

## Hemtentamen i Envariabelanalys 1

2020-06-08 kl. 14.00–19.00

Observera att andra regler än normalt gäller. Följ instruktionerna noggrant.

- Hjälpmittel är tillåtna (böcker, miniräknare, dator, osv.). Men det är naturligtvis **inte** tillåtet att på något sätt samarbeta med eller ta hjälp av annan person.
- Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt **handskrivna** – om inte särskilda skäl såsom funktionshinder föreligger – och avslutade med ett svar. (Det är också tillåtet att skriva för hand med ritpenna på ritplatta eller surfplatta, men endast handskriven text.) **Även om räknehjälpmittel är tillåtna ska uträkningar redovisas lika noga som vanligt, dvs. som om man inte hade några hjälpmittel.**
- Använd inte rödpenna. Lös högst en uppgift per sida. Numrera sidorna (sorterade i uppgiftsordning).

**Jourhavande lärare:** Se kurshemsidan <https://courses.mai.liu.se/GU/TATA41/>

När du är **klar med tentan**, följ instruktionerna som du fick via mejl när anmälan var stängd. Dessa instruktioner finns även här: <https://old.liu.se/mai/und>. Glöm inte att lösningarna ska lämnas in som ENDAST EN pdf-fil.

Var god vänd!

**Tentamen innehåller denna gång bara 6 uppgifter, och inga överbetyg delas ut.**

Godkänd uppgift ger 3 eller 2 poäng. Underkänd uppgift ger 1 eller 0 poäng. För betyg 3 på TATA41 resp. betyg G på 91MA14/92MA14/9GMA02 krävs minst 3 godkända uppgifter och minst 8 poäng.

Svar kommer att publiceras på kurshemsidan. Det blir ingen tentavisning, men skrivningarna kommer att vara tillgängliga via MAI:s studerandeexpedition.

1. Låt  $f(x) = 2 \arctan 2x + \frac{x+1}{2x}$ . Skissa grafen för  $f$  och ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.
2. Undersök gränsvärdena
  - (a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\ln(x^5 + x^6)}$
  - (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{\sin 3x} - 1)}{(\ln(1 + 2x))^2}$
  - (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin \sqrt{x}) \ln x$ .
3. (a) Beräkna  $\int \cos^4 3x \, dx$ .  
(b) Beräkna  $\int \frac{dx}{(x-3)(a-x)}$  för alla  $a \in \mathbf{R}$ .
4. Finn det minsta  $a \in \mathbf{R}$  som uppfyller  $a + \ln(1 + 3x) \geq 9 \arctan \frac{x}{3}$  för alla  $x \geq 0$ .
5. En rektangel har ett hörn i origo, ett (till) hörn på  $x$ -axeln, ett (till) hörn på  $y$ -axeln och det fjärde hörnet på grafen till  $f(x) = \frac{4-x}{x^2 + 9}$ ,  $x > 0$ ,  $x \neq 4$ . Vilka värden kan rektangelns area anta?
6. Man kan visa att de båda generaliserade integralerna  $\int_0^\infty \sin(x^2) \, dx$  och  $\int_0^\infty \cos(x^2) \, dx$  är konvergenta; kalla deras värden  $\alpha$  respektive  $\beta$ .
  - (a) Beräkna  $\int_2^\infty x \sin(3(x^2 - 4)^2) \, dx$  uttryckt i  $\alpha$  och/eller  $\beta$ .
  - (b) Visa att  $\int_0^\infty x^2 \sin(x^2) \, dx$  är divergent.