

INGA HJÄLPMEDDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.
Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas.
0-3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

a) Förenkla uttrycket $\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt[4]{1/a}}$.

- b) Låt l vara linjen som går genom punkten $(1, 2)$ och är ortogonal mot linjen $y = \frac{x}{2}$.
Ange linjens ekvation på formen $y = kx + m$.
- c) Ange alla vinklarna mellan 0 och 360 grader sådana att $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ och $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- d) Bestäm konstanten a så att $x = 3$ löser ekvationen $x^2 - 3x + a = 0$.
- e) Lös ekvationen $x = \sqrt{6 - x}$.
- f) Lös ekvationen $\ln x + \ln(x + 2) = 0$.

2. a) Utgå från en lämplig potenslag för att bevisa logaritmlag för $\log \frac{x}{y}$.

- b) Finn alla reella x som uppfyller ekvationen $6|x + 1| \geq x^2 + 3$.

3. Låt $f(x) = 3 + \sin(x)$ och $g(x) = k + 2\cos(x)$ där k är en konstant. Bestäm minsta k så $f(x) \leq g(x)$ för alla x .

4. Avgör om gränsvärdena nedan existerar och beräkna dem:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - |x|}{x^2}$.

5. Rita kurvan $y = x + 2 \arctan(1/x)$. Ange asymptoter och lokala extempunkter.
6. En linje genom punkten $(1, 2)$ skär axlarna, i den 1:a kvadranten, i två punkter som tillsammans med origo bildar en rätvinklig triangel. Hur ska linjen dras för att triangelns area ska bli så liten som möjligt?

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel.

*Om du klarat godkäntdelen så kan du få överbetyg genom att lösa nedanstående problem.
För att få betyg 4 krävs minst 3 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.*

7. Ett fyr torn är beläget på en liten ö 3 km bort från den närmaste punkten P på en rak strandlinje, och dess ljus roterar med hastigheten 4 varv per minut. Hur snabbt rör sig ljusstrålen längs strandlinjen när den är 4 km bort från punkten P ?
8. a) Bevisa, med hjälp av medelvärdenssatsen, att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är positiv så är funktionen strängt växande.
b) Visa att $\ln(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x} + \frac{x}{2} > 0$ för alla $x > 0$.
9. Betrakta den begränsade kurvan G som uppfyller ekvationen $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$. Hitta intervallet av alla möjliga värden på x -koordinater för punkter på kurvan.

LYCKA TILL!