Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2018-2019

Modul 7: Serier

Denna modul handlar om talföljder och serier. Två viktiga begrepp som man måste ha koll på är **konvergens** och **divergens**. Det är också viktigt att lära sig hur man kan avgöra om en serie är konvergent eller divergent. Vi har vissa verktyg tillgängliga för att kunna avgöra hurvida en serie är konvergent eller divergent. Dessa är integraltestet, jämförelsestestet, ratiotestet, och rottestet. Att kunna använda dessa tester centralt tema för denna modul.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta. Tips: går termerna mot 0?

$$a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{k}, \qquad ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan k}.$$

Uppgift 2. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta. Kan du beräkna dem?

$$a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \qquad b) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \qquad c) \quad \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j}.$$

Uppgift 3. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta, genom att jämföra med lämplig serie eller med en integral. Du behöver inte beräkna dem.

$$a) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k\sqrt{k}}, \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^k}, \qquad c) \quad \sum_{j=4}^{\infty} \frac{1+j+\ln j}{j^2-1}.$$

Uppgift 4. Avgör om $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ är konvergent eller divergent, genom att jämföra med en lämplig integral.

Uppgift 5 (Kursboken 9.3: 1, 3, 7, 11, 19, 23)**.** Avgör om serierna är divergenta eller konvergenta. Använd lämplig test.

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}, \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^3}$$

$$iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}, \qquad v) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{n^2 e^n}, \qquad vi) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}.$$

Uppgift 6. Visa att

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{\pi+1}{2}.$$

Uppgift 7. Bestäm Maclaurin serierna till

$$i) \quad \sin x, \quad ii) \quad \cos(2x), \quad iii) \quad e^x, \quad iv) \quad e^{x^2}.$$

Facit och lösningstips

Svar till Uppgift 1: Båda serierna är divergenta
Svar till Uppgift 2: Alla tre serierna är konvergenta. Deras värden är

(a) 2
(b) $1/2$, tips: bryt ut $1/2^2$ och använd formeln för geometrisk summa på det som är kvar.
(c) $\frac{1}{e-1}$, tips: $e^{-j} = (1/e)^j$.

Svar till Uppgift 3: a) är konvergent, b) är konvergent medan c) är divergent.
Svar till Uppgift 4: Divergent.
Svar till Uppgift 5:

(a) Konvergent.
(b) Divergent.
(c) Divergent.
(d) Divergent.
(e) Divergent.
(f) Konvergent.

Svar till Uppgift 6: Använd integraluppskattning.
Svar till Uppgift 7:

(a) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2n+1}{(2n+1)!}$.
(b) $1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!}$.
(c) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
(d) $1 + x^2 + \frac{x^6}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.