KTH Teknikvetenskap

# SF1624, -66, -67, -75, -84 Algebra och geometri
# Tentamen
# fredag, 6 april 2018

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del C | 6 | 3 | – | – | – | – |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

---

## Del A

**1.** Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla lösningar $\vec{x}$ till $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(3 p)**

(b) Bestäm om linjen $(2, 3, 11) + t(1, 2, 1)$ avbildas av $A$ till en linje eller en punkt. **(3 p)**

**2.** Linjen $L$ i $\mathbb{R}^2$ ges av ekvationen $3x + 4y = 2$.

(a) Ange linjen $L$ på parameterform. **(2 p)**

(b) Bestäm en ekvation på formen $ax + by = c$ för en linje som går genom $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ och som är vinkelrät mot $L$. **(4 p)**

---

## DEL B

**3.** För en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller att

$$F(1,0,0) = (1,0,1) \quad \text{och} \quad F(1,0,1) = (2,1,0).$$

Vidare är vektorn $\vec{u} = (1,1,-1)$ en egenvektor till $F$ med egenvärdet 2. Bestäm avbildningsmatrisen för $F$ i

(a) standardbasen, **(3 p)**

(b) basen $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,0,1),(1,1,-1)\}$. **(3 p)**

**4.** Delrummet $V$ av $\mathbb{R}^4$ spänns up av vektorerna

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix}2 & 1 & -2 & -1\end{bmatrix}^T.$$

(a) Bestäm en ortonormal bas till $V$. **(3 p)**

(b) Beräkna projektionen av vektorn $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ på $V$. **(3 p)**

---

## DEL C

**5.** Låt $A$ vara en $2 \times 2$-matris, sådan att $A^{10} = 0$.

(a) Visa att $\det A = 0$. **(2 p)**

(b) Visa att $\operatorname{tr} A = 0$, där $\operatorname{tr} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$ är spåret av $A$.
*Tips:* basbyte påverkar inte spåret. **(4 p)**

**6.** Det radioaktiva elementet saturnium faller sönder på så sätt att $1/2$ av alla atomer blir elementet xenium varje julafton. Xenium är också radioaktivt: $1/3$ av alla xeniumatomer faller sönder till bly på julafton. Bly är stabilt.

(a) Beskriv det radioaktiva sönderfallet av de tre elementen genom en $3 \times 3$-matris $M$. **(2 p)**

(b) Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till $M$ och skriv $M = SDS^{-1}$ där $D$ är en diagonalmatris. **(2 p)**

(c) I hur många mol saturnium/xenium/bly faller 1 mol saturnium sönder efter 100 julaftnar? **(2 p)**