LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
LÖSNINGAR
MATEMATIK

ENDIMENSIONELL ANALYS B1
FMAB65
2025-08-27, 08:00–13:00

GRUNDBETYGSDEL

1. Visa, genom att derivera, att funktionen $f(x) = x^2 \ln(x)$ uppfyller

$$x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) = x^2, \quad x > 0.$$

Svar. Det gäller att $f'(x) = x + 2x\ln(x)$ och $f''(x) = 3 + 2\ln(x)$. Sätt in och förenkla, och du landar i den påstådda identiteten.

2. Om vi utvecklar $(2 + x^2)^8 - (3 + x^4)^4$ får vi ett polynom. Bestäm dess grad och högstagradskoefficient.

Svar. Graden blir 14, högstagradskoefficienten 16.

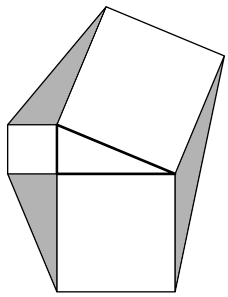
3. Låt $f(x) = 1/x$. Använd derivatans definition för att bestämma $f'(x)$.

Svar. Låt $x \neq 0$ vara godtyckligt. Då gäller det att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2},$$

varför det per definition gäller att $f'(x) = -1/x^2$.

4. a) Formulera areasatsen.
   b) I figuren till höger har vi till en rätvinklig triangel (markerad) ritat ut kvadrater vid dess sidor. Vi har sedan erhållit tre nya trianglar genom att sammanbinda kvadraternas hörn. Visa att de tre trianglarna, skuggade i figuren, har lika stor area.



Svar.
   a) Se kursboken.
   b) Samtliga grå trianglar har samma area som den markerade triangeln, tack vare areasatsen.

5. Bestäm samtliga implikationer mellan påståendena

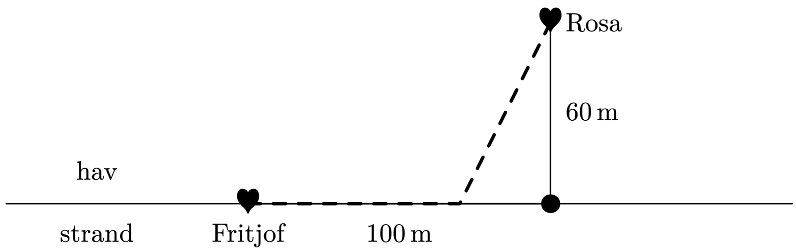
a) $\arcsin(x) > \pi/4$	b) $1/2 < x \leq 1$
c) $\arccos(x) < \pi/3$	d) $\tan(\arcsin(x)) > 1$

Svar. Påståendena kan översättas till

a) $1/\sqrt{2} < x \leq 1$	b) $1/2 < x \leq 1$
c) $1/2 < x \leq 1$	d) $1/\sqrt{2} < x < 1$

Härur förljer att d) $\Longrightarrow$ a) $\Longrightarrow$ b) $\Longleftrightarrow$ c).

6. Fritjof står vid en lång rak strandkant och ser sin kära Rosa plaska i vattnet. Fritjof kan springa längs strandkanten med en hastighet på 5 m/s och han kan simma med en hastighet på 3 m/s. Han börjar springa längs strandkanten. Efter hur många meter skall Fritjof hoppa i vattnet och börja simma mot Rosa, om han, kärlekskrank som han är, vill komma fram till henne så snabbt som möjligt? Relevanta mått finns i figuren. Där finns även en möjlig väg för Fritjof streckad.



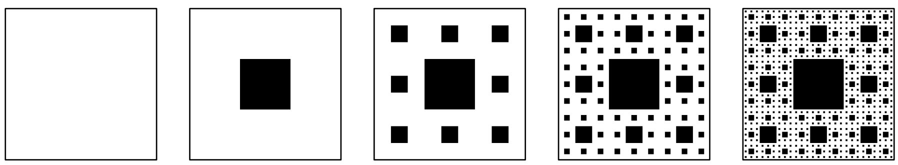
Svar. 55 m

ÖVERBETYGSDEL

7. Visa att det för $a, b \in \mathbb{R}$ gäller att
$$|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a - b|.$$

Svar. Tips: Använd medelvärdessatsen.

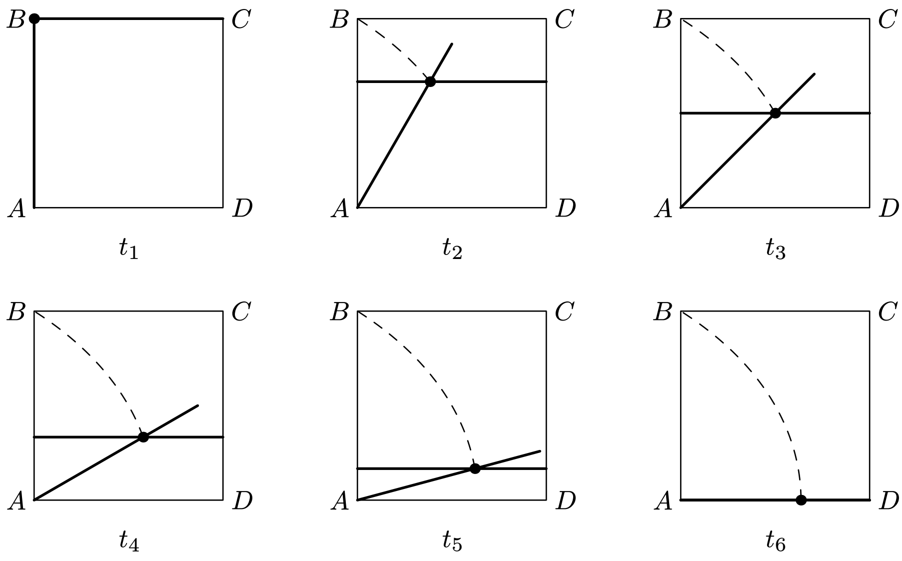
8. Betrakta figuren nedan, där vi stegvis fyllt i allt fler, men också allt mindre (en faktor 1/3 för sidlängden), kvadrater i en kvadrat med sidlängd 1. Låt A_n beteckna den totala arean för samtliga ifyllda kvadrater i steg n. Således är till exempel $A_1 = 1/9$. Bestäm ett uttryck för A_n ($n \geq 1$) och bestäm, om det existerar, $\lim_{n\to+\infty} A_n$.



$n = 0$ $n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

Svar. Det gäller att $A_n = 1 - (8/9)^n$, och således är det sökta gränsvärdet lika med 1.

9. Den så kallade kvadratrixen användes för att tredela vissa vinklar. Den skapas på följande sätt. Givet en kvadrat $ABCD$. Låt sidan AB rotera medurs kring A med konstant vinkelhastighet tills den hamnar vid AD, och antag att sidan BC *under samma tid* "sjunker" med konstant hastighet tills den hamnar vid AD. Under denna procedur kommer de två linjestyckena att skära varandra. Dessa skärningspunkter beskriver kvadratrixen. Proceduren beskrivs i figuren nedan för några tidpunkter ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6$), där den roterande sidan och den sjunkande sidan har markerats, och där kvadratrixen är streckad. Punkten som ritar ut kvadratrixen är också markerad.



Om vi lägger in ett rätvinkligt koordinatsystem (x, y) så att hörnen A, B, C och D får koordinater $(0, 0)$, $(0, 1)$ $(1, 1)$ respektive $(1, 0)$ så kan kvadratrixen beskrivas av en funktion $x = f(y)$. Bestäm denna funktion, och bestäm speciellt gränsvärdet $\lim_{y \to 0^+} f(y)$.

Svar. Funktionen blir $f(y) = y/\tan(\pi y/2)$. Gränsvärdet blir $2/\pi$.