LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2022-08-16 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Polynomet $p(z) = z^2 - (1+i)z + i$ har ett reellt nollställe z_1 och ett rent imaginärt nollställe z_2. Beräkna z_1 och z_2, samt rita ut i det komplexa talplanet mängden av alla $z \in \mathbb{C}$ som uppfyller de båda olikheterna

$$|z + z_1| \leq 1, \quad |z - z_2| \leq 1.$$

Svar. Faktorisering av polynomet $p(z) = (z-i)(z-1)$ *ger rötterne* $z_1 = 1$ *och* $z_2 = i$. *Den första och annan olikhet svarar till cirkelskivor med centrum i* $z = -1, z = i$ *och radius 1. Detta ger än area som sträcker sig mellan de två skärningspunkter vid* $z = 0$ *and* $z = -1 + i$.

2. Lös begynnelsevärdesproblemen:

a) $y' = 2xy, \quad y(0) = 2.$

b) $y' = (y-2)^2 x^{3/2}, \quad x > 0, \quad y(1) = 1.$

Svar.

a) $y(x) = 2e^{x^2}$.

b) $y(x) = \frac{-4x^{5/2}-1}{-2x^{5/2}-3} = 2 - \frac{5}{2x^{5/2}+3}$

3. Bestäm en primitiv till funktionen

$$f(x) = \frac{x+10}{x^3 + 4x^2 + 5x}, \quad x > 0.$$

Svar. $\int f(x)\,dx = 2\ln x - \ln(x^2 + 4x + 5) - 3\arctan(x+2) + C$

4. Avgör om följande gränsvärden är ändliga.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Ange gränsvärde då det finns. Ett argument som inte använder l'Hôpitals regel och som förklarar resultatet måste anges.

Svar.

i) $\dfrac{x + x^3 B(x)}{x^2} = \frac{1}{x} + xB(x) \to \begin{cases} +\infty & x \to 0^+ \\ -\infty & x \to 0^- \end{cases}$ *Gränsvärden er obestämt.*

ii) $\dfrac{\ln(x+1) - x}{x^2} = \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + x^3 B(x) - x}{x^2} \to -\dfrac{1}{2} \quad (x \to 0)$

iii) $\dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \dfrac{1 - \frac{x^2}{2} + x^4 B(x) - 1}{x^2} x \to -\dfrac{1}{2} \quad (x \to 0)$

5. Lös begynnelsesvärdesproblemet

$$y'' - 2y' + 4y = xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Svaret ska ges på reell form.

Svar.

i) $y_h(x) = e^x(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x))$.

ii) En partikulär lösning är $y_p(x) = \frac{1}{3}xe^x$.

iii) Begynneslsesvillårene ger

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{3}x \right).$$

6. Bestäm för vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ som följande generaliserade integral är konvergent:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(x) \, \mathrm{d}x$$

Svar. Primitiv: $\dfrac{e^{-\alpha x}(\sin x - \alpha \cos x)}{1 + \alpha^2}$. *Den generaliserade integralen är*

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos x \, dx = \lim_{X \to \infty} \left(\frac{e^{-\alpha X}(\sin X - \alpha \cos X)}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \right) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1 + \alpha^2} & \alpha > 0 \\ \textit{existerar ej} & \alpha \le 0 \end{cases}$$

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Låt

$$f(k) = \frac{1 + \sin(k^3 + 3)}{4k^3 + 2k + 1}.$$

a) Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är konvergent.

b) Bestäm ett heltal $m \geq 1$ sådant att $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < 10^{-6}$.

Svar.

b) $\frac{1}{2}\int_m^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{4x^2}\right]_m^\infty = \frac{1}{4m^2} < 10^{-6} \quad \Longleftrightarrow \quad m > \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = \frac{10^3}{2} = 500.$

8. a) Följande begynnelsevärdesproblem har oändligt många lösningar:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0, \quad x(t) \in \mathbb{R}.$$

Finn två av dessa lösningar.

Svar.

i) En lösning ges av $x(t) = 0$ för alle t.

ii) $\frac{3}{2}x^{2/3} = t + C$ där $C = 0$.

b) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 + x^2, \quad x(0) = -1$$

Är lösningen definierad för alla $t \geq 0$?

Svar. Differentialekvationen är separabel: $\int \frac{dx}{x^2+1} = \int dt \Rightarrow \arctan(t) = t + C$. *(Här ser vi direkt att lösningen inte kan existera för alla t eftersom $-\pi/2 < \arctan t < \pi/2$.) Begynnelsesvärdet $x(0) = -1$ medför att $C = -\pi/4$. Därför är $x(t) = \tan t - \pi/4$ en lösning. Observera att denna lösning endast existerar för $-\pi/4 < t < 3\pi/4$ då $x(t) \to \pm\infty$ när $t \to -\pi/4$ eller $3\pi/4$.*

9. Funktionen u definieras som

$$u(x) = \int_0^x \frac{t}{\sin t}\mathrm{d}t.$$

Beräkna

$$\int_0^{\pi/2} u(x)\cos(2x)\mathrm{d}x.$$

Svar.

$$\int_0^{\pi/2} u(x)\cos(2x)\,dx = 1 - \frac{\pi}{2}$$

10. Avgör om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\ln k)^2}$$

konvergerar.

Svar. Ja, serien kovergerar.

LYCKA TILL!