LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2025-01-17 kl. 8.00–13.00

INGA HJÄLPMEDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar ska lämnas när så är möjligt.

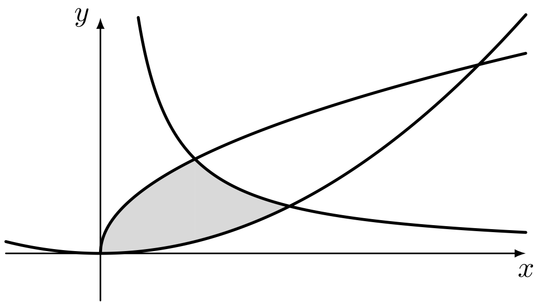
Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng på denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - y' - 2y = 2e^x + 4x.$$

2. I koordinatsystemet nedan är kurvorna $y = \sqrt{x}$, $y = 1/x$ samt $y = x^2/8$ inritade. Beräkna arean av det skuggade området.



3. Lös ekvationerna nedan. Ange lösningarna på formen $a + bi$, där a och b är reella tal som inte är uttryckta med trigonometriska funktioner.

a) $z^2 = -3 + 4i$

b) $z^3 = 8i$

4. a) Formulera analysens huvudsats.

b) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 2 till funktionen

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{e^t}{t+2}\, dt.$$

5. Låt D vara området mellan x-axeln och kurvstycket

$$y = f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad 0 \le x \le \sqrt{3}.$$

Beräkna volymen som erhålles då D roterar ett varv kring x-axeln, samt volymen som uppstår då D roterar ett varv kring y-axeln.

Tips: Formeln $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$ är användbar vid beräkning av en av volymerna.

VAR GOD VÄND!

6. En motorbåt färdas på en stilla sjö mot en strand med farten 3 m/s. Då avståndet till stranden är 50 m så slutar motorn plötsligt att fungera. Från denna stund fortsätter båten i samma riktning, och det visar sig att förändringen av farten i varje ögonblick är proportionell mot farten. Efter 15 sekunder har båtens fart sjunkit till 1 m/s. Bestäm farten som funktion av tiden genom att ställa upp en differentialekvation och lösa den. Kommer båten glida hela vägen fram till stranden?

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från föregående del) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. En sfär med radien R delas i tre delar av två parallella plan med inbördes avstånd h. Beräkna arean av den del av sfären som ligger mellan planen. Beror arean, för ett givet h, av var de parallella planen skär sfären?

8. Visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2}.$$

9. Innerytan hos en öppen skål bestäms av den form som uppstår då kurvan $y = x^2$ roterar kring y-axeln, där en längdenhet i xy-planet motsvarar en decimeter. Vid en viss tidpunkt börjar vatten sippra ner i skålen med hastigheten 1 liter per timme. Samtidigt avdunstar vatten från skålen i en takt som är proportionell mot vattenytans area, med proportionalitetskonstanten 0,03 dm/h.

a) Ställ upp en differentialekvation för vattennivåns höjd.

b) Vilken höjd kommer vattennivån gå mot då tiden går mot oändligheten? (Skålen antas vara så pass hög att vattnet inte rinner över kanten.)

c) Hur lång tid tar det tills vattennivån har nått halvvägs till den höjd som utgör svaret till deluppgift **b)**.

LYCKA TILL!