

INGA HJÄLPMEDDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar ska lämnas när så är möjligt.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng på denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}.$$

2. a) Lös ekvationen $z^2 + 4z + 12 = 6i$. Svara på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

- b) Beräkna

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^4$$

och skriv svaret på formen $a + bi$ med $a, b \in \mathbb{R}$, utan att använda sin eller cos.

3. a) Formulera analysens huvudsats.

- b) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(x) = \int_1^{x^2} \ln(1+t^2) dt.$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 2y' + y = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5. Undersök om den generaliserade integralen konvergerar, och beräkna i så fall dess värde

$$\int_1^\infty \frac{3x+4}{x^3+3x^2+2x} dx.$$

6. En behållare fylls med vatten med en tidsberoende hastighet $r_{\text{in}}(t) = t$ (liter/minut), $t \geq 0$. Samtidigt läcker vattnet ut med en hastighet som är proportionell mot volymen i behållaren, med proportionalitetskonstant $k = 0.05 \text{ min}^{-1}$.

Låt $V(t)$ beteckna volymen (liter) vid tiden t . Inledningsvis är behållaren tom.

- a) Ställ upp en differentialekvation för $V(t)$ inklusive begynnelsevillkor.
b) Bestäm lösningen $V(t)$.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel.

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från föregående del) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. Beräkna längden av kurvan

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

8. För vilka värden på parametern p konvergerar integralen

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx?$$

Motivera noggrant. (Ledning: undersök $\ln(1+x)$ nära $x = 0$.)

9. Undersök om serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n + \ln n}$$

konvergerar eller divergerar. Motivera noggrant.

LYCKA TILL!