Lösningar till Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1
22 aug 2024 kl 14-18
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jan Snellman

1) Hur många lösningar har kongruensen

$$x^4 + 2x + 4 \equiv 0 \mod 625?$$

Lösning: Kalla polynomet för $f(x)$. Modulo 5 finns inga lösningar; alltså finns inga lösningar modulo 5^4.

2) Hitta alla rationella punkter på kurvan

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0.$$

Annorlunda uttryckt, hitta alla rationella lösningar till ekvationen (inte bara heltalslösningar).

Lösning: Vi har de triviala lösningarna $(1, 0), (-1, 0)$. Linjen $y = t(x+1)$ skär ellipsen i $(-1, 0)$ samt i $\frac{1}{2t^2+1}(1 - 2t^2, 2t)$. Det ger en bijektion mellan rella linjen och kurvan minus punkten $(-1, 0))$. Inversen ges av $(x, y) \mapsto \frac{y}{x+1}$. Båda dessa avbildningar respekterar rationalitet, så de rationella punkterna på kurvan är $(-1, 0)$ samt $\frac{1}{2t^2+1}(1 - 2t^2, 2t)$ för $t \in \mathbb{Q}$.

3) Hur många lösningar har kongruensen $x^2 \equiv 187 \mod 23$?

Lösning: 23 är ett primtal, och $\left(\frac{187}{23}\right) = \left(\frac{3}{23}\right) = -\left(\frac{23}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = 1$. Alltså har 187 precis 2 kvadratrötter modulo 23 (dessa är $x \equiv \pm 7 \mod 23$).

4) Hur många lösningar har kongruensen $x^2 \equiv 23 \mod 187$?

Lösning: $187 = 11 * 17$ och $\left(\frac{23}{17}\right) = \left(\frac{6}{17}\right) = \left(\frac{2}{17}\right)\left(\frac{3}{17}\right) = -1$, så lösningar saknas modulo 17. Alltså finns det inga lösningar modulo 187.

5) Låt $r = 117/119$. Hitta positiva heltal a, b med $b < 119$ så att

$$|a/b - r| \leq |c/d - r|$$

för alla positiva heltal c, d med $d < 119$.

Lösning: Kedjebråksutvecklingen är $117/118 = [0; 1, 58, 2]$ med konvergenter $0, 1, 58/59, 117/118$. Enligt sats i boken kan ingen rationell approximation till $117/118$ slå $58/59$ utan att ha större nämnare. (Samma sak gäller i och för sig också för den triviala approximationen $1/1$).

6) Låt $\tau(n)$ beteckna antalet positiva delare till det positiva heltalet n, och låt $\lfloor r \rfloor$ beteckna heltalsdelen av r. Gäller det att

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

för alla positiva heltal n? Ge bevis eller motexempel.

Lösning:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \tau(k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq d \leq k,\, d|k} 1 \\
&= \sum_{d=1}^{n} \sum_{1 \leq k \leq n,\, k \in d\mathbb{Z}} 1 \\
&= \sum_{1 \leq d \leq n} \lfloor n/d \rfloor
\end{aligned}$$