LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2024-08-28 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar ska lämnas när så är möjligt.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng pa denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. *Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.*

a) För vilka vinklar v, med $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$, gäller det att $\sin v = \frac{1}{2}$?

b) En cirkel med radie 1 har medelpunkten i skärningspunkten av de två linjer som ges av $y = x$ och $y = -x + 1$. Ange cirkelns ekvation.

c) Bestäm talet a sådant att $x - 1$ blir en faktor till polynomet $x^3 - 2x^2 - x - a$, och faktorisera, för detta värde på a, polynomet i två faktorer.

d) Lös olikheten $\dfrac{x^2 - 1}{2 - x} < 0$.

e) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x \to \pi/4} \frac{\tan x}{x}(x^{-1} + \sin^2 x)$.

f) Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = \ln(\tan^2 x)$.

Svar.
a) $v = 30^\circ$ *och* $v = 150^\circ$
b) Medelpunkten är $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. *Sedan är cirklen givet vid* $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$.
b) $a = -2$. *Polynomet kan skrivas i två faktorer:* $x^3 - 2x^2 - x - a = (x-1)(x^2 - x - 2)$
d) Analys med teckentabel ger $-1 < x < 1$ *eller* $x > 2$.
e) Insättning av $x = \pi/4$ *ger gränsevärdet* $\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{16}{\pi^2}$. *f)* $f'(x) = \dfrac{2}{\sin x}\dfrac{1}{\cos x}$

2. Beräkna nedanstående gränsvärdena:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x)}{x + \sin 2x}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos^3(x) - 1}{\cos^2(x) - 1}$

Svar. a) Gränsvärdet är -1/3. b) Gränsvärdet är 3/2.

3. Lös ekvationerna

a) $|x - 2| + 2|x - 1| = 5$. b) $\ln(6 - x) - 2\ln x = 0$.

Svar.
a) Lösningarna är $x = -1/3$ *och* $x = 3$.
b) Lösningen är $x = 2$ *(*$x = -3$ *är en falsk rot).*

4. a) Härled derivatan av funktionen $f(x) = \arctan(x)$ genom att använda derivata av invers funktion.

b) Ange den största möjliga definitionsmängden D_f för funktionen $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ samt beräkna derivatan $f'(x)$ för alla x i D_f.

Svar.

a) Derivatan är $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
b) Definitionsmängden D_f *är mängden av alla rella tal som uppfyller* $0 < x \leq 1$.
Derivatan är $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{\frac{1}{x}-1}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ *(om* $x \in D_f$*).*

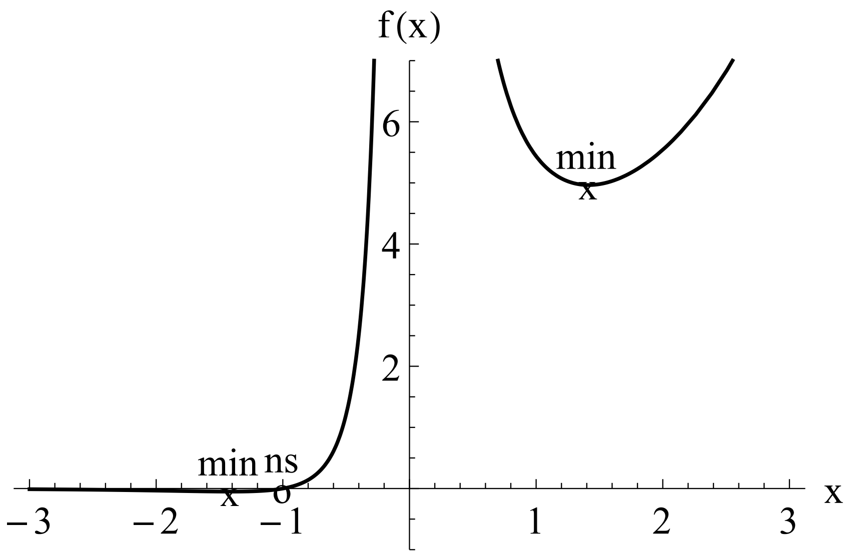
5. Skissa grafen till $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}e^x$. Ange alla stationära punkter och asymptoter.

Svar. Observationer:

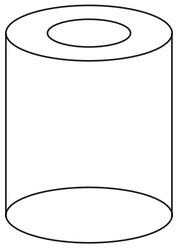
1. *Funktionen är definierad för alla reella tal unandtagen om* $x \neq 0$, *dvs definitionsmängden är* $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. *Nollställe (ns):* $f(x) = 0$ *med* $x = -1$.
3. *Asymptoter:*

- *Det finns en vertikal asymptot i* $x = 0$.
- *En horisantal asymptot finns med* $y = 0$ *då* $x \to -\infty$.
- *En sned asymptot finns inte.*

4. *Stationära punkter:* $x = \pm\sqrt{2}$ *med* $f(\pm\sqrt{2}) = \frac{1}{2}e^{\pm\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{2})$, *dvs et liten negativt tal* $f(-\sqrt{2})$, *och ett större positivt tal,* $f(\sqrt{2})$. *Med en analys via en teckentabell finner man att båda punkterna motsvarar minimipunkter (min).*



6. En cylindrisk burk med botten och lock ska tillverkas, och i locket ska det finnas ett cirkulärt hål med halva burkens radie. Vilken radie ska burken ha om man vill maximera burkens volym och materialets area ska vara $A = 42\pi$.



Svar. Burkens radie blir $r = \sqrt{8}$.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från föregaende del) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. Betrakta den hyperboliska ekvationen $y^2 - x^2 = 1$ och ekvationen för den räta linjen $y = ax + 1$ med värden $a \in \mathbb{R}$. Beräkna, för varje värde på a, alla skärningspunkter mellan dessa två kurvor. Bestäm och motivera sedan alla möjliga implikationer mellan följande påståenden:

A: Det finns skärningspunkter. B: Det finns två skärningspunkter.
C: $|a| < 1/2$ D: $1 < a < \sqrt{2}$

Svar. Möjliga genomskärningspunkterna är

$$(x, y) = (0, 1)$$
$$(x, y) = \left(\frac{2a}{1-a^2}, \frac{1+a^2}{1-a^2}\right).$$

Det finns alltså alltid två olika skärningspunkter (med samma eller olika tecken), förutom om: antingen $a = -1$ *eller* $a = 1$, *där den andra punkten inte är definierad (den rätta linje är parallel till hyperbelns asymptot); eller om* $a = 0$ *där båda punkterna faller tillsammans i* $((x, y) = (0, 1))$.

De enda möjliga implikationer är:

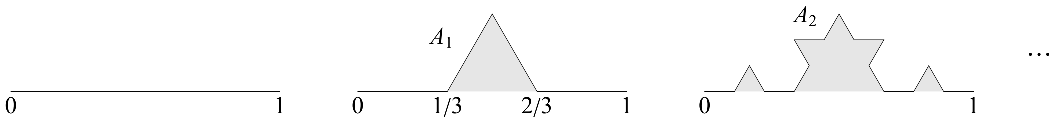
$B \implies A$ *Om det finns två skärningspunkter, finns skärningspunkter (omvändningen gäller dog inte.)*

$C \implies A$ *Om C, finns antingen en skärningspunkt* $(a = 0)$ *eller två skärningspunkter* $(a \neq 0)$

$D \implies B$ *Om* $a \notin \{-1, 0, 1\}$ *finns exakt två skärningspunkter.*

Dessutom implicerar $D \implies B$ *och* $B \implies A$ *att* $D \implies A$.

8. Konstruera en kurva i planet på följande sätt.



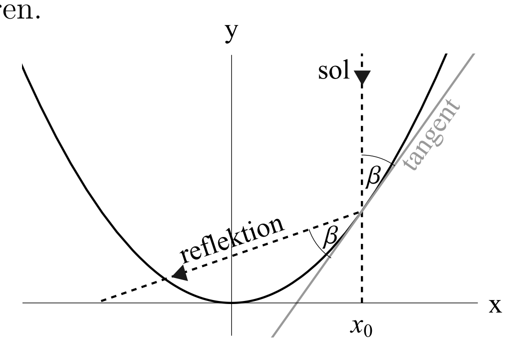
Börja med en rak horisontell linje med längden 1 ($k = 0$). I det första steget ($k = 1$), dela linjen i tre lika delar och förläng mittdelen som en liksidig triangel där basen är borttagen, som visas i figuren. I varje efterföljande steg, tillämpa denna operation på varje rakt linjesegment, som t.ex. visas för steg $k = 2$ med arean A_2 (skuggad). Visa att arean A_k under kurvan som bildas är konvergent när k går mot oändligheten, och beräkna dess exakta värde.
Ledtråd: För att beräkna A_k, beräkna arean av de nya mindre trianglarna samt deras antal.

Svar.
Arean under kurvan blir

$$A_k = \frac{\sqrt{3}}{16} \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{4}{9}\right)^l = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{(\frac{4}{9})^{k+1} - 1}{\frac{4}{9} - 1} - 1 \right)$$

Eftersom kvoten uppfyller $4/9 < 1$, *konvergerar denna geometriska serien.*
Gränsvärdet blir då $\lim_{k\to\infty} A_k = \dfrac{\sqrt{3}}{20}$.

9. En ingenjör vill bygga en solfångare för att producera elektrisk energi med hjälp av en paraboliskt spegel i form av kurvan $y = x^2$. (Vi tänker oss ett tvådimensionellt tvärsnitt genom spegelns symmetriaxel.) Solen är rakt ovanför och oändligt långt borta, d.v.s. solstrålarna faller vertikalt in i spegeln. Spegellagen säger att den infallande strålen med position $x = x_0$ reflekteras så att vinkeln β mellan den infallande strålen och tangenten är samma som vinkeln mellan den reflekterade strålen och tangenten, som illustrerad i figuren.



a) Visa att den reflekterade strålens lutning är $x_0 - \frac{1}{4x_0}$.
Ledtråd: För att beräkna lutningen observera exempelvis att $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

b) Visa att alla reflekterade strålar från infallande strålar med position $x_0 \in \mathbb{R}$ måste skära varandra i $(x, y) = (0, \frac{1}{4})$. (Således är detta det bästa läget att placera energiomvandlaren i.)

LYCKA TILL!