

KTH Matematik,
Karim och Olle.

**Tentamen i SF1625 Envariabelanalys för E, IT och ME,
08–06–04, kl. 8.00–13.00.**

- Inga hjälpmmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i .
- Betygsgränser: 25–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 p ger betyget D och 14–16 p ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Karim eller Olle i så fall.
- För äldre teknolger ges betygen 5, 4, 3, K (eller U) med krav som för A, B/C, D/E respektive Fx.

1. För vilka (reella) tal a har ekvationen

$$4^x + 2^{x+1} = a$$

någon (reell) lösning? Bestäm (de reella) lösningarna för dessa a . *Ledning:*
Sätt till exempel $t = 2^x$. (3p)

2. Låt $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x+1)}$.

- (a) Bestäm alla x för vilka $f(x)$ är definierad (som en reell funktion).
(2p)
- (b) Bestäm tangentlinjen till kurvan $y = f(x)$ genom punkten $(0, 1)$ på denna kurva.
(1p)

3. Beräkna integralen

$$\int \frac{x}{(1-x)^3} dx. \quad (3p)$$

4. Beräkna de fem första från noll skilda termerna i MacLaurinutvecklingen av funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right). \quad (3p)$$

5. Beräkna följande gränsvärden och MOTIVERA dina svar (till exempel genom att utnyttja kända standardgränsvärden).

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad (1p)$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad (1p)$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}. \quad (1p)$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\ln(x+1) - \ln x). \quad (1p)$$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = x, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \quad (4p)$$

7. Beräkna först arean $A(b)$ av det område i xy -planet som begränsas av x -axeln, de vertikala linjerna $x = 0$, $x = b$ (där $b > 0$) och kurvan $y = x \cdot (x^2 + 2)^{-3/2}$. Visa sedan att $\lim_{b \rightarrow \infty} A(b)$ existerar samt beräkna detta gränsvärde. (4p)

8. Funktionen $f(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3x + 2} & \text{då } x \neq -1, -2, \\ f(1) = 2. \end{cases}$$

(a) Beräkna Taylorutvecklingen av $f(x)$ omkring punkten $x = 1$ till och med ordningen 2. (2p)

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - x - 5}{(x - 1)^2}. \quad (2p)$$

Lycka till!
Karim och Olle.