

*Inga hjälpmmedel tillåtna. 15 poäng ger säkert godkänt  
Samtliga svar måste motiveras ordentligt!*

1. Undersök om de följande gränsvärdena existerar och beräkna dem i så fall med metoderna från kursen (särskilt, utan att använda l'Hospitals regel).

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 2}$

3 p

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\ln(x+1)}$

3 p

2. (a) Låt

5 p

$$g(x) = x \ln(x), \quad x > 0.$$

Undersöka funktionens beteende och skissa grafen till g.

Ange speciellt alla lokala extrempunkter samt ett intervall där g är avtagande.

*Anmärkning: Din undersökan och skiss ska också visa tydligt vad som händer på randen av definitionsmängden. Konvexitetsegenskaper och asymptoter behöver dock ej undersökas!*

- (b) Skissa utifrån dina resultat i (a) (utan vidare beräkningar) grafen till funktionen 1 p

$$h(x) = |x| \ln(|x|), \quad x \neq 0.$$

3. Betrakta funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

- (a) Beräkna funktionens derivata f'.

3 p

- (b) i. Ange den största möjliga definitionsmängden för f.

ii. Är f jämn, udda eller varken eller? Motivering krävs.

iii. Beräkna  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

iv. Skissa grafen till f.

3 p

4. (a) Bestäm  $\int \frac{\sin(2x)}{\sin^5(x)} dx.$

3 p

- (b) Avgör om den generaliserade integralen  $\int_0^\infty (x^2 + 3x)e^{-x} dx$  är konvergent eller divergent och bestäm i så fall dess värde.

3 p

5. (a) Visa utifrån derivatans definition: Om en funktion f är deriverbar, så är även funktionen  $g(x) = (f(x))^2$  deriverbar och  $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ .

3 p

- (b) Ange för var och ett av de följande påståendena om det är sant eller ej.

3 p

Endast motiverade svar kan ge poäng!

i. För varje lokal extrempunkt  $x = a$  av en funktion h gäller att  $h'(a) = 0$ .

ii. Om h har en primitiv funktion H som är icke-negative, dvs  $H(x) \geq 0$  för alla  $x$  i definitionsintervallet, så är h växande.

Lycka till!