LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
LÖSNINGSFÖRSLAG
MATEMATIK

ENDIMENSIONELL ANALYS B2
FMAB70
2024.04.11, 08:00–13:00

GRUNDBETYGSDEL

1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''(t) + y(t) = t$, $y(0) = y'(0) = 1$.

   Lösning. Differentialekvationen är linjär och av ordning två. Vi löser den därför genom att först bestämma alla lösningar till den homogena ekvationen, sedan bestämma en partikulärlösning, och till slut bestämma de godtyckliga konstanterna med hjälp av begynnelsevillkoren. Den homogena ekvationen $y'' + y = 0$ har den allmänna lösningen $y = A\cos t + B\sin t$. Som partikulärlösning ser vi att $y = t$ fungerar (ansätt annars $y = a + bt$). Alltså blir den allmänna lösningen till differentialekvationen $y = A\cos t + B\sin t + t$. Insättning $t = 0$ ger $A = 1$. Derivering och insättning $t = 0$ ger $B = 0$. Lösningen blir därför $y = \cos t + t$.

2. Bestäm *en* primitiv funktion till vardera nedanstående funktion.

   a) $x\cos(x^2) \quad (x \in \mathbb{R})$

   b) $\ln(x-1) \quad (x > 1)$

   c) $\dfrac{1}{x(x+1)} \quad (-1 < x < 0)$

   Lösning. Vi bestämmer dem en och en, och C betecknar en godtycklig konstant (som vi kan välja som vi vill, och därför sätter till 0).

   a) Här duger $\sin(x^2)/2$ (inspektion duger, annars kan du sätta $t = x^2$).

   b) En partialintegration ger

$$\begin{aligned}\int \ln(x-1)\,dx &= (x-1)\ln(x-1) - \int (x-1)\cdot 1/(x-1)\,dx \\ &= (x-1)\ln(x-1) - x + C.\end{aligned}$$

   Alltså duger $(x-1)\ln(x-1) - x$.

   c) Här kan vi till exempel partialbråksuppdela, och sedan integrera på det aktuella intervallet,

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln(-x) - \ln(x+1) + C.$$

   Därför duger $\ln(-x) - \ln(x+1)$. (Det är också OK att svara $\ln|x| - \ln|x+1|$).

3. Bestäm de tre nollställena z_1, z_2 och z_3 till polynomet $p(z) = z^3 - 3z^2 + 5z - 15$. Ange även ett polynom av grad tre som har högstagradskoefficient 1 och de tre nollställena iz_1, iz_2 och iz_3.

Lösning. Om polynomet har rationella nollställen så måste de sökas bland ± 1, ± 3 och ± 5. Vi testar oss fram, och finner då att $z_1 = 3$ duger. Sedan gör vi en polynomdivision, och vi finner då att $p(z) = (z^2+5)\,(z-3)$. De andra två nollställena blir därför $z_2 = \sqrt{5}\,i$ och $z_3 = -\sqrt{5}\,i$. Polynomet som sedan efterfrågas blir därmed $(z - iz_1)\,(z - iz_2)\,(z - iz_3) = (z - 3i)\,(z + \sqrt{5})\,(z - \sqrt{5})$.

4. Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller differentialekvationen

$$(1 + x^2)\,f'(x) + 2xf(x) = 0$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Dessutom är $f(0) = 1$. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 2 till f.

Lösning. Differentialekvationen är linjär och med ett villkor kan den lösas entydigt, och lösningen kan deriveras hur många gånger som helst. Ekvationen ger direkt att $f'(0) = 0$. Deriverar vi ekvationen en gång så får vi $2xf'(x) + (1 + x^2)\,f''(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 0$. Sätter vi åter in $x = 0$ så får vi att $f''(0) = -2$. Alltså blir Maclaurinpolynomet av grad 2 lika med $f(0) + f'(0)\,x + (f''(0)/2)\,x^2 = 1 - x^2$. (Alternativt hade vi först kunnat lösa differentialekvationen. Det hade gett oss lösningen $f(x) = 1/(1 + x^2)$, som sedan kunnat Maclaurinutvecklas.)

5. Låt A beteckna området mellan kurvstycket $y = e^{-x}$, $0 \le x < +\infty$, x-axeln och y-axeln. Vilken rotationsvolym blir störst, den som uppkommer då A roterar ett varv kring x-axeln, eller den som uppkommer då A roterar ett varv kring y-axeln?

Lösning. Vid rotation kring x-axeln fås enligt skivformeln volymen

$$\int_0^{+\infty} \pi y^2\,dx = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \pi e^{-2x}\,dx = \lim_{X\to+\infty} \left[-(\pi/2)\,e^{-2x}\right]_0^X = \frac{\pi}{2}.$$

Vid rotation kring y-axeln fås enligt rörformeln volymen (här partialintegrerar vi)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} 2\pi xy\,dx &= \lim_{X\to+\infty} \int_0^X 2\pi x e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{X\to+\infty} \left(\left[-2\pi x e^{-x}\right]_0^X - \int_0^X 2\pi(-e^{-x})\,dx \right) \\
&= \lim_{X\to+\infty} \left[-2\pi e^{-x}\right]_0^X \\
&= 2\pi\,.
\end{aligned}$$

Volymen blir alltså störst då rotationen sker kring y-axeln.

6. Nisse Nilsson skjuter en puck som väger $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ längs en horisontell is i riktning mot ett ishockeymål som befinner sig $30\,\mathrm{m}$ bort. Puckens startfart är $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$ och sedan bromsas den endast av friktionen mot isen. Den bromsande kraftens storlek är vid varje tidpunkt proportionell mot kvadratroten ur puckens fart, där proportionalitetskonstanten ges av $k = 0.5\,\mathrm{kg{\cdot}m^{1/2}/s^{3/2}}$. Avgör om pucken glider in i mål (eller om den stannar innan).

Lösning. Kraftekvationen $ma = F$, där m är puckens massa, $a = dv/dt$ är accelerationen, och F är de på pucken verkande krafterna (friktionen), applicerad i horisontellt led, ger enligt förutsättningarna

$$0.2\frac{dv}{dt} = -0.5\sqrt{v}.$$

Om (vi behöver inte göra detta, men då får vi integrera i två led) vi istället ser hastigheten som en funktion av den avlagda sträckan s så får vi

$$0.2\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = -0.5\sqrt{v}.$$

men $ds/dt = v$, så vi får

$$0.2\frac{dv}{ds} = -0.5\frac{1}{\sqrt{v}}.$$

Integrerar vi detta finner vi att

$$\frac{2}{3}v^{3/2} = \int \sqrt{v}\,dv = -2.5\int ds = -2.5s + C.$$

Då $s = 0$ är $v = 25$, vilket ger $C = 250/3$. Detta ger vidare att v blir noll precis då $-2.5s + 250/3 = 0$, dvs. då $s = 100/3\,\mathrm{m}$. Eftersom $100/3 > 30$ så gäller det mycket riktigt att pucken gliiiiider in i måååål. (Kanske någon minns VM i Colorado 1962. Vi vill ju inte skriva om historien!)

ÖVERBETYGSDEL

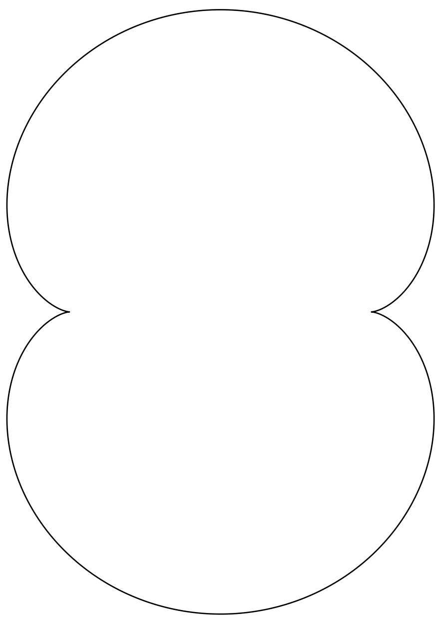
7. Formulera och bevisa analysens huvudsats.

   Lösning. Se kursboken.

8. Beräkna längden av nefroidkurvan (se figur), som parametriseras av

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) - \cos(3t) \\ y = 3\sin(t) - \sin(3t) \end{cases}$$

för $0 \le t \le 2\pi$. (Det är lämpligt att förenkla integranden.)



Lösning. Vi skall integrera $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$ på intervallet. Deriveringar ger

$$x'(t) = -3\sin(t) + 3\sin(3t)\,, \quad y'(t) = 3\cos(t) - 3\cos(3t)\,.$$

Med ett par trigonometriska ettor finner vi att

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= 9 - 18\sin(t)\sin(3t) - 18\cos(t)\cos(3t) + 9 \\ &= 18[1 - \cos(3t - t)] = 36\sin^2(t)\,. \end{aligned}$$

Längden blir alltså i lämplig enhet (här använder vi symmetri för sinusfunktionen)

$$\int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} 6|\sin(t)|\,dt = 4\int_0^{\pi/2} 6\sin(t)\,dt = 24[-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 24.$$

9. Visa att det för $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$|\arctan(x) - x| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2.$$

(Du kan få delpoäng om du visar olikheten med en större konstant framför x^2 i högerledet.)

Lösning. Med $f(x) = \arctan(x)$ gäller det att $f'(x) = 1/(1+x^2)$ och $f''(x) = -2x/(1+x^2)^2$. Enligt Maclaurins formel, med restterm på Lagranges form finns det således för varje x ett ξ mellan 0 och x sådant att

$$\arctan(x) = f(0) + f'(0)\,x + (f''(\xi)/2)\,x^2 = 0 + 1\cdot x - \xi/(1+\xi^2)^2\,x^2\,.$$

Således gäller det att

$$|\arctan(x) - x| \leq \frac{|\xi|}{(1+|\xi|^2)^2}x^2.$$

Den deriverbara funktionen $t \mapsto t/(1+t^2)^2$ är positiv för positiva t, lika med 0 då $t = 0$, har gränsvärde 0 då $t \to +\infty$. Vidare har dess derivata som enda positiva nollställe $t = \sqrt{3}/3$. Således antas dess största värde för positiva t precis då $t = \sqrt{3}/3$. Det värdet är $(\sqrt{3}/3)/(1+1/3)^2 = 3\sqrt{3}/16$. Tydligen gäller den påstådda olikheten.