KTH Teknikvetenskap

SF1624/SF1684 Algebra och geometri
Tentamen
onsdag, 10 januari 2018

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. Vi har matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

I denna uppgift behövs bara svar och ingen motivering. I varje del ger tre rätta svar 1 poäng och fyra rätta svar 2 poäng.

(a) Vilka är inverterbara och vilka är ej inverterbara? **(2 p)**
(b) Vilka är sin egen invers och vilka är ej sin egen invers? **(2 p)**
(c) Vilka är ortogonala och vilka är ej ortogonala? **(2 p)**

2. Fyra punkter i $\mathbb{R}^3$ ges av

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Linjen l_1 går genom P och Q, och linjen l_2 går genom R och S.

(a) Visa att l_1 och l_2 inte skär varandra. **(3 p)**
(b) Hitta en parameterframställning av ett plan Π i $\mathbb{R}^3$ som varken skär l_1 eller l_2 och sådant att l_1 och l_2 ligger på ömse sidor om Π. **(3 p)**

Var god vänd!

DEL B

3. Låt L vara projektionen på planet $x + 2y - z = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm matrisen till avbildningen L. **(3 p)**

(b) Bestäm avbildningens egenvärden och egenvektorer. **(3 p)**

4. Den linjära avbildningen $L\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och tre av vektorerna i mängden

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

är egenvektorer till L.

(a) Avgör vilka av vektorerna i M är egenvektorer till L och ange egenvärdena för dessa. **(2 p)**

(b) Använd resultatet från (a) för att avgöra om A är diagonaliserbar. (Ledning: använd att spåret är summan av egenvärdena.) **(4 p)**

DEL C

5. I $\mathbb{R}^5$ har vi vektorrummet V som ges som lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 &= 0 \end{cases}$$

Vi har avbildningen $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ som skickar en godtycklig vektor $\vec{x}$ i V till

$$T(\vec{x}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas till bildrummet $\mathrm{Range}(T)$. **(3 p)**

(b) Nollrummet till T är en linje L, bestäm en parameterframställning av L. **(3 p)**

6. Låt Q vara en indefinit kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$. Visa att det finns en vektor $\vec{v} \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ sådan att $Q(\vec{v}) = 0$. **(6 p)**