

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. 15 poäng ger säkert godkänt.

1. a) Vad blir resten av talet 10^{1000} vid division med 7? 2 p

- b) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$3^x \equiv 9 \pmod{13},$$

där x ska vara ett heltal mellan 0 och 12.

3 p

2. Vi definierar tre linjer L_1, L_2, L_3 som beror av parametern a på följande sätt:

$$L_1 : \begin{cases} x = at \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad L_2 : \begin{cases} x = t \\ y = at \\ z = t \end{cases}, \quad L_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = at \end{cases}.$$

- a) För vilka värden på a är L_1, L_2, L_3 parallella? 2 p

- b) För vilka värden på a ligger L_1, L_2, L_3 i samma plan? 3 p

3. I parallellepipeden med hörn i A, B, C, D, E, F, G, H (se figur) utgör $e_1 = \overrightarrow{AB}, e_2 = \overrightarrow{AD}, e_3 = \overrightarrow{AE}$ en bas och $f_1 = \overrightarrow{AC}, f_2 = \overrightarrow{AF}, f_3 = \overrightarrow{AH}$ en annan. Om vektorn u har koordinater $(2, 3, -1)$ med avseende på basen e_1, e_2, e_3 , vilka koordinater har u med avseende på basen f_1, f_2, f_3 ? 5 p

4. Betrakta de fem bokstäverna A, B, C, D, E .

- a) Hur många ”ord” kan bildas genom att permutera dessa bokstäver? 1 p

- b) Hur många av dessa ord innehåller inte bokstavsföljden ABC ? 2 p

- c) Hur många av dessa ord innehåller varken bokstavsföljden ABC eller CDE ? 2 p

5. Faktorisera polynomet $p(x) = x^8 - 16$ så långt som möjligt i reella faktorer. 5 p

6. a) Följande matriser representerar en spegling, en projektion och en rotation med avseende på en ON-bas. Avgör vilken som är vilken! Svar utan motivering ger ingen poäng. Däremot behöver inga speciella egenskaper som t ex rotationsaxel eller speglingsplan anges.

$$A_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -4 & -7 & -4 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

2 p

- b) Bestäm matrisen för den avbildning i rummet \mathbb{R}^3 som består i att vi först vrider ett kvarts varv runt z -axeln (i den riktning för vilken restriktionen till xy -planet blir en vridning i positiv led) och sedan speglar i planet $x + z = 0$. (ON-bas) 3 p

