

Tentamen i Envariabelanalys 1
2021-03-27 kl. 08.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmittel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns på kursens hemsida efter helgen.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan x + \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. Ange alla lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extempunkter.
2. Undersök gränsvärdena
 - (a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10}$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{2x}$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \cdot \cos \frac{1}{x}$.
3. Beräkna
 - (a) $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx$
 - (b) $\int \frac{x dx}{x^2 + x - 12}$
 - (c) $\int x \arctan 2x dx$.
4. Visa att $\ln(1 + e^{-x}) > \frac{1}{1 + e^x}$ för $x \in \mathbf{R}$.
5. Beräkna $\int_1^\infty \frac{1}{(\ln x)^3 + 6(\ln x)^2 + 11 \ln x + 6} \cdot \frac{\ln x}{x} dx$ eller visa divergens.
6. Bestäm $I(a) = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x + a \sin^2 x}$ för $a \in \mathbf{R}$.
7. f är deriverbar i punkten a och $f(a) = 1$. Beräkna (om möjligt) $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + t)^{1/t}$.