

Inga hjälpmaterial tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. 15 poäng ger säkert godkänt.

1. a) Bestäm alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sådana att x, y är positiva heltal som uppfyller ekvationen

$$13x + 23y = 1465.$$

3 p

- b) Bestäm alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sådana att x, y är positiva heltal som uppfyller ekvationen

$$13x^2 + 23y^2 = 1465.$$

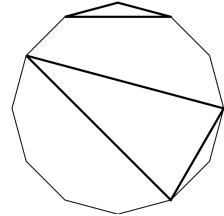
2 p

2. Vi definierar tre plan Π_1, Π_2, Π_3 som beror av parametern a genom följande ekvationer på normalform: $\Pi_1 : x + y + az = 1$, $\Pi_2 : ax - 3y + 4z = -2$, $\Pi_3 : 2x - y + 4z = a$. För vilka värden på det reella talet a saknar de tre planen gemensam punkt och för vilka värden på a finns det oändligt många skärningspunkter? Ange också skärningsmängden om denna blir oändlig för något a .

5 p

3. Betrakta en regelbunden 12-hörning i planet. Vi kan nu konstruera trianglar genom att välja ut tre olika hörn i denna och låta dessa bilda hörnen i en ny triangel. Observera att två trianglar räknas som identiska om de har samma hörn, oberoende av ordningen på hörnen.

- a) Hur många sådana trianglar är möjliga?
 b) Hur många sådana liksidiga trianglar är möjliga?
 c) Hur många sådana likbenta trianglar är möjliga?



2 p

1 p

2 p

Bilden visar exempel på två likbenta trianglar. Svara på uträknad form.

4. Polynomet $p(z) = z^4 - 9z^2 + 12z + 10$ har nollstället $z = 2 + i$. Bestäm övriga (komplexa) nollställen.
5. a) Bestäm matriserna för de tre speglingsavbildningarna som speglar rummet i planen $x+y=0$, $y+z=0$ respektive $x+z=0$. (ON-system)
- b) Var hamnar punkten (x, y, z) om vi först speglar den i planet $x+y=0$, sedan i planet $y+z=0$ och till sist i planet $x+z=0$? Om vi upprepar proceduren ytterligare en gång blir den sammansatta avbildningen en spegling i en linje. Vilken?

5 p

3 p

2 p

6. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Vad blir determinanten för A^n (n positivt heltal)?
 b) Gissa en formel för A^n (n positivt heltal).
 c) Bevisa formeln i b) med matematisk induktion.

1 p

1 p

3 p