

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. (a) Ge exempel på ett tal som tillhör mängden $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < x\} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. (1p)
(b) Bestäm ett andragradspolynom med reella koefficienter och som har $z = \sqrt{2} - 2i$ som ett nollställe. (2p)
(c) Polynomet $P(x) = \sum_{k=0}^{30} 2^k x^{30-k}$ delas med $x - 1$. Vad blir resten? (3p)
2. Chad behöver ägg för att göra årets matlådor. Lokala äggbonden säljer paket med 12 ägg i varje. Chad vill ha exakt 5 ägg per matlåda eftersom han går till gymmet varje dag. Han har redan 2 ägg hemma. Hur många paket ägg ska Chad köpa för att få så många matlådor som möjligt, men antalet matlådor ska inte överstiga 365? Chad vill inte ha några ägg över efter storkoket. *Tips: Modellera problemet som en Diofantisk ekvation.* (6p)
3. Låt $P(z) = (z - 11)(z + 9)$ och $Q(z) = z^3 + z^2 + 9z$. Lös ekvationen $Q(z) = 11$ för $z \in \mathbb{C}$. Finn därefter alla lösningar till polynomekvationen $P(Q(z)) = 0$. (6p)
4. Givet nollskilt $z \in \mathbb{C}$, sätt $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, som då ligger mitt emellan z och $\frac{1}{z}$. (6p)
(a) Beräkna w för $z = 2$, $z = \frac{3+4i}{5}$ och $z = 1 + 2i$.
(b) Visa att w är ett reellt tal om och endast om z är reellt, eller om $|z| = 1$.
5. De 9 damerna Agda, Berit, Cecilia, Dorotea, Ester, Frideborg, Gerd, Hilda och Ingalill ska organisera syföreningens årsmöte. **Agda, Berit och Cecilia** kan bara laga huvudrätter. **Gerd, Hilda och Ingalill** kan bara laga efterrätter. De tre övriga kan laga både huvudrätter och efterrätter. (6p)
(a) Mötet behöver exakt fyra personer som kan laga huvudrätter. På hur många sätt kan dessa utses bland de sex som kan laga huvudrätt?
(b) Om man nu vill välja en grupp damer där exakt fyra av dem kan laga huvudrätt, och exakt fyra av dem kan laga efterrätt, på hur många sätt kan detta göras?
Som exempel: {Berit, Dorotea, Ester, Frideborg, Gerd} utgör ett godkänt urval, då exakt fyra av dessa kan laga huvudrätt och exakt fyra av dem kan laga efterrätt.
(c) Berit och Gerd vill inte laga mat med Ester; de är rädda för Esters matlagning¹. På hur många sätt kan man nu göra urvalet i (b) där vi undviker att Ester blir vald samtidigt som Berit eller Gerd?

Inget av svaren på (a), (b), (c) överstiger 100.

¹Se föregående tenta—Ester har en historik med att råka flambra sina husdjur.