# Lösningar till Endimensionell Analys B2 Tentamen - 2024-08-20

## Problem 1

**Bestäm Maclaurinpolynomet $p_2(x)$ av ordning 2 till $f(x) = \cos^2(x)$.**

Vi börjar med att utveckla $f(x) = \cos^2(x)$ runt $x = 0$. Maclaurinserien ges av:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots$$

Först beräknar vi $f(x)$ och dess derivator vid $x = 0$:

$$f(x) = \cos^2(x), \text{ och då: } f(0) = \cos^2(0) = 1.$$

$$f'(x) = -\sin(2x), \text{ och då: } f'(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f''(x) = -2\cos(2x), \text{ och då: } f''(0) = -2\cos(0) = -2$$

Därmed är Maclaurinpolynomet av ordning 2: $p_2(x) = 1 + \frac{-2}{2}x^2 = 1 - x^2$.

# Problem 2

**(a) Lös ekvationen $z^2 + 4iz + 4 + 6i = 0$. Lösningarna ska ges på formen $a + bi$, där $a$ och $b$ är reella tal.**
Vi skriver om ekvationen och kvadrat kompletera,

$$z^2 + 4iz + (-4) = -(4 + 6i) + (-4).$$

Detta förenklar till: $(z + 2i)^2 = -8 - 6i$. Vi lös för $z$ genom att sätta $z + 2i = w = a + bi$. Då,

$$w^2 = (a + bi)^2 = -8 - 6i.$$

Utveckla och sätt lika med real- och imaginärdelarna. Så: $a^2 - b^2 + 2abi = -8 - 6i$. Nu sätter vi real- och imaginärdelarna lika med varandra. Vi har nu följande ekvationssystem:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= -8, \\ 2ab &= -6, \end{aligned}$$

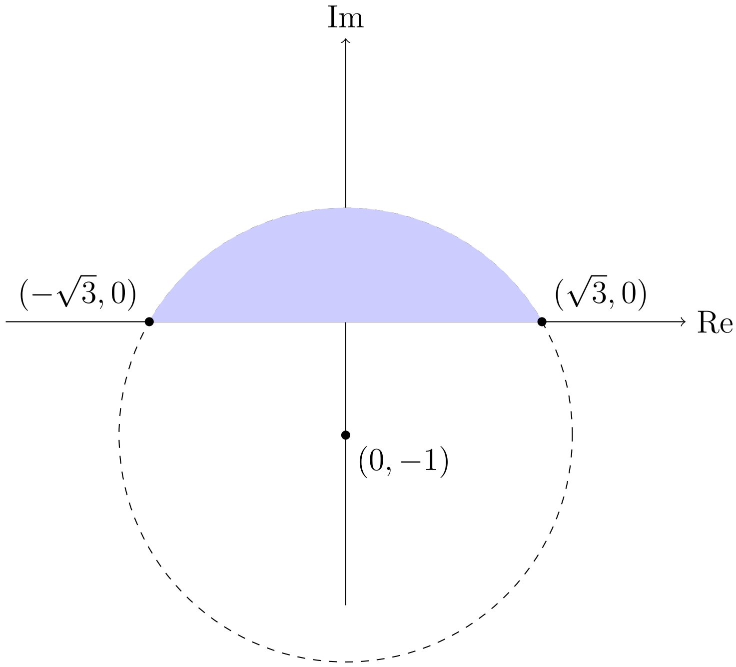
med lösningarna:
$a = 1$ och $b = -3$, då $w = 1 - 3i$ och $z_1 + 2i = 1 - 3i$ och $z_1 = 1 - 5i$.
$a = -1$ och $b = 3$, då $w = -1 + 3i$ och $z_2 + 2i = -1 + 3i$ och $z_2 - 1 + i$.

**(b) Rita ut i det komplexa talplanet alla komplexa tal $z$ som uppfyller de båda olikheterna $|z + i| \leq 2$ och Im$(z) \geq 0$.**

Olikheten $|z+i| \leq 2$ beskriver en cirkel med centrum vid $-i$ (vilket är punkten $(0, -1)$ i det komplexa talplanet) och med radien 2. Denna cirkel inkluderar alla punkter inom eller på gränsen till denna cirkel.

Vi antar att $z = x + iy$. För att hitta skärningspunkterna med den reella axeln (där Im$(z) = 0$), sätter vi $z = x$ (dvs. $y = 0$) och löser $|x + i| = 2$. Observera att $|x + i| = \sqrt{x^2 + 1}$. Då $\sqrt{x^2 + 1} = 2 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Så cirkeln skär den reella axeln vid punkterna $x = \pm\sqrt{3}$.

Eftersom Im$(z) \geq 0$ måste vi begränsa oss till den övre halvan av cirkeln. Detta innebär att vi endast beaktar den del av cirkeln som ligger över den reella axeln, mellan punkterna $x = -\sqrt{3}$ och $x = \sqrt{3}$. *Inklusive rant*!



# Problem 3

**Lös följande differentialekvationer:**

**(a)** $\frac{dy}{dx} = 2y\sin^2(x), \quad y(0) = 2.$

Detta är en separabel differentialekvation: $\frac{dy}{y} = 2\sin^2(x)\,dx$.

Använd identiteten $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

$$\int \frac{1}{y}\,dy = 2\int \sin^2(x)\,dx = \int 1 - \cos(2x)\,dx.$$

Integrera båda sidor:

$$\ln|y| = x - \frac{1}{2}\sin(2x) + C_0.$$

Lös för $y(x)$:

$$y(x) = Ce^{x-\sin(x)\cos(x)} \text{ (eller } = Ce^{x-\frac{\sin(2x)}{2}}).$$

Applicera begynnelsevärdet $y(0) = 2$ ge $C = 2$. Då $y(x) = 2e^{x-\sin(x)\cos(x)}$.

**(b)** $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4xe^{x^2}, \quad y(0) = 2.$

Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen. Integrerande faktor är $\mu(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$. Vi multiplicera ekvationen med integrerande faktorn:

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = 4xe^{2x^2}.$$

Integrera båda sidor:

$$\int \frac{d}{dx}(e^{x^2}y)\,dx = \int 4xe^{2x^2}\,dx.$$

Lös integralen på höger sida och notera att $\int 4xe^{2x^2}\,dx$ kan lösas genom substitutionsmetoden. Låt $u = 2x^2$, då är $du = 4x\,dx$. Integralen blir då:

$$\int e^u\,du = e^u + C = e^{2x^2} + C.$$

Vi har nu: $e^{x^2}y = e^{2x^2} + C$. Dela båda sidor med $e^{x^2}$ för att lösa för $y(x)$:

$$y(x) = e^{x^2} + Ce^{-x^2}.$$

Vi använder begynnelsevärdet $y(0) = 2$ för att bestämma konstanten $C$:

$$y(0) = e^0 + Ce^0 = 1 + C = 2 \text{ då } C = 1.$$

Lösningen är $y(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$.

# Problem 4

**Lös begynnelsevärdesproblemet**

$$y'' - y = 2\sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**Svaret skall ges på reell form.**

Denna är en linjär homogen differentialekvation. Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen:

$$y'' - y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är:

$$r^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 1.$$

Så den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Nu löser vi den inhomogena ekvationen genom att använda ansats:

$$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x).$$

Derivatorna blir:

$$y_p'(x) = A\cos(x) - B\sin(x), \quad y_p''(x) = -A\sin(x) - B\cos(x).$$

Sätt in i den inhomogena ekvationen:

$$(-A\sin(x) - B\cos(x)) - (A\sin(x) + B\cos(x)) = 2\sin(x).$$

Förenkla och jämför koefficienter:

$$-2A\sin(x) - 2B\cos(x) = 2\sin(x).$$

Härifrån får vi:

$$-2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -1, \quad -2B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Så den partikulära lösningen är:

$$y_p(x) = -\sin(x).$$

Den totala lösningen blir då:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \sin(x).$$

Använd begynnelsevärdena för att bestämma $C_1$ och $C_2$:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2.$$

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \cos(x).$$

$$y'(0) = C_1 - C_2 + 1 = 1.$$

Lösningarna ger $C_1 = 1$ och $C_2 = -1$. Så slutgiltig lösning är:

$$y(x) = e^x - e^{-x} - \sin(x).$$

# Problem 5

**Beräkna den generaliserade integralen**

$$\int_2^\infty \frac{4x+4}{x^4+4x^2}\,dx.$$

För att lösa denna integral, börja med att faktorisera och förenkla integranden:

$$\frac{4x+4}{x^4+4x^2} = \frac{4(x+1)}{x^2(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)+x^2(Cx+D)}{x^2(x^2+4)}.$$

Vi gämfora nämnaren från vänster och hoger sidorna: $4x+4 = (Ax+B)(x^2+4)+x^2(Cx+D)$ och lös för $A$, $B$, $C$, och $D$: $A=1, B=1, C=-1, D=-1$. Då får vi:

$$\frac{4(x+1)}{x^2(x^2+4)} = \frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4}.$$

Nu integrerar vi varje term separat:

$$\lim_{B\to\infty}\int_2^B \left(\frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4}\right)dx.$$

1. Första termen:

$$\int_2^B \frac{x+1}{x^2}\,dx = \left[\ln(x) - \frac{1}{x}\right]_2^B = \ln(B) - \frac{1}{B} - \ln(2) + \frac{1}{2}.$$

2. Andra termen: vi använder substitutionen $u = x^2+4$, $du = 2x\,dx$. Då integralen blir:

$$\int_2^B -\frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^B -\frac{2x}{x^2+4}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+4)\right]_2^B = -\ln\sqrt{B^2+4} + \frac{1}{2}\ln(8).$$

3. Tredje termen:

$$\int_2^B -\frac{1}{x^2+4}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^B = -\frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{B}{2}\right) - \arctan(1)\right) = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{2}\right) + \frac{\pi}{8}.$$

Sammanfattningsvis ger alla detta:

$$\begin{aligned}\int_2^B \frac{4x+4}{x^4+4x^2}\,dx &= \ln(B) - \frac{1}{B} - \ln(2) + \frac{1}{2} - \ln\sqrt{B^2+4} + \frac{1}{2}\ln(8) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{2}\right) + \frac{\pi}{8}\\ &= \ln\left(\frac{B}{\sqrt{B^2+4}}\right) - \frac{1}{B} - \ln(2) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2^3) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{2}\right) + \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Och när $\lim_{B\to\infty}$, vi får:

$$\begin{aligned}\lim_{B\to\infty}\int_2^B \frac{4x+4}{x^4+4x^2}\,dx &= \lim_{B\to\infty}\left(\ln\left(\frac{B}{\sqrt{B^2+4}}\right) - \frac{1}{B} + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{2}\right) + \frac{\pi}{8}\right)\\ &= \ln(1) - 0 + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\\ &= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

## Problem 6

**En skiva S av xy-planet med konstant densitet $\rho$ begränsas av $y = e^x$, $x = 0$, och $y = e$.**

Vi uppdela skivan i smala strimlor läng $x-$led och $y-$led separat t.ex. $dm = \rho * (e - e^x)\, dx$ resp. $dm = \rho * \ln(y)\, dy$.

**(a) Bestäm skivans massa $M$.**

Notera att kurver $y = e$ och $y = e^x$ skar varandra då $x = 1$.

Massa $M$ ges av:

$$M = \int_S dm = \rho \int_0^1 (e - e^x)\, dx = \rho \left[ ex - e^x \right]_0^1 = \rho.$$

**(b) Bestäm skivans tyngdpunkt $(x_T, y_T)$.**

Tyngdpunkt $x_T$ och $y_T$ ges av:

$$x_T = \frac{1}{M} \int_S x\, dm, \quad \text{och} \quad y_T = \frac{1}{M} \int_S y\, dm.$$

För $x_T$:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{\rho} \int_0^1 \rho x (e - e^x)\, dx = \int_0^1 xe - xe^x\, dx = \left[ e\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 xe^x\, dx = \\ &= \frac{e}{2} - [xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x\, dx = \frac{e}{2} - e + [e^x]_0^1 = \frac{e}{2} - e + e - 1 = \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$

Med samma idea för $y_T$ vi får: $y_T = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$.

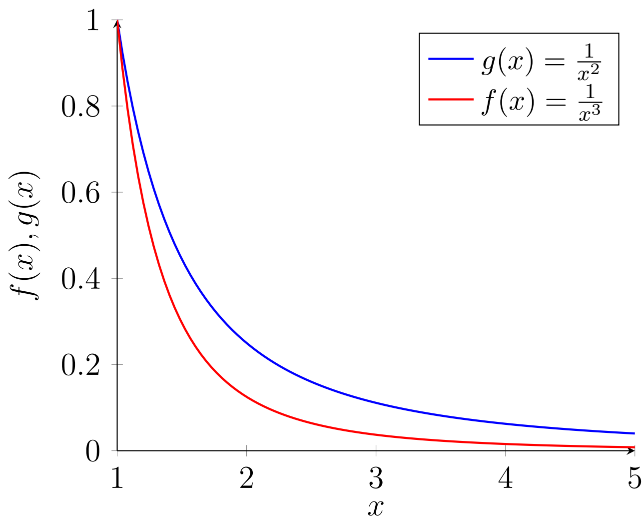
Skivans tyngdpunkt $(x_T, y_T) = \left( \frac{e}{2} - 1, \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right)$.

# Problem 7

**(a) Formulera en jämförelsesats för generaliserade integraler av typen $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Illustrera med en figur.**

En jämförelsesats för generaliserade integraler av typen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ används för att bestämma om en integral konvergerar eller divergerar. Satsen kan formuleras enligt följande: **Sats.** Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara kontinuerliga funktioner på $[a,\infty)$ och anta att $0 \le f(x) \le g(x)$ för alla $x \ge a$. Då gäller:

- Om $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergerar, då konvergerar också $\int_a^\infty f(x)\,dx$. (se figur nedan)
- Om $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergerar, då divergerar också $\int_a^\infty g(x)\,dx$.




**(b) Avgör om rotationsarean som uppstår då kurvstycket $y = \frac{1}{x}$, $1 \le x < \infty$, roterar kring x-axeln är ändlig eller oändlig.**

För att avgöra om rotationsarean som uppstår när kurvstycket $y = \frac{1}{x}$ för $1 \le x < \infty$ roterar kring x-axeln är ändlig eller oändlig, använder vi en jämförelsesats. Rotationsarean ges av:

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx.$$

Eftersom:

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^4}\right)} \ge 1 \;\text{ följer det att }\; \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \ge \frac{1}{x} \text{ for } 1 \le x \le \infty.$$

Vi har, från kurs, att $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergerar. Men $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \ge \frac{1}{x}$ så divergerar även $A$ enligt jämförelsesatsen. Därmed är rotationsarean **oändlig**.

# Problem 8

**Visa att**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}.$$

**Ledning: Stäng in summan med hjälp av två integraluppskattningar.**

För att visa, betraktar vi summan som en Riemann-summa. Låt $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Vi kan approximera summan med hjälp av integralen:

$$\int_1^n f(k)\,dk \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(k)\,dk.$$

Beräkna båda integralerna:

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1|.$$

Därför får vi:

$$\frac{1}{2}\ln(2n-1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \leq \frac{1}{2}\ln(2n+1).$$

Dividera båda sidor med $\ln n$:

$$\frac{\ln(2n-1)}{2\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \leq \frac{\ln(2n+1)}{2\ln n}.$$

När $n \to \infty$, både $\frac{\ln(2n-1)}{\ln n}$ och $\frac{\ln(2n+1)}{\ln n}$ går mot 1 (enligt L'Hospitals regel), så vi får:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}.$$

# Problem 9

**En enkel modell för att beskriva farten hos en sprinterlöpare får man från differentialekvationen**

$$v'(t) = A - kv(t),$$

**där $v(t)$ betecknar farten vid tiden $t$, och $A$ och $k$ är positiva konstanter.**
**(a) Bestäm löparens fart 3 sekunder efter startögonblicket.**

## a) Bestäm löparens fart 3 sekunder efter startögonblicket

Den givna differentialekvationen är linjär. Vi löser den med en integrerande faktor: $\mu(t) = e^{kt}$. Multiplicera ekvationen med $e^{kt}$: $e^{kt}v'(t) + ke^{kt}v(t) = Ae^{kt}$. Integrera båda sidor:

$$e^{kt}v(t) = \frac{A}{k}e^{kt} + C, \quad \text{och lös för } v(t): v(t) = \frac{A}{k} + Ce^{-kt}.$$

Med initialvillkoret $v(0) = 0$ får vi $C = -\frac{A}{k}$, vilket ger: $v(t) = \frac{A}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$. Vi vet att $v'(0) = 12\,\mathrm{m/s}^2$, vilket innebär att $A = 12\,\mathrm{m/s}^2$. Toppfarten $v_{\max} = 10\,\mathrm{m/s}$ ger $\frac{A}{k} = 10$, och därmed $k = \frac{12}{10} = 1{,}2\,\mathrm{s}^{-1}$. Därför är hastighetsfunktionen:

$$v(t) = 10\left(1 - e^{-1{,}2t}\right).$$

Efter 3 sekunder är farten: $v(3) = 10\left(1 - e^{-3{,}6}\right)$. $\quad(\approx 9{,}73\,\mathrm{m/s})$

## b) En funktion som beskriver hur långt han sprungit efter $t$ sek.

För att bestämma sträckan $s(t)$ som löparen har sprungit efter $t$ sekunder, integrerar vi hastighetsfunktionen från 0 till $t$ med hjälp av en dummyvariabel $l$:

$$s(t) = \int_0^t v(l)\,dl = \int_0^t 10\left(1 - e^{-1{,}2l}\right)dl.$$

Integrera varje del separat:

$$s(t) = 10\int_0^t 1\,dl - 10\int_0^t e^{-1{,}2l}\,dl = 10\int_0^t 1\,dl = 10t + \frac{10}{1{,}2}\left(e^{-1{,}2t} - 1\right).$$

Sammanfattningsvis blir sträckan:

$$s(t) = 10t - \frac{25}{3}\left(1 - e^{-1{,}2t}\right).$$

## c) Hur många meter efter segraren är han när denne går i mål?

För att bestämma hur långt L har sprungit efter 10 sekunder, sätter vi in $t = 10$ i sträckfunktionen:

$$\text{Exact svar:} \quad s(10) = 100 - \frac{25}{3}\left(1 - e^{-12}\right).$$

Eftersom $e^{-12}$ är mycket litet, kan vi approximera det som 0:

$$\text{Avrundat svar:} \quad s(10) \approx 100 - \frac{25}{3} \times 1 \approx 100 - 8{,}3 \approx 92\,\text{meter}.$$

Alltså är L cirka 8 meter bakom segraren, vilket avrundas till 8 meter.