

Tentamen i Envariabelanalys 1
2023-03-23 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmittel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar publiceras på kursens hemsida senast dagen efter tentan.

1. Skissa grafen och ange värdemängden till funktionen $f(x) = \arctan 2x + \frac{1-2x}{1+4x^2}$ med $D_f = [0, \infty[$. Ange också alla vågräta asymptoter samt lokala extempunkter.
2. Beräkna
 - (a) $\int \frac{2x}{8x-x^2-15} dx$
 - (b) $\int \ln(x^2+1) dx$
 - (c) $\int x (\cos x^2 - \cos 2x) dx$.
3. Undersök gränsvärdena
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5) - \ln x}{\sin \frac{2}{x}}$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$.
4. Beräkna $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+4x} dx$ och $\int_0^\infty \frac{x+1}{x^3+4x} dx$ eller visa divergens.
5. Ange antalet reella lösningar till ekvationen $\frac{e^{-1/x}}{x^2+1} = k$ för alla reella konstanter k .
6. (a) Definiera vad det betyder att F är en primitiv funktion till f på ett interval I .
(b) F är en primitiv funktion till $f(x) = |x|e^x$ på \mathbf{R} och $F(0) = 0$. Bestäm $F(x)$.
7. Undersök $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt$ om f är 2 gånger (ej nödvändigtvis kontinuerligt) deriverbar.