

Tentamen i Envariabelanalys 1

2025-08-26 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmittel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.
För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialalkalkyl

1. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{x^4 + 3x^2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{3x} + 3^{2x})}{\ln(2^{4x} + 4^{2x})}.$$

2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \left(4 - \frac{1}{x}\right) e^{-2x}$. Ange alla lodräta/vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter till f .

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

$$(a) \int_0^2 xe^{2x} dx \quad (b) \int x\sqrt{1-x^2} dx \quad (c) \int \frac{\sin 2x}{1+\sin x} dx.$$

4. Beräkna

$$(a) \int \frac{4x^2 + 9x + 10}{x^4 + 2x^3 + 5x^2} dx \quad (b) \int_1^\infty \frac{4x^2 + 9x + 10}{x^4 + 2x^3 + 5x^2} dx \text{ eller visa divergens.}$$

Del B

5. En behållare i form av en rak, cirkulär cylinder utan lock rymmer volymen 8π . Vilken är den minsta möjliga sammanlagda arean av dess sidor? Motivera noga (som alltid!).

6. Visa att $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \right) \leq \frac{3}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

7. Funktionen f är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$. Vidare är $f'(0) = 1$ och $f'(1) = 2$. Bestäm

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} (f(\ln x) - f(0))$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\ln x) - f(0)}{x - 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(\ln x) - f(1)}{x - e}.$$