LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2022-04-20 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. *Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.*

a) Låt l vara linjen som går genom punkterna $(2, 1)$ och $(3, -5)$.
Ange en ekvation för l på formen $y = kx + m$.

b) För vilka vinklar, med $0^\circ \leq v < 360^\circ$, gäller det att $\sin v = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

c) Skriv $2 \lg 4 - \lg 11$ som en enda logaritm.

d) Skriv polynomet $x^2 + 6x + 8$ som en produkt av förstagradsfaktorer. Faktorerna ska ha ledande koefficient lika med 1.

e) Lös ekvationen $\ln(-2x - 2) - \ln(-2x - 1) = \ln 4$.

f) Lös olikheten

$$|5x - 3| \geq x + 5.$$

2. Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

b $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

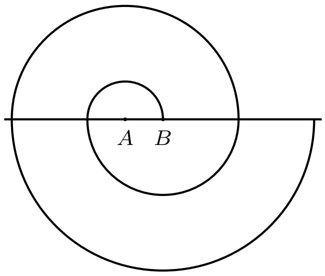
c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, där m och n är positiva heltal.

3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{då } x < 3, \\ ax + b & \text{då } x \geq 3. \end{cases}$$

Bestäm a och b så att f är kontinuerlig och deriverbar på hela $\mathbb{R}$. Är f även två gånger deriverbar med detta val av parametrar?

4. En spiral ritas med hjälp av halvcirklar med centrum alternerande vid A och B. Börja med centrum i A med radie $r > 0$ för den minsta halvcirkeln och fortsätt med större och större halvcirklar som i figuren. Vad är den totala kurvlängden för en spiral som är uppbyggd av n halvcirklar? Svaret ska vara förenklat så långt som möjligt.



5. Bestäm största möjliga definititionsmängd till

$$f(x) = \ln \ln \ln |x|$$

och beräkna $f'(e^2)$.

6. En tangentlinje med tangeringspunkt P i första kvadranten dras till kurvan $y = c/x$, där $c > 0$. Tangentlinjen skär koordinataxlarna i punkterna M och N. Visa att P är mittpunkten på sträckan MN.

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Två flygplan flyger med samma konstanta fart v km/h i två räta linjer, vilka ligger i samma plan och skär varandra med vinkeln 120°, där det är vinkeln mellan flygplanens riktningsvektorer som avses. När det första planet når linjernas skärningspunkt, har det andra planet d km kvar dit. Vad är det minsta avståndet som planen kommer att befinna sig på, och vid vilken tidpunkt inträffar det, i förhållande till tidpunkten då det första planet når skärningspunkten?

8. Visa Apollonius sats: I en triangel ΔABC, markeras mittpunkten på sidan BC med D och linjen AD dras. Då uppfyller sträckornas längder sambandet

$$AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}.$$

9. Skissa grafen till $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Speciellt ska alla stationära punkter, punkter där derivatan inte är definierad och alla asymptoter finnas med.
Ledtråd: Sambandet $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ kan komma till användning.

10. Låt

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2022) = \prod_{j=1}^{2022}(x-j).$$

Hur många reella nollställen har derivatan $p'(x)$?