LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
TENTAMEN
MATEMATIK

ENDIMENSIONELL ANALYS B1
FMAB65
2025-08-27, 08:00–13:00

*Inga hjälpmedel. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara, läsvärda och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna, om möjligt, tydliga och enkla svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.*

## GRUNDBETYGSDEL

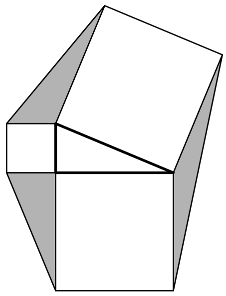
*För att bli godkänd och erhålla betyg 3 krävs minst 9 poäng på denna del, samt att du får 0 poäng på högst en av dessa sex uppgifter.*

1. Visa, genom att derivera, att funktionen $f(x) = x^2 \ln(x)$ uppfyller
$$x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) = x^2, \quad x > 0.$$

2. Om vi utvecklar $(2 + x^2)^8 - (3 + x^4)^4$ får vi ett polynom. Bestäm dess grad och högstagradskoefficient.

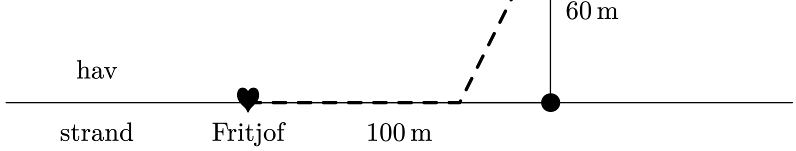
3. Låt $f(x) = 1/x$. Använd derivatans definition för att bestämma $f'(x)$.

4. a) Formulera areasatsen.
   b) I figuren till höger har vi till en rätvinklig triangel (markerad) ritat ut kvadrater vid dess sidor. Vi har sedan erhållit tre nya trianglar genom att sammanbinda kvadraternas hörn. Visa att de tre trianglarna, skuggade i figuren, har lika stor area.



5. Bestämm samtliga implikationer mellan påståendena
   a) $\arcsin(x) > \pi/4$
   b) $1/2 < x \leq 1$
   c) $\arccos(x) < \pi/3$
   d) $\tan(\arcsin(x)) > 1$

6. Fritjof står vid en lång rak strandkant och ser sin kära Rosa plaska i vattnet. Fritjof kan springa längs strandkanten med en hastighet på $5\,\mathrm{m/s}$ och han kan simma med en hastighet på $3\,\mathrm{m/s}$. Han börjar springa längs strandkanten. Efter hur många meter skall Fritjof hoppa i vattnet och börja simma mot Rosa, om han, kärlekskrank som han är, vill komma fram till henne så snabbt som möjligt? Relevanta mått finns i figuren. Där finns även en möjlig väg för Fritjof streckad.

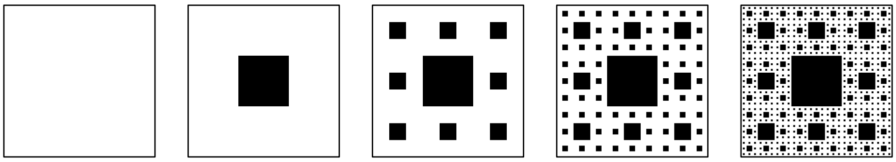


ÖVERBETYGSDEL

*Om du blir godkänd på föregående del så har du chans på överbetyg. Om du fått minst 14 poäng på föregående del så får du 1 bonuspoäng tillgodo här. För att kunna få betyg 4 krävs 3 poäng på denna del; för betyg 5 minst 6 poäng.*

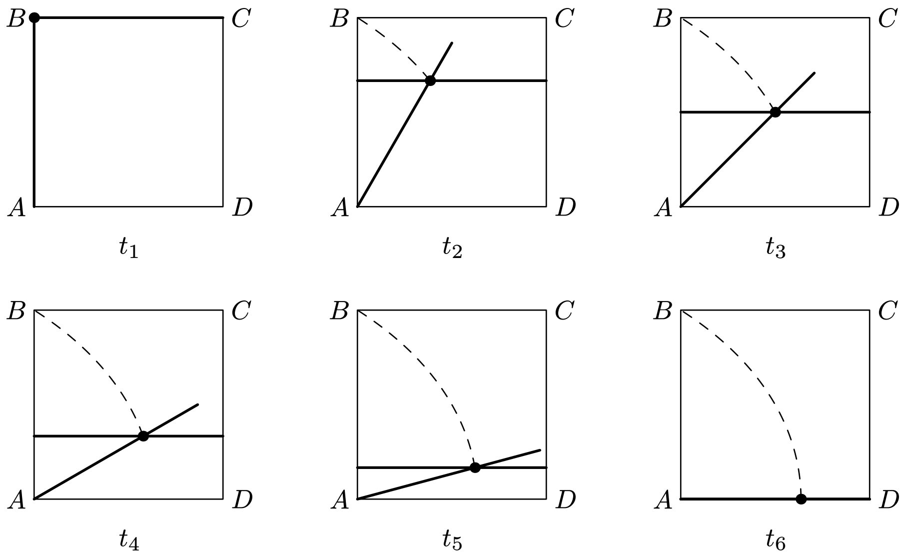
7. Visa att det för $a, b \in \mathbb{R}$ gäller att
$$|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a - b|.$$

8. Betrakta figuren nedan, där vi stegvis fyllt i allt fler, men också allt mindre (en faktor 1/3 för sidlängden), kvadrater i en kvadrat med sidlängd 1. Låt $A_n$ beteckna den totala arean för samtliga ifyllda kvadrater i steg $n$. Således är till exempel $A_1 = 1/9$. Bestäm ett uttryck för $A_n$ ($n \geq 1$) och bestäm, om det existerar, $\lim_{n\to+\infty} A_n$.



$n = 0$ $\quad$ $n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$ $\quad$ $n = 4$

9. Den så kallade kvadratrixen användes för att tredela vissa vinklar. Den skapas på följande sätt. Givet en kvadrat $ABCD$. Låt sidan $AB$ rotera medurs kring $A$ med konstant vinkelhastighet tills den hamnar vid $AD$, och antag att sidan $BC$ *under samma tid* ”sjunker” med konstant hastighet tills den hamnar vid $AD$. Under denna procedur kommer de två linjestyckena att skära varandra. Dessa skärningspunkter beskriver kvadratrixen. Proceduren beskrivs i figuren nedan för några tidpunkter ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6$), där den roterande sidan och den sjunkande sidan har markerats, och där kvadratrixen är streckad. Punkten som ritar ut kvadratrixen är också markerad.




Om vi lägger in ett rätvinkligt koordinatsystem $(x, y)$ så att hörnen $A$, $B$, $C$ och $D$ får koordinater $(0, 0)$, $(0, 1)$ $(1, 1)$ respektive $(1, 0)$ så kan kvadratrixen beskrivas av en funktion $x = f(y)$. Bestäm denna funktion, och bestäm speciellt gränsvärdet $\lim_{y\to 0^+} f(y)$.