

Tillåtna hjälpmmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs.
Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. Betrakta den diofantisk ekvation

$$15x + 13y = 11.$$

- (a) Bestäm alla lösningar till ekvationen. (3p)
(b) Ange den eller de lösningar som minimerar $|x - y|$. (1p)
(c) För vilka primtal p finns det lösningar till den diofantiska ekvationen $15x + py = 11$? (1p)
2. (a) Bestäm den största gemensamma delaren till $2^{122} + 6$ och 30. (3p)
(b) Låt X och Y vara mängder som uppfyller (2p)

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad X \setminus Y = \{1, 3\}, \quad Y \setminus X \subseteq \{5\}.$$

Bestäm alla möjligheter för elementen i de två mängderna X och Y .

3. Ekvationen (5p)

$$z^5 + 4z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 32z + 40 = 0$$

har en lösning $z = -2 + i$. Bestäm alla komplexa lösningar. Ange svaren på rektangulär (kartesisk) form.

4. Låt a vara en reell konstant, och betrakta de tre planen $\Pi_1 : ax + y + z = 1$, $\Pi_2 : x + ay + z = -1$ och $\Pi_3 : x + y + az = 0$. För vilka a saknar planen någon gemensam punkt, och för vilka a finns oändligt många gemensamma punkter? (5p)
5. (a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $(1, 0, -1)$ och $(1, 2, -3)$, och som är parallellt med linjen (3p)
- $$(x, y, z) = (t, 1 - t, 3 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
- (b) Bestäm den punkt i planet i (a) som är närmast punkten $(7, 0, 5)$. (2p)
6. Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen $F(\vec{u}) = \vec{u} + (\vec{e}_1 \times \vec{u})$.
- (a) Bestäm matrisen för F i standardbasen. (3p)
(b) Visa att F är inverterbar, och bestäm den inversa avbildningens matris. (2p)