LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2024-01-12 kl. 8.00–13.00

1. Svar: $y(x) = 2e^x - x - 1$

Lösningsförslag:
Det karakteristiska polynomet $r^2 + r - 2$ har nollställena -2 respektive 1, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ansatsen $y_p = Ax + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$, ger vid insättning (med $y_p' = A$ och $y_p'' = 0$) att

$$0 + A - 2(Ax + B) = 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -2Ax + A - 2B = 2x + 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -2A \phantom{{}-2B} = 2 \\ A - 2B = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = -1. \end{cases}$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = -x - 1$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - x - 1, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 1.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 1 \\ -2C_1 + C_2 - 1 = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -2C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

2. Svar: $\dfrac{3}{2}$

Lösningsförslag:
Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 och B_7 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 B_1(x),$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x),$$
$$e^x = 1 + x + x^2 B_3(x),$$

och därmed är

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + (2x)^4 B_1(2x) = 1 - 2x^2 + x^4 B_4(x),$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + (-x)^3 B_2(-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_5(x)$$

och

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \big(x^2\big)^2 B_3\big(x^2\big) = 1 + x^2 + x^4 B_6(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(2x) - 3x\ln(1-x) - e^{x^2}}{x^3} \\
&= \frac{\big(1 - 2x^2 + x^4 B_4(x)\big) - 3x\big(-x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_5(x)\big) - \big(1 + x^2 + x^4 B_6(x)\big)}{x^3} \\
&= \frac{\frac{3}{2}x^3 + x^4 B_7(x)}{x^3} = \frac{3}{2} + xB_7(x) \longrightarrow \frac{3}{2}, \quad \text{då } x \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

3. Svar: Nollställen: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

Faktorisering: $p(z) = \big(z^2 - \sqrt{2}z + 1\big)\big(z^2 + \sqrt{2}z + 1\big)$

Lösningsförslag:
För att finna nollställena till $p(z)$ löser vi ekvationen

$$z^4 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 = -1.$$

Ansatsen $z = re^{i\theta}$, där r, $\theta \in \mathbb{R}$ och $r \geq 0$, ger att

$$r^4 e^{i4\theta} = \big(re^{i\theta}\big)^4 = z^4 = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi/4 + k \cdot \pi/2, \end{cases}$$

med $k \in \mathbb{Z}$. Nollställena till $p(z)$ är följaktligen på formen $z_k = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$, där samtliga olika möjligheter ges av $k = 0, 1, 2$ respektive 3. För $k = 0$ erhålles

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Eftersom $z_k = e^{i\pi/4} \cdot \big(e^{i\pi/2}\big)^k = z_0 \cdot i^k$ så är

$$z_1 = z_0 \cdot i = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$
$$z_2 = z_1 \cdot i = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$
$$z_3 = z_2 \cdot i = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Vi kan nu faktorisera $p(z)$ som

$$p(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$

Eftersom $z_3 = \overline{z_0}$ så är $(z - z_0)(z - z_3)$ en reell faktor i $p(z)$:

$$\begin{aligned}(z - z_0)(z - z_3) &= \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = z^2 - \sqrt{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = z^2 - \sqrt{2}z + 1.\end{aligned}$$

På motsvarande vis är $(z-z_1)(z-z_2) = z^2+\sqrt{2}z+1$, och vi har sålunda faktoriseringen

$$p(z) = \left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right).$$

Alternativt kan $p(z)$ faktoriseras genom att vi först adderar och subtraherar en lämplig term, och därefter tillämpar kvadreringsregeln följt av konjugatregeln:

$$\begin{aligned}p(z) = z^4 + 1 &= z^4 + 1 + 2z^2 - 2z^2 = \left(z^2 + 1\right)^2 - \left(\sqrt{2}z\right)^2 \\ &= \left(z^2 + 1 - \sqrt{2}z\right)\left(z^2 + 1 + \sqrt{2}z\right).\end{aligned}$$

4. **Svar:** $\dfrac{\pi\,(e^2 + 1)}{2}$

Lösningsförslag:
Med skivformeln erhålles den sökta volymen av integralen

$$\begin{aligned}\pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2\sqrt{x}}\, dx &= \begin{bmatrix} t = \sqrt{x}, \quad x = t^2, \quad dx = 2t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} \\ &= \pi \int_0^1 2te^{2t}\, dt = \pi\left(\left[te^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2t}\, dt\right) = \pi\left(e^2 - 0\right) - \pi\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1 \\ &= \pi e^2 - \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi\left(e^2 + 1\right)}{2}.\end{aligned}$$

5. **Svar:** π

Lösningsförslag:
För att partialbråksuppdela integranden ansätter vi

$$\frac{4}{(x + 1)\left(x^2 + 1\right)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

där $A, B, C \in \mathbb{R}$. Detta ger att $A = 2$, $B = -2$ och $C = 2$. Sålunda är

$$\begin{aligned}&\int_0^X \frac{4}{(x + 1)\left(x^2 + 1\right)}\, dx = \int_0^X \left(\frac{2}{x + 1} + \frac{-2x + 2}{x^2 + 1}\right) dx \\ &= \Big[2\ln(x + 1) - \ln\left(x^2 + 1\right) + 2\arctan x\Big]_0^X = \left[\ln\left(\frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}\right) + 2\arctan x\right]_0^X\end{aligned}$$

$$= \ln\left(\frac{X^2+2X+1}{X^2+1}\right) + 2\arctan X - \ln 1 - 2\arctan 0$$
$$= \ln\left(\frac{X^2+2X+1}{X^2+1}\right) + 2\arctan X \longrightarrow \ln 1 + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi, \quad \text{då } X \longrightarrow \infty.$$

Detta visar att den givna generaliserade integralen är konvergent med värdet

$$\int_0^\infty \frac{4}{(x+1)\big(x^2+1\big)}\,dx = \pi.$$

6. Svar: $y(t) = 9 - 6e^{-t/15}\,\mathrm{kg}$

Lösningsförslag:
Låt $y(t)$ beteckna mängden salt (i kilogram) som finns i tanken efter tiden t minuter från att processen startat. Då uppfyller y differentialekvationen

$$y' = 0{,}12\cdot 5 - \frac{y}{75}\cdot 5 \quad\Longleftrightarrow\quad y' + \frac{y}{15} = \frac{3}{5}.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{t/15}$ ger att

$$\begin{aligned}
y'e^{t/15} + \frac{y}{15}e^{t/15} = \frac{3}{5}e^{t/15} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(ye^{t/15}\Big) = \frac{3}{5}e^{t/15}\\
&\Longleftrightarrow \quad ye^{t/15} = \int \frac{3}{5}e^{t/15}\,dt = 9e^{t/15} + C\\
&\Longleftrightarrow \quad y = 9 + Ce^{-t/15},
\end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0{,}04\cdot 75 = 3$ ger att $C = -6$ och därmed gäller att

$$y(t) = 9 - 6e^{-t/15}.$$

7. Svar: $0 \le y_0 \le 2$

Lösningsförslag:
Vi noterar att differentialekvationen har de konstanta lösningarna $y(x) = 0$ respektive $y(x) = 2$. Under antagandet att $y \neq 0, 2$ så ger omskrivning och integrering att

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{y(y-2)}\frac{dy}{dx} = 1\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y}\right)dy = \int 1\,dx = x + C \qquad (C \in \mathbb{R})\\
&\Longleftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = \ln|y-2| - \ln|y| = 2x + B \qquad (B = 2C)\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{y-2}{y} = Ae^{2x} \qquad \big(A = \pm e^B\big)\\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{2}{1 - Ae^{2x}},
\end{aligned}$$

där $A \neq 0$. Vi ser emellertid att även $A = 0$ fungerar, då detta ger den konstanta lösningen $y(x) = 2$. För att en lösning på formen

$$y(x) = \frac{2}{1 - Ae^{2x}}$$

ska vara definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, så måste $A \leq 0$. Begynnelsevillkoret $y(0) = y_0$ ger att

$$\frac{y_0 - 2}{y_0} = Ae^{2 \cdot 0} = A,$$

och sålunda har vi lösningar på denna form med definitionsmängd $\mathbb{R}$ då

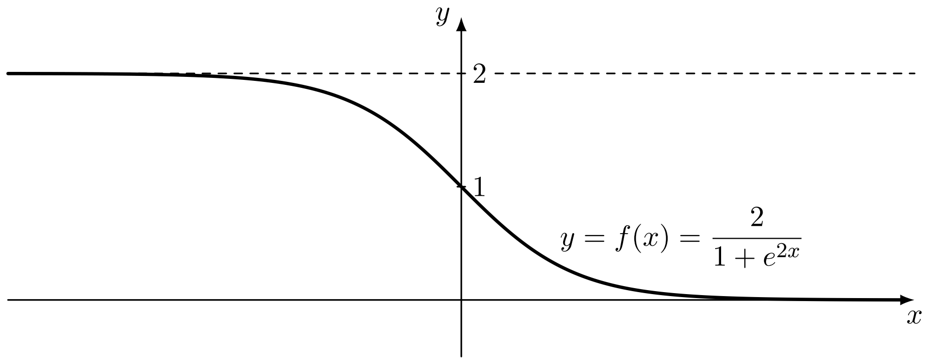
$$A \leq 0 \quad \iff \quad \frac{y_0 - 2}{y_0} \leq 0 \quad \iff \quad 0 < y_0 \leq 2.$$

Inbegripet den konstanta lösningen $y(x) = 0$, som svarar mot att $y_0 = 0$, finner vi sammantaget att det givna begynnelsevärdesproblemet har en lösning som är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ precis då $0 \leq y_0 \leq 2$.

Med $y_0 = 1$ är $A = -1$, vilket ger den icke-konstanta lösningen

$$y = f(x) = \frac{2}{1 + e^{2x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $h(x) = 1 + e^{2x}$ är strängt växande på $\mathbb{R}$, så är f strängt avtagande. Vidare är $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Grafen till f framgår nedan.



8. Svar: Konvergent

Lösningsförslag:
Låt $f(x)$ beteckna integranden, dvs.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\arctan x}}{x(x+1)},$$

och notera att $f(x) > 0$ för alla $x \in]0, \infty[$. Integralen $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är generaliserad i både 0 och ∞, och är därmed konvergent om och endast om integralerna $\int_0^1 f(x)\,dx$ och $\int_1^\infty f(x)\,dx$ båda är konvergenta. För att avgöra om $\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent, så noterar vi att i en omgivning av noll är $\arctan x = x + x^3 B(x)$, där funktionen B är begränsad. Låter vi $g_1(x) = 1/\sqrt{x}$, så följer det därmed att

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x + x^3 B(x)}}{x(x+1)} \bigg/ \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^2 B(x)}}{x+1} = \frac{\sqrt{1+0}}{0+1} = 1.$$

Vidare vet vi att $\int_0^1 g_1(x)\,dx$ är konvergent, och det följer sålunda (enligt Sats 13.12 i kursboken) att även $\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent. Med $g_2(x) = 1/x^2$ så är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\arctan x}}{x(x+1)} \bigg/ \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+1/x} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{1+0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Eftersom $\int_1^\infty g_2(x)\,dx$ är konvergent, så är (åter enligt Sats 13.12) också $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent. Sammantaget har vi nu visat att den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\arctan x}}{x(x+1)}\,dx$$

är konvergent.

9. Svar: Se lösningsförslag

Lösningsförslag:
Låt

$$F(t) = \int_0^t f(u)\,du.$$

Partialintegrering och tillämpning av analysens huvudsats ger att

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du\right) dt &= \int_0^x F(t)\,dt = \big[(t-x)F(t)\big]_0^x - \int_0^x (t-x)F'(t)\,dt \\ &= -\int_0^x (t-x)f(t)\,dt = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt,\end{aligned}$$

för alla $x \in I$.

Alternativ lösning:
Låt

$$G(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du\right) dt$$

och

$$H(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt.$$

Analysens huvudsats ger att

$$G'(x) = \int_0^x f(u)\,du$$

samt att

$$H'(x) = 1 \cdot \int_0^x f(t)\,dt + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Alltså är $G'(x) = H'(x)$ för alla $x \in I$, och därmed är $G(x) - H(x)$ konstant. Eftersom $G(0) = H(0) = 0$ så följer det att $G(x) = H(x)$ för alla $x \in I$.