

## Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-04-19 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmaterial. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedöms med minst 2 poäng. För betyg  $n$  räcker  $4(n - 1)$  poäng och  $n$  godkända uppgifter ( $n = 3, 4, 5$ ). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Rita grafen  $y = f(x)$  för följande funktioner:

(a)  $f(x) = 1/x$     (b)  $f(x) = \arctan(1/x)$     (c)  $f(x) = e^{1/x}$

Obs! Just på denna uppgift ska **enbart svar** lämnas in, **inga motiveringar eller uträkningar**. Rita tydligt så att definitionsmängd, relevanta gränsvärden, samt eventuella lokala extrempunkter framgår i figuren. (Det går även bra att skriva upp det bredvid ifall du tycker att det behövs för tydlighets skull. Asymptoter behöver ej anges.)

2. Undersök följande gränsvärden:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 - x - 6}$     (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$     (c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$

3. Beräkna följande integraler:

(a)  $\int \frac{x^2 + x + 3}{4 + x^2} dx$     (b)  $\int \sin \sqrt{x} dx$     (c)  $\int \frac{dx}{\sin x}$

4. Beräkna integralen  $\int_2^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx$  (eller visa att den är divergent).

5. Antag att  $f(x)$  är deriverbar för  $x > 0$ . Är nedanstående påståenden sanna eller falska, då  $x \rightarrow \infty$ ? (Ge ett bevis eller ett tydligt motexempel i varje deluppgift.)

- (a) Om  $f(x) \rightarrow \infty$  så måste  $f'(x) \rightarrow \infty$ .  
(b) Om  $f'(x) \rightarrow 0$  så måste  $f(x) \rightarrow L$  för något  $L \in \mathbf{R}$ .  
(c) Om  $f(x) \rightarrow L$  för något  $L \in \mathbf{R}$  så måste  $f'(x) \rightarrow 0$ .

6. Hur många reella lösningar i intervallet  $-1 \leq x \leq 2$  har ekvationen  $e^x = kx$  för olika värden på konstanten  $k \in \mathbf{R}$ ?

7. Låt  $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{1 - \cos x} dx$ .

- (a) Vilken uppskattning  $A \leq I \leq B$  får man från (bästa tänkbara) under- och övertrappor med bara ett enda trappsteg? (1p)  
(b) Beräkna  $I$ . (2p)