LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA	ENDIMENSIONELL ANALYS B2
TENTAMEN	FMAB70
MATEMATIK	2024.04.11, 08:00–13:00

Inga hjälpmedel. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara, läsvärda och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna, om möjligt, tydliga och enkla svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

GRUNDBETYGSDEL

För att bli godkänd med betyg 3 krävs minst 9 poäng på denna del, samt att du får 0 poäng på högst en av dessa sex uppgifter.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''(t) + y(t) = t$, $y(0) = y'(0) = 1$.

2. Bestäm *en* primitiv funktion till vardera nedanstående funktion.

   a) $x\cos(x^2) \quad (x \in \mathbb{R})$

   b) $\ln(x-1) \quad (x > 1)$

   c) $\dfrac{1}{x(x+1)} \quad (-1 < x < 0)$

3. Bestäm de tre nollställena z_1, z_2 och z_3 till polynomet $p(z) = z^3 - 3z^2 + 5z - 15$. Ange även ett polynom av grad tre som har högstagradskoefficient 1 och de tre nollställena iz_1, iz_2 och iz_3.

4. Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller differentialekvationen

   $$(1 + x^2)\, f'(x) + 2xf(x) = 0$$

   för alla $x \in \mathbb{R}$. Dessutom är $f(0) = 1$. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 2 till f.

5. Låt A beteckna området mellan kurvstycket $y = e^{-x}$, $0 \le x < +\infty$, x-axeln och y-axeln. Vilken rotationsvolym blir störst, den som uppkommer då A roterar ett varv kring x-axeln, eller den som uppkommer då A roterar ett varv kring y-axeln?

6. Nisse Nilsson skjuter en puck som väger $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ längs en horisontell is i riktning mot ett ishockeymål som befinner sig $30\,\mathrm{m}$ bort. Puckens startfart är $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$ och sedan bromsas den endast av friktionen mot isen. Den bromsande kraftens storlek är vid varje tidpunkt proportionell mot kvadratroten ur puckens fart, där proportionalitetskonstanten ges av $k = 0.5\,\mathrm{kg{\cdot}m^{1/2}/s^{3/2}}$. Avgör om pucken glider in i mål (eller om den stannar innan).

ÖVERBETYGSDEL

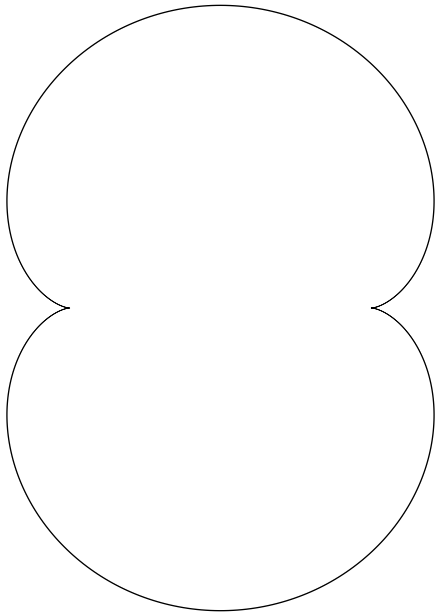
Om du blir godkänd på föregående del så har du chans på överbetyg. Om du fått minst 14 poäng på föregående del så får du 1 bonuspoäng tillgodo här. För att kunna få betyg 4 krävs 3 poäng på denna del; för betyg 5 minst 6 poäng.

7. Formulera och bevisa analysens huvudsats.

8. Beräkna längden av nefroidkurvan (se figur), som parametriseras av

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) - \cos(3t) \\ y = 3\sin(t) - \sin(3t) \end{cases}$$

för $0 \leq t \leq 2\pi$. (Det är lämpligt att förenkla integranden.)



9. Visa att det för $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$|\arctan(x) - x| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2.$$

(Du kan få delpoäng om du visar olikheten med en större konstant framför x^2 i högerledet.)