LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2022-04-20

1. a) $y = -6x + 13$.

b) $v = 45°$ och $v = 135°$.

c) $\lg(16/11)$.

d) $(x + 4)(x + 2)$.

e) Saknar lösning.

f) $x \geq 2$ eller $x \leq -1/3$.

2. a) $1/2$.

b) $1/2$.

c) m/n.

3. $a = 6$ och $b = -9$. Nej, f är inte två gånger deriverbar.

4. $\pi\dfrac{(n+1)n}{2}r$.

5. Definitionsmängden är $]-\infty, -e[\cup]e, \infty[$ och $f'(e^2) = \dfrac{1}{2e^2 \ln 2}$.

6. Låt P ha koordinaterna $(a, c/a)$. Derivering ger att tangentlinjens riktningskoefficient är $k = -c/a^2$. Tangentlinjens ekvation kan därför beräknas till exempel med enpunktsformeln:

$$y - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a^2}(x - a).$$

Sätter vi $x = 0$ får vi att tangentlinjen skär y-axeln i $(0, 2c/a)$, och om vi istället sätter in $y = 0$ får vi att tangentlinjen skär x-axeln i $(2a, 0)$. Linjen $x = a$ är en parallelltransversal till linjen $y = 0$ i triangeln som bildas mellan tangenten och koordinataxlarna. Transversalsatsen ger nu att $PN = PM$.

7. Det minsta avståndet är $d/2$ och det inträffar då $t = \dfrac{d}{2v}$.

8. *Bevis med Pythagoras sats* Drag höjden AP och använd Pythagoras sats på de trianglar som uppkommer. Vi kan alltid namnge hörnen så att P ligger mellan B och D. Vi kan då skriva AD^2 på två sätt:

$$\begin{aligned}
AD^2 &= AP^2 + PD^2 = AB^2 - BP^2 + PD^2 = AB^2 - (BP + PD)(BP - PD)\\
&= AB^2 - BD(BP - PD) = AB^2 - \frac{1}{2}BC(BP - PD),\\
AD^2 &= AP^2 + PD^2 = AC^2 - CP^2 + PD^2 = AC^2 - (CP + PD)(CP - PD)\\
&= AC^2 - (CP + PD)CD = AC^2 - \frac{1}{2}BC(CP + PD),
\end{aligned}$$

där vi även använde att D är mittpunkten på sidan BC i sista steget.
Om vi adderar de ovanstående två ekvationerna får vi

$$2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC(BP + CP) = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2.$$

Alternativt bevis med cosinussatsen: Låt $\angle BDA$ betecknas med θ. Då är $\angle CDA = 180^\circ - \theta$. Cosinussatsen i trianglarna ΔABD och ΔADC ger

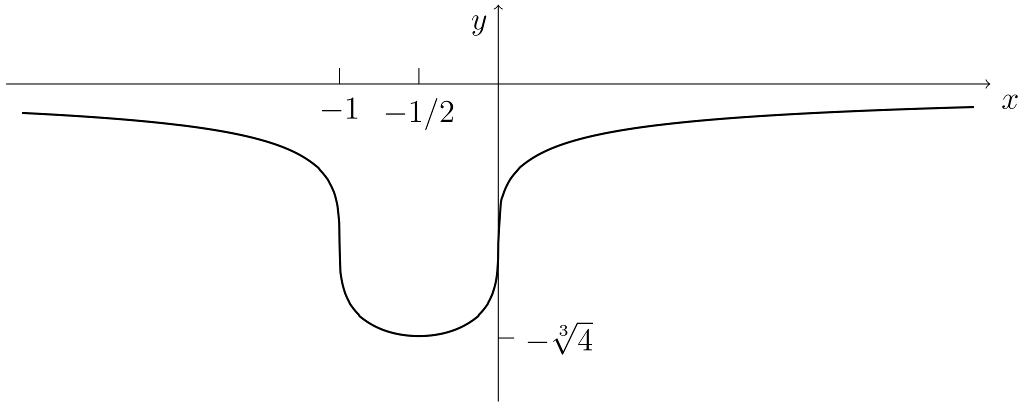
$$\begin{cases} AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\theta,\\ AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \theta).\end{cases}$$

Om vi använder att $BD = DC$ och $\cos(180^\circ - \theta) = \cos\theta$ i sista termerna i var och en av ovanstående ekvation, får vi att de sista termerna i VL är lika fast med omvänt tecken. Om vi adderar ekvationerna får vi därför

$$\begin{aligned}
AB^2 + AC^2 &= 2AD^2 + BD^2 + DC^2\\
&= 2AD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2\\
&= 2AD^2 + \frac{BC^2}{2}.
\end{aligned}$$

Omgruppering av ovanstående ger det sökta uttrycket.

9. Stationära punkter: $x = -1/2$. Derivatan är odefinierad då $x = 0$ och då $x = -1$, men f är ändå kontinuerlig i dessa punkter (där tangentlinjerna är lodräta). Vi har $f(0) = -1$ och $f(-1) = -1$. Teckenstudium av derivatan visar att f är avtagande då $x < -1/2$ och växande då $x > -1/2$. Vi har $f(-1/2) = -2/\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{4}$. Det finns inga punkter där f är odefinierad och inte heller några lodräta asymptoter. $y = 0$ är en vågrät asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. En skiss av grafen visas i figuren nedan.



10. *Svar:* p' har 2021 reella nollställen.
Bevisskiss: p' har grad 2021 och kan alltså högst ha 2021 reella nollställen (p.g.a. faktorsatsen). I varje intervall $[k, k+1]$, där $1 \leq k \leq 2021$, k heltal, är p noll vid ändpunkterna. Medelvärdessatsen (Rolles sats) ger att det finns (minst) ett nollställe till p' i intervallet $]k, k+1[$. Eftersom det finns 2021 sådana (disjunkta) intervall, visar detta att p' har (minst) 2021 nollställen i $\mathbb{R}$.
Tillsammans visar detta att p' har precis 2021 reella nollställen.
Alternativt bevis: Derivering ger att $p'(x)$ är en summa med 2022 termer där varje term är en produkt av 2021 faktorer $(x-j)$. Om vi sätter in $x = k$ för $k = 1, \ldots, 2022$ får vi att alla utom en av de 2022 termerna är 0. För ett godtyckligt $k \in \{1, \ldots, 2022\}$ får vi på liknande sätt

$$p'(k) = \prod_{j=1}^{k-1}(k-j) \cdot \prod_{j=k+1}^{2022}(k-j).$$

(där vi använder konventionen att en produkt med 0 termer är 1). Notera att för den första gruppen av faktorer är $k - j > 0$ medan för den andra gruppen av faktorer är $k - j < 0$. Då det är $2022 - k$ negativa faktorer, vilket är udda om k är udda och jämnt om k är jämnt, får vi alltså (för $k = 1, \ldots, 2022$) att $p'(k) > 0$ då k är jämnt och $p'(k) < 0$ då k är udda (och $k \in \{1, \ldots, 2022\}$).
Speciellt har $p'(k)$ och $p'(k+1)$ alltid olika tecken då $k = 1, \ldots, 2021$. Då p' är kontinuerlig kan vi använda satsen om mellanliggande värde på varje intervall $[k, k+1]$, vilket visar att det finns (minst) en punkt i varje sådant intervall där derivatan är 0. Eftersom det finns 2021 sådana intervall har vi visat att p' har minst 2021 nollställen i $[1, 2022]$.
Då ett polynom av grad 2021 kan ha högst 2021 reella nollställen kan vi slå fast att p' har precis 2021 reella nollställen.