

Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1

18 Augusti 2022

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska Institutionen

Examinator: Jan Snellman

Alla problem ger maximalt 3 poäng. Full poäng kräver fullständig lösning. 6p räcker för betyg 3, 9p för betyg 4, 12p för betyg 5.

Med μ avses Möbiusfunktionen, den multiplikativa funktion som uppfyller $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ för p primtal, och $\mu(n) = 0$ för alla n som delas av kvadraten av ett heltal. Med $[x]$ avses heltalsdelen, dvs avrundning nedåt till närmsta heltal.

- 1) Definiera $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$ för alla irrationella x . Visa att det finns oändligt många irrationella $0 < x < 1$ så att $f(f(x)) = f(x)$.
- 2) Hitta alla kubrötter till $3 \pmod{7^n}$, för $1 \leq n \leq 3$.
- 3) Visa att $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$ för alla positiva heltal n .
- 4) Visa att det finns oändligt många positiva heltal n så att $\mu(n-1) + \mu(n) + \mu(n+1) = 0$. (Ledning: studera kongruensklasser $\pmod{900}$.)
- 5) Låt n vara ett positivt heltal som är en summa av tre kuber. Visa att $n \not\equiv 4 \pmod{9}$ och att $n \not\equiv 5 \pmod{9}$.