LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2025-01-17 kl. 8.00–13.00

1. **Svar:** $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - e^x - 2x + 1$, där $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

   Lösningsförslag:
   Det karakteristiska polynomet r^2-r-2 har nollställena -1 respektive 2, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   Om y_{p_1} är en lösning till

$$y'' - y' - 2y = 2e^x \tag{1}$$

   och y_{p_2} är en lösning till

$$y'' - y' - 2y = 4x, \tag{2}$$

   så löser $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ den givna differentialekvationen. Med ansatsen $y_{p_1} = Ae^x$, där $A \in \mathbb{R}$, är $y_{p_1}' = y_{p_1}'' = Ae^x$, och insättning i (1) ger att

$$Ae^x - Ae^x - 2Ae^x = 2e^x \quad\Longleftrightarrow\quad A = -1,$$

   vilket innebär att $y_{p_1} = -e^x$. Med ansatsen $y_{p_2} = Bx + C$, där $B, C \in \mathbb{R}$, är $y_{p_2}' = B$ och $y_{p_2}'' = 0$, och insättning i (2) ger att

$$\begin{aligned} 0 - B - 2(Bx + C) = 4x \quad&\Longleftrightarrow\quad -2Bx - B - 2C = 4x \\ \Longleftrightarrow\quad \begin{cases} -2B \phantom{{}-2C} = 4 \\ -B - 2C = 0 \end{cases} \quad&\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} B = -2 \\ C = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

   Därmed är $y_{p_2} = -2x + 1$, och sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = -e^x - 2x + 1$. Det följer att den allmänna lösningen till den givna differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - e^x - 2x + 1, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Svar:** $\dfrac{1}{3} + \ln 2$

   Lösningsförslag:
   För att bestämma integrationsgränser löser vi ekvationerna

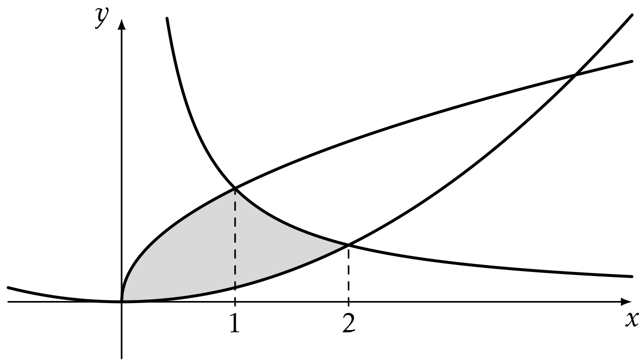
$$\sqrt{x} = \frac{1}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad x = 1,$$

   och

$$\frac{1}{x} = \frac{x^2}{8} \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2,$$

   se figur på nästa sida. Den sökta arean ges av

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx &= \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{24}\right]_0^1 + \left[\ln x - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{24} - 0 + 0 + \ln 2 - \frac{1}{3} - \ln 1 + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \ln 2. \end{aligned}$$



3. **Svar: a)** $z = 1 + 2i$ eller $z = -1 - 2i$ **b)** $z = \sqrt{3} + i$, $z = -\sqrt{3} + i$ eller $z = -2i$

Lösningsförslag:

a) För att lösa ekvationen $z^2 = -3 + 4i$ ansätter vi $z = x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$, vilket ger att

$$x^2 - y^2 + 2xyi = (x + iy)^2 = z^2 = -3 + 4i.$$

Identifikation av real- och imaginärdelar ger upphov till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Dessutom gäller att

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = \left|z^2\right| = |-3 + 4i| = 5,$$

och därmed att

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Ledvis addition av första och tredje ekvationen i systemet ovan ger att $x = \pm 1$, medan ledvis subtraktion av samma ekvationer ger att $y = \pm 2$. Den andra ekvationen i systemet visar att x och y har samma tecken. Sålunda måste

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2, \end{cases}$$

vilket innebär att ekvationen har lösningarna $z = 1 + 2i$ respektive $z = -1 - 2i$.

b) För att lösa ekvationen $z^3 = 8i$ ansätter vi $z = re^{i\theta}$, där $r, \theta \in \mathbb{R}$ och $r \geq 0$, vilket ger att

$$r^3 e^{i3\theta} = \left(re^{i\theta}\right)^3 = z^3 = 8i = 8e^{i\pi/2}$$

$$\iff \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \pi/2 + k \cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \pi/6 + k \cdot 2\pi/3, \end{cases}$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Lösningarna är följaktligen på formen $z_k = 2e^{i(\pi/6+2k\pi/3)}$, där $k = 0, 1$ respektive 2 ger samtliga olika möjligheter. Beräkning ger att

$$z_0 = 2e^{i\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2e^{i5\pi/6} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_2 = 2e^{i3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

4. Svar: a) Se Sats 13.6 på sidan 315 i kursboken **b)** $3 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$

Lösningsförslag:
b) För att bestämma Maclaurinpolynomet av ordning 2 till funktionen

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{e^t}{t+2}\,dt,$$

måste vi beräkna $f(0)$, $f'(0)$ samt $f''(0)$. Med hjälp av analysens huvudsats erhålles att

$$f'(x) = 0 + \frac{e^x}{x+2} = \frac{e^x}{x+2},$$

och ytterligare en derivering ger att

$$f''(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}.$$

Sålunda är $f(0) = 3$, $f'(0) = 1/2$ och $f''(0) = 1/4$. Maclaurinpolynomet av ordning 2 till funktionen f kan nu bestämmas till

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 3 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}.$$

5. Svar: $\frac{\pi^2}{3}$ respektive $\frac{8\pi}{3}$

Lösningsförslag:
Rotationsvolymen kring x-axeln erhålles med hjälp av skivformeln av integralen

$$\pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$$

Polynomdivision ger att $x^4 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) + 1$, och därmed är

$$\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)+1}{x^2+1}\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Med rörformeln ges rotationsvolymen kring y-axeln av integralen

$$
\begin{aligned}
2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x f(x)\, dx &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \\
&= \begin{bmatrix} t = x^2+1, \quad x^2 = t-1, \quad dt = 2x\, dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \quad x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 4 \end{bmatrix} = \pi \int_1^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}}\, dt \\
&= \pi \int_1^4 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \pi \left[\frac{2t^{3/2}}{3} - 2\sqrt{t} \right]_1^4 = \pi \left(\frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

6. **Svar:** $v(t) = 3e^{-(\ln 3)t/15}$ m/s; båten når inte stranden (den glider $45/\ln 3\,\text{m} < 50\,\text{m}$)

   Lösningsförslag:
   Låt $v(t)$ beteckna båtens fart i meter per sekund efter t sekunder från att motorn havererat. Då uppfyller v differentialekvationen

$$
v' = -kv \quad \Longleftrightarrow \quad v' + kv = 0,
$$

där $k > 0$ är en proportionalitetskonstant. Multiplikation med den integrerande faktorn e^{kt} ger att

$$
\begin{aligned}
v'e^{kt} + kve^{kt} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(ve^{kt}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad ve^{kt} = C \\
&\Longleftrightarrow \quad v = Ce^{-kt},
\end{aligned}
$$

där $C \in \mathbb{R}$. Villkoret $v(0) = 3$ ger att $C = 3$ och därmed gäller att $v(t) = 3e^{-kt}$. Vidare är $v(15) = 1$ vilket innebär att

$$
3e^{-15k} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -15k = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3 \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{\ln 3}{15}.
$$

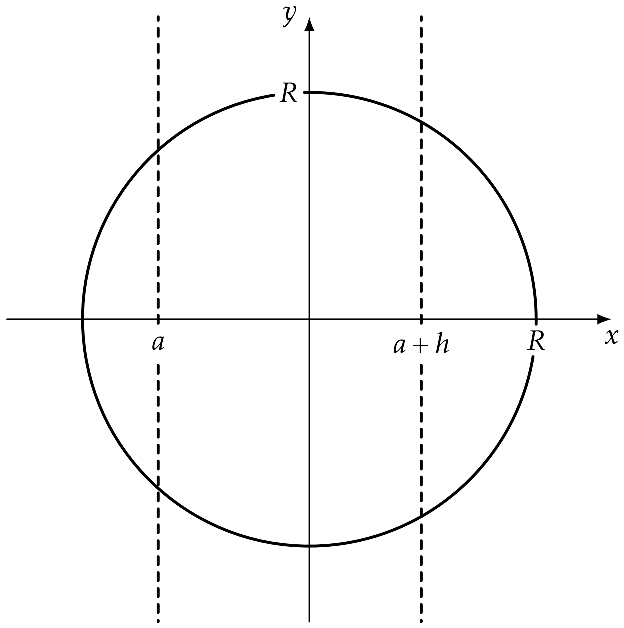
Alltså ges båtens hastighet av $v(t) = 3e^{-(\ln 3)t/15}$. Efter T sekunder från tidpunkten för motorhaveriet har båten rört sig $\int_0^T v(t)\, dt$ meter. Den generaliserade integral som erhålles då vi låter $T \to \infty$ ger en övre begränsning för hur långt båten kan glida. Beräkning ger att

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty v(t)\, dt &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T v(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T 3e^{-(\ln 3)t/15}\, dt = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{45}{\ln 3} e^{-(\ln 3)t/15} \right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{45}{\ln 3} e^{-(\ln 3)T/15} + \frac{45}{\ln 3} \right) = 0 + \frac{45}{\ln 3} = \frac{45}{\ln 3},
\end{aligned}
$$

vilket innebär att båten inte kan glida längre än $45/\ln 3$ meter. Eftersom $3 > e$ så är $\ln 3 > \ln e = 1$, och därmed är $45/\ln 3 < 45 < 50$. Följaktligen når båten inte stranden.

7. Svar: Arean är $2\pi Rh$, oberoende av var planen skär sfären

Lösningsförslag:
Vi kan anta att sfären uppstår då cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$ i xy-planet roterar kring x-axeln, och att planen skär sfären parallellt med y-axeln vid $x = a$ och $x = a + h$, där $-R \leq a < a + h \leq R$ (se figur nedan).



För att generera sfären så räcker det att rotera den "övre halvan" av cirkeln, dvs. den del av cirkeln där $y \geq 0$. Den övre halvan ges av funktionsuttrycket $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Enligt formeln för rotationsarea erhålles den sökta arean av integralen

$$2\pi \int_a^{a+h} f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx = 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\,dx$$

$$= 2\pi R \int_a^{a+h} 1\,dx = 2\pi Rh,$$

varav det framgår att arean, för ett givet h, inte beror av var planen skär sfären.

8. Svar: Se lösningsförslag

Lösningsförslag:
Låt f vara funktionen som ges av att

$$f(x) = \frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}.$$

Då är

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2\left(1 + x^2\right)},$$

varav vi ser att $f'(x) < 0$, för $x > 0$, vilket innebär att f är strängt avtagande på intervallet $]0,\infty[$. Detta, samt att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, ger vid handen att f är positiv på $]0,\infty[$. (Vore $f(x_1) \leq 0$ för något $x_1 > 0$, så skulle f vara negativ och avtagande på $]x_1,\infty[$, vilket skulle strida mot att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$.) Sålunda har vi, för varje positivt heltal n, integraluppskattningen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx < f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right)dx.\end{aligned}$$

Med partialintegrering erhålles de primitiva funktionerna till $\arctan(1/x)$ av

$$\begin{aligned}\int \arctan\frac{1}{x}\,dx &= x\arctan\frac{1}{x} - \int x \cdot \frac{1}{1+1/x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= x\arctan\frac{1}{x} + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C,\end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Sålunda är

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right)dx &= \lim_{X\to\infty}\left[\ln x - x\arctan\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^X \\ &= \lim_{X\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - x\arctan\frac{1}{x}\right]_1^X \\ &= \lim_{X\to\infty}\left(\ln\left(\frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\right) - X\arctan\frac{1}{X} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \ln 1 - 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Gränsvärdet $\lim_{X\to\infty} X\arctan(1/X) = 1$ i beräkningen ovan följer exempelvis av Maclaurinutveckling av arctan:

$$\begin{aligned}\lim_{X\to\infty} X\arctan\frac{1}{X} &= \lim_{X\to\infty} X\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X^3}B\left(\frac{1}{X}\right)\right) = \lim_{X\to\infty}\left(1 + \frac{1}{X^2}B\left(\frac{1}{X}\right)\right) \\ &= 1 + 0 = 1,\end{aligned}$$

där funktionen B är begränsad nära noll. Vi har nu visat att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \arctan\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} f(k) < 1 - \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right)dx \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\ln 2}{2},\end{aligned}$$

för alla positiva heltal n. Då $f(k) > 0$ för alla $k > 0$, måste talföljden $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ som ges av att

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \right)$$

vara växande, och av uppskattningen ovan framgår det att denna följd är uppåt begränsad av $(\ln 2)/2$. Följaktligen existerar gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} s_n$, och $\lim_{n\to\infty} s_n \leq (\ln 2)/2$. Eftersom $2 < e$, så är $\ln 2 < \ln e = 1$, och därmed har vi visat att

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \right) \leq \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{2}.$$

Alternativ lösning:
Maclaurinutveckling av $\arctan x$ av ordning 2, med restterm på Lagranges form ges av

$$\arctan x = x + \frac{\arctan^{(3)} \xi}{3!} x^3,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. Tredjederivatan av arctan beräknas till

$$\arctan^{(3)} x = \frac{-2 + 6x^2}{\left(1 + x^2\right)^3},$$

vilket innebär att

$$\arctan x = x - \frac{1 - 3\xi^2}{3\left(1 + \xi^2\right)^3} x^3.$$

För varje positivt heltal k gäller sålunda att

$$a_k = \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} = \frac{1 - 3\xi_k^2}{3\left(1 + \xi_k^2\right)^3} \cdot \frac{1}{k^3}, \tag{$*$}$$

där $0 \leq \xi_k \leq 1/k$, vilket ger oss uppskattningen

$$a_k = \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \leq \frac{1}{3k^3}.$$

Från $(*)$ framgår det också att $a_k > 0$ för $k \geq 2$. (Även talet $a_1 = 1 - \pi/4$ är positivt.) Eftersom funktionen $g(x) = 1/\left(3x^3\right)$ är positiv och avtagande på intervallet $]1, \infty[$, så ger integraluppskattning att

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k^3} < \frac{1}{3} + \int_1^n \frac{1}{3x^3}\, dx < \frac{1}{3} + \int_1^{\infty} \frac{1}{3x^3}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{X\to\infty} \left[-\frac{1}{6x^2} \right]_1^X = \frac{1}{3} + \lim_{X\to\infty} \left(-\frac{1}{6X^2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

för alla positiva heltal n. Då $a_k > 0$ för alla k, måste talföljden $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ som ges av att

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \right)$$

vara växande, och av uppskattningen ovan framgår det att denna följd är uppåt begränsad av 1/2. Följaktligen existerar gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} s_n$, och $\lim_{n\to\infty} s_n \leq 1/2$. Från integraluppskattningen följer det emellertid att $\lim_{n\to\infty} s_n < 1/2$, och därmed har vi visat att

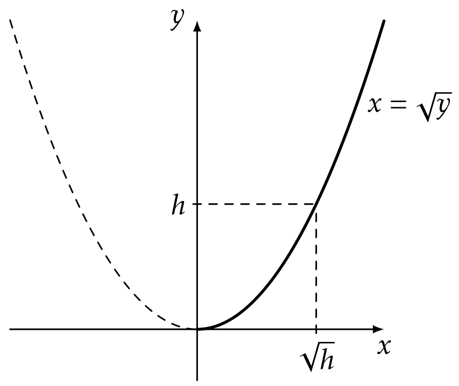
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2}.$$

9. Svar: a) $\pi h h' = 1 - 0{,}03\pi h$, där $h = h(t)$ är vattenytans höjd i dm efter t timmar

b) $\dfrac{100}{3\pi}$ dm ($\approx 10{,}6$ dm) **c)** $\dfrac{5000(2\ln 2 - 1)}{9\pi}$ timmar ($\approx$ 68,3 timmar)

Lösningsförslag:

a) Låt $h(t)$ beteckna vattenytans höjd i decimeter efter t timmar från att vatten börjar sippra ner i skålen. Skålens inneryta genereras då kurva $x = \sqrt{y}$ roterar king y-axeln.



Volymen av vattnet i skålen (i liter) ges med hjälp av skivformeln av integralen

$$\pi \int_0^h \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^h y\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{\pi h^2}{2},$$

och vattenytans area är $\pi\left(\sqrt{h}\right)^2 = \pi h$. Låt $k = 0{,}03$ dm/h beteckna proportionalitetskonstanten. Volymförändringen (i liter per timme) ges, enligt vad som anges i uppgiften, av $1 - k \cdot \pi h$. Sålunda gäller differentialekvationen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi h^2}{2}\right) = 1 - k\pi h \quad \Longleftrightarrow \quad \pi h h' = 1 - k\pi h. \tag{$**$}$$

b) Vattennivån slutar stiga när inflödeshastigheten är densamma som avdunstningshastigheten, vilket inträffar då

$$1-k\pi h=0 \quad\Longleftrightarrow\quad h=\frac{1}{k\pi}=\frac{100}{3\pi}.$$

Sålunda måste vattenytans höjd gå mot $100/(3\pi)$ dm då tiden går mot oändligheten. Notera också att $h=1/(k\pi)$ är den enda konstanta lösningen till differentialekvationen (∗∗). Denna lösning kallas jämviktsläget till (∗∗).

Alternativt kan vi visa att den sökta lösningen till (∗∗) går mot jämviktsläget med följande resonemang. Eftersom

$$h'=\frac{1-k\pi h}{\pi h}$$

så kan vi genom teckenstudium av $(1-k\pi h)/(\pi h)$ dra slutsatser om hur lösningarna till (∗∗) växer respektive avtar. Vi finner då att en lösning vars värden ligger mellan 0 och jämviktsläget $1/(k\pi)$ är växande, medan en lösning med värden större än jämviktsläget är avtagande. Eftersom den sökta lösningen till (∗∗) antar positiva värden nära noll, så måste den därmed vara växande och uppåt begränsad av $1/(k\pi)$. Detta innebär att $\lim_{t\to\infty} h(t)$ existerar. Antag att $\lim_{t\to\infty} h(t)=A\neq 0$. Medelvärdessatsen ger att

$$h(t+1)-h(t)=h'(\xi)=\frac{1-k\pi h(\xi)}{\pi h(\xi)},$$

där $\xi\in\,]t,t+1[$. Låter vi $t\to\infty$, så måste även $\xi\to\infty$, och vi erhåller att

$$A-A=\frac{1-k\pi A}{\pi A} \quad\Longleftrightarrow\quad A=\frac{1}{k\pi}.$$

c) Differentialekvationen $\pi hh'=1-k\pi h$ är separabel, och om $h\neq 1/(k\pi)$ ger omskrivning och integrering att

$$\pi hh'=1-k\pi h \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\pi h}{1-k\pi h}\frac{dh}{dt}=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \int\frac{\pi h}{1-k\pi h}\,dh=\int 1\,dt=t+C$$

$$\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{k}\int\left(1-\frac{1}{1-k\pi h}\right)dh=t+C \quad\Longleftrightarrow\quad h+\frac{1}{k\pi}\ln|1-k\pi h|=-kt+B,$$

där $C\in\mathbb{R}$ och $B=-kC$. Villkoret att $\lim_{t\to 0^+} h(t)=0$ innebär att $B=0$, och därmed uppfyller h sambandet

$$h+\frac{1}{k\pi}\ln|1-k\pi h|=-kt.$$

Låt t_1 vara tidpunkten då vattennivån har nått halvvägs till jämviktsläget, dvs.

$$h(t_1)=\frac{1}{2k\pi}.$$

Då gäller att

$$\frac{1}{2k\pi}+\frac{1}{k\pi}\ln\frac{1}{2}=-kt_1 \quad\Longleftrightarrow\quad t_1=\frac{2\ln 2-1}{2k^2\pi}=\frac{5000(2\ln 2-1)}{9\pi}.$$