



Arbetsmaterial till Seminarium 2

Uppgift 1. Derivera funktionerna med avseende på x och ange för vilka x de är deriverbara. Ange sedan en ekvation för tangentlinjen till funktionsgrafen i en självvald punkt.

- (a) $f(x) = \tan^2 x$
- (b) $g(x) = \frac{3x+1}{7x-1}$
- (c) $h(x) = 2 \sin \sqrt{x}$
- (d) $k(x) = x \cos x$
- (e) $r(x) = \sqrt{1 + x^2}$
- (f) $s(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
- (g) $p(x) = \sin^2(x^2)$

Uppgift 2. Låt $g(x) = x^2 \sin x$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till g .
- (b) I vilka punkter är g kontinuerlig?
- (c) Bestäm $g'(x)$.
- (d) I vilka punkter är g deriverbar?

Uppgift 3. Låt $h(t) = |1+t|(1+2\sin t)^5$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till h .
- (b) I vilka punkter är h kontinuerlig?
- (c) Bestäm $h'(t)$.
- (d) I vilka punkter är h deriverbar?

Uppgift 4. Bestäm ekvationer för tangent- och normallinjen i punkten $(2, 16)$ till kurvan $y = x^4$.

Uppgift 5. Var är funktionen f som ges av $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ strängt växande? Strängt avtagande?

Uppgift 6. Visa med hjälp av derivata att $f(x) = 2\sin^2 x + \cos 2x$ är konstant.

Uppgift 7. Låt $f(x) = \sin x^2$. Beräkna $f^{(n)}(0)$ för $n = 1, 2, 3$.

Uppgift 8. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \tan x$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat $\pi/4$. Kan du med hjälp av tangenten hitta ett närmevärde till $\tan(\pi/5)$?

Uppgift 9. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 + y^2 - 4x = 5$ i punkten $(-1, 1)$.

Uppgift 10.

- (a) Visa med hjälp av derivatans definition att $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$.
- (b) Bevisa produktregeln!
- (c) Bevisa att en funktion som är deriverbar i en punkt a också måste vara kontinuerlig i a . Ge ett exempel som visar att omvändningen inte gäller!
- (d) Ge exempel på en funktion med definitionsmängd \mathbb{R} som varken är kontinuerlig eller deriverbar i $x = 1$.
- (e) Ge exempel på en funktion med definitionsmängd \mathbb{R} som är kontinuerlig men inte deriverbar i $x = 1$.
- (f) Finns det någon funktion som är deriverbar men inte kontinuerlig i $x = 1$?

Uppgift 11. Låt $h(x) = |x| - |x+1|$. Beräkna $h'(x)$ och ange i vilka punkter h är deriverbar. Hur ser grafen ut i de punkter där h inte är deriverbar?

Uppgift 12. Låt $U(t)$ vara Heaviside-funktionen som ges av

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } t \geq 0 \\ 0 & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

- (a) Beräkna $U'(t)$. I vilka punkter är U deriverbar?
- (b) Låt $f(t) = (U(t - \pi) - U(t - 3\pi)) \sin t$. Gör en enkel skiss av funktionsgrafen $y = f(x)$. I vilka punkter är f kontinuerlig? Beräkna $f'(t)$. I vilka punkter är f deriverbar? Hur ser grafen ut i de punkter där f inte är deriverbar?

Uppgift 13. Låt $f'(x) > 0$ för alla x . Följer det att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$? Ge bevis eller motexempel.

Uppgift 14. Vad kännetecknar en välskriven lösning på en matematisk uppgift? Diskutera och skriv ner några viktiga punkter.