

Institutionen för Matematik, KTH,  
Olle Stormark.

**Tentamen i SF1625 Envariabelanalys för E,  
07–12–17, kl. 8.00–13.00.**

- Inga hjälpmaterial.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning  $i$  (där  $i = 1, 2, 3, 4$ ) får automatiskt full poäng på tal  $i$ .
- Betygsgränser: 25–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 p ger betyget D och 14–16 p ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall.
- För äldre teknolger ges betygen 5, 4, 3, K (eller U) med krav som för A, B/C, D/E respektive Fx.

1. Låt  $f(x) = xe^{-1/x}$  då  $x \neq 0$ . Beräkna gränsvärdena  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  och  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , samt bestäm eventuella sneda asymptoter då  $x \rightarrow \pm\infty$ . Använd sedan dessa resultat för att skissa funktionens graf. (3p)

2. Visa att  $\ln x \leq x - 1$  då  $x > 0$ . (3p)

3. Beräkna

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx. \quad (3p)$$

4. Visa att

$$\left| e^{-x^2} - 1 + x^2 \right| \leq \frac{x^4}{2}$$

för alla  $x$ . (3p)

5. Visa att

$$y = \sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

har en invers på intervallet  $(-\infty, \infty)$ , samt beräkna denna.

*LEDNING:* Om  $y = (e^x - e^{-x})/2$  multipliceras med  $e^x$  så fås en andra-gradsekvation med avseende på  $e^x$ . (4p)

6. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' + 4y = \sin 2x. \quad (4p)$$

7. Beräkna integralen

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos x}{2 - \sin x} dx.$$

*LEDNING:* Substitutionen  $u = \tan x/2 \implies$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{och} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

vad  $dx$  blir får du fundera ut själv. (4p)

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

*LEDNING:* Gör liknämnigt först! (4p)

**Lycka till!**  
**Olle.**