

INGA HJÄLPMEDDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar ska lämnas när så är möjligt.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng på denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. Bestäm Maclaurinpolynomet $p_2(x)$ av ordning 2 till $f(x) = \cos^2 x$.

2. a) Lös ekvationen $z^2 + 4iz + 4 + 6i = 0$.
Lösningarna ska ges på formen $a + bi$, där a och b är reella tal.
b) Rita ut i det komplexa talplanet alla komplexa tal z som uppfyller de båda olikheterna $|z + i| \leq 2$ och $\operatorname{Im} z \geq 0$.

3. Lös följande differentialekvationer:
 - a) $\frac{dy}{dx} = 2y \sin^2(x)$, $y(0) = 2$.
 - b) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4xe^{x^2}$, $y(0) = 2$.

4. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$y'' - y = 2 \sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$
Svaret skall ges på reell form.

5. Beräkna den generaliserade integralen
$$\int_2^\infty \frac{4x+4}{x^4+4x^2} dx.$$

6. En skiva S av xy -planet med konstant densitet ρ begränsas av $y = e^x$, $x = 0$ och $y = e$.
 - a) Bestäm skivans massa M .
 - b) Bestäm skivans tyngdpunkt (x_T, y_T) .
($Mx_T = \int_S x dm$, där M är massan av S . Motsvarande formel gäller för y_T).

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel.

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från föregående del) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. a) Formulera en jämförelsesats för generaliserade integraler av typen $\int_a^\infty f(x) dx$.

Illustrera med en figur.

- b) Avgör om rotationsarean som uppstår då kurvstycket $y = \frac{1}{x}, 1 \leq x < \infty$, roterar kring x -axeln är ändlig eller oändlig.

8. Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}.$$

Ledning: Stäng in summan med hjälp av två integraluppskattningar.

9. En enkel modell för att beskriva farten hos en sprinterlöpare (som springer relativt korta sträckor) får man från differentialekvationen

$$v'(t) = A - kv(t),$$

där $v(t)$ betecknar farten vid tiden t , och A och k är positiva konstanter. Sprinterlöparen L springer OS-final på 100 m. Han startar från stillastående och har i startögonblicket en acceleration på 12 m/s^2 .

Vid tester före OS har man mätt upp L:s toppfart till 10 m/s (förutsatt att han får obegränsat med tid på sig att accelerera).

- Bestäm löparens fart 3 sekunder efter startögonblicket.
- Bestäm en funktion som beskriver hur långt han sprungit efter t sekunder.
- L slutar på 7:e plats i OS-finalen. Segertiden är 10 sekunder. Hur många meter efter segraren är han när denne går i mål? Ange både ett exakt svar och ett svar avrundat till ett helt antal meter.

LYCKA TILL!