

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

1. (a) Beräkna gränsvärdet

(3p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + an^2} - n^2 \right),$$

där a är en reell konstant.

- (b) Beräkna gränsvärdet

(3p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n.$$

2. Bestäm derivatan av

(4p)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

direkt utifrån derivatans definition.

3. (a) Bestäm $\int x^3 \ln(x) dx$.

(3p)

- (b) Avgör om den generaliserade integralen $\int_{1/2}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$ är divergent eller konvergent och bestäm i så fall dess värde.

4. Bestäm alla asymptoter till grafen $y = \frac{x^2+x}{1-|x|}$.

(4p)

5. Undersök lokala och globala extremvärden samt konvexitetsegenskaper till funktionen

$$f(x) = \frac{x+2}{e^x},$$

samt skissa grafen. Bestäm även funktionens värdemängd.

6. Bestäm alla värden på konstanten a så att linjen $y = ax$ tangerar kurvan $y = e^{-3x}$.

(4p)