Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2018-2019

Arbetsmaterial till Seminarium 6

Uppgift 1. Uppgifter från boken, kapitel 7.1:

(a) Uppgift 1. Volym av området vi får genom att rotera omkring x-axeln området R som begränsas av $y = x^2$, $y = 0$ och $x = 1$.
(b) Uppgift 3. Volym av området vi får genom att rotera omkring x-axeln området R som begränsas av $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$, mellan $x = 0$ och $x = 1$.
(c) Uppgift 5. Volym av området R roterad om a) x-axeln, och b) y-axeln, där R begränsas av $y = x(2 - x)$ och $y = 0$, mellan $x = 0$ och $x = 2$.
(d) Uppgift 13. I en sfär av radie 2, borras ett hål med radie 1 genom centret. Procentuellt hur stor del utgör hålet?
(e) Uppgift 19. Volym av ellipsoiden vi erhåller genom att rotera ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ omkring x-axeln.
(f) Uppgift 21. Området R begränsas av $y = e^{-x}$ och $y = 0$, och $x \geq 0$. Bestäm volymen när R roteras omkring a) x-axeln, och b) omkring y-axeln.

Uppgift 2. Ange på vilket sätt nedanstående integraler är generaliserade och beräkna dem.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}\,dx \qquad \int_0^\infty xe^{-x}\,dx$$

Uppgift 3. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta. Du behöver inte beräkna dem.

$$a) \quad \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{2-x}}\,dx, \qquad b) \quad \int_1^\infty \frac{1+x+\ln x}{1+e^x}\,dx$$

Uppgift 4. Ge exempel på en funktion som inte är integrerbar och förklara varför funktionen inte är integrerbar.

Uppgift 5. Funktionen $f(x) = e^{x^2}$ är kontinuerlig på hela det slutna intervallet $[0, 1]$ och är därför integrerbar. Änd går det inte att på vanligt sätt skriva upp en primitiv funktion till den. Finns det någon motsägelse här?

Uppgift 6. Konvergerar eller divergerar integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$?

Uppgift 7. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}e^n} \int_n^{n+1} \sqrt{x}e^x\,dx.$

Uppgift 8.

(a) Parametrisera enhetscirkeln centrerad omkring origo, moturs.
(b) Parametrisera cirkeln med radie 2, centrerad omkring origo, moturs.
(c) Parametrisera enhetscirkeln centrerad omkring $(1, 2)$, moturs.
(d) Parametrisera enhetscirkeln, centrerad omkring origo, medurs.
(e) Parametrisera ellipsen $3x^2 + 4y^2 = 12$, moturs.
(f) I uppgifterna a-e ovan ge en ny parametrisering med ett annat intervall. Tex, om du har använt intervallet $[0, 2\pi]$, and nu istället intervallet $[0, 1]$.
(g) I uppgifterna a-d ovan, ge också en ekvation för kurvan.

Uppgift 9. Bestäm summorna

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{6^i}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^i}, \quad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{5^i}.$$

Uppgift 10. Bestäm vad sekvensen $\{a_n\}$ konvergera mot när

$$a_0 = 2, a_1 = 6, a_2 = 3, a_3 = 1/6, a_4 = 7/36, ..., a_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} 1/6^i$$

för varje $n \geq 1$.

Uppgift 11. Du har fem alternativ $A_1, \ldots, A_5$, och en tärning med sex sidor. Tärningen slås, och om den visar talet $1 \leq i \leq 5$, då väljs alternativet A_i. Om tärningen visar 6, då slås tärningen om. Ställ upp den serie som beskriver sannolikheten att alternativ A_1 väljs, och visa att denna sannolikhet är $1/5$.