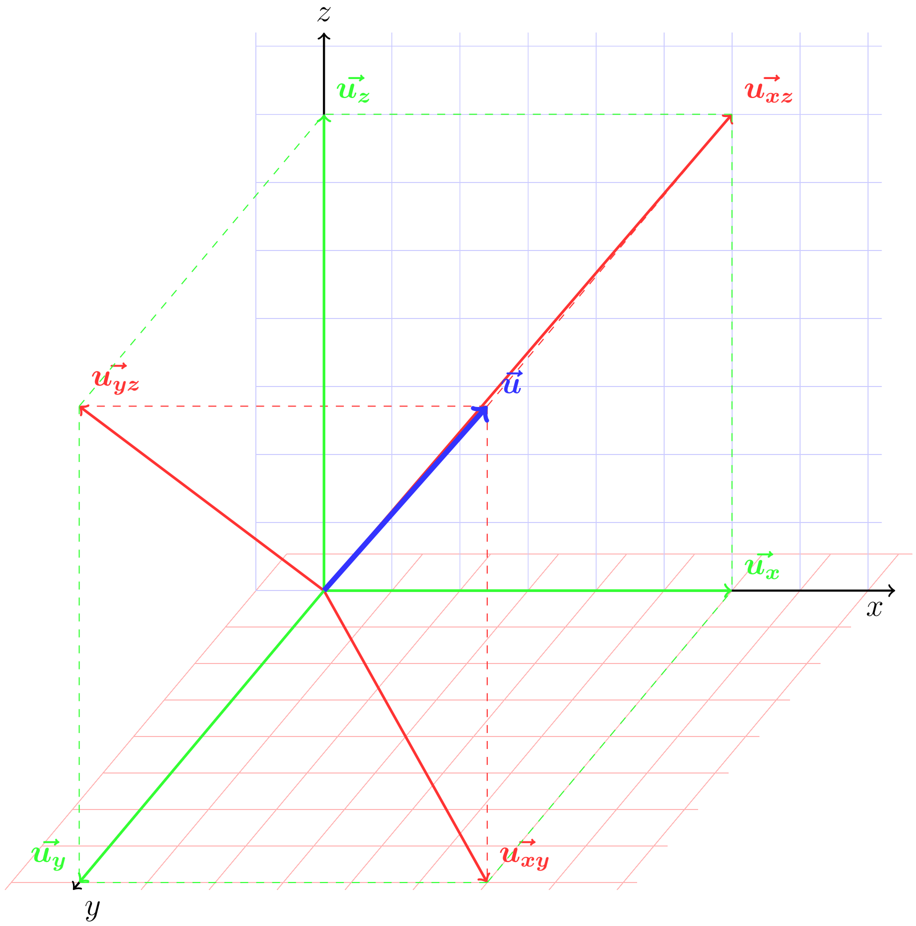
$$\vec{v} = v_1 \cdot \hat{\imath} + v_2 \cdot \hat{\jmath} + v_3 \cdot \hat{k} + \cdots$$

Graficamente, estas composiciones son:

Para 2 dimensiones:



Para 3 dimensiones:



Ejemplos:

$$\vec{V} = (2, 1) = 2\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$$

$$\vec{V} = (-3, 8) = -3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$$

$$\vec{V} = (-21, -35) = -21\hat{\imath} - 35\hat{\jmath}$$

$$\vec{V} = (3, 4, 7) = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$$

$$\vec{V} = (-2, 13, 9) = -2\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

$$\vec{V} = (32, -4, -22) = 32\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 22\hat{k}$$

5.1.3. Representacion en magnitud y angulos

La otra forma de representar un vector es mediante una magnitud (que representa el tamaño del segmento-recta) y uno o mas angulos, los cuales son tomados con respecto a un punto de referencia y permiten orientar el vector en el espacio. Este tipo de coordenadas es conocido como **coordenadas polares** para 2 variables-ejes y **coordenadas esfericas** para 3 variables-ejes. Se escribe de la forma:

$$\vec{V} = magnitud\underline{/\theta}$$

$$\vec{V} = magnitud\underline{/\theta}\underline{/\phi}$$

Donde, *magnitud* se suele representar con la letra r y los angulos suelen venir expresados en grados, ademas, θ mide el plano XY y ϕ el angulo con el eje Z. Y estan limitados por:

$$0 \leq r < \infty \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$0 \leq r < \infty \qquad 0^\circ \leq \theta < 360^\circ \qquad 0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$$

Cabe resaltar que la nomenclatura puede variar y en algunos textos θ se cambia por ϕ, esto es debido a una falta de estadarizacion (como los cm y pulgadas, kg y libras, etc) en este texto se utilizara la convencion antes descrita para evitar confusiones, ya que en polares se usa θ para el plano XY.

Ejemplos:

$$\vec{V} = 12\underline{/38^\circ}$$

$$\vec{V} = 23,22\underline{/98^\circ}$$

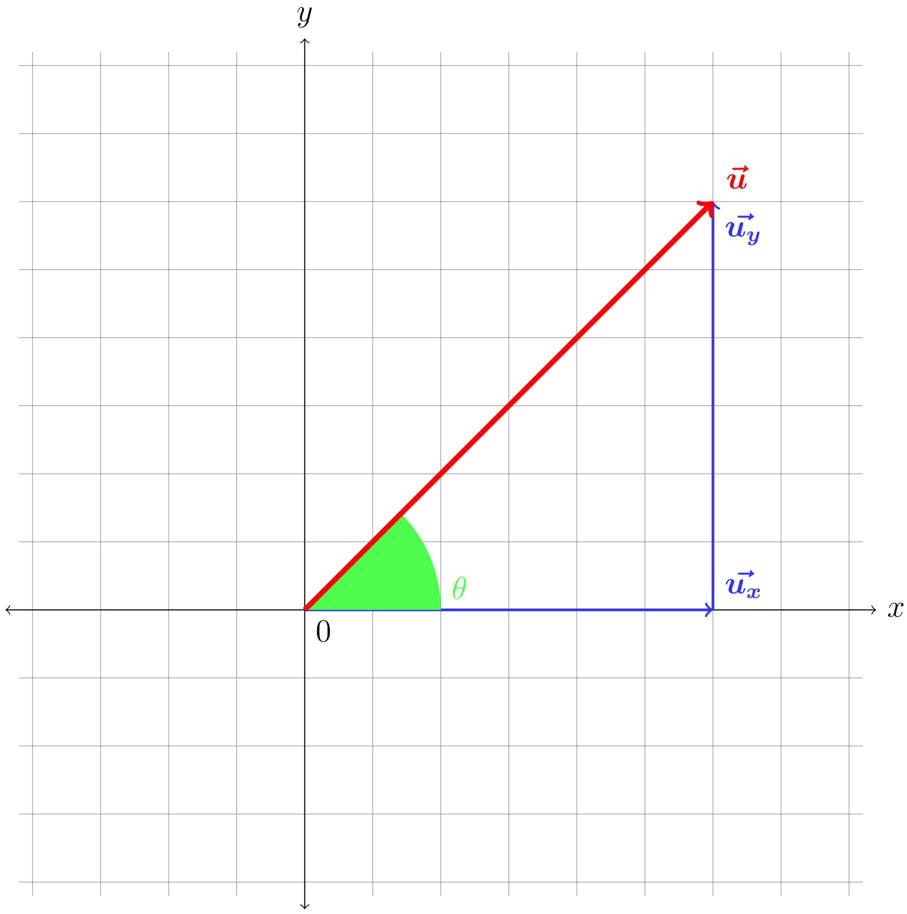
$$\vec{V} = 87,9\underline{/128^\circ}$$

$$\vec{V} = 45\underline{/12^\circ}\underline{/30^\circ}$$

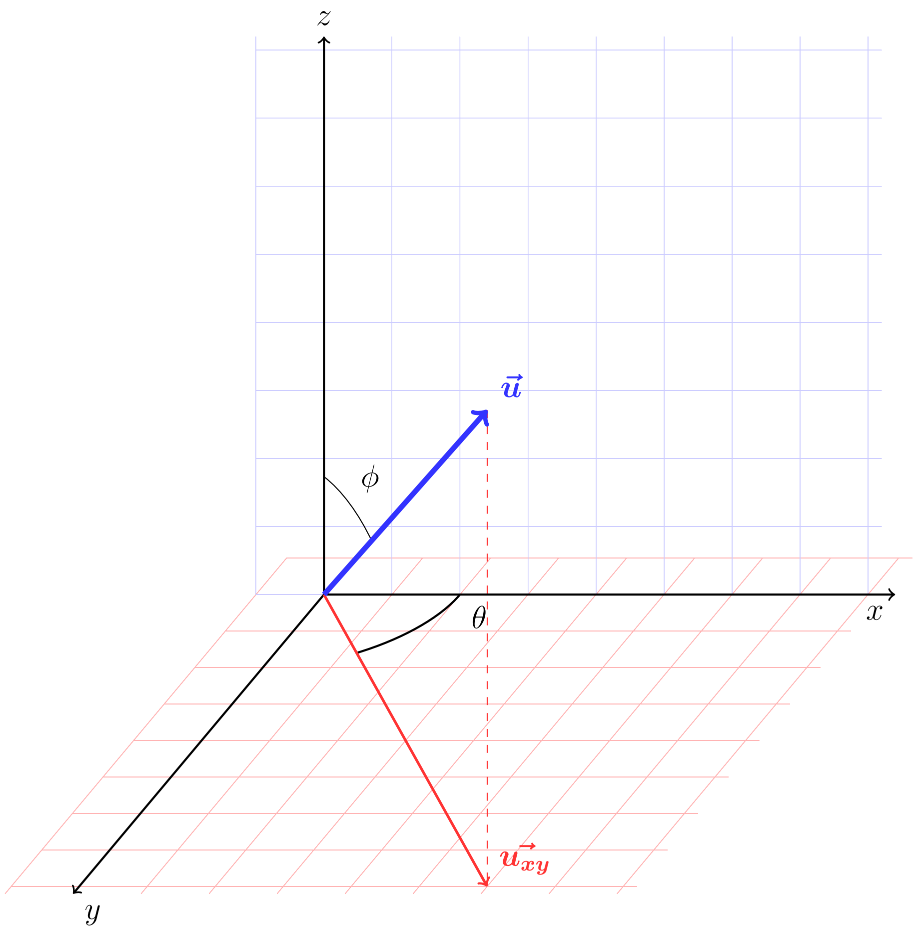
$$\vec{V} = 5\underline{/342^\circ}\underline{/120^\circ}$$

$$\vec{V} = 23\underline{/2^\circ}\underline{/180^\circ}$$

Ambas representaciones son equivalentes,y esta equivalencia se logra mediante la trigonometria, mas especificamente un triangulo rectangulo.



y
$\vec{u}$
$\vec{u_y}$
θ
$\vec{u_x}$
x
0



z
$\vec{u}$
ϕ
θ
x
$\vec{u_{xy}}$
y

Como se observa en la imagen, y se sabe de la representacion por coordenadas, un vector puede representarse como sus coordenadas en los ejes, estas representaciones forman los catetos del triangulo y la magnitud total representa la hipotenusa del mismo. De esta forma, se tiene que:

Para 2 variables:

polares a cartesianas

$$\vec{V_x} = r \cdot cos(\theta)$$

$$\vec{V_y} = r \cdot sen(\theta)$$

cartesianas a polares

$$r = \sqrt{V_x^2 + v_y^2}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

para3 variables:

esfericas a cartesianas

$$\vec{V_x} = r \cdot cos(\theta) \cdot sin(\phi)$$

$$\vec{V_y} = r \cdot sen(\theta) \cdot sin(\phi)$$

$$\vec{V_z} = r \cdot cos(\phi)$$

cartesianas a esfericas

$$r = \sqrt{V_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

$$\phi = arcos\left(\frac{V_z}{r}\right)$$

Ejemplos:

Transformar a polares:

$$\vec{V} = (2,1)$$
$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} \rightarrow r = \sqrt{5}$$
$$\theta = arctan\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \theta = 26,57^\circ$$

$$\vec{V} = (-3,8)$$
$$r = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} \rightarrow r = \sqrt{73}$$
$$\theta = arctan\left(\frac{8}{-3}\right) \rightarrow \theta = -69,44^\circ = -69,44^\circ + 360^\circ = 290.56$$

$$\vec{V} = (-21,-35)$$
$$r = \sqrt{(-21)^2 + (-35)^2} \rightarrow r = 7\sqrt{34}$$
$$\theta = arctan\left(\frac{-35}{-21}\right) \rightarrow \theta = 59,04^\circ$$

Transformar a esfericas:

$$\vec{V} = (3,4,7)$$
$$r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2} \rightarrow w = \sqrt{74}$$
$$\theta = arctan\left(\frac{4}{3}\right) \rightarrow \theta = 53,13^\circ$$
$$\phi = arcos\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right) \rightarrow \phi = 35,54^\circ$$

$$\vec{V} = (-2, 13, 9)$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 13^2 + 9^2} \rightarrow w = \sqrt{254}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{13}{-2}\right) \rightarrow \theta = -81,25° = 278.75°$$

$$\phi = arcos\left(\frac{9}{\sqrt{254}}\right) \rightarrow \phi = 55,62°$$

$$\vec{V} = (32, -4, -22)$$

$$r = \sqrt{32^2 + (-4)^2 + 22^2} \rightarrow w = 2\sqrt{381}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{13}{-2}\right) \rightarrow \theta = -7,13° = 352,87°$$

$$\phi = arcos\left(\frac{-22}{2\sqrt{381}}\right) \rightarrow \phi = 124,3°$$

Transformar a rectangulares

$$\vec{V} = 12\underline{/38°}$$

$$\vec{V_x} = 12 \cdot cos(38°) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{9,456}$$

$$\vec{V_y} = 12 \cdot sen(38°) \rightarrow \vec{V_y} = \sqrt{7,388}$$

$$\vec{V} = 23,22\underline{/98°}$$

$$\vec{V_x} = 23,22 \cdot cos(98°) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{18,298}$$

$$\vec{V_y} = 23,22 \cdot sen(98°) \rightarrow \vec{V_y} = \sqrt{14.296}$$

$$\vec{V} = 87,9\underline{/128^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 87,9 \cdot cos(128^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{-54,117}$$

$$\vec{V_y} = 87,9 \cdot sen(128^\circ) \rightarrow \vec{V_y} = \sqrt{69.266}$$

$$\vec{V} = 45\underline{/12^\circ/30^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 45 \cdot cos(12^\circ) \cdot sin(30^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{22,008}$$

$$\vec{V_y} = 45 \cdot sen(12^\circ) \cdot sin(30^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{4,678}$$

$$\vec{V_z} = 45 \cdot cos(30^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{38,971}$$

$$\vec{V} = 5\underline{/342^\circ/120^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 5 \cdot cos(342^\circ) \cdot sin(120^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{4,118}$$

$$\vec{V_y} = 5r \cdot sen(342^\circ) \cdot sin(120^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{-1,338}$$

$$\vec{V_z} = 5 \cdot cos(120^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{-2,5}$$

$$\vec{V} = 23\underline{/0^\circ/180^\circ}$$

$$\vec{V_x} = 23 \cdot cos(2^\circ) \cdot sin(180^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{0}$$

$$\vec{V_y} = 23 \cdot sen(2^\circ) \cdot sin(180^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{0}$$

$$\vec{V_z} = 23 \cdot cos(180^\circ) \rightarrow \vec{V_x} = \sqrt{-23}$$

5.1.4. Suma

La suma de vectores se realiza con los vectores en su forma cartesiana, es decir, **para poder sumar 2 vectores debemos llevarlo a su forma rectangular**, La forma en la que se hace la suma es simplemente sumar sus componentes internas, es decir su representacion en x con su respectivo par, la de y con y y asi sucesivamente.

Sean $\vec{v}, \vec{u}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ tal que:

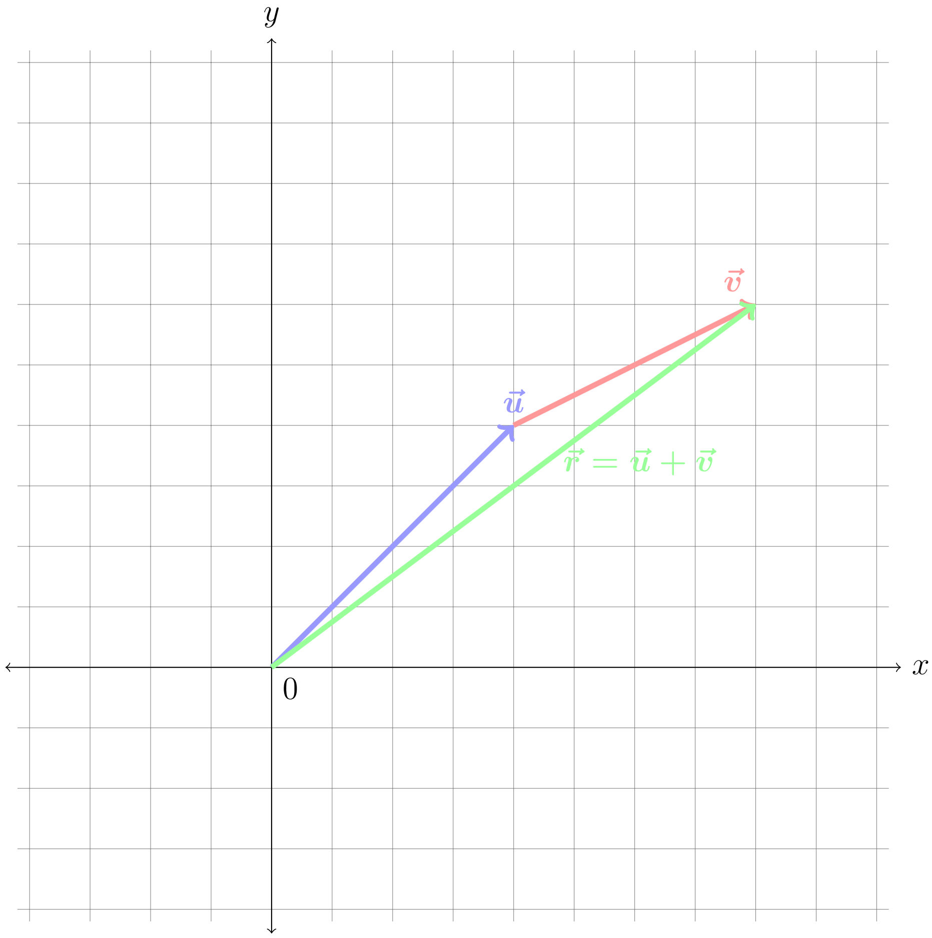
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \; ; \vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$$

$$\vec{r} = v \vec{+} u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, \cdots, v_n + u_n)$$

Recuerde que, una suma algebraica es la suma con signo de los elementos, esto quiere decir que incluye a la resta ya que si se suman numeros de signos opuestos es lo mismo a restarlos.

Graficamente, la forma mas sencilla es dibujar el primer vector en el origen y en su extremo dibujar el siguiente vector (el que se le sumara algebraicamente), luego se unen el origen del primer vector (corresponde con el origen del plano por como se definió) y el fin del segundo vector y este es el vector suma resultante.

Graficamente, para $\mathbb{R}^2$:



Ejemplos: Sumar los siguientes vectores

$$\vec{V} = (2, 1) \quad ; \quad \vec{U} = (-3, 8)$$
$$\vec{R} = (2 - 3, 1 + 8) \rightarrow \vec{R} = (-1, 9)$$

$$\vec{V} = (-21, -35) \quad ; \quad \vec{U} = (-3, 8)$$
$$\vec{R} = (-21 - 3, -35 + 8) \rightarrow \vec{R} = (-24, -27)$$

$$\vec{V} = (-21, -35) \quad ; \quad \vec{U} = (2, 1)$$
$$\vec{R} = (-21 + 2, -35 + 1) \rightarrow \vec{R} = (-19, -34)$$

$$\vec{V} = (3,4,7) \ \ ; \quad \vec{U} = (-2,13,9)$$

$$\vec{R} = (3-2, 4+13, 7+9) \rightarrow \vec{R} = (4,17,16)$$

$$\vec{V} = (3,4,7) \ \ ; \quad \vec{U} = (32,-4,-22)$$

$$\vec{R} = (3+32, 4-4, 7-22) \qquad \rightarrow \vec{R} = (35,0,-15)$$

$$\vec{V} = (-2,13,9) \ \ ; \quad \vec{U} = (32,-4,-22)$$

$$\vec{R} = (-2+32, 13-4, 9-22) \rightarrow \vec{R} = (30,9,-13)$$

5.1.5. Producto por escalar

El producto por escalar es una operacion que toma un vector cualesquiera $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y un escalar (numero) cualquiera $\alpha \in \mathbb{R}$. Consiste en multiplicar ese escalar por todos los elementos del vector modificando de esta forma su magnitud. Cuando el vector se encuentra en coordenadas polares o esfericas solamente se modifica la magnitud, multiplicandola por el escalar, el angulo permanece igual.

Sean $\vec{v}$ un vector cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ tal que:

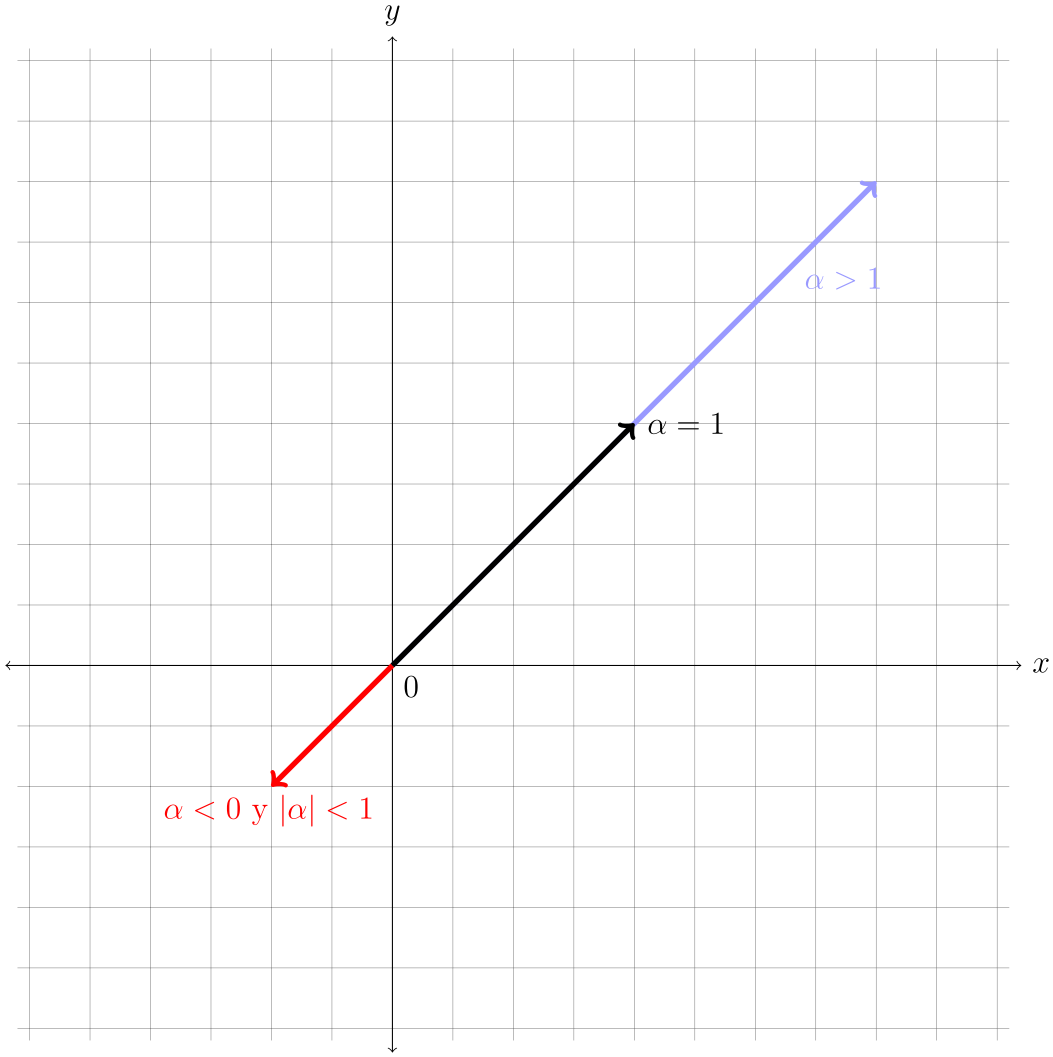
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \ ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{r} = \alpha \cdot \vec{v} = (v_1 \cdot \alpha, v_2 \cdot \alpha, v_3 \cdot \alpha, \cdots, v_n \cdot \alpha)$$

Graficamente:

- Aumenta su tamaño si $|\alpha| > 1$.
- Reduce su tamaño si $|\alpha| < 1$.
- Invierte su direccion y sigue las reglas de la magnitud anteriores si $\alpha < 0$.
- Permanece igual si $\alpha = 1$.

- Se anula se $\alpha = 0$.



Ejemplos, multiplicar los siguientes vectores por los escalares:

$$\vec{V} = (2,1) \quad ; \quad \alpha = 3$$

$$\vec{R} = (2 \times 3, 1 \times 3) \rightarrow \vec{R} = (6,3)$$

$$\vec{V} = (-3,8) \quad ; \quad \alpha = 8$$

$$\vec{R} = (-3 \times 8, 8 \times 8) \rightarrow \vec{R} = (-24,64)$$

$$\vec{V} = (-21, -35) \quad ; \quad \alpha = -5$$
$$\vec{R} = (-21 \times -5, -35 \times -5) \rightarrow \vec{R} = (105, 175)$$

$$\vec{V} = (3, 4, 7) \quad ; \quad \alpha = -9$$
$$\vec{R} = (3 \times -9, 4 \times -9, 7 \times -9) \rightarrow \vec{R} = (-27, -36, -63)$$

$$\vec{V} = (-2, 13, 9) \quad ; \quad \alpha = 12$$
$$\vec{R} = (-2 \times 12, 13 \times 12, 9 \times 12) \rightarrow \vec{R} = (-24, 156, 108)$$

$$\vec{V} = (32, -4, -22) \quad ; \quad \alpha = -1$$
$$\vec{R} = (32 \times -1, -4 \times -1, -22 \times -1) \rightarrow \vec{R} = (-32, 4, 22)$$

5.1.6. Multiplicacion entre vectores

La multiplicacion entre vectores es una propiedad definida de una forma muy distinta a la multiplicacion numerica. Esto se debe a la complejidad de los vectores la cual permite defini varios tipos de multiplicaciones posibles las cuales tienen sentido. Las 2 Multiplicacionesmas conocidas son **el producto punto y el producto cruz**, ademas de esto existen otras formas de realizar multiplicaciones como la es la de los numeros complejos, siendo esta definida de tal forma que permite incluso crear una division.

Los producto punto y producto cruz **No tienen operacion inversa** y es por esto que **no existe la division vectorial**.

5.1.7. Producto punto

Este tipo de multiplicacion es realizable par todos los vectores y da como resultado un escalar, es decir un numero.

Se escribe de la forma: $\vec{r} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, con $\vec{v}, \vec{u}$ vectores cualesquiera.

La forma de definir este producto varia, existen varios procedimientos equivalentes, las dos mas conocidas son con la norma de cada uno de los vectores y el angulo entre vectores, y el que se trabajara aca que es una suma del producto entre los componentes del vector. Es decir:

Sean $\vec{v}, \vec{u}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \quad ; \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$$
$$\vec{r} = \vec{v} \cdot \vec{u} = (v_1 \cdot u_1, v_2 \cdot u_2, v_3 \cdot u_3, \cdots, v_n \cdot u_n) \rightarrow \vec{r} = \sum_{i=0}^{n} v_i \cdot u_i$$

Ejemplos:

$$\vec{V} = (2, 1) \quad ; \quad \vec{U} = (-3, 8)$$
$$\vec{R} = 2 \cdot -3 + 1\dot{8} \rightarrow \vec{R} = 2$$

$$\vec{V} = (-21, -35) \quad ; \quad \vec{U} = (-3, 8)$$
$$\vec{R} = -21 \cdot -3 + \ -35 \cdot 8 \rightarrow \vec{R} = -217$$

$$\vec{V} = (-21, -35) \quad ; \quad \vec{U} = (2, 1)$$
$$\vec{R} = -21 \cdot 2 + -35 \cdot 1 \rightarrow \vec{R} = -77$$

$$\vec{V} = (3, 4, 7) \quad ; \quad \vec{U} = (-2, 13, 9)$$
$$\vec{R} = 3 \cdot -2 + 4 \cdot 13 + 7 \cdot 9 \rightarrow \vec{R} = 109$$

$$\vec{V} = (3,4,7) \;\; ; \quad \vec{U} = (32,-4,-22)$$
$$\vec{R} = 3 \cdot 32 + 4 \cdot -4 + 7 \cdot 22 \rightarrow \vec{R} = -74$$

$$\vec{V} = (-2,13,9) \;\; ; \quad \vec{U} = (32,-4,-22)$$
$$\vec{R} = -2 \cdot 32 + 13 \cdot -4 + 9 \cdot -22) \rightarrow \vec{R} = -314$$

5.1.8. Producto cruz

Este tipo de multiplicacion da como resultado un vector, graficamente, da como resultado un vector perpendicular al plano (90°) formado por los dos vectores que se multiplican, no es conmutativa ya que si se invierten los vectores se invierte la direccion del vector resultante y es utilizada mayormente en $\mathbb{R}^3$, en $\mathbb{R}^2$ esta division es un producto externo ya que la multiplicacion da como resultado un vector que no existe en este espacio (al ser perpendicular al plano X,Y se encuentra en el eje z el cual no esta definido en el plano cartesiano) y por esto no se realiza.

Este producto vectorial es de mucha utilidad por su capacidad de entregar un vector perpendicular a los multiplicados y es una base fundamental para muchas aplicaciones de la ingenieria, arquitectura y fisica en general.

Puede escribirse como calculo de determinantes, es lo que se utiliza en su mayoria para calculos de $\mathbb{R}^n$, pero para $\mathbb{R}^3$ se utiliza mucho mas una formula.

Se escribe de la forma: $\vec{r} = \vec{v} \times \vec{u}$, con $\vec{v}, \vec{u}$ vectores cualesquiera.

y para $\mathbb{R}^3$ especificamente esto es:

$$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{u} = (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)\hat{\imath} - (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x)\hat{\jmath} + (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)\hat{k}$$

Esto significa que con $\vec{r} = (r_x, ry, rz)$, las componentes del vector son :

$$\vec{r_x} = (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)$$

$$\vec{r_y} = -(u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x)$$

$$\vec{r_z} = (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)$$

5.2. matrices

- cuadradas
- nxm