

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkändtel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

a) För vilka vinklar, med $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$, gäller det att $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

b) Lös ekvationen $x^3 - 2x^2 = 3x$.

c) Låt l vara linjen som går genom punkterna $(x_1, y_1) = (1, 4)$ och $(x_2, y_2) = (-1, 2)$. Ange linjens ekvation på formen $y = kx + m$.

d) Lös olikheten $\frac{x+1}{3-x} < 0$.

e) Lös ekvationen $\ln(x+2) = \ln 3 - \ln x$.

f) Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, $x > 0$.

2. Beräkna nedanstående gränsvärden:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)^2}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{5}\right)^k$

3. Lös ekvationerna

a) $|x+3| - 2|x-2| = 2$

b) $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin(2x)$

4. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$$

Ange speciellt alla asymptoter och lokala extrempunkter.

5. Härled derivatan av funktionen $y = \arctan(x)$, d.v.s. $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$.

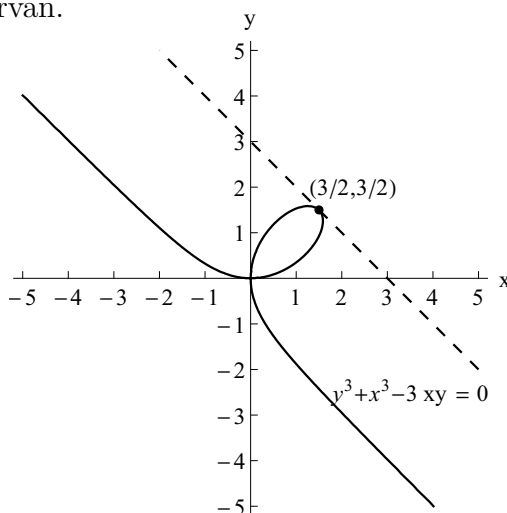
6. Rita en ellips i xy -planet med medelpunkt i $(x, y) = (1, -1)$ och x -halvaxel 2 och y -halvaxel 3. Skriv ner ekvationen som beskriver denna ellips i xy -planet.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $f(x) = \frac{1}{\sin(1/x)}$.
8. Bestäm tangentlinjens ekvation för kurvan $y^3 + x^3 - 3xy = 0$ i punkten $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, som illustreras i figuren (Denna kurva är känd som Descartes folium (eller blad)). Använd att variabeln y kan ses som beroende av x , dvs $y = y(x)$ för punkter (x, y) nära $(3/2, 3/2)$ på kurvan.

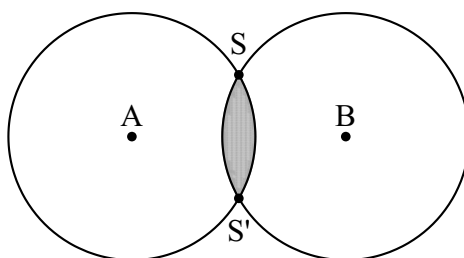


9. En rektangel ska inskrivas i ellipsen som ges av

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Vilka mått har en rektangel som maximerar dess area?
Vad är den maximala arean av en inskriven rektangel?

10. Beräkna arean av snittet (d.v.s. det skuggade området) mellan de två cirkelskivorna



som visas i figuren. Avståndet mellan cirkelarnas mittpunkter A och B är $|AB| = 2$, avstånden från mittpunkterna A och B till skärningspunkterna S och S' är $|AS| = |AS'| = |BS| = |BS'| = 2/\sqrt{3}$.

LYCKA TILL!