



Institutionen för Matematik

SF1625

Envariabelanalys

Läsåret 2018-2019

Lars Filipsson

Modul 2: Derivata

Huvudbegreppet i denna modul är **derivata**. Begreppets betydelse slås fast i en precis definition, men oftast är det inte definitionen man använder för att räkna ut derivator. Istället använder man de **deriveringsregler** som man härleder med hjälp av definitionen: produktregeln, kvotregeln och kedjeregeln.

Med hjälp av att kunna några grundläggande funktioners derivator och att behärska deriveringsreglerna, så kan man sedan derivera väldigt många funktioner. Det är viktigt att man blir riktigt bra på att derivera, så man måste **träna mycket** på detta! I denna modul börjar vi med denna träning, men den fortsätter i kommande moduler också.

Det är viktigt också att man förstår tolkningen av derivata som ett mått på funktionens förändringstakt i en punkt och att man kan använda detta för att approximera funktionen i närliggande punkter. Det senare kallas **linjär approximation** och är mycket användbart. Ett exempel på det är när man bestämmer tangenten till en funktionskurva.

Man bör dock observera att inte alla funktioner är deriverbara och att derivatans definition faktiskt ger ett villkor som avgör om funktionen är deriverbar eller inte. Det finns kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara. Se till att du kan ge exempel på sådana. En viktig sats säger att en funktion som är deriverbar i en punkt automatiskt är kontinuerlig i punkten.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJLV!

Uppgift 1. Låt $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till f .
- (b) I vilka punkter är f kontinuerlig?
- (c) Bestäm $f'(x)$.
- (d) I vilka punkter är f deriverbar?

Uppgift 2. Låt $g(x) = x \cos^2 x$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till g .
- (b) I vilka punkter är g kontinuerlig?
- (c) Bestäm $g'(x)$.
- (d) I vilka punkter är g deriverbar?

Uppgift 3. Låt $h(t) = |1 + t| + (1 + 3t^2)^{19}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till h .
- (b) I vilka punkter är h kontinuerlig?
- (c) Bestäm $h'(t)$.
- (d) I vilka punkter är h deriverbar?

Uppgift 4. Derivera nedanstående uttryck med avseende på x och ange i vilka punkter derivatan existerar.

i) $\frac{ax+b}{cx+d}$, ii) $\sqrt{1-x}$, iii) $\sqrt{1+x^2}$, iv) $|\sin x|$, v) $\cos(\sin x^2)$.

Uppgift 5. Bestäm ekvationer för tangentlinjen och normallinjen i punkten $(2, 3)$ till kurvan $y = x^3 - x - 3$.

Uppgift 6. Bestäm en ekvation för tangentlinjen i punkten $(4, 2)$ till kurvan $y = \sqrt{x}$. Kan du med hjälp av tangenten hitta ett närmevärde till $\sqrt{4.2}$?

Uppgift 7. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y = \tan x$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat $-\pi/6$.

Uppgift 8. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ strängt växande? Strängt avtagande?

Uppgift 9. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x - \tan x$ strängt växande? Strängt avtagande?

Uppgift 10. Betrakta funktionen s given av

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) I vilka punkter är funktionen deriverbar?
- (b) Beräkna om möjligt $s'(1)$ och ange en ekvation för tangenten till funktionskurvan $y = s(x)$ i den punkt på kurvan där $x = 1$.

Uppgift 11. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $x^3 + y^3 + y^2 - 4x = 5$ i punkten $(-1, 1)$.

Uppgift 12. Betrakta funktionen $f(x) = \cos x^2$. Beräkna $f^{(n)}(x)$ för $n = 1, 2, 3$.

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

Svar till Uppgift 1:

- (a) Alla $x \neq (2n+1)\pi$, n godtyckligt heltal. Dvs $x \neq \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$
- (b) Samma som ovan.
- (c) $f'(x) = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$
- (d) Samma som a) och b).

Svar till Uppgift 2:

- (a) Alla x
- (b) Samma svar som i a).
- (c) $g'(x) = \cos^2 x - 2x \cos x \sin x$.
- (d) Samma svar som a) och b).

Svar till Uppgift 3:

- (a) Definitionsmängden är alla reella tal t .
- (b) Funktionen är kontinuerlig överallt.
- (c) För $t > -1$ är $h'(t) = 1 + 114t(1 + 3t^2)^{18}$. För $t < -1$ är $h'(t) = -1 + 114t(1 + 3t^2)^{18}$
- (d) Funktionen är deriverbar överallt utom i punkten $t = -1$.

Svar till Uppgift 4:

- (a) $\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ är definierat för $x \neq -d/c$.
- (b) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ är definierat för $x < 1$
- (c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ är definierat för alla x
- (d) $\cos x$ om $2n\pi < x < (2n+1)\pi$ och $-\cos x$ om $(2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi$, n godtyckligt heltal. Definierat för alla $x \neq n\pi$, n heltal.

(e) $-(\sin(\sin x^2)) \cdot (\cos x^2) \cdot 2x$, definierat för alla x

Svar till Uppgift 5: Tangentlinjen: $y - 3 = 11(x - 2)$. Normallinjen:

$$y - 3 = -\frac{1}{11}(x - 2).$$

Svar till Uppgift 6: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$. Vi får $\sqrt{4.2} \approx 2.05$

Svar till Uppgift 7: $y + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Svar till Uppgift 8: Strängt växande på intervallen $x \geq 2$ och $x \leq 0$. Strängt avtagande på intervallet $0 \leq x \leq 2$.

Svar till Uppgift 9: Funktionen är strängt avtagande på intervallen $\frac{(2n+1)\pi}{2} <$

$x < \frac{(2n+3)\pi}{2}$ för godtyckligt heltal n . Funktionen är inte växande på något intervall. (Tips: $\tan x$ är inte definierat när $\cos x = 0$).

Svar till Uppgift 10:

(a) Funktionen är deriverat överallt utom i punkterna $x = 0$ och $x = 2$.

(b) $s'(1) = 1$ och den sökta tangentlinjens ekvation är $y = x + 2$.

Svar till Uppgift 11: $y - 1 = \frac{1}{5}(x + 1)$ (Tips: implicit derivering).

Svar till Uppgift 12: $f'(x) = -2x \sin x^2$,

$$f''(x) = -2 \sin x^2 - 4x^2 \cos x^2,$$

$$f'''(x) = -12x \cos x^2 + 8x^3 \sin x^2.$$