

Tentamen i Envariabelanalys 1

2024-03-21 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmittel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.
För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialalkalkyl

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$. Ange alla lodräta och vågräta asymptoter, lokala extempunkter samt värdemängden till f .
 2. Undersök gränsvärdena
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{4 - x^2}$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(x^2 + 3x) - 2 \ln x)$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2^{x+2}}{x^2 + 2^{x-2}}$.
-

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

$$(a) \int \frac{x^2}{x+2} dx \quad (b) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (c) \int e^{\cos x} \sin 2x dx.$$

4. Beräkna $\int_1^3 \frac{10}{x^3 - 2x^2 + 5x} dx.$

Del B

5. (a) Ange definitionen av att $\int_1^\infty f(x) dx$ är konvergent om f är kontinuerlig på \mathbf{R} .

(b) Beräkna $\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x} \right) dx$ eller visa divergens.

6. Bestäm minsta avståndet från punkten $(-2, 0)$ till kurvan $y = f(x) = (x-1)^2$ om ett sådant existerar.

7. I varje deluppgift, finn en funktion $f(x)$ med de uppräknade egenskaperna, alternativt bevisa att det inte finns någon sådan funktion.

(a) $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar för alla reella x men f är inte 2 gånger deriverbar.

(b) $f(x)$ är deriverbar för alla reella x men $f'(x)$ är inte kontinuerlig.

(c) $f(x)$ är deriverbar för alla $x > 0$ och $f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ men $f'(x)$ går inte mot 0 då $x \rightarrow \infty$.
