

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2 KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum: 26 augusti 2017
Tid: 8.00-13.00
Hjälpmaterial: Miniräknare
Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter: 8
Antal sidor: 7
Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator: Kaj Holmberg
Jourhavande lärare: Kaj Holmberg, tel 013-282867
Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

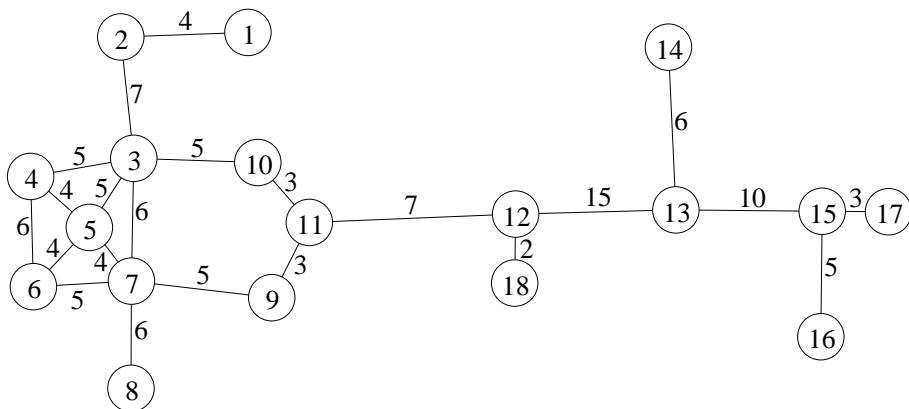
Vid skrivningens slut

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

Uppgift 1

Två dagar om året ökar antalet personer i Skänninge från 4 000 till mer än 100 000. Det är under Skänninge Marken, som infaller den första onsdagen och torsdagen i augusti. Då uppträder en mängd intressanta optimeringsproblem.

- a)** Dagen efter, innan kl 9 på morgonen, ska alla gator där marknaden pågått städas. Nedanstående graf visar marknadsgatorna. Antag att en gata blir städdad av att sopmaskinen kör en gång längs hela gatan, i valfri riktning. Vilket känt optimeringsproblem är det att städa alla dessa gator så snabbt som möjligt med en sopmaskin? Koefficienterna på bågarna är avstånd, och vi antar att maskinen kör med konstant hastighet (oavsett om den sopar eller inte).



Problemet kan reduceras genom eliminering av bågar där ena ändnoden har valens ett. Förklara varför, och genomför reduktionen. (2p)

- b)** Lös optimeringsproblemet i uppgift a med lämplig metod. Utnyttja resultatet av uppgift a. (Det är även tillåtet att lösa problemet utan reduktion, men det blir jobbigare.) Ange det totala avståndet maskinen får tillryggalägga, inklusive det som reducerades i uppgift a. Ange en optimal rundtur. (3p)

- c)** Betrakta problemet i uppgift a-b. Det visar sig att det inte räcker med att sopmaskinen kör en gång på varje gata. Istället måste man köra en gång på ena sidan och en gång på andra. Man kan dock åka i valfri riktning. Blir optimeringsproblemet lättare eller svårare att lösa? Motivera. Kommer den optimala sträckan att bli precis dubbelt så lång som i uppgift a-b, eller kan den bli lite kortare eller lite längre? Lös inte om, utan motivera svaret på annat sätt. (2p)

Uppgift 2

Lill-Bengt befinner sig på tivoli, nod 16 i grafen i uppgift 1. Gammel-Berta står mitt på torget, nod 5. De ska bestämma vid vilken nod de ska mötas. Gammel-Berta går långsammare än Lill-Bengt, så hon behöver tre gånger så lång tid som han för varje meter. De vill träffas så snart som möjligt, och börjar gå mot

varandra samtidigt. De vill bestämma (via mobil) vid vilken nod de ska träffas.

- a)** Lös problemet genom att först finna kortaste (snabbaste) väg för Lill-Bengt mot Gammel-Berta, dvs. från nod 16 till nod 5, och sedan finna snabbaste väg åt andra hålet, från Gammel-Berta mot Lill-Bengt, dvs. från nod 5 till nod 16, men med alla bågkoefficienter multiplicerade med tre. Den nod som är bäst att träffas i är ju den där det maximala av de två nodpriserna är lägst. Ange denna nod. Använd standardmetod. (Att finna kortaste väg i en oriktad graf är som i en riktad graf, men man beaktar båda riktningarna på varje båge.) (3p)
- b)** Antag att de kan mötas på en båge, inte bara i noder. Var ska de då mötas? Lös problemet genom att finna korsningen mellan två linjära funktioner. (2p)
- c)** Kommer i allmänhet kortaste väg åt ena hålet alltid att vara densamma som kortaste väg åt andra hålet med bågkoefficienterna multiplicerade med en faktor större än 1? Vad gäller om man adderar en faktor större än noll? Motivera. (1p)

Uppgift 3

Göte Godberg ska sälja godis på marknaden. Han har tre olika sorter, nämligen brända mandlar, marsipangodis och hårdare karameller (som räcker länge i munnen), och funderar på hur mycket han ska ta med av varje sort. Begränsningar ges av marknadsståndets yta, storleken på Götes bil samt vissa bedömningar av efterfrågan baserade på tidigare års försäljning. Göte kommer fram till följande optimeringsmodell, där målfunktionen helt enkelt är att maximera vinsten, och variablerna står för hur många kg av varje sort han ska ta med.

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \leq 10 & (1) \\ & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \leq 8 & (2) \\ & & x_1 & & & & \leq 4 & (3) \\ & & & x_2 & & & \leq 3 & (4) \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

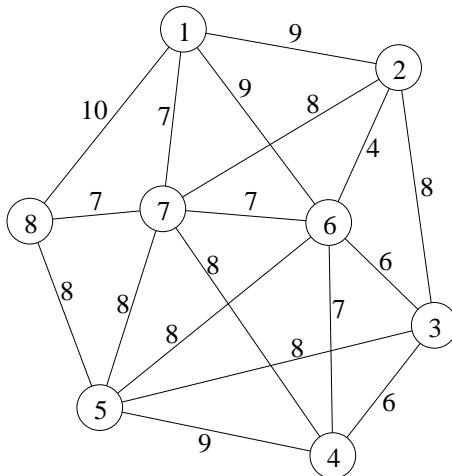
- a)** Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och målfunktionsvärdet. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)
- b)** Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Ange optimal duallösning mha. optimaltablån i uppgift a. Kontrollera att den duala lösningen är tillåten, samt att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)
- c)** Ange skuggpriset för varje bivillkor och förklara vad det betyder. (1p)
- d)** Göte funderar på att ta med spunnet socker. Den variabeln skulle få koefficient 2 i de två första bivillkoren och noll i de andra. Vinstkoefficienten skulle bli 4.

Skulle lösningen förbättras av spunnet socker? (1p)

Uppgift 4

I England finns något som kallas "Pub Crawl", vilket innebär att man besöker alla traktens pubar och tar sig en öl på varje. Av naturliga skäl vill man då gå allra kortaste vägen. Putrick och hans kompisar är för unga för att dricka alkoholhaltiga drycker, men har kommit på något annat som liknar detta, nämligen en "Carousel Crawl", där man ska åka varje karusell (och annan häftig attraktion) på tivoli på Skäninge Marken en gång. Man kommer (även) då att bli yr i huvudet, svag i knäna och allmänt omtöcknad, så det känns fortfarande viktigt att gå kortaste vägen mellan attraktionerna.

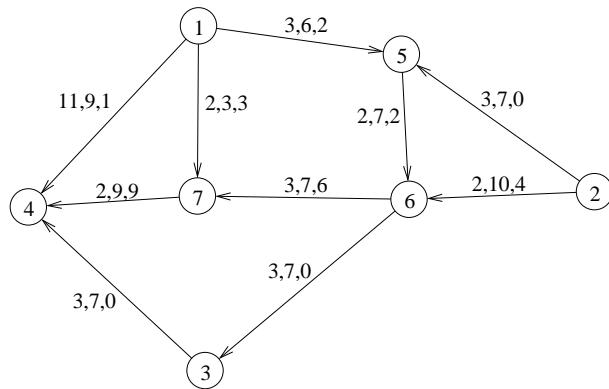
Putrick med kompisar vill alltså hitta kortaste rundturen som besöker varje attraktion (nod) i nedanstående graf. På bågarna står avstånd.



- a)** Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en bra tur med en lämplig heuristik. Finn även en undre gräns för den totala sträckan genom att lösa en lämplig relaxation av problemet. Jämför gränserna. (3p)
- b)** Vid närmare eftertanke, kommer Putrick på att de "negativa" effekterna aggregeras (vilket även gäller det engelska orginalet), så det spelar roll när i rundturen man går en viss sträcka. Låt c_{ijk} vara tiden det tar att gå från plats i till plats j om den bågen är den nummer k i rundturen. Vi antar att c_{ijk} ökar med k . Förklara hur någon känd heuristik för problemet i uppgift a kan modifieras för att ta hänsyn till detta. (1p)

Uppgift 5

Mitt under marknaden behöver man flytta varor genom staden. Man har 6 släpvagnar i nod 1 och 4 i nod 2 och alla dessa ska till nod 4. Marknadsledningen har infört begränsningar på hur mycket man får förflytta på de olika gatorna. Den totala kostnaden beräknas som avstånd gånger antal vagnar. Bågarna i grafen nedan är märkta med avstånd, övre gräns samt hur man gjorde förflyttningarna förra året.



- a) Kontrollera mha. simplexmetoden för nätverk om förra årets flöde hade minimal kostnad. (2p)
- b) I hastigheten har man glömt att båge $(1,7)$ är helt avstängd sedan man byggde om järnvägen genom Skänninge. För att finna en ny minkostnadslösning kan man öka kostnaden på båge $(1,7)$ mycket (t.ex. till 20), och optimera om med simplexmetoden för nätverk. Starta med flödet i uppgift a. (2p)
- c) Betrakta problemet i uppgift b. Hur mycket behöver man minst öka kostnaden på båge $(1,7)$ för att uppnå önskad effekt? (1p)

Uppgift 6

Marknadsarrangörerna funderar på hur många stånd man ska placera på torget. Man klassificerar dem i två grupper, de med ätbara varor och de med andra varor, eftersom köbildningen blir olika för dessa grupper. Faktorer som talar mot för många stånd är att det kan bli för trångt, så att kunderna undviker torget, och köplusten kan avta. Samtidigt blir förtjänsten för låg om det är för få stånd.

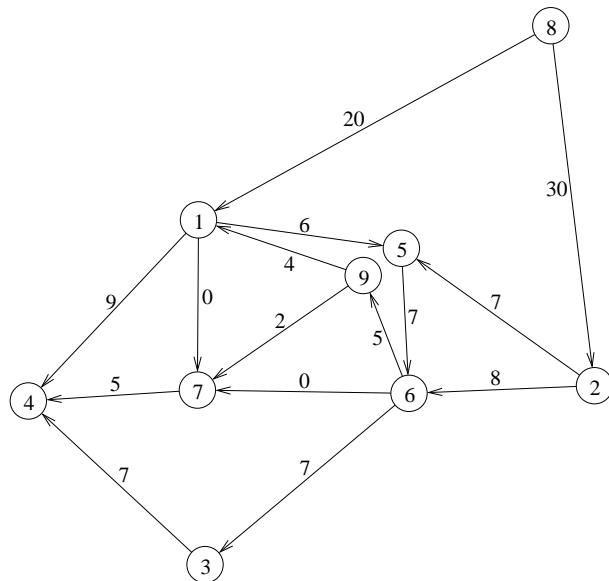
Låt x_1 ange antal stånd med ätbara varor, och x_2 antal stånd med andra varor. Man formulerar följande linjära heltalsproblem för att finna bästa fördelningen.

$$\begin{aligned} \max \quad z = & \quad 5x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & \quad 3x_1 + x_2 \leq 19 \\ & \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & \quad 0 \leq x_1 \leq 6, \text{ heltalet} \\ & \quad 0 \leq x_2 \leq 5, \text{ heltalet} \end{aligned}$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 7

Trafikstockningar är ett reellt problem i anslutning till Skänninge Marken. Trafik kommer från Linköping, via Mantorp, nod 8 i följande graf, och ska till Motala, via utfarten i nod 4. På bågarna står ett uppskattat mått på hur många bilar per tidsenhet som kan passera.



Problemet kommer när man stänger av gatorna (bågarna) (1,7) och (6,7). Båge (9,7) är en liten gata som går genom lugna villakvarter, och vanligtvis inte har genomfartstrafik, men det är möjligt att använda den vid detta speciella tillfälle.

Hur många bilar per tidsenhet kan maximalt ta sig från nod 8 till nod 4, och hur ska de köra? Använd standardmetod och beskriv alla steg noga. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 8

Fem Skänningebor ska turas om att stå i tombolakiosken. Kiosken ska vara bemannad de 10 timmarna från kl 10 till kl 20, så varje person måste stå där 2 timmar. Passen blir då 10-12, 12-14, 14-16, 16-18 och 18-20.

Varje person får ange sin "kostnad" (olägenhet, besvär etc) för varje pass, se följande matris där rader motsvarar passen och kolumnerna personerna, och man har kommit överens om att det vore rättvist att minimera den totala kostnaden.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 9 & 14 & 6 \\ 7 & 14 & 9 & 11 & 13 \\ 16 & 8 & 12 & 5 & 9 \\ 13 & 18 & 15 & 10 & 4 \\ 16 & 11 & 14 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

- a)** Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)
- b)** Antag att person 1 (kolumn 1) väldigt gärna vill stå tredje passet (rad 3). Hur mycket måste personen sänka sin kostnad för det passet för att få det? Lös inte om problemet, utan använd duallösningen eller reducerade kostnader från uppgift a. (1p)