

## Tentamen i Envariabelanalys 1

2020-01-19 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmaterial. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedöms med minst 2 poäng. För betyg  $n$  räcker  $4(n - 1)$  poäng och  $n$  godkända uppgifter ( $n = 3, 4, 5$ ). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Beräkna följande obestämda integraler:

$$(a) \int xe^{3x} dx \quad (b) \int \frac{e^x}{4 - e^{2x}} dx \quad (c) \int \cos x \sin 2x dx.$$

2. Undersök gränsvärdena

$$\begin{aligned} (a) \lim_{x \rightarrow 1} & \frac{3x^2 - 2x - 1}{-x^2 + 4x - 3} \\ (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} & \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{x}} - \sqrt{1 + 3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \\ (c) \lim_{x \rightarrow \infty} & \frac{\sqrt{x} + e^{3+\ln x}}{\sqrt{x^2 + \ln x}}. \end{aligned}$$

3. Skissa grafen för funktionen  $f(x) = \arctan(x - 4) + \arctan \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ . Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

4. Beräkna den generaliserade integralen  $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}}$  (eller visa divergens).

5. Ange, för alla reella värden på konstanten  $k$ , antalet lösningar till ekvationen

$$(x^3 - 6x^2 + 9x) \ln x - \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 9x = k.$$

6. Vilken är den största möjliga arean av en cirkelsektor med omkrets  $L$ ?  
(Här anses *inte* en hel cirkelskiva vara en cirkelsektor.)



7. Antag att  $f$  är inverterbar och deriverbar på  $\mathbf{R}$ . Antag vidare att  $a, b \in \mathbf{R}$  uppfyller  $f'(a) = 0$  och  $f(a) = b$ . Visa att  $f^{-1}$  inte är deriverbar i  $b$ .