

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

## Godkändtel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

- a) Låt  $l$  vara linjen som går genom punkterna  $(2, 1)$  och  $(3, 5)$ .

Ange en ekvation för  $l$  på formen  $y = kx + m$ .

- b) Vad är  $\tan 120^\circ$ ? Ange det exakta värdet.

- c) Lös ekvationen

$$\ln(x^2) = \ln(x^4).$$

- d) Förenkla  $\lg(1000^3)$ , där  $\lg$  betecknar logaritmen med bas 10.

- e) Lös ekvationen  $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$ .

- f) Lös olikheten

$$\frac{-4x + 9}{x - 2} > 0.$$

2. Beräkna följande gränsvärden eller oegentliga gränsvärden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + \pi} - \sqrt{x^2 - e} \right),$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{x^2}.$

3. a) Lös ekvationen

$$\sin 3x = \cos 2x.$$

- b) Bestäm en amplitud  $A > 0$  och fasförskjutning  $\varphi$  så att

$$\cos(3x) - \sin(3x) = A \sin(3x + \varphi).$$

4. Skissa grafen till funktionen

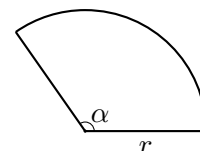
$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 4x + 5}.$$

Ange speciellt alla asymptoter och lokala extrempunkter.

5. a) Låt  $f$  vara en funktion som är definierad i en omgivning av en punkt  $a \in \mathbb{R}$ . Definiera vad som menas med att  $f$  är deriverbar i  $a$ .

- b) Använd derivatans definition för att visa att  $f'(x) = e^x$  då  $f(x) = e^x$ .

6. 20 meter ståltråd ska användas för att inhägna en blomrabatt i form av en cirkelsektor med en vinkel  $\alpha$  mellan 0 och  $\pi$  och radie  $r$  (se figur). För vilken radie på cirkelsektorn är rabattens area som störst, och vilken är den maximala arean?



## Överbetygsdel

Om du klarat godkänddelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Låt  $f$  definieras av

$$f(x) = \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right), \quad x \in ]-1, 1[.$$

- a) Visa att  $f$  är en udda funktion.  
b) Visa att det för alla  $x, y \in ]-1, 1[$  gäller att

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y).$$

8. a) Bestäm definitionsmängden  $D_f$  för

$$f(x) = (\ln x) \sum_{j=1}^{\infty} x^j.$$

Definitionsmängden ska väljas så stor som möjligt.

- b) Finns det någon kontinuerlig funktion  $g$  definierad för alla  $x \geq 0$  sådan att  $f(x) = g(x)$  för alla  $x \in D_f$ , där  $f$  är funktionen från deluppgift a)? Bestäm i så fall en sådan funktion  $g$  och ange  $g(0)$  och  $g(1)$ .
9. a) Bestäm alla trianglar  $\triangle ABC$  som uppfyller

$$|BC| \cos A = |AC| \cos B.$$

- b) Bestäm alla trianglar  $\triangle ABC$  vars sidor och vinklar uppfyller

$$|BC| \cos A = |AC| \cos B = |AB| \cos C.$$

10. Vid tillverkning av en växelströmsomvandlare behöver man i spolen sätta in en korsformad järnkärna med så stor tvärsnittsarea som möjligt. Se figur nedan. Bestäm den största möjliga tvärsnittsarean som korset kan ha, då spolens tvärsnittsradie är  $a$ . Vilket eller vilka värden på  $x$  i figuren ger upphov till den maximala arean?

Du kan anta att korset är spegelsymmetriskt med avseende på en horisonell och en vertikal axel genom centrum och dessutom rotationssymmetrisk vid rotation med vinkeln  $\pi/2$  kring samma centrum.

