UNIVERSITE DE YAOUNDE I

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE DE YAOUNDE (ENSPY)

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

B.P. 8390 Yaoundé
Tél. /Fax : +237 222 22 45 47

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

NATIONAL ADVANCED SCHOOL OF ENGINEERING OF YAOUNDE (NASEY)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND PHYSICAL SCIENCES

P.O. BOX 8390 Yaoundé
Phone/Fax: +237 222 22 45 47

ANNEE ACADEMIQUE 2025/2026
CURSUS INGENIEUR II - CURSUS SCIENCES DE L'INGENIEUR II
Pr TEWA Jean Jules, Professeur

TRAVAUX DIRIGES DE DENOMBREMENT

Exercice 1 : Pour accéder à un service sur Internet, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres choisies dans l'alphabet latin majuscule (26 caractères).

1. Combien de mots de passe de 4 lettres peut-on créer ?
2. Combien de mots de passe de 4 lettres distinctes peut-on créer ?

Exercice 2 : La société YOPMILK fabrique des yaourts aux fruits avec dix parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de quatre pots de parfums tous différents.

1. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?
2. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un à la framboise ?
3. Le service commercial a abandonné cette idée. Désormais il souhaite des lots de quatre pots avec quatre parfums quelconques, c'est-à-dire non tous différents. Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?

Exercice 3 : Une étagère contient trois romans, deux livres de mathématique et un de chimie. Combien de manières peut-on ranger l'étagère si :

1. Aucune restriction n'est mise sur le rangement ;
2. Les livres de mathématique doivent être rangés ensemble et les romans aussi ;
3. Seuls les romans doivent être rangés ensemble ;
4. Aucune restriction n'est mise, mais les ouvrages d'une même collection sont indiscernables ;
5. Les livres de mathématique doivent être rangés ensemble et les romans aussi, mais les ouvrages d'une même collection sont indiscernables ?

Exercice 4 : Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises. De combien de façons différentes peut-on en prélever 4 pièces dans les cas suivants :

1. Les quatre pièces sont bonnes

2. Une au moins d'entre elles est mauvaise.
3. Deux au moins de ces pièces sont mauvaises.

Exercice 5 : On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes. On distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.
Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

1. 4 boules jaunes ;
2. 4 boules vertes ;
3. 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
4. 3 jaunes et une verte ;
5. 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
6. Deux jaunes et deux vertes ;
7. Au moins 3 vertes ;
8. Au plus 3 jaunes.

Exercice 6 : On considère les cinq lettres a, b, c, d, e. Combien peut-on former de mots avec ces cinq lettres, dans lesquels les voyelles a et e ne sont pas voisines ?

Exercice 7 :

1. Quel est le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à 2 éléments ?
2. Quel est le nombre de surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments dans un ensemble à n éléments ?

Exercice 8 : Soit un polygone convexe de n côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Exercice 9 : Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice 10 : Les nombres $5, -1$ et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

Exercice 11 :

1. Combien peut-on réaliser de mots de n lettres comportant k lettres se répétant $p_1, p_2, \cdots, p_k$ fois ?
2. Quel est le nombre d'anagrammes du mot « ANAGRAMME » ?

Exercice 12 : Un portemanteau comporte 5 patères alignées. Combien a-t-on de dispositions distinctes (sans mettre deux manteaux l'un sur l'autre) :

1. Pour 3 manteaux sur ces 5 patères ?
2. Pour 5 manteaux ?
3. Pour 6 manteaux ?

Exercice 13 : En utilisant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer

1. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$
3. $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k$
4. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$

Exercice 14 : En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair.
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 15 : On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnée (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 16 : On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice 17 : Combien y a-t-il de bijections f de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ dans lui-même possédant la propriété

1. $n \text{ est pair} \Rightarrow f(n) \text{ est pair}$.
2. $n \text{ est divisible par } 3 \Rightarrow f(n) \text{ est divisible par } 3$.
3. Les deux propriétés 1) et 2) à la fois.
4. Reprendre l'exercice en remplaçant bijection par application.

Exercice 18 : Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 19 : Un petit chantier de construction a engagé 3 maçons M_1, M_2 et M_3. Ces maçons reçoivent un nouveau matériel constitué de 5 pelles indiscernables de la même marque et, 8 brouettes indiscernables de la même marque. Le responsable de ce chantier veut partager tout ce matériel aux trois maçons.

1. Décrire l'espace de tous les partages possibles et calculer son cardinal.
2. Quel est le nombre de façons d'effectuer ce partage de telle sorte que le maçon M_1 ne reçoive aucun matériel (ni pelle, ni brouette) ?
3. Quel est le nombre de façons d'effectuer ce partage de telle sorte qu'un seul maçon ne reçoive aucun matériel (ni pelle, ni brouette) ?
4. Quel est le nombre de façons d'effectuer ce partage de telle sorte que chaque maçon reçoive au moins une brouette ?
5. Quel est le nombre de façons d'effectuer ce partage de telle sorte que chaque maçon reçoive quelque chose ?

Exercice 20 : Un ascenseur d'un immeuble ministériel dans la ville de Yaoundé dessert 18 étages et s'arrête obligatoirement à tous les étages. 15 tables de bureau de la même marque et indiscernables ont été achetées et doivent être acheminées dans les bureaux de tout le bâtiment. Toutes les tables pouvant être acheminées dans les bureaux d'un seul étage. L'ascenseur embarque toutes les tables au rez de chaussée.

1. Combien y a t-il de possibilités de descendre ces tables de l'ascenseur ?
2. Combien y a t-il de possibilités de faire descendre toutes les tables à des étages distincts ?
3. Combien y a t-il de possibilités de faire descendre 6 tables au même étages i quelconque et les 9 autres à des étages tous différents et différents de i ?
4. Une fois la répartition terminée, l'ascenseur redescend au rez de chaussée et embarque 12 personnes. Personne d'autre ne remontera plus dans l'ascenseur tant que ces 12 personnes ne sont pas toutes descendues.
5. Combien y a t-il de possibilités pour ces personnes de descendre de l'ascenseur ?
6. Combien y a t-il de possibilités que toutes ces personnes descendent à des étages différents ?
7. Combien y a t-il de possibilités que 5 personnes descendent au même étage i et les 7 autres à des étages tous différents et différents de i ?

Exercice 21 : Nombre d'applications surjectives

On note S_n^j le nombre de surjections différentes que l'on peut former d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à j éléments. Par convention, on pose $S_n^j = 0$ si $j \notin IN^*$ ou $n \notin IN^*$ ou $j > n$.

1. Calculer S_n^1 et S_n^n
2. Montrer que si $n \geq 2$, $S_n^2 = 2^n - 2$
3. Montrer sans calcul que $\forall n \in IN^*, \forall k \in [0, n] \cap IN, \sum_{j=1}^{n} C_k^j S_n^j = k^n$
4. En déduire une formule de récurrence permettant de calculer les nombres S_n^k

5. Etablir sans calcul la relation de récurrence $\forall n \geq 2, S_n^j = j\left(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1}\right)$
6. On note $f(x) = e^x - 1$. Montrer que pour tout $k \in [0,n] \cap IN$ il existe des constantes réelles $a_1(k), a_2(k), \cdots, a_k(k) = A_n^k$ telles que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f^n(x)\right) = \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[\sum_{j=1}^{k} a_j(k) f^{n-j}(x)\left(f'\right)^j(x)\right]$$

7. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^n C_n^k = n!$
8. Montrer que $S_n^j = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} k^n C_j^k$

Exercice 22 : Onze (11) personnes aimeraient effectuer une promenade dans la ville. Ils ne disposent que de deux voitures : une voiture de 6 places et une autre voiture de 5 places.

1. De combien de façons peuvent-ils se répartir dans les deux voitures afin d'effectuer leur promenade si toutes les onze personnes savent conduire ?
2. On suppose maintenant que seules deux personnes parmi eux savent conduire. De plus, le groupe est constitué de 4 femmes et 7 hommes. De combien de façons peuvent-ils se répartir dans les deux voitures afin d'effectuer leur promenade si
   a. Deux femmes exactement prennent place dans la voiture à 5 places ?
   b. Deux hommes parmi eux qui se détestent décident de ne pas entrer dans la même voiture ?
   c. Robert et Joséphine qui font partie des onze personnes, sont mari et femme et ont décidé d'entrer dans la même voiture (et si possible de s'assoir côte à côte) ?
3. Reprendre l'exercice en déterminant à chaque fois le nombre de façons de s'asseoir dans les deux voitures.

Exercice 23 : De combien de façons peut-on disposer 10 livres tout autour d'une table ronde

1. Si ces livres sont tous identiques ?
2. Si ces livres sont tous distincts les uns des autres ?
3. Si on a 4 livres identiques d'un même groupe G_1 et 6 livres identiques d'un autre groupe G_2, sachant que les livres du groupe G_1 sont distincts de ceux du groupe G_2.
4. Refaire l'exercice sachant qu'on dispose maintenant les livres sur une ligne droite.

Exercice 24 : Une école propose trois cours de langue : un en espagnol, un en français et un en allemand. Ces cours sont ouverts aux 100 élèves de l'école. Il y a 28 étudiants en espagnol, 26 en français et 16 en allemand. Il y a 12 étudiants qui suivent l'espagnol et le français, 4 qui suivent l'espagnol et l'allemand et 6 qui étudient le français et l'allemand. De plus, 2 élèves suivent les trois cours.

1. On choisit un élève au hasard, quel est le nombre de possibilités qu'il ne fasse partie d'aucun de ces cours ?
2. On choisit un élève au hasard, quel est le nombre de possibilités qu'il suive exactement un cours de langue ?
3. On choisit 2 élèves au hasard, quel est le nombre de possibilités qu'au moins un des deux suivent un cours de langue ?

Exercice 25 : Charlotte descend les marches d'un escalier une ou deux à la fois. Combien y a t-il de manières de descendre cet escalier sachant qu'il y a n marches ?