LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2023-10-27

1. a) $\alpha = 210°$ eller $\alpha = 330°$, b) $x(x-1)(x+3)$, c) $x = 2$,
d) $\arctan x^2 + \frac{2x^2}{1+x^4}$, e) $x < -1$, f) $x = 2$.

2 . a) Vi börjar med att använda sinus för dubbla vinkeln:

$$\sin 2x = \sqrt{3}\sin x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x(\cos x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\sin x = 0 \quad \text{eller} \quad \cos x = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = k\pi} \quad \text{eller} \quad \underline{x = \pm\tfrac{\pi}{6} + k2\pi}, \quad k \text{ heltal.}$$

b) Vi delar upp i 3 fall, där ekvationen får följande utseende:

$$\begin{aligned} x < -2: &\ -(2x-1)-(x+2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -5 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{5}{3} \quad \text{utanför intervallet!} \\ -2 \le x < \tfrac{1}{2}: &\ -(2x-1)+(x+2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{OK!} \\ x \ge \tfrac{1}{2}: &\ (2x-1)+(x+2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Ekvationen har alltså lösningarna $\underline{x = -1}$ och $\underline{x = 1}$.

3. a) Se läroboken sidan 133.

b) Efter omskrivningen $f(x) = 2x\ln x - 2x$ beräknar vi derivatan

$$f'(x) = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2 = 2\ln x.$$

Speciellt gäller

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Vi beräknar $f(1) = 2\ln 1 - 2 = -2$, och för intervallets ändpunkter får vi

$$f(x) = 2x\ln x - 2x \to 2\cdot 0 - 0 = 0 \text{ då } x \to 0^+ \qquad \text{samt} \qquad f(3) = 6\ln 3 - 6.$$

Då $6\ln 3 - 6 > 0$ ($\ln 3 > \ln e = 1$) drar vi slutsatsen att funktionen har $\underline{\text{största värde } 6\ln 3 - 6}$ och $\underline{\text{minsta värde } -2}$.

4. Funktionen är definierad då $x > -1$ samt $x \neq 0$. Derivering ger

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2-(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}{x^2(x+1)},$$

så vi har stationära punkter $x = -\frac{1}{2}$ och $x = 1$. Vi får följande teckentabell:

x		$-\frac{1}{2}$		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\wr$	$\searrow$		$\nearrow$

Punkten $x = -\frac{1}{2}$ är alltså lokal maximipunkt och $x = 1$ är en lokal minimipunkt. Vi beräknar även

$$f(-\tfrac{1}{2}) = -2 + 2\ln\tfrac{1}{2} = -2 - 2\ln 2 \ (\approx -3.4) \quad \text{och} \quad f(1) = 1 + 2\ln 2 \ (\approx 2.4),$$

samt gränsvärdena

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

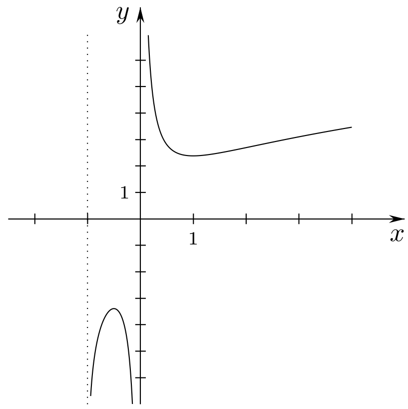
Vi konstaterar att både $x = -1$ och $x = 1$ är lodräta asymptoter, och för att undersöka en eventuell sned asymptot beräknar vi

$$k: \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 2\,\frac{\ln(x+1)}{x} = 0,$$

$$m: \lim_{x\to\infty} f(x) - k\cdot x = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Det finns således ingen sned asymptot.

Svar: Lokal minimipunkt $x = -\frac{1}{2}$ och lokal minimipunkt $x = 1$. Lodräta asymptoter $x = -1$ och $x = 0$.



5. a)
$$\frac{\ln 2^x - \sqrt{x}}{\ln 3^x + x} = \frac{x\ln 2 - \sqrt{x}}{x\ln 3 + x} = \frac{x}{x}\cdot\frac{\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\ln 3 + 1} \to \frac{\ln 2 - 0}{\ln 3 + 1} = \underline{\frac{\ln 2}{\ln 3 + 1}} \quad \text{då} \quad x\to\infty,$$

$$\frac{\ln 2^x - \sqrt{x}}{\ln 3^x + x} = \frac{x\ln 2 - \sqrt{x}}{x\ln 3 + x} = \frac{\sqrt{x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x}\ln 2 - 1}{\ln 3 + 1} \to \frac{1}{0^+}\cdot\frac{0-1}{\ln 3 + 1} = \underline{-\infty} \quad \text{då} \quad x\to 0^+,$$

b) Enligt binomialsatsen gäller

$$(2x-a)^7 = \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(2x)^k(-a)^{7-k}.$$

För x^4-termen skall vi välja $k = 4$:

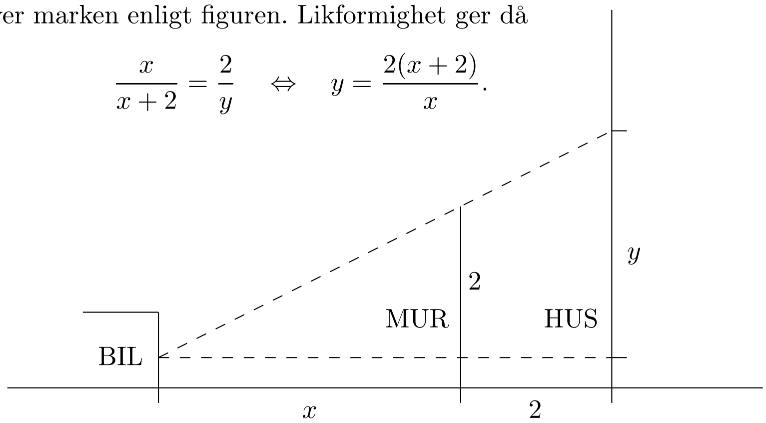
$$\binom{7}{4}(2x)^4(-a)^3 = \frac{7!}{3!\,4!}\,2^4x^4(-a^3) = -16a^3\,\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\,x^4 = -16\cdot 35\,a^3x^4.$$

Vi får alltså

$$-16\cdot 35\,a^3 = 70 \quad\Leftrightarrow\quad a^3 = -\tfrac{1}{8} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{a = -\tfrac{1}{2}}.$$

6. Vi ritar trianglar 0.4 m över marken enligt figuren. Likformighet ger då

$$\frac{x}{x+2} = \frac{2}{y} \quad\Leftrightarrow\quad y = \frac{2(x+2)}{x}.$$



Då höjden h av skuggan är $h = y + 0.4$ får vi nu sambandet

$$h = \frac{2(x+2)}{x} + 0.4 = 2.4 + \frac{4}{x}.$$

Vi ser nu h och x som funktioner av tiden t, och deriverar $h(t) = 2.4 + \frac{4}{x(t)}$ med avseende på t:

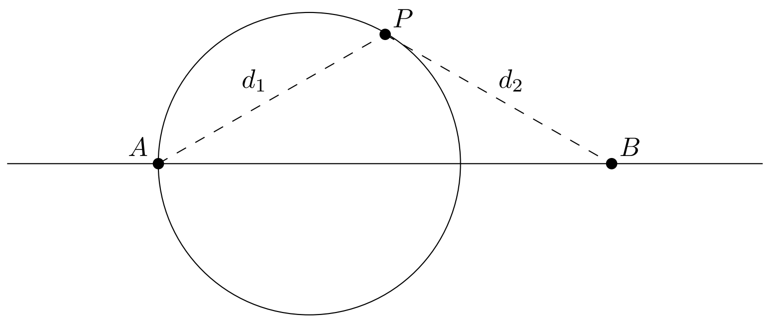
$$h'(t) = 0 - \frac{4}{(x(t))^2}\,x'(t).$$

Vid angiven tidpunkt $t = t_0$ är $x(t_0) = 4$ och $x'(t_0) = -2$, och vi får

$$h'(t_0) = -\frac{4}{4^2}(-2) = \tfrac{1}{2}.$$

Skuggans överkant rör sig således uppåt med hastigheten $\underline{\tfrac{1}{2}\ \text{m/s}}$.

7.



Pythagoras sats ger

$$d_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (1-x^2)} = \sqrt{2x+2}$$

och

$$d_2 = \sqrt{(2-x))^2 + y^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (1-x^2)} = \sqrt{5-4x},$$

där vi använt att $x^2 + y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 1 - x^2$. Att farten är dubbelt så hög längs d_2 kan vi uttrycka som att vi, när vi skall skriva ett uttryck för tiden för partikelns förflyttning, multiplicerar d_1 med 2. Vi väljer alltså att hitta största värde av

$$f(x) = 2d_1 + d_2 = 2\sqrt{2x+2} + \sqrt{5-4x}, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Söker vi derivatans nollställen skall vi lösa

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+2}} - \frac{2}{\sqrt{5-4x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2x+2} = \sqrt{5-4x} \quad \Rightarrow \quad 2x+2 = 5-4x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}.$$

Kontroll i ekvationen innan vi kvadrerat visar att detta verkligen är en stationär punkt.
Vi beräknar $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, samt för ändpunkterna $f(-1) = \sqrt{9} = 3$ och $f(1) = 2\sqrt{4} + \sqrt{1} = 5$. För att hitta största värde skall vi alltså jämföra 5 med $3\sqrt{3}$. Kvadrering ger $5^2 = 25$ respektive $(3\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 3 = 27$, och vi ser nu att $3\sqrt{3}$ är det största värdet. Vi skall således välja $x = \frac{1}{2}$, vilket ger $y = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Punkten vi söker är alltså $\underline{P : (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}$.

8. a) Då kvoten av två på varandra följande element skall vara konstant är en geometrisk talföljd på formen $(ax^k)_{k=0}^{\infty}$, där a är det första elementet och x kvoten. Summan av samtliga element blir

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = a\sum_{k=0}^{\infty} x^k = a\,\frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

och summan av dess kvadrater blir

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ax^k)^2 = a^2 \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = a^2 \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x^2 < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 1,$$

där vi i båda fallen använt formeln för geometrisk serie i intervallen där de konvergerar. Det skall alltså gälla att

$$a\,\frac{1}{1-x} = 6 \quad \text{och} \quad a^2 \frac{1}{1-x^2} = 18, \quad \text{eller omskrivet} \quad a = 6(1-x) \quad \text{och} \quad a^2 = 18(1-x^2).$$

Vi kvadrerar den första ekvationen och sätter sedan högerleden lika:

$$6^2(1-x)^2 = 18(1-x^2) \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1)^2 = -(x-1)(x+1) \quad \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(2(x-1)+(x+1)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(3x-1)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\ x = \tfrac{1}{3}.$$

För $x = 1$ konvergerar inte serierna, men $x = \frac{1}{3}$ ger $a = 6 - 6 \cdot \frac{1}{3} = 4$. Då vi kvadrerat ovan kontrollerar vi även att detta uppfyller våra ursprungliga ekvationer. Det första elementet skall alltså vara 4, och kvoten $\frac{1}{3}$.

b) Det gäller att

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty}(2x)^{-k} = \frac{1}{(2x)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^k = \frac{1}{(2x)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2x}} = \frac{1}{4x^2-2x}, \qquad -1 < \frac{1}{2x} < 1.$$

Derivering ger

$$f'(x) = -\frac{8x-2}{(4x^2-2x)^2}, \qquad \text{så} \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Men för $x = \frac{1}{4}$ är $\frac{1}{2x} = 2 > 1$ och serien divergent. Funktionen saknar därför stationära punkter.

9. a) SANT: Om

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}\ldots + a_2x^2 + a_1x = x^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x}\ldots + a_2\frac{1}{x^{n-2}} + a_1\frac{1}{x^{n-1}})$$

med n udda, och säg $a_n > 0$, så gäller det att

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \cdot a_n = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \cdot a_n = -\infty,$$

och tvärtom ifall $a_n < 0$. Då $p(x) \geq 0$ måste därför högsta potensen n av x i $p(x)$ vara jämn, och vi inser också att $a_n > 0$. Detta ger att $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$, dvs. att $p(x)$ antar godtyckligt stora värden både för positiva och negativa x. Då $p(0) = 0$ ger därför satsen om mellanliggande värden att $p(x) = 1000$ för minst ett positivt och ett negativt x, dvs. att $p(x) = 1000$ har minst två lösningar.

b) FALSKT: Som motexempel duger $p(x) = x^2$.

c) FALSKT: Som motexempel duger $p(x) = x^4$.

d) SANT: Om nu $p(x)$ ej är delbart med x^2 så har vi

$$p(x) = a_nx^n + \ldots + a_2x^2 + a_1x, \;\; a_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad p'(x) = na_nx^{n-1} + \ldots + 2a_2x + a_1, \;\; a_1 \neq 0,$$

speciellt $p'(0) = a_1 \neq 0$. Då $p(x) \geq 0$ för alla x gäller det att

$$\lim_{x\to0^-}\frac{p(0+h)-p(0)}{h} = \lim_{x\to0^-}\frac{p(h)}{h} \leq 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to0^-}\frac{p(0+h)-p(0)}{h} = \lim_{x\to0^-}\frac{p(h)}{h} \geq 0.$$

Då vänster- och högerderivata skall vara lika får vi därför att $p'(0) = 0$. Detta ger en motsägelse, så $p(x)$ måste vara delbart med x^2.

Alternativ lösning: Vi börjar med att som ovan konstatera att $p'(0) \neq 0$, och kan därefter dra slutsatsen, eftersom $p'(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$, att $p'(x) \neq 0$ för alla x i en omgivning av $x = 0$. I denna omgivning är således $p(x)$ växande eller avtagande, och då $p(0) = 0$ måste $p(x)$ anta både positiva och negativa värden nära $x = 0$, vilket motsäger att $p(x) \geq 0$.

a) FALSK: Som motexempel behöver vi ett polynom som uppfyller villkoren i uppgiften samt innehåller en udda potens av x. (Vi vet från föregående deluppgift att denna potens inte kan vara endast x.) Ett polynom som uppfyller allt detta är $p(x) = x^2(x+1)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$.