



## Arbetsmaterial till Seminarium 3

---

**Uppgift 1.** Derivera nedanstående uttryck med avseende på  $x$  och ange i vilka punkter derivatan existerar.

- (a)  $xe^{-x^2/2}$ .
- (b)  $x \ln x - x$ .
- (c)  $\ln \sqrt{1+x^2}$ .
- (d)  $e^{-|x|}$ .
- (e)  $\arctan \frac{1}{x}$ .
- (f)  $\arcsin \sqrt{x}$ .

**Uppgift 2.**

- (a) Bestäm inversen till  $f(x) = 2 + 4 \ln(1 + 6x)$ . Ange också inversens definitionsmängd och värdemängd.
- (b) Visa med hjälp av derivata att funktionen

$$f(x) = 4 \arcsin \sqrt{x} + 2 \arcsin \sqrt{1-x}$$

är inverterbar. Bestäm inversens största värde!

**Uppgift 3.** Lös nedanstående differentialekvationer.

- (a)  $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$ .
- (b)  $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 10$ .
- (c)  $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$ .
- (d)  $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t$ .

**Uppgift 4.** När värmesystemet i ett hus går sönder kan man anta att inomhustemperaturen sjunker i en takt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan inne och ute (Newtons avsvagningslag). Anta att värmesystemet går sönder en dag när det är  $-10^\circ \text{C}$  ute. Inomhustemperaturen är

från början  $20^\circ \text{C}$ , men efter en timme har den sjunkit till  $17^\circ \text{C}$ . Efter hur lång tid är det minusgrader inomhus?

**Uppgift 5.**

- (a) Bestäm  $\arcsin(-1/2)$ ,  $\arccos(-1/2)$ ,  $\arctan \sqrt{3}$  och  $\ln(1/\sqrt{e})$ .
- (b) Beräkna  $\arcsin(\sin(3\pi/4))$  och  $\cos(\arcsin(1/5))$ .
- (c) Förenkla så långt som möjligt nedanstående uttryck:

$$\ln e^x \quad \ln \frac{1}{e} \quad \ln 18 - 2 \ln 3 \quad e^{\ln \pi} \quad \ln(e^{2x} \cdot e^{-3x}).$$

- (d) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan  $y = e^x$  i den punkt på kurvan som har  $x$ -koordinat 0. Hitta med hjälp av tangenten ett närmevärde till  $e^{1/10}$ .

**Uppgift 6.** På vilka intervall är funktionen  $f(t) = te^{-t^2}$  strängt växande respektive strängt avtagande? Är  $f$  inverterbar?

**Uppgift 7.** Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan  $y = \arctan x$  i den punkt på kurvan som har  $x$ -koordinat 1.

**Uppgift 8.** Skissa grafen  $y = f(x)$  till funktionen  $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$ , med hjälp av bl a en derivataundersökning.

**Uppgift 9.** En kurva i planet definieras (implicit) av ekvationen

$$\arctan(xy) = \frac{\pi}{4}e^{x-y}.$$

Finn ekvationen för tangenten till kurvan i punkten  $(1, 1)$ .

**Uppgift 10.** (a) Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 18 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

(b) Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

**Uppgift 11.** Beräkna

$$\cos(\arctan x), \quad \sin(\arctan x), \quad \text{och} \quad \cos\left(\arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right).$$

2

**Uppgift 12.**

- (a) Finns det något  $x$  sådant att  $\arctan(\tan x) \neq x$ ? Ange ett sådant  $x$  om det finns och förklara annars varför det inte kan finnas.
- (b) För alla  $x$  gäller att  $\tan(\arctan x) = x$ . Använd implicit derivering för att härleda derivatan av  $\arctan x$ .

**Uppgift 13.**

- (a) Hitta konstanter  $a$  och  $b$  sådana att alla lösningar  $y(t)$  till

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

uppfyller att  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

- (b) Hitta konstanter  $a$  och  $b$  sådana att alla lösningar  $y(t)$  till

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

som inte är identiskt noll är periodiska.

- (c) Hitta konstanter  $a$  och  $b$  sådana att  $y = C$  är en lösning till

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

för varje konstant  $C$ .