LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

Lösningsskisser för TATA41 250326

1a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{2x}}{e^{\sqrt{3x}}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\frac{e^{\sqrt{3x}}-1}{\sqrt{3x}}}=1\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{1}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ enligt standardgränsvärden.

1b) $\displaystyle\frac{x^2+x-6}{\ln(5-2x)}=\frac{(x-2)(x+3)}{\ln(1-2(x-2))}=/t=x-2/=\frac{t(t+5)}{\ln(1-2t)}=\frac{t+5}{\frac{\ln(1-2t)}{-2t}\cdot(-2)}\to-\frac{5}{2}\,,\ t\to 0,$
d v s då $x\to 2$, enligt ett standardgränsvärde.

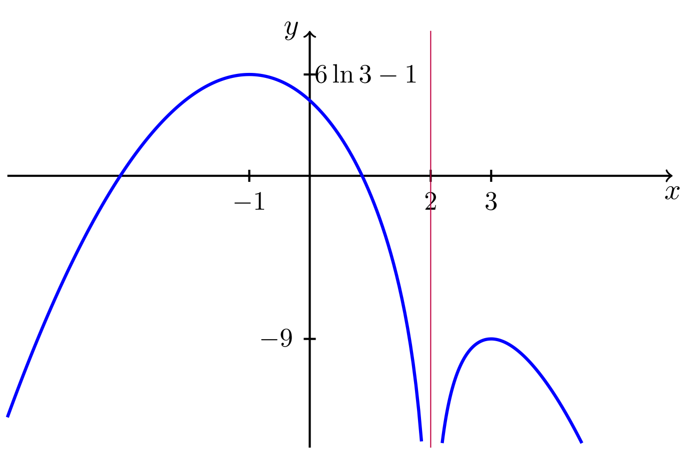
1c) $\displaystyle\frac{\ln(2x^3+e^{4x})}{x}=\frac{\ln e^{4x}+\ln\left(1+\frac{2x^3}{e^{4x}}\right)}{x}=4+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{2}{4^3}\cdot\frac{(4x)^3}{e^{4x}}\right)\to 4+0\cdot\ln\left(1+\frac{2}{4^3}\cdot 0\right)$
$=4\,,\ x\to\infty$ enligt ett standardgränsvärde.

Svar: (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (b) $-\frac{5}{2}$ (c) 4.

2) f är definierad då $x\neq 2$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x)=\dfrac{2(x+1)(3-x)}{x-2}$.
Teckentabell:

x		-1		2		3	
$2(x+1)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi ser att $f(x)=6\ln|x-2|-x^2\to-\infty\,,\ x\to 2$ (ty första termen $\to-\infty$ och den andra har ändligt gränsvärde) och $f(x)=x^2\left(6\dfrac{\ln|x|}{x^2}+6\dfrac{\ln\left|1-\frac{2}{x}\right|}{x^2}-1\right)\to-\infty\,,\ x\to\pm\infty$ då uttrycket inom parentes går mot -1 enligt standardgränsvärde. Vidare är $f(-1)=6\ln 3-1$ och $f(3)=-9$. Detta ger grafen



Svar: För graf, se ovan. f har lokala maximipunkter i $x=-1$ (med det lokala maximivärdet $f(-1)=6\ln 3-1$) och i $x=3$ (med det lokala maximivärdet $f(3)=-9$). Lokala minimipunkter saknas. Linjen $x=2$ är lodrät asymptot och vågräta asymptoter saknas.

3a) Partialintegration av en etta ger

$$\int_0^2 \ln(x+1)\,dx = [(x+1)\ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = 3\ln 3 - [x]_0^2 = 3\ln 3 - 2.$$

Anmärkning: Att använda x som primitiv till 1 istället för $x+1$ funkar förstås också, men ger lite längre räkningar.

3b) Bytet $t=e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x}\,dx = 2t\,dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{dt}{2t}$ följt av partialbråksuppdelning ger

$$\int_0^a \frac{dx}{e^{2x}+1} = /b=e^{2a}/ = \int_1^b \frac{dt}{2t(t+1)} = \frac{1}{2}\int_1^b \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{b}{b+1} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln\left(1+\frac{1}{b}\right)\right) \to \frac{\ln 2}{2}\,,\ b\to\infty,$$

så $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{e^{2x}+1} \to \frac{\ln 2}{2}$, $a\to\infty$. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}+1}$ är alltså konvergent och $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}+1} = \frac{\ln 2}{2}$.

Anmärkning: Bytet $t=e^{-2x}$ fungerar också och ger aningen kortare räkningar.

Svar: (a) $3\ln 3-2$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}+1} = \frac{\ln 2}{2}$ och är därmed konvergent.

4a) Variabelbytet $t=\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x=t^2+3\,,\ t\ge 0 \Rightarrow dx = 2tdt$ ger att

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,dx = \int \frac{t^2+3}{t}\cdot 2t\,dt = \frac{2t^3}{3}+6t+C = \frac{2}{3}(x+6)\sqrt{x-3}+C,$$

där C är en godtycklig konstant.

4b) Trigonometriska ettan samt bytet $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$ ger (C är en godtycklig konstant):

$$\int \frac{\sin x}{3-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{2+\cos^2 x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+C.$$

4c) Jämn funktion, symmetriskt intervall ger (I = sökt integral):

$$I = 2\int_0^{1/2} x\sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\cos(\pi x)\right]_0^{1/2} + \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2}\cos(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi^2}\left[\sin(\pi x)\right]_0^{1/2} = \frac{2}{\pi^2}.$$

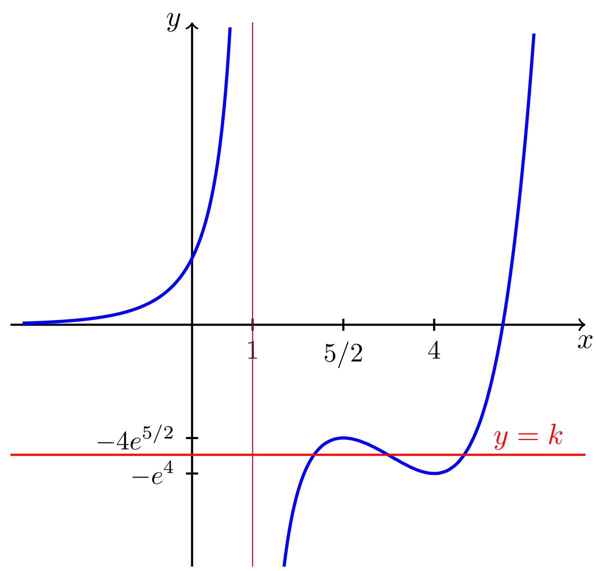
Svar: (a) $\dfrac{2}{3}(x+6)\sqrt{x-3}+C$ (b) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+C$ (c) $\dfrac{2}{\pi^2}$.

5) f är definierad för $x \neq 1$. Standardräkningar (Gör!) ger $f'(x) = \dfrac{(2x-5)(x-4)}{(x-1)^2}e^x$.

Teckentabell:

x		1		$5/2$		4	
e^x	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x-5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) \to \mp\infty\,,\ x \to 1^{\pm}$ och $f(x) = \dfrac{2 - \frac{11}{x}}{1 - \frac{1}{x}}e^x \to \infty\,,\ x \to \infty$ och på samma sätt $f(x) \to 0\,,\ x \to -\infty$. Vidare är $f(5/2) = -4e^{5/2}$ och $f(4) = -e^4$. Detta ger grafen



Direkt avläsning i grafen ger att ekvationen $f(x) = \dfrac{2x-11}{x-1}e^x = k$ har exakt tre olika lösningar precis då $-e^4 < k < -4e^{5/2}$.

Svar: $-e^4 < k < -4e^{5/2}$.

6a) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna.

6b) Omflyttning av termer följt av konjugatförlängning ger

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} = \sqrt{x+h} + x\cdot\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \sqrt{x+h} + \frac{x(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \sqrt{x+h} + \frac{x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &\to \sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,,\ h \to 0\end{aligned}$$

ty $\sqrt{x}$ är kontinuerlig för $x > 0$. Detta visar att $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ för $x > 0$.

Anmärkning: Konjugatförlängning direkt (alltså utan att först dela upp i två termer) funkar också och ger något kortare räkningar.

6c) Sätt $f(x) = \tan x$. Enligt medelvärdessatsen finns ett tal ξ mellan x och y sådant att

$$\tan x - \tan y = f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) = \frac{1}{\cos^2 \xi}(x-y).$$

Ta belopp av båda led och notera att $-\frac{\pi}{4} \leq \xi \leq \frac{\pi}{4}$ (ty ξ mellan x och y) så att $\cos \xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \xi} \leq 2$. Detta ger att $|\tan x - \tan y| = \frac{1}{\cos^2 \xi}|x-y| \leq 2|x-y|$ vilket skulle visas.

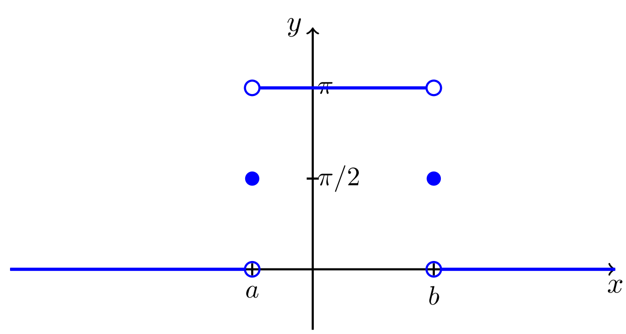
Svar: (a) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna. (b) Se ovan. (c) Se ovan.

7) Variabelbytet $y = \frac{x-t}{\varepsilon}$ så att $dt = -\varepsilon\, dy$ ger att

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2}\, dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \frac{dt}{(\frac{x-t}{\varepsilon})^2 + 1} = \int_{\frac{x-b}{\varepsilon}}^{\frac{x-a}{\varepsilon}} \frac{dy}{y^2+1} = \arctan\frac{x-a}{\varepsilon} - \arctan\frac{x-b}{\varepsilon}.$$

Observera att $\arctan\frac{x-a}{\varepsilon} \to \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon \to 0^+$ om $x > a$ och att $\arctan\frac{x-a}{\varepsilon} \to -\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon \to 0^+$ om $x < a$. Om $x = a$ är förstås $\arctan\frac{x-a}{\varepsilon} = 0$ för alla $\varepsilon > 0$ så $\arctan\frac{x-a}{\varepsilon} \to 0$, $\varepsilon \to 0^+$. Genom att hantera andra termen på liknande sätt får vi att $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad x < a \text{ eller } x > b \\ \pi/2 & \text{om} \quad x = a \text{ eller } x = b \\ \pi & \text{om} \quad a < x < b \end{cases}$.

Detta ger grafen



Svar: Se ovan.