

Tentamen i Envariabelanalys 2

2025-08-28 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTR n godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: $3/4/5$ godkända uppgifter och $8/12/16$ poäng totalt, där $1/2$ bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om $2/4$ KTR är godkända.

Notera: Rätningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x \ln(1+x)}. \quad (1p)$$

- (b) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för

$$f(x) = \cos x$$

med restterm i Lagranges form (av ordning 5) och hitta ett rationellt närmevärde till

$$\cos(1/2)$$

med ett fel vars absolutbelopp är högst $1/3000$. (2p)

2. (a) Lös integralekvationen

$$y = -1 + \int_0^x \frac{1 + y(t)^2}{y(t)} t dt,$$

samt ange största möjliga öppna intervall där $y(x)$ är en lösning. (2p)

- (b) Lös differentialekvationen

$$y''' - y'' + y' - y = 0. \quad (1p)$$

Var god vänd!

3. (a) Bestäm konvergensradien R för potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2 + 4^k}$.

OBS! Ändpunkterna $x = \pm R$ ska alltså inte undersökas.

- (b) Är $\int_1^{\infty} \frac{x + \cos x}{x + x^2} dx$ konvergent?

(c) Beräkna $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k} \right)$.

4. (a) Kurvan Γ beskrivs i polära koordinater (r, φ) av

$$r(\varphi) = \varphi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Ange som en integral, som ej ska räknas ut, längden av kurvan. (1p)

- (b) Området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-x} \leq y \leq e^x, 0 \leq x \leq 2\}$$

roteras ett varv runt linjen $x = 3$, Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen. (2p)

För full poäng på (b) krävs en figur som förklarar varför din integral blir som den blir.

Del B

5. Undersök om integralen

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}} \right)^{3/2} dx$$

är konvergent.

6. Visa att $y = \sqrt{x}$ är en lösning till den linjära differentialekvationen

$$4(x^3 - x^2)y'' - 4xy' + (1+x)y = 0, \quad x > 1.$$

Bestäm sedan samtliga lösningar genom att ansätta $y = z(x)\sqrt{x}$.
