

## Lösningsskisser för TATA41 2018-03-15

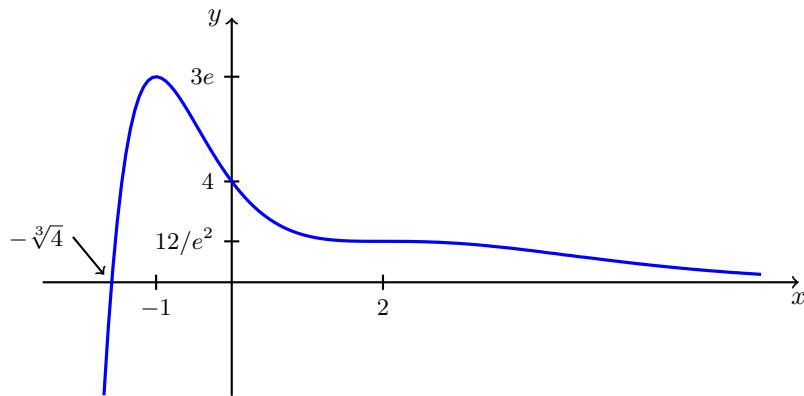
1. Funktionen  $f(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$  är definierad för alla  $x \in \mathbf{R}$ . Den har exakt ett nollställe, nämligen  $x = -\sqrt[3]{4}$ , där den byter tecken från negativ till positiv. Derivatan är

$$f'(x) = 3x^2e^{-x} + (x^3 + 4)(-e^{-x}) = -(x^3 - 3x^2 + 4)e^{-x} = -(x+1)(x-2)^2e^{-x},$$

vilket ger teckentabellen

$x$	-1	2	
$-e^{-x}$	-	-	-
$x+1$	-	0	+
$(x-2)^2$	+	+	0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗ lok. max.	↘	terrass- punkt

Att  $f(x) \rightarrow -\infty$  då  $x \rightarrow -\infty$  är tämligen uppenbart, eftersom  $x^3 + 4 \rightarrow -\infty$  och  $e^{-x} \rightarrow \infty$ , och standardgränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k/e^x = 0$  visar att  $f(x) = x^3/e^x + 4/e^x \rightarrow 0+0=0$  då  $x \rightarrow \infty$ , så att linjen  $y = 0$  är en vågrät asymptot.



**Svar:** Lokalt maximum  $f(-1) = 3e$ . Linjen  $y = 0$  är en vågrät asymptot (då  $x \rightarrow \infty$ ). (Lokala minima och lodräta asymptoter saknas.)

2. (a)  $\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2} \rightarrow \frac{4+4+4}{2+2} = 3$  då  $x \rightarrow 2$ .
- (b) Med  $x = 1+t$  fås  $\frac{\ln x}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{\ln(1+t)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2})} = \frac{\ln(1+t)}{-\sin(\frac{\pi t}{2})} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \rightarrow -\frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{\pi}$  då  $t \rightarrow 0$  (dvs.  $x \rightarrow 1$ ), enligt standardgränsvärdet.
- (c)  $\frac{x+\ln(1+2^x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\ln 2^x+\ln(2^{-x}+1)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x^2}} = [\text{för } x > 0] = \frac{x+x\ln 2+\ln(2^{-x}+1)}{x\sqrt{1+1/x^2}}$   
 $= \frac{1+\ln 2+\frac{1}{x}\ln(2^{-x}+1)}{\sqrt{1+1/x^2}} \rightarrow \frac{1+\ln 2+0\cdot\ln(0+1)}{\sqrt{1+0}} = 1 + \ln 2$  då  $x \rightarrow \infty$ .

**Svar:** (a) 3    (b)  $-2/\pi$     (c)  $1 + \ln 2$ .

3. (a)  $\int \frac{x^2+2x+6}{x^2} dx = \int (1 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}) dx = x + 2 \ln|x| - \frac{6}{x} + C$ .
- (b)  $\int \frac{x^2}{x^2+2x+6} dx = \int (1 + \frac{-2x-6}{x^2+2x+6}) dx = x - \int \frac{2(x+1)+4}{(x+1)^2+5} dx$   
 $= x - \ln(x^2 + 2x + 6) - \frac{4}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C$ .
- (c) Variabelbytet  $t = \sqrt{x}$  följt av partiell integration ger  $\int \cos \sqrt{x} dx = \int 2t \cos t dt = 2t \sin t - \int 2 \sin t dt = 2t \sin t + 2 \cos t + C = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$ .

**Svar:** Se ovan.

4. Sätt  $f(x) = 2 \ln x - \arctan 3x - \ln(1 + 9x^2)$ , för  $x > 0$ . Derivatan

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1 + (3x)^2} - \frac{18x}{1 + 9x^2} = \frac{2(1 + 9x^2) - x(3 + 18x)}{x(1 + 9x^2)} = \frac{2 - 3x}{x(1 + 9x^2)}$$

är positiv för  $0 < x < 2/3$  och negativ för  $x > 2/3$ , vilket ger ett maximum

$$f(2/3) = 2 \ln \frac{2}{3} - \arctan 2 - \ln(5) = \underbrace{-\ln \frac{45}{4}}_{=A} - \arctan 2.$$

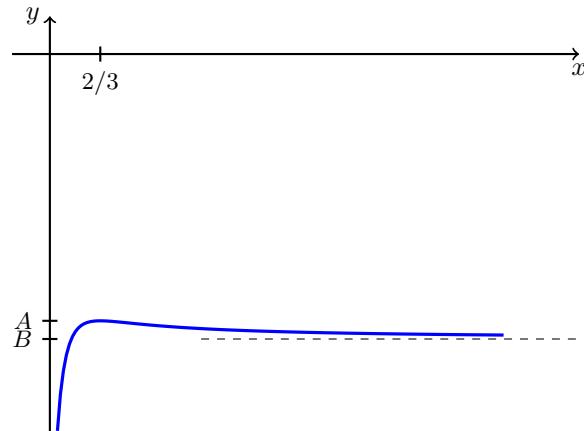
(Det spelar egentligen ingen roll för svaret, men för grafritandets skull kan man notera att  $A < 0$ .)

Gränsvärden:  $f(x) \rightarrow -\infty$  då  $x \rightarrow 0^+$  (uppenbart) och

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{x^2}{1 + 9x^2} - \arctan 3x \\ &= \ln \frac{1}{x^{-2} + 9} - \arctan 3x \rightarrow -\ln 9 - \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=B} \quad \text{då } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(Eftersom  $f'(x) < 0$  för  $x > 2/3$  så är  $B < A$ .)

Vi kan nu läsa av antalet reella lösningar till ekvationen  $f(x) = k$  från grafen  $y = f(x)$ , som ser ut så här (om man ritar den skalenligt med hjälp av dator; värdena är  $A \approx -3,53$ ,  $B \approx -3,77$ ):



**Svar:** Låt  $A = -\ln \frac{45}{4} - \arctan 2$  och  $B = -\ln 9 - \frac{\pi}{2}$ . Ekvationen saknar lösning om  $k > A$ , har en lösning om  $k = A$  eller  $k \leq B$ , och har två lösningar om  $B < k < A$ .

5. (a)  $\int_{-1}^3 |x^2 - 4| dx = \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$ .
- (b)  $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x-5)} = \frac{1}{4} \int_2^3 \left( \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{4} \left[ \ln|x-5| - \ln|x-1| \right]_2^3 = \frac{1}{4} ((\ln 2 - \ln 2) - (\ln 3 - \ln 1)) = -\frac{1}{4} \ln 3$ .
- (c) Integranden  $f(x)$  är en **udda** funktion:

$$f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{\ln(2 + (-x)^2)} = \frac{-\arctan x}{\ln(2 + x^2)} = -f(x).$$

Den är kontinuerlig på  $\mathbf{R}$ , och därmed integrerbar på varje begränsat interval. Integrationsintervallet  $[-2, 2]$  är begränsat och ligger symmetriskt kring origo. Integralen blir därmed **noll**.

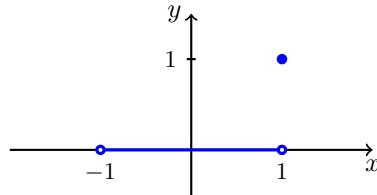
**Svar:** Se ovan.

Som rimlighetskontroll kan man notera att svaret i (a) måste bli **positivt**, eftersom  $|x^2 - 4| > 0$  förutom i enstaka punkter, och att svaret i (b) måste bli **negativt**, eftersom  $\frac{1}{(x-1)(x-5)} < 0$  då  $2 \leq x \leq 3$ .

6. (a) Se läroboken.  
 (b) Funktionen  $f$  är definierad för  $-1 < x \leq 1$ , och ges av

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(Ifall  $x \leq -1$  så saknar  $x^n$  gränsvärde då  $n \rightarrow \infty$ , och om  $x > 1$  fås  $x^n \rightarrow \infty$  då  $n \rightarrow \infty$ .)



Detta är ej en kontinuerlig funktion; den är ju diskontinuerlig i punkten 1, eftersom gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

inte överensstämmer med värdet  $f(1) = 1$ .

7. Derivering av  $f(x) = 16x^5 + 20x^2 + 15x + 1$  ger  $f'(x) = 80x^4 + 40x + 15$  och  $f''(x) = 40(8x^3 + 1)$ . Eftersom  $f''(x) < 0$  för  $x < -1/2$  och  $f''(x) > 0$  för  $x > -1/2$  så har  $f'$  ett strängt minimum då  $x = -1/2$ . Insättning ger  $f'(-1/2) = 0$ , och eftersom detta är minimivärde så gäller  $f'(x) > 0$  för  $x \neq -1/2$ . Detta visar att  $f$  är strängt växande på  $\mathbf{R}$  (med en terrasspunkt då  $x = -1/2$ ), och därmed är  $f$  inverterbar, vilket skulle visas.

(Alternativt kan man med gissning av rötter hitta faktoriseringen  $f'(x) = 5(2x+1)^2(4x^2 - 4x + 3)$  och därur se att  $f'(x) > 0$  för  $x \neq -1/2$ .)

Formeln för inversens derivata,  $\frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx}$ , ger

$$(f^{-1})'(1) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{15}.$$