KTH Teknikvetenskap

SF1624, -66, -67, -75, -84 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
fredag, 6 april 2018

1. Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla lösningar $\vec{x}$ till $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(3 p)**

(b) Bestäm om linjen $(2,3,11)+t(1,2,1)$ avbildas av A till en linje eller en punkt. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Radreducera totalmatrisen för ekvationssystemet.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot(1/3) \\ \cdot(1/2) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Den sista raden utläses $0x+0y+0z=1$ och systemet saknar alltså lösningar.

(b) A avbildar linjen $(2,3,11)+t(1,2,1)$ på

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix} + tA\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vilket är en linje om $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$ och en punkt om $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$.

Metod 1. Vi helt enkelt utför matrismultiplikationen

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \vec{0}.$$

Därmed är bilden en linje.

Metod 2. Vi undersöker huruvida $(1,2,1) \in \mathrm{Null}(A)$: Vi såg i a-delen att

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lösningarna till systemet $A\vec{x} = 0$ ges alltså av

$$\begin{cases} z = t \\ y = 2z = 2t \\ x = y - 3z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dvs Null(A) spänns upp av $(-1, 2, 1)$ och därmed ser vi att $(1, 2, 1) \notin$ Null(A).

2. Linjen L i $\mathbb{R}^2$ ges av ekvationen $3x + 4y = 2$.

(a) Ange linjen L på parameterform. **(2 p)**

(b) Bestäm en ekvation på formen $ax + by = c$ för en linje som går genom $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ och som är vinkelrät mot L. **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) Metod 1. Beteckna $x = t$. Då är

$$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t \qquad \text{och därmed} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

Metod 2. Skriv om ekvationen på formen $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2} (= t)$.

$$3x + 4y = 2 \Leftrightarrow x = -\tfrac{4}{3}y + \tfrac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x - 0}{-4} = \frac{y - \frac{1}{2}}{3} = t.$$

En ekvation för L på parameterform ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(b) En linje som är vinkelrät mot L har en riktningsvektor $\vec{v}$ som är ortogonal mot L:s riktningsvektor, $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tag t ex $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Ekvationen är då

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. För en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller att

$$F(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \quad \text{och} \quad F(1, 0, 1) = (2, 1, 0).$$

Vidare är vektorn $\vec{u} = (1, 1, -1)$ en egenvektor till F med egenvärdet 2. Bestäm avbildningsmatrisen för F i

(a) standardbasen, **(3 p)**

(b) basen $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Metod 1. Avbildningsmatrisen A, i standardbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, ges av $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix}$, där

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= F\vec{e}_1 = (1, 0, 1). \\ \vec{a}_3 &= F\vec{e}_3 = F((1, 0, 1) - \vec{e}_1) = F(1, 0, 1) - \vec{a}_1 = (2, 1, 0) - (1, 0, 1) = (1, 1, -1) \\ \vec{a}_2 &= F\vec{e}_2 = F((1, 1, -1) - \vec{e}_1 + \vec{e}_3) = F\vec{u} - F\vec{e}_1 + F\vec{e}_3 = 2\vec{u} - \vec{a}_1 + \vec{a}_3 \\ &= (2, 2, -2) - (1, 0, 1) + (1, 1, -1) = (2, 3, -4). \end{aligned}$$

Därmed $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

Metod 2. Från

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

har vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Metod 1. I basen $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ges avbildningsmatrisen $[F]_{\mathcal{B}}$ av att $[F]_{\mathcal{B}} = \big[[F\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} \quad [F\vec{b}_3]_{\mathcal{B}} \quad [F\vec{b}_3]_{\mathcal{B}}\big]$.

$$\begin{aligned} [F\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} &= [F(1,0,0)]_{\mathcal{B}} = [(1,0,1)]_{\mathcal{B}} = (0,1,0) \\ [F\vec{b}_2]_{\mathcal{B}} &= [F(1,0,1)]_{\mathcal{B}} = [(2,1,0)]_{\mathcal{B}} = [(1,0,1) + (1,1,-1)]_{\mathcal{B}} = (0,1,1) \\ [F\vec{b}_3]_{\mathcal{B}} &= [F(1,1,-1)]_{\mathcal{B}} = [2(1,1,-1)]_{\mathcal{B}} = (0,0,2) \end{aligned}$$

Metod 2. Vi kan använda formeln

$$[F]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Delrummet V av $\mathbb{R}^4$ spänns up av vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

(a) Bestäm en ortonormal bas till V. **(3 p)**

(b) Beräkna projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ på V. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi använder Gram-Schmidts metod. Beteckna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Låt $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ och

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \tfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Då är $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ ortogonala vektorer som bildar en bas till delrummet V. Vi normerar $\vec{u}_1$

och $\vec{u}_2$ och får en ortonormal (eller ortonormerad) bas till V som består av

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{f}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Beteckna

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enligt projektionsformeln har vi

$$Proj_V(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{f}_1)\vec{f}_1 + (\vec{x}\cdot\vec{f}_2)\vec{f}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/6 \\ -1/2 \\ -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/3 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

5. Låt A vara en 2×2-matris, sådan att $A^{10} = 0$.

(a) Visa att $\det A = 0$. **(2 p)**

(b) Visa att $\operatorname{tr} A = 0$, där $\operatorname{tr}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$ är spåret av A.
Tips: basbyte påverkar inte spåret. **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) Enligt antagande är
det (A^{10}) =det $\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$.
Å andra sidan gäller det$(A^n) = (\text{det}(A))^n$.
Därför $(\text{det}(A))^{10} = 0$ som medför det$(A) = 0$. V.S.B.

(b) Först visar vi att matrisens alla egenvärden är 0. Anta att λ är ett egenvärde (reellt eller komplext) till matrisen A med motsvarande egenvektor $\vec{v}$. Då gäller
$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
Upprepade multiplikationer med A från vänster ger
$A^2\vec{v} = \lambda A\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$,
$A^3\vec{v} = \lambda^2 A\vec{v} = \lambda^3\vec{v}$,
...
$A^{10}\vec{v} = \lambda^{10}\vec{v}$.
Eftersom $A^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ har vi $\lambda^{10}\vec{v} = 0$ och därmed $\lambda = 0$. (Notera att $\vec{v} \neq \vec{0}$.)
Därmed har vi bevisat att matrisens " alla egenvärden" är 0. Enligt terminologin som vi använder säger vi att A har ett egenvärde $\lambda = 0$ med multipliciteten 2.
Härav följer att matrisens karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 = 0$.
Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Matrisen har följande karakteristiska ekvation

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

eller $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$. Enligt ovanstående, har sista ekvationen dubbel rot $\lambda_{1,2} = 0$. Detta är möjligt endast om det(A)=0 (som vi redan visade i a-delen) och tr(A)=0, V.S.B.

6. Det radioaktiva elementet saturnium faller sönder på så sätt att $1/2$ av alla atomer blir elementet xenium varje julafton. Xenium är också radioaktivt: $1/3$ av alla xeniumatomer faller sönder till bly på julafton. Bly är stabilt.

(a) Beskriv det radioaktiva sönderfallet av de tre elementen genom en 3×3-matris M. **(2 p)**

(b) Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till M och skriv $M = SDS^{-1}$ där D är en diagonalmatris. **(2 p)**

(c) I hur många mol saturnium/xenium/bly faller 1 mol saturnium sönder efter 100 julaftnar? **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Låt $X(n)$, $Y(n)$ och $Z(n)$ beteckna antalet atomer saturnium, xenium och bly, efter *n* år (dvs n julaftnar). Enligt uppgiften gäller följande relationer:

$$\begin{array}{rcl} X(n+1) & = & \frac{1}{2}X(n) \\ Y(n+1) & = & \frac{1}{2}X(n) + \frac{2}{3}Y(n) \\ Z(n+1) & = & \frac{1}{3}Y(n) + Z(n) \end{array}$$

eller på matrisform:

$$\begin{bmatrix} X(n+1) \\ Y(n+1) \\ Z(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(n) \\ Y(n) \\ Z(n) \end{bmatrix}.$$

Den sökta matrisen är $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Egenvärden och egenvektorer:

Från $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{2}{3} - \lambda)(1 - \lambda) = 0$

får vi matrisens egenvärden $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ och $\lambda_3 = 1$.

Motsvarande egenvektorer får vi genom att lösa $(A - \lambda_k I)\vec{v} = \vec{0}$, $k = 1, 2, 3$.

På detta sätt får vi motsvarande egenrum:

$E_{\lambda_1} = span(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix})$, $E_{\lambda_2} = span(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix})$, $E_{\lambda_3} = span(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$.

(Alla vektorer i E_{λ_k}, förutom $\vec{0}$, är egenvektorer som hör till λ_k .)

Låt $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Då är $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (kontrollera själv) och $M = SDS^{-1}$, dvs

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Beteckna

$$V(n) = \begin{bmatrix} X(n) \\ Y(n) \\ Z(n) \end{bmatrix}$$

Vid start har vi $X(0) = 1$, $Y(0) = 0$ och $Z(0) = 0$.

Efter ett år har vi, enligt a-delen, $V(1) = MV(0)$, där $V(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Efter k år gäller $V(k) = M^k V(0)$. Därmed

$$V(100) = M^{100} V(0) = (SDS^{-1})^{100} V(0) = SD^{100} S^{-1} V(0).$$

Alltså gäller

$$\begin{bmatrix} X(100) \\ Y(100) \\ Z(100) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/2)^{100} & 0 & 0 \\ 0 & (2/3)^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Efter matrismultiplikationen får vi

$$\begin{bmatrix} X(100) \\ Y(100) \\ Z(100) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)^{100} \\ -3 \cdot (1/2)^{100} + 3 \cdot (2/3)^{100} \\ 2 \cdot (1/2)^{100} - 3 \cdot (2/3)^{100} + 1 \end{bmatrix}.$$

Efter 100 år har vi $(1/2)^{100}$ mol saturnium, $-3 \cdot (1/2)^{100} + 3 \cdot (2/3)^{100}$ mol xenium och $2 \cdot (1/2)^{100} - 3 \cdot (2/3)^{100} + 1$ mol bly.