LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2023-08-15 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga på godkäntdelen.

1. Ange en primitiv till var och en av följande funktioner. Endast svar krävs. Tre korrekta svar ger 1p, fyra korrekta 2p samt fem korrekta 3p.

$$\text{a) } x\sin x, \qquad \text{b) } x\sin x^2, \qquad \text{c) } \sin^2 x, \qquad \text{d) } \frac{1}{1+4x^2}, \qquad \text{e) } \frac{1}{x^2-4}.$$

2. Beräkna integralen

$$\int_1^2 \frac{2}{x^3-2x^2+2x}\,dx$$

3. Bestäm alla lösningar till

$$\text{a) } \quad y'+y=x, \qquad\qquad \text{b) } \quad y''+y'=x.$$

4. Polynomet $p(z)=z^3-3z^2+(3+2i)z-(1+2i)$ har nollstället $z=1$. Lös ekvationen $p(z)=0$.

5. Visa att

$$\left|\frac{\sin 2x}{x}-2+\frac{4x^2}{3}\right| \leq \frac{4x^4}{15} \quad \text{för alla} \quad x\neq 0.$$

6. En homogen skiva S begränsas av x-axeln, kurvan $y=x^2$ och linjen $x=1$. Bestäm tyngdpunkten (x_T, y_T) för S. (Det gäller att exempelvis $x_T = \frac{1}{m}\int_S x\,dm$, där m är massan av S.)

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Funktionen $g(t)$ är kontinuerlig och positiv för alla t samt har följande egenskap: Om $A(x)$, $x \geq 0$, betecknar arean av området mellan grafen $y = g(t)$ och t-axeln, från $t = 0$ till $t = x$, så är förändringen av $A(x)$ (med avseende på x) för varje $x > 0$ lika med 3 plus halva värdet av $A(x)$. Bestäm funktionen $g(t)$ för $t \geq 0$.

8. Ett plan delar ytan av ett klot i förhållandet $1:2$. I vilket förhållande delas klotets volym av samma plan?

9. Avgör om integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1 - x}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent eller divergent.

10. Visa att $\displaystyle\int_0^{99} \ln(e^{-x} + x)\,dx \leq \ln(100!)$.

LYCKA TILL!