



Uppgifter till Seminarium 5

Uppgift 1. Beräkna nedanstående integraler.

- (a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$
- (b) $\int_0^1 \frac{1}{4+x^2} dx.$
- (c) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx.$
- (d) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x+1} dx.$
- (e) $\int_{-3}^3 |2x - 1| dx.$
- (f) $\int \frac{1}{x \ln x} dx.$

Uppgift 2. Bestäm det positiva talet x så att integralen $\int_0^x (-t^2 + 4t + 5) dt$ maximeras. Bestäm också integralens maximala värde. Går det att lösa denna uppgift på mer än ett sätt?

Uppgift 3. Derivera nedanstående funktioner med avseende på x .

- (a) $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt.$
- (b) $g(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt.$
- (c) $h(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt.$

Uppgift 4. Approximera integralen $\int_1^3 \frac{dt}{t}$ med en Riemannsumma

- (a) med tv termer,
- (b) med fyra termer.

Förklara varför dina svar på a) och b) kan användas som (grova) approximationer av $\ln 3$.

Uppgift 5. Beräkna integralerna

- (a) $\int_0^1 x^2(1+x^3)^{-2/3} dx.$

- (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx.$
- (c) $\int_1^e x \ln x dx.$

Uppgift 6.

- (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = x^2 \cos x.$
- (b) Bestäm alla primitiva funktioner till $g(x) = \tan x.$
- (c) Beräkna integralen $\int_{-5}^{-4} \frac{1}{x^2+4x+3} dx.$
- (d) Hur beräknar man lättast integralen $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx?$
- (e) Beräkna $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ med hjälp av substitutionen $x = 2 \sin t.$
- (f) Beräkna $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ med hjälp av substitutionen $t = \ln x.$
- (g) På hur många olika sätt kan du beräkna integralen $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx?$

Uppgift 7.

- (a) Om f är kontinuerlig på $[0, 1]$, hur kan man skriva $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k/n)/n$ utan att skriva "lim" och "sum"?
- (b) Om f är kontinuerlig och $f(x) \rightarrow c > 0$ när $x \rightarrow \infty$, gäller då att dess primitiva funktion $F(x) \rightarrow \infty$ när $x \rightarrow \infty$?