**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**ENDIMENSIONELL ANALYS B2**
**2023-04-20 kl 8.00–13.00**

*Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.*

# *Godkäntdel*

*För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga på godkäntdelen.*

**1.** Bestäm alla lösningar till

$$\text{a)}\quad y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \qquad\qquad \text{b)}\quad y' + \frac{1}{x}\,y^2 = 0, \;\; x > 0.$$

**2.** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y' - 6y = 36xe^{-x}, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$$

**3.** Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x \sin x}.$$

Bestäm även alla heltal $n$ sådana att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^n}$$

existerar ändligt.

**4.** Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx.$$

**5.** Polynomet $p(z) = z^3 + z^2 - (8+4i)z - (6+12i)$ har ett reellt nollställe. Lös ekvationen $p(z) = 0$.

**6.** Kurvstyckena $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $0 \le x \le 1$, och $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $0 \le x \le 1$, avgränsar ett begränsat område i $xy$-planet. Beräkna arean av detta område. Beräkna också volymen av den kropp som bildas då området roterar kring $x$-axeln.

VAR GOD VÄND!

## Överbetygsdel

*Om du klarat godkäntdelen har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.*

7. Du är på fest och det är dags för dessert. Precis när du serveras kaffe börjar någon hålla tal. När talet slutar är temperaturen på ditt kaffe 54 °C, och en halvtimme efter att talet är slut är den 38 °C. Hur lång tid varade talet? Temperaturen i festlokalen är 22 °C, och kaffets serveringstemperatur är 86 °C.
(Enligt *Newtons avsvalningslag* avtar temperaturen hos en varm kropp med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan kroppens och omgivningens temperatur.)

8. Bestäm alla två gånger deriverbara funktioner $f$ som uppfyller integralekvationen

$$\int_0^x \left( \int_0^{t^2} \left(f'(\sqrt{s})\right)^2 \, ds \right) dt = f(x) + x, \qquad x \geq 0.$$

9. Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a^{\sqrt{k}}$ är konvergent för alla $0 < a < 1$.

10. Antag att funktionen $f$ är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$, och att

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x f(x)\, dx = 0.$$

Visa att $f$ har (minst) två olika nollställen på intervallet $[0, 1]$.

LYCKA TILL!