LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2022-10-28

1. *Svar:*

a) $y = 4x - 7$.

b) $-\sqrt{3}$.

c) $x = \pm 1$.

d) 9.

e) $x = 0$, 1 eller 5.

f) $2 < x < 9/4$.

2. *Svar:*

a) $\dfrac{\pi + e}{2}$

b) ∞

c) 3.

Lösningar:

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+\pi} - \sqrt{x^2-e}) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+\pi-x^2+e)}{\sqrt{x^2+\pi}+\sqrt{x^2-e}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x(\pi+e)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{\pi}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{e}{x^2}}\right)} \\
&= \frac{\pi+e}{2},
\end{aligned}$$

eftersom $|x| = x$ då $x > 0$.

b)

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$$

eftersom täljaren går mot $\sqrt{2}$ och nämnaren går mot $0+$.

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \cdot 3 = \begin{bmatrix} t = 3x^2 \\ x \to 0 \Rightarrow t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 3 = 3,$$

där vi fick användning av ett standardgränsvärde.

3. *Svar:*

a) $x = \dfrac{\pi}{10} + n \cdot \dfrac{2\pi}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) $A = \sqrt{2}$ och $\varphi = 3\pi/4$.

Lösningar:

a)
$$\sin(3x) = \cos(2x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right),$$
vilket leder till att ekvationen är ekvivalent med
$$\begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + n \cdot 2\pi, & n \in \mathbb{Z} \text{ eller} \\ 3x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2x + n \cdot 2\pi, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
Förenkling ger
$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + n \cdot \dfrac{2\pi}{5}, & n \in \mathbb{Z} \text{ eller} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
Lösningarna som ges i andra raden finns dock även med bland lösningarna i första raden, vilket ses eftersom $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{10} + 2 \cdot \dfrac{2\pi}{5}$. Detta syns också tydligt om man ritar en enhetscirkel och prickar ut lösningarna där. Samtliga lösningar till ekvationen ges därför av
$$x = \frac{\pi}{10} + n \cdot \frac{2\pi}{5}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

b) Vi använder additionsformeln för sin och skriver
$$A\sin(3x + \varphi) = A\sin(3x)\cos\varphi + A\cos(3x)\sin\varphi.$$
Vi behöver alltså hitta A och φ sådana att ovanstående uttryck är lika med $\cos(3x) - \sin(3x)$. Genom att jämföra de båda uttrycken ser vi att detta gäller om
$$\begin{cases} A\cos\varphi = -1 \\ A\sin\varphi = 1. \end{cases}$$
Kvadrering och addition av respektive led i de båda ekvationerna ger
$$A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2,$$
vilket med hjälp av trigonometriska ettan ger $A^2 = 2$. Då är $A = \sqrt{2}$ eftersom amplituden ska vara positiv. Insättning av $A = \sqrt{2}$ i ekvationssystemet ovan ger
$$\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$
En vinkel φ som uppfyller dessa båda ekvationer är $\varphi = 3\pi/4$.

4. *Lösning:*

Då nämnaren till f saknar nollställen, är f definierad på hela $\mathbb{R}$ och det finns inga lodräta asymptoter.

För att hitta sneda (inkl. vågräta) asymptoter, använder vi oss av polynomdivision och skriver

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{5}(x+4) + \frac{1}{5} \cdot \frac{11x - 20}{x^2 - 4x + 5}.$$

Eftersom $\dfrac{11x - 20}{x^2 - 4x + 5} \to 0$ då $x \to \pm\infty$, är $y = \dfrac{1}{5}(x+4)$ en sned asymptot både då $x \to +\infty$ och då $x \to -\infty$.

Vi söker nu stationära punkter, och deriverar f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{3x^2(x^2 - 4x + 5) - x^3(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^4 - 8x^3 + 15x^2}{(x^2 - 4x + 5)^2} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2(x^2 - 8x + 15)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2(x-5)(x-3)}{(x^2 - 4x + 5)^2}, \end{aligned}$$

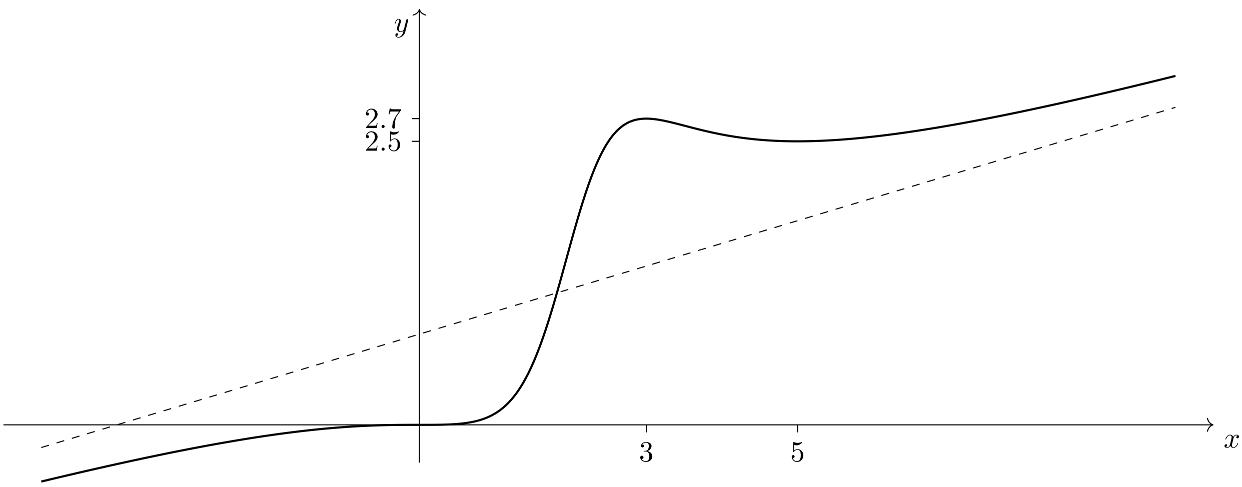
och vi ser att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$, $x = 3$ eller $x = 5$, och detta är våra stationära punkter. Observera också att nämnaren alltid är positiv, så den påverkar inte derivatans tecken. Vi gör ett teckenstudium för derivatan, vilket sammanfattas i följande tabell:

x		0		3		5	
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	terrass	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

Funktionsvärdena för de stationära punkterna är $f(0) = 0$, $f(3) = 2.7$ och $f(5) = 2.5$.

Grafen till f skär y-axeln då $y = 0$, och den skär x-axeln endast då $x = 0$. Den enda skärningspunkten med koordinataxlarna är därför origo.

Vi använder informationen vi fått fram för att skissa grafen:



5. *Lösningar:*

a) Se läroboken sid. 206.

b) Enligt derivatans definition behöver vi beräkna

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}\\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x\cdot 1 = e^x,\end{aligned}$$

där vi har använt ett standardgränsvärde. Observera att detta gäller oavsett värde på x. Eftersom gränsvärdet existerar och är lika med e^x, så är $f'(x) = e^x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

6. *Svar:* Radien är 5 meter och arean är 25 kvadratmeter.
Lösning:
Arean av en cirkelsektor med öppningsvinkel α är $\frac{\alpha}{2\pi}\pi r^2 = \frac{\alpha}{2}r^2$. Ståltrådens längd ska vara lika med omkretsen av rabatten, vilken bildas av två radier och cirkelbågens längd. Detta ger att längden är $2r + \frac{\alpha}{2\pi}2\pi r = 2r + \alpha r$. Vi vet också att ståltrådens längd är 20 (meter) och vi får alltså sambandet

$$2r + \alpha r = 20$$

mellan r och α. Löser vi ut α som funktion av r får vi

$$\alpha = \frac{20}{r} - 2.$$

Rabattens area när radien är r bestäms alltså av funktionen

$$A(r) = \left(\frac{10}{r} - 1\right) r^2 = 10r - r^2, \qquad r \in [0, 10].$$

Definitionsmängden är $[0, 10]$, eftersom både radien och cirkelbågens längder måste vara positiva och ståltrådens längd är 20.
För att hitta maximum av funktionen A på det kompakta intervallet $[0, 10]$ behöver vi kontrollera värdena i randpunkterna och i inre stationära punkter. Vi har $A(0) = A(10) = 0$ och

$$A'(r) = 10 - 2r.$$

Det finns alltså endast en stationär punkt, $r = 5$, vilket också ger den maximala arean $A(5) = 50 - 25 = 25$.
Vi kontrollerar att den motsvarande vinkeln α ligger mellan 0 och π: Då $r = 5$ är $\alpha = 2 < \pi$. Eftersom $r = 5$ är en maxpunkt för $A(r)$ på hela intervallet $[0, 10]$ så är $r = 5$ även en maxpunkt på det mindre intervallet där $\alpha \in [0, \pi]$.

7. *Lösningar:*

a) För alla $x \in]-1, 1[$ har vi

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x),$$

d.v.s. f är en udda funktion.

b) För $x,\ y \in]-1,1[$ har vi

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) &= \ln\left(\frac{1-\frac{x+y}{1+xy}}{1+\frac{x+y}{1+xy}}\right) = \ln\left(\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) \\
&= f(x) + f(y).
\end{aligned}$$

8. *Svar:*

a) $]0,1[$.

b) T.ex.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}\ln x & \text{då } x \neq 0,1, \\ 0 & \text{då } x = 0, \\ -1 & \text{då } x = 1. \end{cases}$$

Lösningar:

a) Definitionmängden består av de x för vilka $\ln x$ är definierad *och* serien $\sum_{j=1}^{\infty} x^j$ är konvergent, d.v.s då $x > 0$ *och* $|x| < 1$. Definitionsmängden är därför $]0,1[$.

b) För $x \in]0,1[$ kan vi använda formeln för geometrisk serie och skriva

$$f(x) = \frac{x}{1-x}\ln x.$$

Om det finns en sådan funktion g som beskrivs i uppgiften så måste

$$g(0) = \lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{1-x}\ln x = \lim_{x\to 0+} x\ln x \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1-x} = 0\cdot 1 = 0,$$

där vi har använt ett standardgränsvärde.
Vidare så behöver

$$\begin{aligned}
g(1) &= \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x}{1-x}\ln x = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{1-x} \lim_{x\to 1-} x \\
&= -\lim_{t\to 0-} \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot 1 = -1,
\end{aligned}$$

där vi har använt ett annat standardgränsvärde.
Vi kan välja vilken kontinuerlig funktion g som helst som är definierad på $[0,\infty)$, som uppfyller $g(0) = 0$ och $g(1) = -1$, och som sammanfaller med f då $0 < x < 1$. Vi kan t.ex. välja

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}\ln x & \text{då } x \neq 0,1, \\ 0 & \text{då } x = 0, \\ -1 & \text{då } x = 1, \end{cases}$$

vilken är definierad för alla $x \geq 0$.

9. *Svar:*

a) Alla likbenta trianglar med $|AC| = |BC|$ och alla trianglar där vinkeln C är rät.

b) Alla liksidiga trianglar.

Lösningar:

a) Vi kombinerar det givna villkoret med sinussatsen och får efter en liten omskrivning ekvationssystemet

$$\begin{cases} |AC|\cos B = |BC|\cos A, \\ |AC|\sin A = |BC|\sin B. \end{cases}$$

Om vi multiplicerar första ekvationen med $\sin A$ och den andra med $\cos B$ så får vi

$$\begin{aligned} |AC|\sin A\cos B &= |BC|\sin A\cos A, \\ |AC|\sin A\cos B &= |BC|\sin B\cos B. \end{aligned}$$

Detta medför att

$$|BC|\sin A\cos A = |BC|\sin B\cos B.$$

Eftersom $|BC| \neq 0$ får vi $\sin A\cos A = \sin B\cos B$, vilket om vi multiplicerar med 2 och använder en trigonometrisk formel ger

$$\sin(2A) = \sin(2B).$$

Detta ger

$$2A = 2B \qquad \text{eller} \qquad 2A = 180^\circ - 2B,$$

d.v.s.

$$A = B \qquad \text{eller} \qquad A = 90^\circ - B.$$

Vi kontrollerar det givna villkoret och ser att båda dessa är giltiga lösningar. Trianglarna som uppfyller villkoret är därför alla likbenta trianglar med sidorna $|AC|$ och $|BC|$ lika (p.g.a basvinkelsatsen), men även alla rätvinkliga trianglar med vinkeln C rät.

b) Vi använder svaret från deluppgift a) på triangeln $\triangle ABC$ och även för $\triangle BCA$ och $\triangle CAB$ och drar slutsatsen att

$$\begin{cases} |AC| = |BC| & \text{eller} & \angle C = 90^\circ, \\ |AC| = |AB| & \text{eller} & \angle A = 90^\circ, \\ |AB| = |BC| & \text{eller} & \angle B = 90^\circ. \end{cases}$$

Om det första fallet gäller i alla tre villkoren ovan, så är $|AB| = |BC| = |AC|$ och triangeln är liksidig. Det kan högst finnas en rät vinkel i en triangel. Vi antar nu att en vinkel är rät, och vi kan namnge hörnen så att $\angle C = 90^\circ$. Då får vi från rad 2 och 3 ovan att $|AC| = |BC| = |AB|$, vilket motsäger att $\angle C$ är rät. Det första fallet måste alltså gälla i alla tre villkor, vilket ger att triangeln är liksidig.

10. *Svar:* Arean är $2(\sqrt{5}-1)a^2$ och den antas då $x = a\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}}$.

Lösning:

Vi skriver korsets area som funktion av x. Förslagsvis kan man beräkna arean som differensen mellan arean av en kvadrat med sidan $2x$ och den sammanlagda arean av fyra små kvadrater med sidan $x - \sqrt{a^2 - x^2}$. Här används även Pythagoras sats. Vi får då

$$\begin{aligned} A(x) &= (2x)^2 - 4\left(x - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 = 4x^2 - 4\left(x - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \\ &= 8x\sqrt{a^2 - x^2} - 4a^2 + 4x^2. \end{aligned}$$

Vi vill maximera $A(x)$ för $x \in \left[\frac{a}{\sqrt{2}}, a\right]$, där intervallet betecknar de urartade fallen då korset är en kvadrat respektive när det är unionen av två linjer.

Eftersom intervallet är kompakt antas maximum i en randpunkt eller i en inre stationär punkt. Vi beräknar därför derivatan:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 8\sqrt{a^2 - x^2} - 8x \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 8x \\ &= 8\frac{a^2 - 2x^2 + x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

$A'(x) = 0$ precis då täljaren är 0, vilket gäller för de x som uppfyller

$$x\sqrt{a^2 - x^2} = 2x^2 - a^2.$$

Vi kvadrerar och får

$$x^2(a^2 - x^2) = (2x^2 - a^2)^2,$$

vilket förenklas till

$$5x^4 - 5a^2x^2 + a^4 = 0,$$

vilken vi kan lösa som en andragradsekvation i x^2. Detta ger

$$x^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Vi utesluter lösningen med minustecken då detta ger ett x utanför intervallet. Vi har därför

$$x = a\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}},$$

och insättning i uttrycket för $A'(x)$ ger att detta värde på x verkligen är ett nollställe för derivatan. För detta värde på x är

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}}.$$

Arean för den stationära punkten är

$$\begin{aligned} A\left(a\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}\right) &= 8a\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}}a\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} - 4a^2 + 4\frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= a^2\left(\frac{8}{\sqrt{5}} - 2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2(\sqrt{5}-1)a^2 \end{aligned}$$

Som jämförelse beräknar vi även värdena i ändpunkterna av intervallet.

$$
\begin{aligned}
A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) &= 8 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} - 4a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{2} = 2a^2, \\
A(a) &= 8 \cdot a \cdot 0 - 4a^2 + 4a^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Eftersom $\sqrt{5} - 1 > 1$ är den största arean $2(\sqrt{5} - 1)a^2$ och den antas då $x = a\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{2}}$.