Ecole Nationale Supérieure polytechnique de Yaoundé   Année académique 2020/2021

Contrôle Continu de Mécanique PHY 214

(Durée 2h)

Définitions (0.5pt X 4=2pts)

Vecteur lié, vecteur libre, vecteur glissant, axe central

Exercise 1: (4pts)

Let us consider two nonzero vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ such that:

$$\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$$

With $\vec{X}$ being a vector to be determined.

1. Write down the consistency relation satisfied by the vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$. (1pt)
2. Discuss the unicity of the solution to the above equation. (1pt)
3. Deduce from the previous question the general solution of the above system (2pts)

Exercice 2: (8pts)

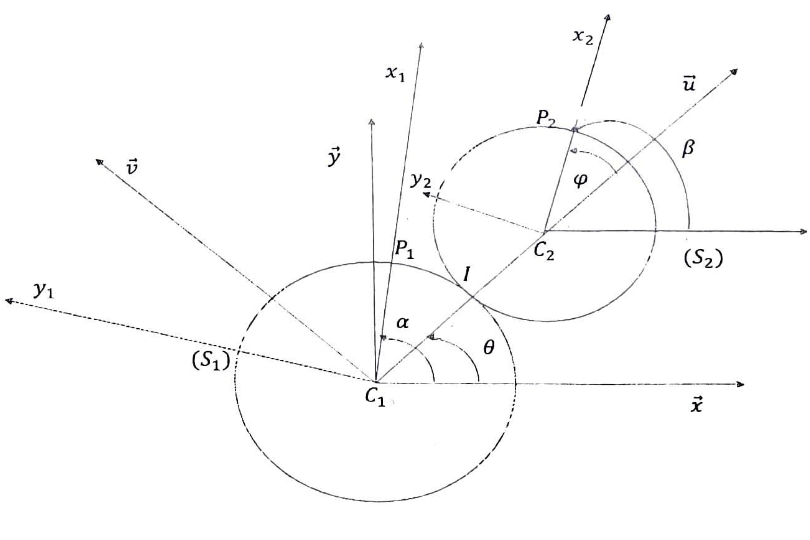
On considère les points A, B, C auxquels correspondent les vecteurs $\vec{F}$,$\vec{G}$, $\vec{H}$. Ces correspondances sont définies dans le repère $(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ par :

$$A(0,2,1) \Rightarrow \vec{F}(1,0,-2), B(-1,1,-1) \Rightarrow \vec{G}(4,4,-3), C(2,1,3) \Rightarrow \vec{H}(1,0,3)$$

1. Déterminer la somme et le moment en $P(1,0,1)$ du torseur $\{\tau\}_P$ associé à cet ensemble de vecteurs. (3pts)
2. En déduire l'expression du torseur$\{\tau\}_0$ en O (2pts)
3. Déterminer l'axe central du torseur $\{\tau\}$ (2pts)
4. Quel torseur-couple de moment $\overrightarrow{M}$ faut-il ajouter au torseur $\{\tau\}$ pour obtenir un torseur vecteur de même axe (1pt)

Problème (6pts)

Un solide rigide S_1, constitué par un cercle de rayon R_1, et de centre C_1, est en contact en I avec un second cercle rigide S_2, de rayon R_2, et de centre C_2.



On appelle $R(C_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère de référence, $R_1(C_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$, $R_2(C_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z})$. S_1 tourne autour de l'axe C_{1z}, S_2 tourne autour d'un axe passant par C_2 et parallèle à C_{1z}.

α, β, θ et φ désignent les paramètres de position angulaire par rapport à R au point I, d'un point $P_1 \in S_1$ et d'un point $P_2 \in S_2$.

On utilise comme repère de projection $R'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ l'axe C_1u passant par C_2. On appelle I_1 le point de S_1 (respectivement $I_2 \in S_2$) qui se trouvent en I à l'instant considéré.

1. En se servant du schéma ci-dessus, donner les représentations de changement de repères qui font passer R vers R_1, R vers R_2 et R vers R' (1pts) R_2 vers R'
2. Calculer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S_1/R)$, $\vec{\Omega}(S_2/R)$. (1pts)
3. Calculer $\vec{v}(C_2/R)$ (2pts)
4. Calculer $\vec{v}(I_2/R)$ (2pt)
5. En déduire la condition sur $\dot{\alpha}$ de roulement sans glissement en I de S_1 sur S_2. (2pts)

$\frac{R_1}{R_2}\dot{\beta}$ $\quad$ $\frac{1}{R_1}\{(R_1+R_2)\dot{\theta} - R_2\dot{\beta}\}$

CC de Mécanique

Définitions

Vecteur lié : Couple ordonné de 2 points A et B

Vecteur libre : Vecteur constitué par la classe d'équivalence (vecteurs équipollents) d'un vecteur lié donné.

Vecteur glissant : Vecteur constitué par les vecteurs équipollents à un vecteur lié donné, supportés par la même droite (Δ).

Axe central : Ensemble des points P tels que le moment $\vec{M}_P$ soit colinéaire à la résultante $\vec{S}$ d'un torseur.

Exercice 1

1- Relation de cohérence satisfaite par $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{0}$

2- ~~Montrons que la solution n'est pas unique~~ ;

~~Soit $\vec{X_1}$ et $\vec{X_2}$ deux solutions~~

Discutons de l'unicité de la solution :

Supposons que la solution n'est pas unique.

Soit $\vec{X_1}$ et $\vec{X_2}$ deux solutions distinctes

On a $\vec{A} \wedge \vec{X_1} = \vec{B}$ et $\vec{A} \wedge \vec{X_2} = \vec{B}$

$\vec{A} \wedge \vec{X_1} - \vec{A} \wedge \vec{X_2} = \vec{A} \wedge (\vec{X_1} - \vec{X_2}) = \vec{0}$

On a 3 possibilités :

- $\vec{A} = \vec{0}$ (absurde par hypothèse : $\vec{A} \neq \vec{0}$)
- $\vec{X_1} - \vec{X_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{X_1} = \vec{X_2}$ (absurde par hypothèse)

$-\vec{X_1}-\vec{X_2}=\lambda\vec{A} \Rightarrow \vec{X_1}=\vec{X_2}+\lambda\vec{A} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Ce qui prouve que la solution n'est pas unique.

3- Déduisons la solution générale:

Elle est de la forme $\vec{X}=\vec{X_p}+\lambda\vec{A}$ où $\vec{X_p}$ est une solution particulière.

La solution particulière est celle pour laquelle $\vec{X_p}\cdot\vec{A}=\vec{0}$.

$$\vec{A}\wedge\vec{X_p}=\vec{B}$$

$$\vec{A}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{X_p})=\vec{A}\wedge\vec{B}$$

$$\underbrace{(\vec{A}\cdot\vec{X_p})}_{0}\vec{A}-\|\vec{A}\|^2\vec{X_p}=\vec{A}\wedge\vec{B} \Rightarrow \vec{X_p}=-\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{\|\vec{A}\|^2}$$

D'où $\boxed{\vec{X}=-\dfrac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{\|\vec{A}\|^2}+\lambda\vec{A} \quad (\lambda\in\mathbb{R})}$

Exercice 2

1- Somme et moment en P de $\{\tau\}_P$:

- Somme:

$$\vec{S}=\vec{F}+\vec{G}+\vec{H}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}$$

$$=6\vec{x}+4\vec{y}-2\vec{z}$$

– Moment :

$$\vec{M}_P(\vec{F}) = \vec{PA} \wedge \vec{F}$$

$$= \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= -4\vec{x} - 2\vec{y} - 2\vec{z}$$

$$\vec{M}_P(\vec{G}) = \vec{PB} \wedge \vec{G}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$= 5\vec{x} - 14\vec{y} - 12\vec{z}$$

$$\vec{M}_P(\vec{H}) = \vec{PC} \wedge \vec{H}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 3-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}$$

$\vec{M}_P = \vec{M}_P(\vec{F}) + \vec{M}_P(\vec{G}) + \vec{M}_P(\vec{H})$

$= 4\vec{x} - 17\vec{y} - 15\vec{z}$

$\{\tau\}_P = \begin{Bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -17 \\ -2 & -15 \end{Bmatrix}_P$

2- Expression de $\{\tau\}_O$:

- Somme : $\vec{S} = 6\vec{x} + 4\vec{y} - 2\vec{z}$

- Moment : $\vec{M}_O = \vec{M}_P + \vec{OP} \wedge \vec{S}$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \\ -15 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$= -9\vec{y} - 11\vec{z}.$$

$\{\tau\}_O = \begin{Bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & -9 \\ -2 & -11 \end{Bmatrix}_O$

4- Torseur couple $\{\mathcal{C}\}$ de moment $\vec{M}$ à ajouter pour obtenir un torseur vecteur de même axe :

- Somme : $\vec{S}_C = \vec{0}$

- Moment : $\vec{M}_C$: $\vec{M}_C + \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_C = -\vec{M}_O$

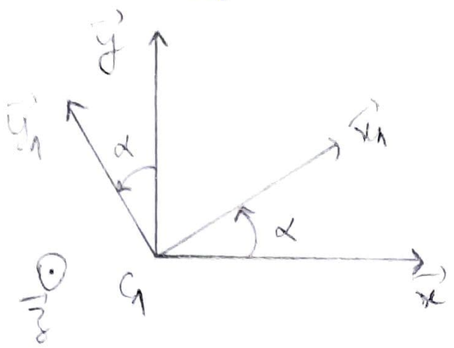
$= 9\vec{y} + 11\vec{z}$

$\{\mathcal{C}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 11 \end{Bmatrix}$

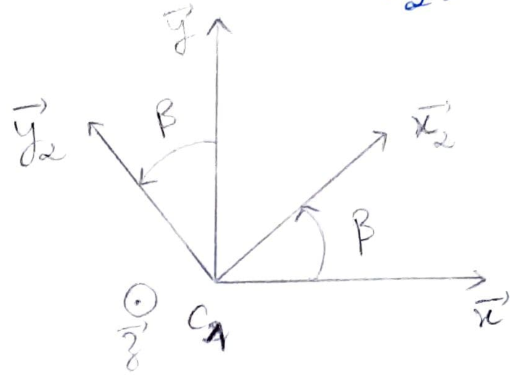
Problème

1- Représentations des changements de repères :

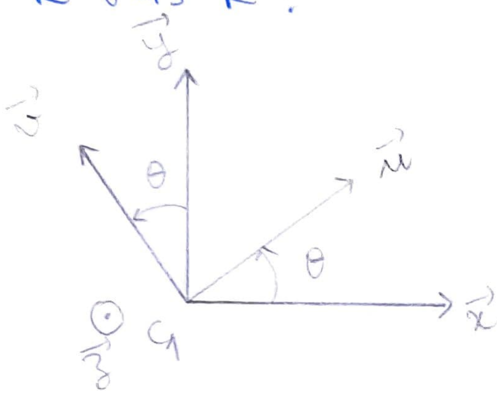
- R vers R_1 :



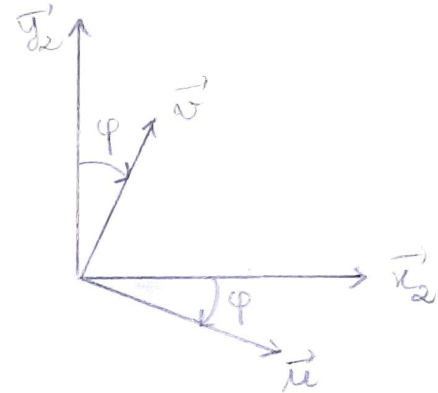
- R vers R_2 :



- R vers R' :



- R_2 vers R'



2- Vecteurs rotations :

$$\vec{\Omega}(S_1|R) = \vec{\Omega}(R_1|R) = \dot{\alpha}\vec{z}$$

$$\vec{\Omega}(S_2|R) = \vec{\Omega}(R_2|R) = \dot{\beta}\vec{z}$$

3- Calculons $\vec{v}(C_2|R)$:

$$\vec{v}(C_2|R) = \left(\frac{d\overrightarrow{C_1C_2}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}((R_1+R_2)\vec{u})\Big|_R$$

$$= (R_1+R_2)\frac{d(\vec{u})}{dt}\Big|_R$$

$$= (R_1+R_2)\vec{\Omega}(R'|R)\wedge\vec{u}$$

$$= (R_1+R_2)\dot{\theta}\vec{z}\wedge\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{v}(C_2|R) = (R_1+R_2)\dot{\theta}\vec{v}}$$

4- Calculons $\vec{v}(I_2|R)$;

Déterminons d'abord $\vec{v}(P_2|R)$

$$\vec{v}(P_2|R) = \left.\frac{d(\overrightarrow{G_1P_2})}{dt}\right|_R$$

$$\overrightarrow{G_1P_2} = \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2P_2}$$

$$= (R_1+R_2)\vec{u} + R_2\vec{x_2}$$

$$\left.\frac{d[(R_1+R_2)\vec{u}+R_2\vec{x_2}]}{dt}\right|_R = (R_1+R_2)\left.\frac{d(\vec{u})}{dt}\right|_R + R_2\left.\frac{d(\vec{x_2})}{dt}\right|_R$$

$$= (R_1+R_2)[\vec{\Omega}(R'|R)\wedge\vec{u}] + R_2[\vec{\Omega}(R_2|R)\wedge\vec{x_2}]$$

$$= (R_1+R_2)(\dot{\theta}\vec{z}\wedge\vec{u}) + R_2(\dot{\beta}\vec{z}\wedge\vec{x_2})$$

$$= (R_1+R_2)\dot{\theta}\vec{v} + R_2\dot{\beta}\vec{y_2}$$

$P_2 = I_2$ lorsque $\vec{x_2} = -\vec{u}$ et donc $\vec{y_2} = -\vec{v}$

D'où $\vec{v}(I_2|R) = (R_1+R_2)\dot{\theta}\vec{v} - R_2\dot{\beta}\vec{v}$

$$\boxed{\vec{v}(I_2|R) = [(R_1+R_2)\dot{\theta} - R_2\dot{\beta}]\vec{v}}$$

5- Condition sur $\dot{\alpha}$ de roulement sans glissement en I de S_1 sur S_2 : (CRSG)

Déterminons d'abord $\vec{v}(P_1|R)$

$$\vec{v}(P_1|R) = \left.\frac{d(\overrightarrow{G_1P_1})}{dt}\right|_R \qquad \overrightarrow{G_1P_1} = R_1\vec{x_1}$$

$$\left.\frac{d(R_1\vec{x_1})}{dt}\right|_R = R_1\left.\frac{d(\vec{x_1})}{dt}\right|_R = R_1[\vec{\Omega}(R_1|R)\wedge\vec{x_1}] = R_1[\dot{\alpha}\vec{z}\wedge\vec{x_1}] = R_1\dot{\alpha}\vec{y_1}$$

$P_1 = I_1$ lorsque $\vec{x_1} = \vec{u}$ et donc $\vec{y_1} = \vec{v}$

$$\boxed{\vec{v}(I_1|R) = R_1\dot{\alpha}\vec{v}}$$

CRSG ; $\vec{v}(I \in S_2 | S_1) = \vec{0}$

$$\vec{v}(I \in S_2 | S_1) = \vec{v}(I \in S_2 | R) - \vec{v}(I \in S_1 | R)$$

$$= \vec{v}(I_2 | R) - \vec{v}(I_1 | R)$$

$$= [(R_1 + R_2)\dot{\theta} - R_2 \dot{\beta} - R_1 \dot{\alpha}] \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (R_1 + R_2)\dot{\theta} - R_2 \dot{\beta} - R_1 \dot{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\alpha} = \frac{1}{R_1} [(R_1 + R_2)\dot{\theta} - R_2 \dot{\beta}]}$$