

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras noggrant. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

1. a) Beräkna följande gränsvärde:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}.$$

2 p

- b) Beräkna följande gränsvärde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin x}.$$

2 p

2. a) När man byter från rektangulära koordinater (x, y) i planet till polära koordinater (r, θ) så skall $dx dy$ i en dubbelintegral ersättas med vad då? 1 p

- b) Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Beräkna

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy.$$

4 p

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = x + \frac{3}{x} + 4 \arctan x.$$

Undersök speciellt stationära punkter, extremvärden, och asymptoter. Ange även funktionens värdemängd. (*Försäkra dig om att du utreder allt som problemformuleringen efterfrågar!*) 6 p

4. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$ i området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, -x \leq y \leq x\}$. Ange i vilka punkter dessa värden antas. 5 p

5. Beräkna den rotationsvolym som uppstår då funktionsgrafen

$$y = \frac{1}{\sqrt{x \ln x}}, \quad e^2 \leq x \leq e^4,$$

får rotera runt x -axeln. Svaret skall förenklas så långt som möjligt. 4 p

6. a) Bestäm en lösning $x(t)$ till

$$x'' - 2x' + 5x = -t$$

som uppfyller villkoren $x(0) = 0$ och $x'(0) = 0$. 3 p

- b) En kula med massan 50 kg skjuts rakt upp med en initial hastighet på 98 m/s. Antag att luftmotståndet vid tiden t på kulan är $5v(t)$, där $v(t)$ betecknar kulans hastighet. Antag vidare att gravitationskonstanten $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Efter hur många sekunder når kulan sin högsta punkt? Komplettera ditt exakta svar med ett närmevärde. (*Newton tipsar: Kulans rörelse uppfyller lagen $mv'(t) = F(t)$, där $F(t)$ är den totala kraften på kulan.*) 3 p