KTH Teknikvetenskap

SF1624/SF1684 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
T3

1. Vi har matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

I denna uppgift behövs bara svar och ingen motivering. I varje del ger tre rätta svar 1 poäng och fyra rätta svar 2 poäng.

(a) Vilka är inverterbara och vilka är ej inverterbara? **(2 p)**
(b) Vilka är sin egen invers och vilka är ej sin egen invers? **(2 p)**
(c) Vilka är ortogonala och vilka är ej ortogonala? **(2 p)**

Lösningsförslag. (Lösning erfodras ej)

a) Beräkning av determinanter visar att endast A och D har nollskilda determinanter, och därför är endast dessa två inverterbara..

b) B och C saknar invers överhuvudtaget enligt a). Om en matris M är sin egen invers gäller att $M^2 = I$. Av produktsatsen för determinanter följer då också att $\det M = \pm 1$. Enligt beräkningarna i a) är därför inte D sin egen invers. Prövning visar sedan att A är sin egen invers.

c) En matris är en ortogonalmatris om och endast om raderna utgör en ortonormal mängd av vektorer. Ingen av matriserna uppfyller detta villkor.

2. Fyra punkter i $\mathbb{R}^3$ ges av

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Linjen l_1 går genom P och Q, och linjen l_2 går genom R och S.

(a) Visa att l_1 och l_2 inte skär varandra. **(3 p)**
(b) Hitta en parameterframställning av ett plan Π i $\mathbb{R}^3$ som varken skär l_1 eller l_2 och sådant att l_1 och l_2 ligger på ömse sidor om Π. **(3 p)**

Lösningsförslag. (a) Linjen l_1 har en parameterframställning $(x, y, z) = (0, 1, 0)^T + s(1, -1, 2)^T$, $s \in \mathbb{R}$, och linjen l_2 har en parameterframställning $(x, y, z) = (-1, 1, 1)^T + t(2, -3, 2)^T$, $t \in \mathbb{R}$. Linjernas skärningspunkter är lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Systemet saknar lösningar och alltså finns inga skärningspunkter. För att se att se att systemet saknar lösningar kan man t ex se att ekvationen i andra koordinaten ger $s = 3t$, vilket insatt i första ekvationen ger $t = -1$ och insatt i sista ekvationen ger $t = 1/4$, vilket omöjligt kan gälla samtidigt.

(b) Planet som söks måste vara parallellt med båda linjerna, så deras riktningsvektorer måste vara parallella med planet. För att skriva upp den sökta parameterformen behöver vi nu bara hitta en punkt som ligger mellan linjerna. Vi kan till exempel ta punkten som ligger mitt emellan $(0,1,0)$ och $(-1,1,1)$ dvs $(-1/2,0,1/2)$. Planets ekvation på parameterform blir nu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

3. Låt L vara projektionen på planet $x+2y-z=0$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm matrisen till avbildningen L. **(3 p)**

(b) Bestäm avbildningens egenvärden och egenvektorer. **(3 p)**

Lösningsförslag. $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är vinkelrät projektion på planet S med ekvation $x+2y-z=0$.

a) Låt $\vec{v} = (a,b,c)$ vara en godtycklig vektor i $\mathbf{R}^3$. För att bestämma projektionen på planet S bestämmer vi först $\vec{v}$:s projektionen på planets normalvektor $\vec{n} = (1,2,-1)$.

$$\operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{v} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n} = \frac{(1,2,-1)\cdot(a,b,c)}{1^2+2^2+(-1)^2}(1,2,-1) = \frac{a+2b-c}{6}(1,2,-1)$$

Projektionen på S ges sedan av

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_S \vec{v} &= \operatorname{perp}_{\vec{n}} \vec{v} = \vec{v} - \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{v} = (a,b,c) - \frac{a+2b-c}{6}(1,2,-1) \\ &= \frac{1}{6}(5a-2b+c, -2a+2b+2c, a+b+5c) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Varje vektor parallell med normalvektorn $\vec{n} = (1,2,-1)$ projeceras på nollvektorn, så $t\vec{n}$ är en egenvektor med egenvärde 0 för varje reelt tal $t \neq 0$. Vidare gäller att varje vektor i (egentligen: parallell med) planet S projeceras på sig själv, så varje sådan vektor är en egenvektor med egenvärde 1. Som bas för egenrummet S kan vi välja två linjärt oberende lösningsvektorer till planets ekvation, till exempel $(2,-1,0)$ och $(1,0,1)$.

4. Den linjära avbildningen $L\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och tre av vektorerna i mängden

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

är egenvektorer till L.

(a) Avgör vilka av vektorerna i M är egenvektorer till L och ange egenvärdena för dessa. **(2 p)**

(b) Använd resultatet från (a) för att avgöra om A är diagonaliserbar. (Ledning: använd att spåret är summan av egenvärdena.) **(4 p)**

Lösningsförslag. (a) Vi döper vektorerna till $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_8}$ i den ordning de står. Vi ser att $A\vec{v_1} = \vec{v_1}$, dvs $\vec{v_1}$ är en egenvektor med egenvärde 1, $A\vec{v_4} = -\vec{v_4}$, dvs $\vec{v_4}$ är en egenvektor med egenvärde -1, $A\vec{v_5} = 2\vec{v_5}$, dvs $\vec{v_5}$ är en egenvektor med egenvärde 2. Ingen annan av de givna vektorerna är en egenvektor.

(b) Vi ser att $\mathrm{tr}A = 4$ och eftersom summan av egenvärdena är lika med spåret så måste summan av egenvärdena bli 4. De egenvärden vi har hittat hittills summerar till 2 vilket betyder att det finns ytterligare ett egenvärde som är 2. Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende, så nu är A diagonaliserbar om och endast om egenrummet till egenvärdet 2 är 2-dimensionellt. Detta egenrum fås som lösningar till $(A-2I)\vec{u} = \vec{0}$ dvs till

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Man kontrollerar lätt via Gausselimination att matrisen i detta system har rang 3 vilket gör att nollrummet är 1-dimensionellt. Det följer att A inte är diagonaliserbar.

5. I $\mathbb{R}^5$ har vi vektorrummet V som ges som lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

Vi har avbildningen $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ som skickar en godtycklig vektor $\vec{x}$ i V till

$$T(\vec{x}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas till bildrummet $\mathrm{Range}(T)$. **(3 p)**
(b) Nollrummet till T är en linje L, bestäm en parameterframställning av L. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) Vi bestämmer först V som är lösningsrummet till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

Genom att subtrahera den första ekvationen ifrån den andra får vi det ekvivalenta systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 & = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

Man får att V är det tredimensionella rum som består av alla vektorer $\vec{v}$ på formen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Avbildningen $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ defineras av

$$T(\vec{x}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \end{bmatrix}.$$

En vektor $\vec{w} \in \mathrm{Range}\,(T)$ om och endast om $\vec{w} = T\,(\vec{v})$ där $\vec{v} \in V$. Vi får därför ett utttryck för godtyckliga vektorer i $\mathrm{Range}\,(T)$ genom att substituera in parameterformen för vektorer i V

i uttrycket för avbildnignen T. Alltså består $\mathrm{Range}\,(T)$ precis av alla $\vec{w}$ vektorer på formen

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \end{pmatrix}, x_1 = r + s + 3t, x_2 = r, x_3 = s, x_4 = t.x_5 = r - 2s - 3t,$$

det vill säga alla $\vec{w}$ på formen

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} (r+s+3t) - 2r + s + (r - 2s - 3t) \\ (r+s+3t) + 2s + t - (r - 2s - 3t) \\ (r+s+3t) + 2r + t + (r - 2s - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5s + 7t \\ 4r - s + t \end{pmatrix}, r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Det följer att $\mathrm{Range}\,(T)$ utgörs av det plan i $\mathbf{R}^3$ som har första koordinaten lika med 0, så en bas för utgörs av $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.

b) En vektor $\vec{v}$ ligger i nollrumet $= \ker(T)$ till T om och endast om $\vec{v} \in V$ och $T(\vec{v}) = 0$. Det innebär att

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} r + s + 3t \\ r \\ s \\ t \\ r - 2s - 3t \end{pmatrix}$$

där r, s och t är reella tal sådana att

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5s + 7t \\ 4r - s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5s + 7t & = 0 \\ 4r - s + t & = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} r & = 3\xi \\ s & = 7\xi \\ t & = -5\xi \end{cases}, \xi \in \mathbb{R}.$$

Alltså består V av alla vektorer $\vec{v}$ på formen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\xi + 7\xi + 3(-5\xi) \\ 3\xi \\ 7\xi \\ -5\xi \\ 3\xi - 2 \cdot 7\xi - 3(-5\xi) \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6. Låt Q vara en indefinit kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$. Visa att det finns en vektor $\vec{v} \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ sådan att $Q(\vec{v}) = 0$. **(6 p)**

Lösningsförslag. Låt A vara den symmetriska $n \times n$-matris som är associerad till Q, dvs sådan att $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$. Eftersom A är symmetrisk är den ortogonalt diagonaliserbar. Låt P vara den matris som ortogonalt diagonaliserar A, dvs $P^T A P = D$, där D är diagonal. Om vi gör variabelbytet $\vec{x} = P\vec{y}$ i den kvadratiska formen $\vec{x}^T A \vec{x}$ får vi

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är egenvärdena som hör till egenvektorerna som utgör kolonnerna i P. Eftersom Q är indefinit har A ett positivt och ett negativt egenvärde och vi kan anta att egenvärdena är numrerade så att λ_1 är negativt och λ_2 är positivt.

Välj nu

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Då gäller att $\vec{y}^T D\vec{y} = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} = 0$ och om vi sätter $\vec{v} = P\vec{y}$ så är $\vec{v} \neq \vec{0}$, ty P har full rang, och vi får $Q(\vec{v}) = 0$.