

Tentamen i Envariabelanalys 1

2018-06-04 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedöms med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna de obestämda integralerna

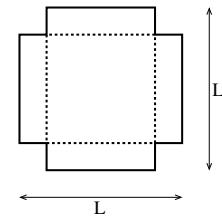
$$(a) \int \frac{x+4}{x^2-x-2} dx \quad (b) \int x \arctan x^2 dx \quad (c) \int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

2. Undersök följande gränsvärden:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x - 9} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{e^{2x} - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{4x} + 2^{5x}}{4^{3x} + 5^{2x}}.$$

3. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $x^{1/x} = k$, $x > 0$, för varje reellt värde på konstanten k .

4. En låda (utan lock) konstrueras genom att man klipper bort fyra lika stora kvadrater från hörnen på en kvadrat med sidolängd L och sedan viker upp kanterna vid de streckade linjerna enligt figuren. Hur stor volym kan lådan få? (Motivera noga att volymen blir maximal.)



5. Skissa grafen till funktionen $f(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+x^2} - \frac{1}{1+a^2x^2} \right) dx$, $a > 0$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

6. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator.
 (b) Definiera vad som menas med att en funktion är strängt växande.
 (c) Använd medelvärdessatsen för att visa att f är strängt växande på ett interval I om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$.

7. Undersök gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n\sqrt{n(k+n)}}$.