Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2018-2019

Arbetsmaterial till Seminarium 4

Uppgift 1. Från kursboken, kapitel 4.10.

(a) Uppgift 1. Taylorpolynomet av e^{-x} kring $x = 0$, av grad 4.
(b) Uppgift 5. Taylorpolynomet av $\sqrt{x}$ kring $x = 4$, av grad 3.
(c) Uppgift 9. Taylorpolynomet av $x^{1/3}$ kring $x = 8$, av grad 2. Använd detta för att approximera $9^{1/3}$.

Uppgift 2. Lt $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$.

(a) Bestäm definitionsmängden till f.
(b) I vilka punkter är f kontinuerlig?
(c) På vilka intervall är f strängt växande respektive strängt avtagande?
(d) Bestäm alla lokala extrempunkter till f.
(e) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to\infty} f(x)$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(f) Skissa funktionsgrafen $y = f(x)$.

Uppgift 3. Låt $h(t) = t + \cos t$.

(a) Bestäm alla kritiska punkter till h.
(b) Bestäm alla lokala extrempunkter till h.
(c) Avgör om h antar något största respektive minsta värde.
(d) Ange det största intervall där h är strängt växande.

Uppgift 4. Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = \dfrac{2 + x^2}{x}$.

Uppgift 5. Låt $f(x) = e^x$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 0$.
(b) Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera $1/\sqrt{e}$.
(c) Avgör om felet i approximationen i uppgift b) är mindre än $1/25$.

Uppgift 6. Låt $g(t) = \sqrt{t}$

(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till g kring punkten $t = 25$.
(b) Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera $\sqrt{26}$.
(c) Avgör om felet i approximationen i uppgift b) är mindre än $1/1000$.

Uppgift 7. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 kring $x = 0$ till funktionen $f(x) = \sin(2x)$, och använd det för att approximera $\sin(1)$.

Uppgift 8. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 kring $x = 0$ till funktionen $g(x) = e^{x^2}$, och använd det för att approximera e.

Uppgift 9. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 kring $x = 0$ till funktionen $h(x) = \ln(1 + x^2)$.

Uppgift 10. Beräkna följande gränsvärden.

(a) $\lim_{h\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1+h}}{h}$.
(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{x^2}}{x^2}$.

Uppgift 11. Betrakta ekvationen $x^5 + x - 1 = 0$.

(a) Visa med hjälp av derivata att ekvationen har högst en lösning.
(b) Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning som ligger mellan 0 och 1.
(c) Finn en approximation av lösningen genom att välja ett lämpligt startvärde och göra två iterationer av Newton-Raphsons metod.

Uppgift 12. Avgör om funktionen f som ges av $f(x) = x \ln x$ antar något största respektive minsta värde när x varierar i intervallet $0 < x \leq 5$ och bestäm i så fall dessa.

Uppgift 13. Avgör om funktionen $f(x) = x - \arcsin x$ antar något största respektive minsta värde och bestäm i så fall dessa.

Uppgift 14. Skissa, med hjälp av bl a en derivataundersökning, kurvan med ekvation $y = \ln\sqrt{1 + x^2} - \arctan x$.

Uppgift 15. Böjmotståndet W_b hos en balk med rektangulärt tvärsnitt med bredden b och höjden h ges av $W_b = bh^2 6$. Om man sågar en balk ur en rund trädstam med radien r, vilka mått ska balken ha om böjmotståndet ska maximeras?

Uppgift 16. En sfärisk tank med radie 5 dm fylls med vatten i en takt av 3 liter per minut. Hur snabbt stiger vattenytan i tanken vid den tidpunkt då djupet är 2 dm? Tips: Vattenvolymen V beror på vattendjupet d enligt formeln

$$V = \pi \frac{15d^2 - d^3}{3}.$$

Uppgift 17. Avgör om $f(x) = |x-1| + \sqrt{x+1}$ antar något största respektive minsta värde när x varierar i intervallet $[-1, 2]$ och bestäm i s fall dessa.

Uppgift 18. Ett flygplan flyger rakt med konstant hastighet 600 km/h och konstant höjd 5 km. Vid ett tillfälle passerar flygplanet rakt ovanför ett hus. Hur snabbt ändras avståndet mellan flygplanet och huset 1 minut senare?

Uppgift 19. Visa att ekvationen $2\arctan x = 6 - 3x$ har exakt en lösning och att lösningen ligger i intervallet $[1, 2]$. Använd Newton-Raphsons metod för att approximera lösningen.

Uppgift 20. Ge exempel på en funktion eller visa att ingen sådan funktion finns med följande egenskaper.

(a) Funktionen har definitionsmängd $\mathbf{R}$, och har ett globalt extremvärde i origo utan att derivatan i origo är noll.
(b) Funktionen har definitionsmängd $\mathbf{R}$, och saknar ett globalt extremvärde i origo trots att derivatan i origo är noll.
(c) Funktionen har definitionsmängd $\mathbf{R}$, och är strängt växande utan att derivatan är positiv överallt.
(d) Funktionen har definitionsmängd $\mathbf{R}$, och är inte är strängt växande, trots att derivatan är positiv överallt.

Uppgift 21. Bestäm värden på konstanterna a, b och c så att

$$|ae^{bx+cx^2} - 2x^2 - 4| \leq 10^{-4} \quad \text{då } |x| \leq 0.1.$$

Uppgift 22. Visa att $x((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x) \geq 6(x-1)$ för alla $x > 0$.