Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2018-2019
Lars Filipsson

Modul 1: Gränsvärde och kontinuitet

De tre huvudbegreppen i denna modul är **funktion**, **gränsvärde** och **kontinuitet**. Lägg noga märke till vad de betyder, dvs hur de definieras. Till funktionsbegreppet finns en rad andra termer och begrepp som man måste behärska. De viktigaste är *definitionsmängd, värdemängd, funktionsgraf, tangent och normal till funktionsgraf, begränsad funktion, udda respektiv jämn funktion, styckvis definierad funktion, sammansättning av funktioner, absolutbeloppsfunktionen*. Dessa begrepp ska man både kunna definiera matematiskt och använda i problemlösning.

När det gäller **gränsvärde** så är det viktigt att förstå att gränsvärdesdefinitionen är till för att på ett precist sätt formulera begreppet gränsvärde. Man använder sällan själva definitionen för att beräkna gränsvärden – till detta har man andra metoder.

När det gäller **kontinuitet** så är det viktigt att komma fram till insikten att det finns en stor klass av funktioner, ofta kallade **elementära funktioner**, som är kontinuerliga i alla punkter i sina definitionsmängder. Det betyder att för dessa funktioner får man gränsvärdet i en punkt genom att räkna ut funktionsvärdet i punkten. Det är bara i punkter därr dessa funktioner inte är definierade som gränsvärdet är ett problem som måste undersökas. De elementära funktionerna är *polynom, rationella funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner, inversa trigonometriska funktioner – och alla kombinationer av dessa med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.*

För **kontinuerliga funktioner** definierade på **slutna och begränsade intervall** finns ett par viktiga satser. Dessa satser säger att sådana funktioner alltid antar ett största och ett minsta värde, och att om de tar två värden så tar de också alla värden däremellan.

KAN DU DET HÄR TILLRCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Denna uppgift handlar om linjer.

(a) Ange en ekvation för linjen genom $(5, -1)$ som har riktningskoefficient -2.
(b) Ange en ekvation för linjen som går genom punkterna $(1, -3)$ och $(-2, 5)$.
(c) Avgör om linjerna definierade av ekvationerna $8x+16y+5 = 0$ och $x = -2y + 33$ är parallella.
(d) Avgör om linjerna definireade av ekvationerna $8x + 9y + 5 = 0$ och $9x - 8y + 15 = 0$ är vinkelräta.
(e) Vad säger enpunktsformeln (point-slope equation) för linjens ekvation?

Uppgift 2. Lös nedanstående ekvationer.

$$a) \quad \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad b) \quad |2x+1| = 2.$$

Uppgift 3. Beräkna nedanstående gränsvärden.

$$a) \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2-4} \qquad b) \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$c) \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x^2-4} \qquad d) \lim_{x\to \infty} \frac{x-2}{x^2-4}$$

Uppgift 4. Beräkna nedanstående gränsvärden.

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x} \quad \text{och} \quad b) \quad \lim_{x\to \infty} \frac{x-\sin x}{x}.$$

Uppgift 5. Låt $f(x) = \dfrac{5x-1}{\cos 2x}$.

(a) Bestäm definitionsmngden till f.
(b) I vilka punkter är f kontinuerlig?
(c) Avgör om f är udda eller jämn.
(d) Är f begränsad?

Uppgift 6. Låt $g(t) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{t+1}}$.

(a) Bestäm definitionsmängden till g.
(b) I vilka punkter är g kontinuerlig?
(c) Avgör om g är udda eller jämn.
(d) Är g begränsad?

Uppgift 7. Låt $h(x) = |x| - |x+1|$.

(a) Bestäm definitionsmängden till h. I vilka punkter är h kontinuerlig?
(b) Skriv h som en styckvis definierad funktion, utan absolutbeloppstecken.
(c) Skissa grafen $y = h(x)$ och ange värdemängden till h.
(d) Är h begränsad?

Uppgift 8. Betrakta funktionen s given av

$$s(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0 \\ x+2, & 0 \le x < 2 \\ x^2, & x \ge 2 \end{cases}$$

(a) Vad är definitionsmngden till funktionen s?
(b) I vilka punkter är s kontinuerlig?
(c) Gör en skiss av funktionskurvan $y = s(x)$.

Uppgift 9. Enhetscirkeln består av alla punkter (x, y) i planet sådana att $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Är enhetscirkeln funktionsgrafen $y = f(x)$ till någon funktion f? Om ja, vilken? Om nej, varför inte?
(b) Är övre halvan av enhetscirkeln (dvs den del där $y \ge 0$) funktionsgrafen $y = f(x)$ till någon funktion f? Om ja, vilken? Om nej, varför inte?

Uppgift 10. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

har minst två olika lösningar i intervallet $-1 < x < 2$.

Uppgift 11. Avgör i vilka punkter funktionen f som ges av

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2t}{t}, & t \ne 0 \\ 2, & t = 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig.

Uppgift 12. Förklara hur du kan veta att

$$f(x) = \frac{\sin 47x - \cos^3 x}{x^{23} + 2x + 1}$$

måste anta ett största och ett minsta värde i intervallet $0 \le x \le 3$.

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

Svar till Uppgift 1:

(a) $y+1=-2(x-5)$. Kan också skrivas $y=-2x+9$.
(b) $y=-\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}$.
(c) Ja (ty de har samma riktningskoefficient).
(d) Ja (ty $k_2=-1/k_1$, dr k_1 och k_2 r riktningskoefficienterna).
(e) Läs i boken eller i er gymnasiebok (och kika gärna också på svaret till 4a)

Svar till Uppgift 2:

(a) $x=-\pi/8+n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal, eller $x=5\pi/8+n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
(b) Lösningarna är $x=1/2$ och $x=-3/2$.

Svar till Uppgift 3:

(a) $1/3$
(b) $1/4$
(c) Gränsvärde saknas (det är INTE ∞).
(d) 0

Svar till Uppgift 4:

(a) 0
(b) 1

Svar till Uppgift 5:

(a) Alla $x\neq\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$, n godtyckligt heltal. Tips: problemet är när nämnaren är noll.
(b) Alla $x\neq\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$, n godtyckligt heltal.
(c) Funktionen f är varken udda eller jämn.
(d) Nej.

Svar till Uppgift 6:

(a) Alla tal som är större än eller lika med 0 och alla tal mindre än -1. Tips: undvik negativt under rottecknet och undvik division med noll.
(b) Samma svar som i 2 a).
(c) Varken udda eller jämn.
(d) Nej.

Svar till Uppgift 7:

(a) Definitionsmängden är alla reella tal x. Funktionen är kontinuerlig överallt.
(b) För $x\geq 0$ är $h(x)=-1$. För x mellan -1 och 0 är $h(x)=-2x-1$. För $x\leq -1$ är $h(x)=1$.
(c) Det är lätt att rita grafen med hjälp av informationen i b). Värdemängden består av alla tal y sådana att $-1\leq y\leq 1$.
(d) Ja, $|h(x)|\leq 1$ för alla x.

Svar till Uppgift 8:

(a) Alla x.

(b) $x \neq 0$.
(c) Se sidorna 36 och 37 i boken för exempel p denna typ av funktion.

Svar till Uppgift 9:

(a) Nej. För varje x mellan -1 och 1 finns två olika möjliga värden på y.
(b) Ja, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Svar till Uppgift 10: Funktionen $f(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$ är kontinuerlig överallt och $f(-1) = 1,\ f(0) = -1,\ f(2) = 7$, så det följer av satsen om mellanliggande värden att funktionen har ett nollställe mellan -1 och 0 och ytterligare ett mellan 0 och 2.

Svar till Uppgift 11: Funktionen är kontinuerlig i alla punkter på reella axeln.

Svar till Uppgift 12: Funktionen är kontinuerlig i varje punkt av det slutna och begränsade intervallet $[0, 3]$. Det följer att största och minsta värde finns, enligt the max-min theorem (sid 83).