

Hjälpmedel: Inga.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

## Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels minst 9 av 18 poäng på godkäntdelen, dels att högst en uppgift bedöms med 0 poäng. Om du får 14 poäng eller mer, får du en bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella fullständiga lösningar kommer inte att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng på uppgiften, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

- a) Kvadratkomplettera  $x^2 + 6x - 11$ .
- b) Lös ekvationen  $\ln(x + 3) + \ln(x + 1) = \ln 8$ .
- c) Beräkna  $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ . Svara exakt.
- d) Beräkna  $\binom{7}{2}$ .
- e) Beräkna  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$  (om serien är divergent, svara det).
- f) Låt  $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ . Beräkna  $f'(x)$ .

2. Lös ekvationen

$$|x + 1| + 2|x - 2| = x + 3.$$

Rita därefter en skiss av grafen till  $f(x) = |x + 1| + 2|x - 2|$ .

3. Beräkna gränsvärdena

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3e^x + 2x^8}{5 \cdot 2^x + 4e^x - 7x^{11}}.$$

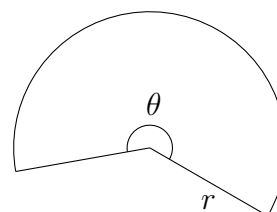
4. Härled derivatan av funktionen  $f(x) = \sqrt{x}$  på två olika sätt:

- a) Använd derivatans definition.
- b) Utnyttja att  $x = (f(x))^2$  och derivera implicit.

5. a) Formulera ett av likformighetsfallen.

- b) I en rätvinklig triangel är kateterna 5 respektive 12 cm långa. Höjden mot hypotenusan delar hypotenusan i två sträckor. Beräkna längden av dessa sträckor.

6. En figur har formen av en cirkelsektor med radie  $r$  och öppningsvinkel  $\theta < 2\pi$ . Hur stora ska  $r$  och  $\theta$  vara om man vill att figurens area är  $36 \text{ cm}^2$  och dess omkrets är så liten som möjligt?



## Överbetygsdel

Om du klarat godkändtdelen har du chans på överbetyg. För betyget 4 krävs minst 3 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från grunddelen) på denna del. För betyget 5 krävs minst 6 poäng.

7. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln|x|}, & x \neq 0, \pm 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Skissa grafen till funktionen  $f$  för  $x \geq 0$ . Ange speciellt alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Visa att funktionen  $f$  är deriverbar i  $x = 0$ .

8. a) Visa att två medianer (dvs sträckor som sammanbinder ett hörn med motstående sidas mittpunkt) i en triangel skär varandra i förhållandet 2 : 1.
- b) I triangeln  $\triangle ABC$  är  $BC = 6$  och  $AC = 8$ . Låt  $D$  vara mittpunkten på sidan  $BC$  och  $E$  mittpunkten på sidan  $AC$ . Linjerna  $AD$  och  $BE$  är vinkelräta. Bestäm sidan  $AB$ . (Du får använda dig av resultatet i 8a.)
9. Funktionen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är kontinuerlig och begränsad. Visa att ekvationen  $g(x) = x^3$  har minst en reell lösning. Finns det någon övre begränsning för hur många reella lösningar denna ekvation kan ha?