

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.
Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkändtdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas.
0-3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.
 - a) Förenkla uttrycket $\frac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{1/a}}$.
 - b) Låt l vara linjen som går genom punkten $(1, 2)$ och är ortogonal mot linjen $y = \frac{x}{2}$.
Ange linjens ekvation på formen $y = kx + m$.
 - c) Ange alla vinklarna mellan 0 och 360 grader sådana att $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ och $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - d) Bestäm konstanten a så att $x = 3$ löser ekvationen $x^2 - 3x + a = 0$.
 - e) Lös ekvationen $x = \sqrt{6 - x}$.
 - f) Lös ekvationen $\ln x + \ln(x + 2) = 0$.
2.
 - a) Utgå från en lämplig potenslag för att bevisa logaritmlag för $\log \frac{x}{y}$.
 - b) Finn alla reella x som uppfyller ekvationen $6|x + 1| \geq x^2 + 3$.
3. Låt $f(x) = 3 + \sin(x)$ och $g(x) = k + 2\cos(x)$ där k är en konstant. Bestäm minsta k så $f(x) \leq g(x)$ för alla x .
4. Avgör om gränsvärdena nedan existerar och beräkna dem:
 - a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$,
 - b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$,
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - |x|}{x^2}$.
5. Rita kurvan $y = x + 2 \arctan(1/x)$. Ange asymptoter och lokala extempunkter.
6. En linje genom punkten $(1, 2)$ skär axlarna, i den 1:a kvadranten, i två punkter som tillsammans med origo bildar en rätvinklig triangel. Hur ska linjen dras för att triangelns area ska bli så liten som möjligt?

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel.

Om du klarat godkändtdelen så kan du få överbetyg genom att lösa nedanstående problem. För att få betyg 4 krävs minst 3 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. Ett fyrtorn är beläget på en liten ö 3 km bort från den närmaste punkten P på en rak strandlinje, och dess ljus roterar med hastigheten 4 varv per minut. Hur snabbt rör sig ljusstrålen längs strandlinjen när den är 4 km bort från punkten P ?
8. a) Bevisa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är positiv så är funktionen strängt växande.
b) Visa att $\ln(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x} + \frac{x}{2} > 0$ för alla $x > 0$.
9. Betrakta den begränsade kurvan G som uppfyller ekvationen $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$. Hitta intervallet av alla möjliga värden på x -koordinater för punkter på kurvan.

LYCKA TILL!