

Tentamen i Envariabelanalys 1
2022-03-24 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar publiceras på kursens hemsida senast dagen efter tentan.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \left(2 + \frac{9}{x}\right) e^{-x}$.

Ange alla lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extempunkter.

2. Beräkna

(a) $\int x^2 \cos 3x \, dx$ (b) $\int \frac{dx}{x^{1/3} - 1}$ (c) $\int \cos x \cos 2x \, dx$.

3. Undersök gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^2 - 1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{3x})}{\sqrt{1 + x^3}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$.

4. Linus ska designa ett supertrendigt dricksglas som rymmer 8π volymsenheter och har formen av en rak cirkulär cylinder med cirkulär botten. Linus är mycket miljömedveten och vill därför att glaset ska ha så liten total area som möjligt.

Hjälp Linus att beräkna höjd och radie på detta glas samt ange den minsta arean om glaset är tillverkat av så tunt glas att glasets tjocklek kan försummas.

5. Beräkna $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + 2)}{(x + 1)^2} dx$ eller visa divergens.

6. (a) Definiera vad det betyder att f är kontinuerlig i punkten 17.

(b) Bestäm talen A och B så att $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \frac{A}{x^{1+\sqrt{x}} - \sqrt{1+Bx} + 1}, & x = 0 \\ , & x > 0 \end{cases}$

blir kontinuerlig i $x = 0$.

7. För vilka reella värden på a antar $p(x) = \frac{x^3}{3} - ax^2 + (2a - 1)x$, $0 \leq x \leq 2$ minst ett negativt värde?