LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Endimensionell analys, B1
2025–10–31, LÖSNINGAR

1. a) $(x+3)^2 - 20$ b) $x = 1$ c) $\dfrac{1}{2}$

c) 21 e) $\dfrac{2}{3}$ f) $\dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln(x)^2}$

2. Sätt $f(x) = |x+1| + 2|x-2|$. Uttrycken innanför beloppstecknen byter tecken vid $x = -1$ respektive $x = 2$. Vi ser att

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) - 2(x-2), & x < -1 \\ (x+1) - 2(x-2), & -1 \le x < 2 \\ (x+1) + 2(x-2), & 2 \le x, \end{cases}$$

eller efter förenkling

$$f(x) = \begin{cases} -3x+3, & x < -1 \\ -x+5, & -1 \le x < 2 \\ 3x-3, & 2 \le x. \end{cases}$$

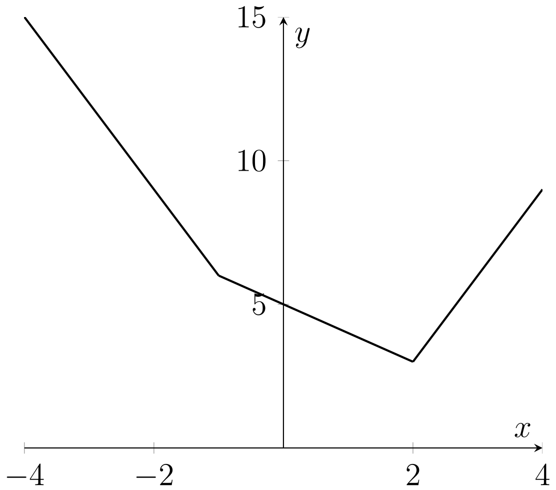
Vi löser ekvationen $|x+1| + 2|x-2| = x+3$ genom att dela upp i tre fall:

Fall 1: Om $x < -1$ får vi $-3x + 3 = x + 3 \Leftrightarrow x = 0$, vilket förkastas eftersom $x = 0$ ligger i fel intervall.

Fall 2: Om $-1 \le x < 2$ får vi $-x + 5 = x + 3 \Leftrightarrow x = 1$, vilket ligger i rätt intervall och är därmed en giltig lösning.

Fall 3: Om $2 \le x$ får vi $3x - 3 = x + 3 \Leftrightarrow x = 3$, vilket också ligger i rätt intervall och är en giltig lösning.

Sammanfattningsvis har ekvationen alltså två lösningar: $x = 1$ eller $x = 3$. Grafen består av två strålar och ett linjestycke och kan ritas utan att göra någon undersökning av f':



3. a) Eftersom $x^2 \to 0$ och $\ln x \to -\infty$ då $x \to 0^+$ måste
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\ln x} = 0.$$

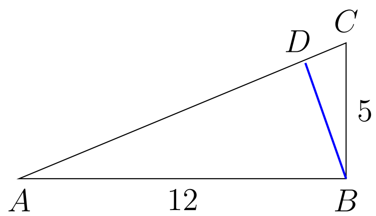
b) Vi bryter ut den dominerande faktorn e^x i både täljare och nämnare:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + 3e^x + 2x^8}{5\cdot 2^x + 4e^x - 7x^{11}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x\left(\left(\frac{2}{e}\right)^x + 3 + \frac{2x^8}{e^x}\right)}{e^x\left(5\left(\frac{2}{e}\right)^x + 4 - \frac{7x^{11}}{e^x}\right)} = \frac{3}{4},$$
eftersom $(2/e)^x \to 0$, $x^8/e^x \to 0$ och $x^{11}/e^x \to 0$ då $x \to \infty$ (standardgränsvärden).

4. a) Vi får med derivatans definition
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
där vi har förlängt med konjugatuttrycket och (i det sista steget) utnyttjat att $\sqrt{x}$ är en kontinuerlig funktion.

b) Implicit derivering av $x = (f(x))^2$ ger $1 = 2\,f(x)\,f'(x)$, så
$$f'(x) = \frac{1}{2f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5. a) Se läroboken. Det finns tre likformighetsfall att välja bland.

b) Låt D vara fotpunkten för höjden mot hypotenusan. Triangeln $\triangle CDB$ är likformig med $\triangle CBA$ (enligt likformighetsfall VV – båda trianglarna är rätvinkliga och delar vinkeln vid C). Det följer att $\frac{CD}{CB} = \frac{CB}{AC}$, så

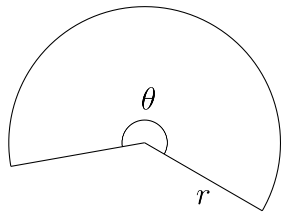


$$CD = \frac{(CB)^2}{AC} = \frac{5^2}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{25}{13}$$
och $AD = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}$.

Alternativ lösning: Låt $CD = x$, så $AD = 13 - x$, och sätt $h = BD$. Pythagoras sats i de rätvinkliga trianglarna $\triangle BDC$ och $\triangle ADB$ ger
$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 5^2 \\ (13-x)^2 + h^2 = 12^2, \end{cases}$$
så $(13-x)^2 + 5^2 - x^2 = 12^2$, vilket efter förenkling blir $26x = 50$, dvs $x = \frac{25}{13}$ och $AD = 13 - x = \frac{144}{13}$.

Alternativ lösning 2: Pythagoras sats ger att $AC = \sqrt{12^2+5^2} = 13$. Låt $BD = h$. Arean av triangeln $\triangle ABC$ är
$$A = \frac{13h}{2} = \frac{12\cdot 5}{2} \quad\Rightarrow\quad h = \frac{12\cdot 5}{13} = \frac{60}{13}.$$
Pythagoras sats i den rätvinkliga triangeln $\triangle BDC$ ger $(CD)^2 + (\frac{60}{13})^2 = 5^2$, så $(CD)^2 = (5 - \frac{60}{13})\cdot(5 + \frac{60}{13}) = \frac{5}{13}\cdot\frac{125}{13}$, och $CD = \frac{25}{13}$, varav $AD = \frac{144}{13}$.

6. Arean av figuren blir



$$A = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}\theta r^2$$

och omkretsen

$$P = 2r + \frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi r = (2+\theta)\, r$$

Eftersom $A = 36$ blir $\theta = \frac{72}{r^2}$ och vi kan uttrycka omkretsen som en funktion av r:

$$P(r) = \left(2 + \frac{36}{r^2}\right) r = 2r + \frac{72}{r},$$

vilket vi vill minimera. Derivatan av $P(r)$ blir

$$P'(r) = 2 - \frac{72}{r^2} = \frac{2(r^2-36)}{r^2} = \frac{2(r+6)(r-6)}{r^2}$$

vars enda relevanta nollställe är $r = 6$ (det är klart att $r > 0$). Vi gör en teckentabell för $r > 0$:

r	0		6	
$2(r+6)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(r-6)$	$-$	$-$	0	$+$
r^2	0	$+$	$+$	$+$
$f'(r)$	odef	$-$	0	$+$
$f(r)$	odef	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

Eftersom P bara har en stationär punkt (ett lokalt minimum i $r = 6$) då $r > 0$, måste $P(6)$ vara det minsta värdet. Vi ser alltså att $r = 6$ och följaktligen $\theta = 2$ ger figurens minsta möjliga omkrets.

7. Vi ser (jämför uppgift 1f) att

$$f'(x) = \frac{2x\ln|x| - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln|x|)^2} = \frac{x(2\ln|x|-1)}{(\ln|x|)^2}$$

för $x \neq 0, \pm 1$. Om vi inskränker oss till positiva värden på x ser vi att den enda stationära punkten blir då $2\ln x - 1 = 0$, dvs $x = e^{1/2}$. Vi gör en teckentabell för $x > 0$:

x	0		1		$e^{1/2}$	
x	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2\ln x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\ln x)^2$	odef	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	odef	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	odef	$\searrow$	odef	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

Vi vet att $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (se uppgift 3a). Vidare blir

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{\ln x} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{\ln x} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = \infty,$$

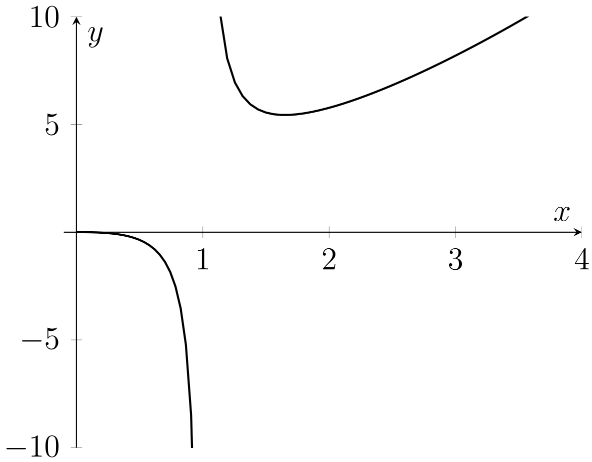
så $x = 1$ är en vertikal asymptot. Dessutom är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \infty$$

(standardgränsvärde) och

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$$

(standardgränsvärde), så f har ingen sned asymptot i $x = \infty$. Funktionsvärdet i den lokala minpunkten är $f(e^{1/2}) = 2e \approx 5{,}4$. Vi har nu tillräckligt mycket information för att rita grafen (eftersom f är en jämn funktion hade vi lika gärna kunnat rita grafen även för $x < 0$). Observera att om vi tittar på intervallet $x \geq 0$, så har f en lokal maxpunkt i $x = 0$.



Till sist får vi att

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{\ln|h|} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{\ln|h|} = 0,$$

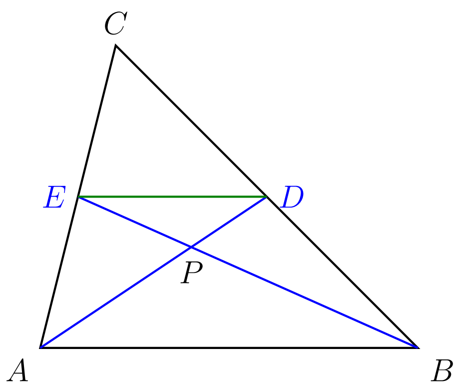
eftersom täljaren går mot 0 och nämnaren mot $-\infty$ då $x \to 0$. Detta visar att f är deriverbar i $x = 0$ och $f'(0) = 0$.

8. a) Dra medianerna AD och BE och bind ihop dem. Triangeln $\triangle ECD$ är likformig med $\triangle ACB$ (SVS), eftersom trianglarna delar vinkeln vid C och

$$EC : AC = DC : BC = 1 : 2.$$

Det följer att $ED : AB = 1 : 2$ och ED är därmed parallell med AB (likbelägna vinklar är lika).

Låt P vara skärningspunkten mellan medianerna. Trianglarna $\triangle EPD$ och $\triangle BPA$ är likformiga (VV), eftersom $\angle PED = \angle PBA$ och $\angle PDE = \angle PAB$ m.h.a. parallellaxiomet. Eftersom $AB : ED = 2 : 1$, följer att $PB : PE = PA : PD = 2 : 1$, vilket var vad vi skulle visa.



b) Med beteckningar som i a), låt $PD = x$ och $PE = y$. Ur resultatet i a) följer att $AP = 2x$ och $BP = 2y$. Eftersom vi antar att AD och BE är vinkelräta kan vi använda Pythagoras sats på de rätvinkliga trianglarna $\triangle EPA$ och $\triangle DPB$. Vi får

$$\begin{cases} x^2 + (2y)^2 = 3^2 \\ y^2 + (2x)^2 = 4^2. \end{cases}$$

Genom att summera dessa ekvationer får vi $5(x^2 + y^2) = 25$, dvs $x^2 + y^2 = 5$. Pythagoras sats på $\triangle APB$ ger slutligen

$$(AB)^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2) = 20$$

så $AB = \sqrt{20}$.

9. Sätt $f(x) = x^3 - g(x)$. Eftersom g är begränsad är

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3 - g(x)) = \infty$$

och

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - g(x)) = -\infty$$

Det finns alltså garanterat något punkt $a > 0$, sådant att $f(a) > 0$ och någon punkt $b < 0$ sådan att $f(b) < 0$. Satsen om mellanliggande värden (på det kompakta intervallet $[b, a]$ och den kontinuerliga funktionen f) visar att funktionen f har minst ett nollställe i intervallet $[b, a]$, så ekvationen $g(x) = x^3$ har minst en lösning.

Det finns ingen övre gräns på antalet lösningar. Låt N vara ett godtyckligt positivt heltal, och välj $g(x) = \cos(2\pi N x)$. Då blir g begränsad och kontinuerlig. Sätt $x_k = \frac{k}{N}$, $0 \leq k \leq N$. Då är $g(x_k) = 1$ för varje k, medan $x_k^3 \leq 1$. På motsvarande sätt är $g(x_k + \frac{1}{2N}) = -1$, medan $(x_k + \frac{1}{2N})^3 > 0$.

Detta betyder att funktionen $f(x) = x^3 - g(x)$ har minst N teckenväxlingar på intervallet $[0, 1]$ och därmed finns åtminstone N lösningar till ekvationen $g(x) = x^3$. Talet N var godtyckligt, så det kan inte finnas någon övre gräns på antalet lösningar.

(Med lite mer arbete kan man hitta en enda begränsad kontinuerlig funktion g sådan att $g(x) = x^3$ har oändligt många lösningar.)