LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIM B1
2024-11-01

1a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \ln\sqrt{x}$ i punkten där $x = 1$.

Lösning: Allmän ekvation är $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. Vi har

$$f(x) = \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{2x}.$$

För $a = 1$ blir det $f(a) = 0$ och $f'(a) = 1/2$, alltså $\boxed{y = (x-1)/2.}$

1b) Beräkna $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-k}$.

Lösning: Det är en geometrisk serie med kvoten $1/2$, således, konvergent, och man kan använda formeln på sidan 203 (OBS att $k = 1$ här, så vi bryter ut den första termen)

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2}{1-1/2} = \boxed{1.}$$

1c) Bestäm A så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)\sin(3x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

Lösning: Funktionen är kontinuerlig i alla punkter utanför $x = 0$ som produkt och kvot av kontinuerliga elementära funktioner. För kontinuitet i $x = 0$ krävs det enligt definitionen att $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Vi använder standardgränsvärden för $\frac{\sin t}{t}$ och räknar

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\sin(3x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 2\cdot 3\right) = 1\cdot 1\cdot 6 = 6.$$

Svar: $\boxed{A = 6.}$

2a) Lös ekvationen $2\ln(x+2) = \ln(x+4)$.

Lösning: OBS att definitionsmängden är $x > -2$. Vi omskriver enligt log-lag och använder att ln är injektiv

$$2\ln(x+2) = \ln(x+2)^2 = \ln(x+4) \quad\Leftrightarrow\quad (x+2)^2 = x+4 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+3x = x(x+3) = 0.$$

Den senaste ekvationen har två lösningar $x = 0$ och $x = -3$, men den andra ligger inte i definitionsmängden.

Svar: $\boxed{x = 0.}$

2b) Lös ekvationen $\cos 2x = 3\cos x + 1$.

Lösning: Vi omskriver $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ för att få en kvadratisk ekvation i $t = \cos x$

$$2\cos^2 x - 1 = 3\cos x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 3t - 2 = 0.$$

Ekvationen har två lösningar $t = 2$ och $t = -1/2$, men $\cos x = 2$ saknar lösningar, dvs ekvationen är ekvivalent med

$$t = \cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

3a) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10} - 2e^x + x\ln x}{5x^{10} - x^2e^{-x} + 3e^x}$.

Lösning: Obestämt av typ $\frac{\infty}{\infty}$. Termen e^x är dominerande i täljaren och nämnaren, så bryter vi ut den och förkortar

$$\frac{x^{10} - 2e^x + x\ln x}{5x^{10} - x^2e^{-x} + 3e^x} = \frac{e^x\left(\frac{x^{10}}{e^x} - 2 + \frac{x\ln x}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{5x^{10}}{e^x} - \frac{x^2}{e^x\cdot e^x} + 3\right)} = \frac{\frac{x^{10}}{e^x} - 2 + \frac{x\ln x}{e^x}}{\frac{5x^{10}}{e^x} - \frac{x^2}{e^x\cdot e^x} + 3} \quad \to \quad \frac{0-2+0}{0-0+3} = \boxed{-\frac{2}{3}.}$$

Gränsövergången då $x \to +\infty$ motiveras av standardgränsvärden (jämförelse av potens-, logaritm- och exponentialfunktioner [Sats 9.3, sid 175]).

3b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + x^2 + 2\ln x}{(x+3)\ln x - e^x}$.

Lösning: Obestämt av typ $\frac{\infty}{\infty}$. Termen $\ln x \to -\infty$ är dominerande i täljaren och nämnaren (övriga termer har ändliga gränsvärden), så bryter vi ut den och förkortar

$$\frac{e^x + x^2 + 2\ln x}{(x+3)\ln x - e^x} = \frac{\ln x\left(\frac{e^x}{\ln x} + \frac{x^2}{\ln x} + 2\right)}{\ln x\left(x + 3 - \frac{e^x}{\ln x}\right)} = \frac{\frac{e^x}{\ln x} + \frac{x^2}{\ln x} + 2}{x + 3 - \frac{e^x}{\ln x}} \quad \to \quad \frac{0+0+2}{0+3-0} = \boxed{\frac{2}{3}.}$$

Gränsövergången då $x \to 0^+$ motiveras med två enklare gränsvärden (av bestämd typ)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\ln x} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0.$$

3c) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$.

Lösning: Obestämt av typ $\infty - \infty$ som standardhanteras av förlängning med konjugatet $\sqrt{x^2 + x + 1} + x$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}.$$

Uttrycket i HL blir av den nya typen $\frac{\infty}{\infty}$ som kan lösas genom att bryta ut och förkorta med den dominerande termen (som i detta fall är) x

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1 + 1/x}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} + 1} = \frac{1 + 1/x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \quad \to \quad \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

då $x \to +\infty$. Obs hur x hanteras i samband med kvadratroten: $x > 0$ då $x \to +\infty$ så $x = |x| = \sqrt{x^2}$.

4. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$, $x \neq 0$. Ange speciellt alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

Lösning: <u>Teckenstudiet</u>: vi deriverar funktionen först, bestämmer stationära punkter och studerar tecken för derivatan

$$f'(x) = \frac{3(x+1)^2 \cdot x^2 - 2x \cdot (x+1)^3}{x^4} = [\text{bryt ut } (x+1)^2 x \text{ i täljaren}] =$$
$$= \frac{(x+1)^2 x \cdot (3x - 2(x+1))}{x^4} = [\text{förkorta med } x] = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}.$$

Stationära punkter är alltså $x = -1$ och $x = 2$. Dessa och en singulär punkt $x = 0$ samlas i en teckentabell där vi löser också $f'(x) > 0$ och $f'(x) < 0$

x		-1		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\wr$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

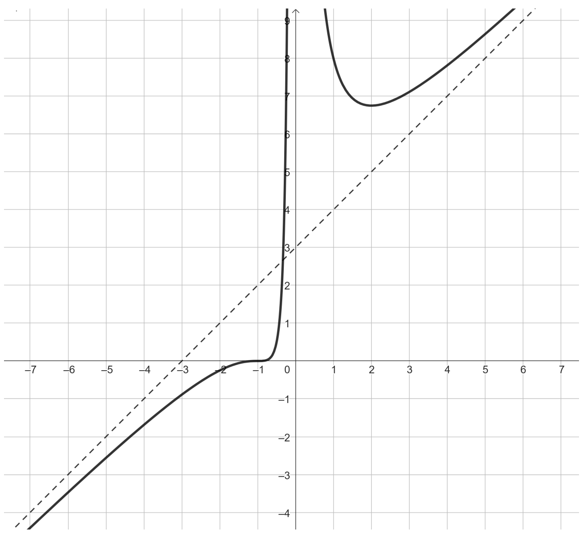
Således är $x = 2$ den enda lokala extrempunkten (min).
<u>Asymptoter</u>: vi binomialutvecklar (multiplicerar) i täljaren av $f(x)$

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2} = x + 3 + 3x^{-1} + x^{-2}$$

för att konstatera att $f(x) - (x+3) \to 0$ då $x \to \pm\infty$. Definitionen ger då att $y = x + 3$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$. För att motivera en möjlig lodrät asymptot i den singulära punkten $x = 0$ skall vi beräkna följande gränsvärden

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty.$$

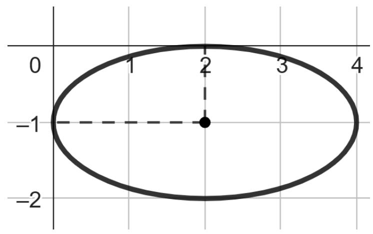
Detta betyder enligt definitionen att $x = 0$ är en lodrät asymptot.
<u>Grafritning</u>: nu samlar vi all information som vi fått ovan i en graf



Svar: $\boxed{\text{lokal minimipunkt } x = 2}$, $\boxed{x = 0 \text{ är en lodrät asymptot}}$ och $\boxed{y = x + 3 \text{ är en sned asymptot då } x \to \pm\infty.}$

5a) Ange en ekvation till en ellips som har medelpunkten i $(2, -1)$ och tangerar båda koordinataxlarna.

Lösning: Den kanoniska ekvationen för ellipsen med medelpunkt i (x_0, y_0) och halvaxlar a (i x-led) och b (i y-led) är $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Eftersom vår ellips har medelpunkten i $(2, -1)$ och tangerar axlarna (rita!) måste $a = 2$, $b = 1$, dvs ellipsens ekvation är

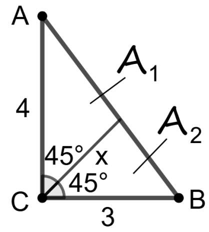


$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1.}$$

5b) En rätvinklig triangel har kateter av längd 3 och 4. Bisektrisen till den räta vinkeln delar triangeln i två mindre trianglar. Bestäm dessa trianglars areor. [*Inga trigonometriska uttryck i svaret.*]

Lösning: Det finns rätt så många varianter för att gå tillväga här.

<u>Sätt 1</u>: Beteckna bisektrisens längd med x. Enligt areasatsen $A = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ har man



$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2}\cdot 4x\sin 45^\circ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{\sqrt{2}}, \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{1}{2}\cdot 3x\sin 45^\circ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Å andra sidan, arean av den hela triangeln, vilken beräknas som $\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6$, är precis $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, dvs

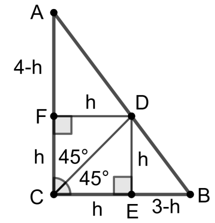
$$6 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7x}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

Slutligen

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{12\sqrt{2}}{7} = \boxed{\frac{24}{7},} \qquad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{12\sqrt{2}}{7} = \boxed{\frac{18}{7}.}$$

<u>Sätt 2</u>: drag höjder DE och DF mot kateterna (se figur) och visa att fyrhörningen $CFDE$ är en kvadrat (t.ex. vinkelsumman i $\triangle CDE$ ger att $\angle CDE = 45^\circ$, och basvinkelsatsen ger att $\triangle CDE$ är likbent). Sedan $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (VV-fallet), således

$$\frac{3-h}{h} = \frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad h = \frac{12}{7}$$

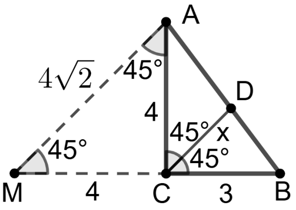


och

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\cdot 4h = \frac{24}{7}, \qquad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\cdot 3h = \frac{18}{7}.$$

<u>Sätt 3</u>: drag höjden mot hypotenusan. Det bildas två nya rätvinkliga trianglar som är likformiga med den stora. Bestäm höjden från likformigheten. Använd bisektrissatsen för att bestämma $|AD|$ och $|BD|$, som blir baser i areasatsen med denna höjden ovan.

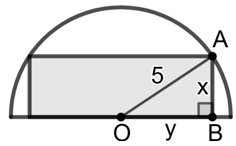
Sätt 4: förläng sidan CB åt vänster och drag en linje genom A som är parallell med bisektrisen CD tills den skär förlängningen (se figur). Det uppstår två nya vinklar av $45°$ (alternatvinkel vid AC och likbelägen vinkel vid MC). Basvinkelsatsen ger att $\triangle MAC$ är likbent, dvs $|MC| = 4$. Dessutom är $\triangle MAC$ rätvinklig så $|AM| = 4\sqrt{2}$ (Pythagoras). Det återstår att notera att $\triangle MAB \sim \triangle CDB$ (VV-fallet: vinklar $45°$ och $\angle B$ gemensam), alltså vi har att



$$\frac{x}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{4+3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

Areasatsen bjuder nu på samma avslutning som i Sätt 1.

6. I en halvcirkel med radie 5 är en rektangel inskriven på ett sådant sätt att en sida ligger på diametern (se figur). Bestäm den största omkretsen en sådan rektangel kan ha.



Lösning: Inför beteckningar för höjden $|AB| = x$ och halva bredden $|OB| = y$. Vi har då att omkretsen blir $2x + 4y = 2(x + 2y)$ samt från den rätvinkliga triangeln $\triangle OAB$ ger Pythagoras sats att $x^2 + y^2 = 25$, alltså $y = \sqrt{25 - x^2}$. Vi byter ut y och noterar att man kan lika bra maximera halva av omkretsen (obs!)

$$f(x) = x + 2y = x + 2\sqrt{25 - x^2}, \qquad 0 < x < 5.$$

Ändpunkterna i intervallet för x, dvs $x = 0$ och $x = 5$, motsvarar ingen rektangel och därför uteslutas, men man kunde faktiskt inkludera ändpunkterna om man observerar att de motsvarar ”oändligt tunna rektanglar” (liggande respektive stående). Således, vi skall maximera $f(x)$ för $0 < x < 5$.

Vi deriverar $f(x)$, löser $f' = 0$ och studerar teckentabell. Stationära punkter ges av

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{25 - x^2} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 25 - x^2 = 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 5$$

som har endast en positiv lösning $x = \sqrt{5}$. [*Obs att ekvivalensen efter kvadreringen gäller precis ty* $x > 0$.] Denna x ligger i intervallet $]0, 5[$ så den är en intressant stationär punkt. Man ser också från derivatan att $f'(x) \to 1 > 0$ då $x \to 0^+$ samt att $f'(x) \to -\infty < 0$ då $x \to 5^-$. Teckenstudiet samlas i en tabell där vi markerar med [0] och [5] intervallets ändpunkter

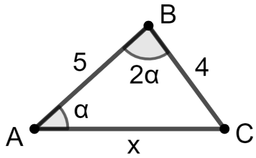
x	[0]		$\sqrt{5}$		[5]
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$5\sqrt{5}$	$\searrow$	

$$f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} + 2\sqrt{20} = \sqrt{5} + 2\sqrt{4 \cdot 5} = 5\sqrt{5}.$$

Teckentabellen säger för sig själv att $x = \sqrt{5}$ är en (global) maximipunkt för $f(x)$ på $]0, 5[$, och den största möjliga omkretsen för rektanglarna blir då $2f(\sqrt{5}) = \boxed{10\sqrt{5}.}$

Anmärkning: istället för teckentabellen kunde man (med kommentaren om ”oändligt tunna rektanglar” ovan) efter man fått den stationära punkten $x = \sqrt{5}$ med $f(\sqrt{5}) = 5\sqrt{5}$ kolla värden i ändpunkterna $f(0) = 10$, $f(5) = 5$, jämföra alla tre och välja det största (med samma slutsats ty intervallet $[0, 5]$ är slutet och begränsat, och en liten ansträngning för att visa att $5\sqrt{5} > 10$).

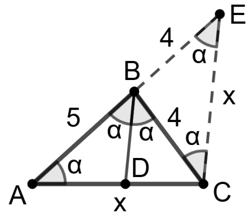
7. I en triangel $\triangle ABC$ är $|AB| = 5$, $|BC| = 4$ och vinkeln $\angle B$ dubbelt så stor som vinkeln $\angle A$ (se figur). Bestäm $|AC|$.
[*Inga trigonometriska uttryck eller α i svaret.*]



Lösning: Det finns flera möjliga lösningar att välja.

Sätt 1: vi gör samma konstruktion med bisektrisen som i lösningen på uppgift 5b ovan (Sätt 4), dvs drar bisektrisen BD, förlänger sidan AB uppåt och drar en linje genom C parallell med bisektrisen BD tills den träffar förlängningen (i punkt E). Konstruktionen används också i beviset för bisektrissatsen (se geometriboken, sid 32) och är väldigt relevant för bisektriser eftersom flera lika vinklar bildas till.

Speciellt ger parallellaxiomet att $BD \| EC$ medför att $\angle BEC = \angle ABD = \alpha$ (likbelägna) och $\angle ECB = \angle CBD = \alpha$ (alternatvinklar). Basvinkelsatsen garanterar nu att $\triangle CBE$ och $\triangle ACE$ är liksidiga, således $|BE| = 4$ och $|CE| = x$. Dessutom är trianglarna också likformiga (VV-fallet, basvinklarna är α), vilket ger



$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|AE|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{x} = \frac{x}{5+4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 36$$

eller $x = \boxed{6.}$

Sätt 2: använd sinussatsen på vinklarna α och 2α

$$\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\sin\alpha} = \frac{x}{2\sin\alpha\cos\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos\alpha = \frac{x}{4}$$

i kombination med cosinussatsen

$$4^2 = x^2 + 5^2 - 2\cdot 5x\cos\alpha = x^2 + 25 - 5x\cdot\frac{x}{4} = 25 - \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} = 25 - 16 = 9$$

som ger samma $x = 6$.

Sätt 3: man kan köra endast på sinussatsen där $\sin\angle C = \sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin 3\alpha$, alltså

$$\frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin 3\alpha}.$$

Den första ekvationen ger samma $x = 8\cos\alpha$ som i Sätt 1, och den andra ger ekvationen $5\sin\alpha = 4\sin 3\alpha$ som går att lösa om man t.ex. fixar $\sin 3\alpha$ med hjälp av additionsformeln

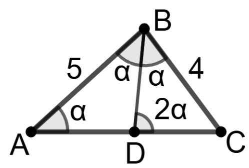
$$\sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha = \sin\alpha(2\cos^2\alpha - 1) + \cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= \sin\alpha(2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\alpha) = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1).$$

Nu kan man lösa den andra ekvationen

$$5\sin\alpha = 4\sin 3\alpha = 4\sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 5 = 4(4\cos^2\alpha - 1) = 16\cos^2\alpha - 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 16\cos^2\alpha = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{9}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{3}{4}.$$

Obs ekvivalensen i den andra raden efter förkortningen med $\sin\alpha > 0$ samt den sista ekvivalensen ty $\cos\alpha = x/8 > 0$. Slutligen $x = 8\cos\alpha = 8\cdot 3/4 = 6$.

Sätt 4: drag bisektrisen BD. Vinkeln $\angle BDC$ är yttervinkel i $\triangle ADB$, dvs $\angle BDC = 2\alpha$, men det ger att $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ (VV: α och 2α). Kombinera detta med bisektrissatsen.



8. Bestäm alla $a, b \in \mathbb{R}$ sådana att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, & x \geq 0, \\ ax^2 + bx, & x < 0, \end{cases}$$

blir deriverbar. Bestäm sedan för vilka av dessa a, b som funktionen är injektiv. Välj något sådant a och b och beräkna den inversa funktionen till $f(x)$ med dessa a, b.

Lösning: man ser direkt att $f(x)$ är kontinuerlig för alla a, b. Delfunktionerna

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad h(x) = ax^2 + bx$$

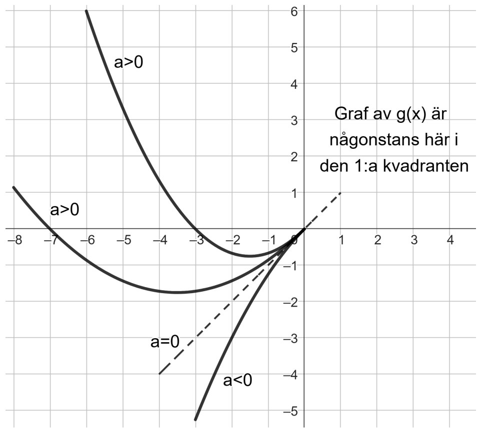
är deriverbara och deras derivator är kontinuerliga, så för deriverbarhet skall derivatorna stämma i $x = 0$, dvs $g'(0) = h'(0)$. Det betyder att graferna skall ha samma lutning i träffpunkten för att ha gemensam tangent. Vi räknar

$$g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad h'(x) = 2ax + b \qquad \Rightarrow \qquad g'(0) = 1, \quad h'(0) = b.$$

Således, $f(x)$ är deriverbar om och endast om $\boxed{b = 1,\ a \in \mathbb{R}.}$

Man ser också att $g'(x) > 0$, dvs $g(x)$ är strängt växande, alltså måste även $h(x)$ vara strängt växande på $]-\infty, 0]$ för $f(x)$ att vara injektiv. Graf till $h(x) = ax^2 + x$ är en parabel som går genom origo och tangerar $y = x$ där. Vilka möjligheter finns då för $h(x)$?

Om $a > 0$ har parabeln grenarna uppåt, och funktionen $h(x)$ har minst ett nollställe till för negativa x (det är lätt att få också om man vill från $ax^2 + x = 0$ som har lösningar $x = 0$ och $x = -1/a < 0$). Antar $h(x)$ (och därmed $f(x)$) samma värde två gånger är den inte injektiv.



Om $a = 0$ blir $h(x) = x$ som är strängt växande.

Om $a < 0$ har parabeln grenarna nedåt och funktionen blir strängt växande för $x < 0$. Det går också att se med hjälp av positiv derivata $h'(x) = 2ax + 1 > 1$ om $a < 0$ och $x < 0$.

Alltså, funktionen $f(x)$ med $b = 1$ är injektiv om och endast om $\boxed{a \leq 0.}$

Det enklaste valet av a blir utan tvekan $a = 0$. Delfunktionen $h(x) = x$ är redan invers till sig själv, och det återstår att beräkna inversen till $g(x)$. För att göra det löser vi ekvationen $g(x) = y$ för $x \geq 0$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad \Leftrightarrow \quad e^x - \frac{1}{e^x} = 2y \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 1 = 2ye^x.$$

Det är en kvadratisk ekvation i variabeln $t = e^x$ som vi kan lösa genom att kvadratkomplettera (samma som pq-formeln)

$$t^2 - 2yt = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (t - y)^2 = 1 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = y \pm \sqrt{1 + y^2}.$$

Eftersom $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y|$ blir lösningen med minustecken negativ, vilket inte är möjligt för $t = e^x > 0$. Det lämnar endast varianten med plustecken för

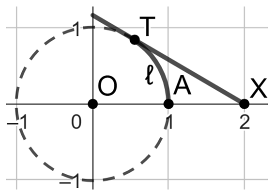
$$e^x = y + \sqrt{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}) = g^{-1}(y).$$

För att bestämma definitionsmängden för g^{-1} tittar vi på värdemängden till g istället (de är samma). Funktionen g är strängt växande och kontinuerlig, alltså värdemängden är ett intervall (enligt satsen om mellanliggande värde) från $g(0) = 0$ (inkluderat) till $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alltså värdemängden är $y \geq 0$. Sammanfattningsvis

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \ln(y + \sqrt{1+y^2}), & y \geq 0, \\ y, & y < 0. \end{cases}$$

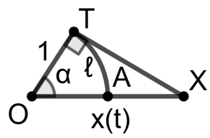
Sedan kan man också byta y mot x som vi vanligtvis brukar göra.

9. Punkten A med koordinaterna $(1, 0)$ ligger på cirkeln med radie 1 m och medelpunkt i origo O. Vid tidpunkten $t = 0$ befinner sig punkten X i A, och börjar röra sig åt höger med den konstanta hastigheten 3 m/s. I varje tidpunkt $t > 0$ dras en linje genom X som tangerar cirkeln i punkten T i den första kvadranten (se figur).



Uttryck båglängden ℓ från A till T som en funktion av t, och beräkna med vilken hastighet denna båglängd kommer att förändras i det ögonblick då $|OX| = 2$ m.

Lösning: Båglängd på enhetscirkeln är blott definitionen för radianer, alltså $\ell = \alpha$. Radien OT är vinkelrät mot tangenten, och i den rätvinkliga triangel $\triangle OTX$ hittar man sambandet $1 = x(t)\cos\alpha$ som kan (ty $0 \leq \alpha \leq \pi/2$) omskrivas till



$$\cos\alpha = \frac{1}{x(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \alpha = \arccos\left(\frac{1}{x(t)}\right).$$

Punkten X börjar röra sig vid $t = 0$ från A, dvs på avstånd 1 från origo, och gör det med hastigheten 3 m/s. Det betyder att avståndet $x(t)$ till origo växer enligt $x(t) = 1 + 3t$ där t mäts i sekunder, och båglängden ℓ kan uttryckas som

$$\boxed{\ell(t) = \arccos\left(\frac{1}{1+3t}\right).}$$

Båglängdens förändringshastighet är derivatan $\ell'(t) = \alpha'(t)$ som vi beräknar via implicit derivering

$$x(t)\cos\alpha(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad x'\cos\alpha + x(-\sin\alpha)\alpha' = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \frac{x'\cos\alpha}{x\sin\alpha}.$$

Vid tid t_0 då $x(t_0) = 2$ kommer vi att ha från $\triangle OTX$

$$\cos\alpha(t_0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t_0) = \frac{\pi}{3}, \quad \sin\alpha(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

alltså

$$\ell' = \alpha' = \frac{3\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Anmärkning: man kan också hitta t_0 från $x(t_0) = 1 + 3t_0 = 2$ och beräkna $\ell'(t_0)$ explicit.