



KTH Teknikvetenskap

**SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
2011-03-16**

Skrivtid: 5 timmar

Hjälpmittel: Inga

Examinator: Lars Filipsson

Kursansvariga lärare: Jockum Aniansson, Kristian Bjerklöv, Karim Daho, Tomas Ekholm, Lars Filipsson, Armin Halilovic, Jens Hoppe, Göran Hulth, Axel Hultman, Kirsti Mattila, Serguei Shimorin, Jan-Olov Strömberg.

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På uppgifterna 1-3, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja poängen från den löpande examinationen från 3 till 4 poäng krävs att hela uppgiften lösas korrekt. Resultatet från den löpande examinationen kan endast tillgodosätta vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4-6 utgör del B och uppgifterna 7-9 utgör del C. Del C är främst till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av:

Betyg: A B C D E Fx

Poängsumma: 27 24 21 18 16 15

Poäng del C: 6 3 - - - -

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar förklaras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng. *Lycka till!*

————— DEL A ————

1. Skissa kurvan $y = \frac{e^{-x}}{2x-1}$ med hjälp av ett teckenstudium av derivatan.
Bestäm alla lokala extrempunkter och asymptoter.
2. Betrakta integralen $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 x \sin x \, dx$.
 - A. Använd substitutionen $u = \cos x$ för att skriva om integralen.
 - B. Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i uppgift A.
3. Beräkna volymen av den rotationskropp som fås då området som begränsas av kurvan $y = \sqrt{x}e^{-x}$, linjen $x = 2$ och x -axeln roterar kring x -axeln.

————— DEL B ————

4. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \frac{x}{3-x}$.
5. Betrakta differentialekvationen $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2t$.
 - A. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
 - B. Bestäm den lösning som också uppfyller $y(0) = 3$ och $y'(0) = 4$.
6. En 10 meter hög cylindrisk silo med radie 2 meter är fullpackad. Man antar att materialet som fyller silon har en densitet ρ som varierar med höjden så att densiteten på höjden x över bottenplattan ges av formeln $\rho(x) = 100 - x^2$ kilogram per kubikmeter. Hur mycket väger materialet i silon?

————— DEL C ————

7. A. Förklara i vilken mening $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ är en generaliserad integral och avgör om den är konvergent eller divergent.
B. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$ är konvergent eller divergent.
8. Bestäm $a \in \mathbf{R}$ så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^3 - 8) \sin(x-2)}{(x-2)^2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig. Är f sedan deriverbar i alla punkter $x \in \mathbf{R}$?

9. A. Bestäm det största intervallet $(0, d)$, med $d > 0$, där funktionen $f(x) = x^4 - 4x^2$ har invers. Bestäm också intervallet där inversen f^{-1} är definierad.
B. Bestäm inversen f^{-1} .