

Inga hjälpmmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

## Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

- 1.** Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

a) Låt  $l$  vara linjen som går genom punkterna  $(2, 1)$  och  $(3, 5)$ .

Ange en ekvation för  $l$  på formen  $y = kx + m$ .

b) Vad är  $\tan 120^\circ$ ? Ange det exakta värdet.

c) Lös ekvationen

$$\ln(x^2) = \ln(x^4).$$

d) Förenkla  $\lg(1000^3)$ , där  $\lg$  betecknar logaritmen med bas 10.

e) Lös ekvationen  $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$ .

f) Lös olikheten

$$\frac{-4x + 9}{x - 2} > 0.$$

- 2.** Beräkna följande gränsvärden eller oegentliga gränsvärden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + \pi} - \sqrt{x^2 - e} \right),$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{x^2}.$

- 3.** a) Lös ekvationen

$$\sin 3x = \cos 2x.$$

b) Bestäm en amplitud  $A > 0$  och fasförskjutning  $\varphi$  så att

$$\cos(3x) - \sin(3x) = A \sin(3x + \varphi).$$

- 4.** Skissa grafen till funktionen

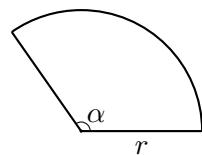
$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 4x + 5}.$$

Ange speciellt alla asymptoter och lokala extrempunkter.

- 5.** a) Låt  $f$  vara en funktion som är definierad i en omgivning av en punkt  $a \in \mathbb{R}$ . Definiera vad som menas med att  $f$  är deriverbar i  $a$ .

b) Använd derivatans definition för att visa att  $f'(x) = e^x$  då  $f(x) = e^x$ .

- 6.** 20 meter ståltråd ska användas för att inhägna en blomrabatt i form av en cirkelsektor med en vinkel  $\alpha$  mellan  $0$  och  $\pi$  och radie  $r$  (se figur). För vilken radie på cirkelsektorn är rabattens area som störst, och vilken är den maximala arean?



## Överbetygsdel

*Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.*

7. Låt  $f$  definieras av

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \quad x \in ]-1, 1[.$$

- a) Visa att  $f$  är en udda funktion.  
 b) Visa att det för alla  $x, y \in ]-1, 1[$  gäller att

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y).$$

8. a) Bestäm definitionsmängden  $D_f$  för

$$f(x) = (\ln x) \sum_{j=1}^{\infty} x^j.$$

Definitionsmängden ska väljas så stor som möjligt.

- b) Finns det någon kontinuerlig funktion  $g$  definierad för alla  $x \geq 0$  sådan att  $f(x) = g(x)$  för alla  $x \in D_f$ , där  $f$  är funktionen från deluppgift a)? Bestäm i så fall en sådan funktion  $g$  och ange  $g(0)$  och  $g(1)$ .

9. a) Bestäm alla trianglar  $\triangle ABC$  som uppfyller

$$|BC| \cos A = |AC| \cos B.$$

- b) Bestäm alla trianglar  $\triangle ABC$  vars sidor och vinklar uppfyller

$$|BC| \cos A = |AC| \cos B = |AB| \cos C.$$

10. Vid tillverkning av en växelströmsomvandlare behöver man i spolen sätta in en korsformad järnkärna med så stor tvärsnittsarea som möjligt. Se figur nedan. Bestäm den största möjliga tvärsnittsarean som korset kan ha, då spolens tvärsnittsradien är  $a$ . Vilket eller vilka värden på  $x$  i figuren ger upphov till den maximala arean?

*Du kan anta att korset är spegelsymmetriskt med avseende på en horisonell och en vertikal axel genom centrum och dessutom rotationssymmetrisk vid rotation med vinkel  $\pi/2$  kring samma centrum.*

