Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2025-03-17 kl 08–13

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Hitta någon vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot $(1,1,1)$ och mot $(1,-1,2)$ och som dessutom har längd 2.

2. Linjerna $\ell_1 = \{(1,1,1) + s(0,1,2) \mid s \in \mathbb{R}\}$ och $\ell_2 = \{(-2,2,0) + t(1,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ skär varandra i en unik punkt. Ange denna.

3. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$$

DEL B

4. Bestäm avbildningsmatrisen, med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$, för den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ger ortogonal projektion på planet $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$.

5. Bestäm de värden på a som uppfyller att matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ har vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ som egenvektor.

6. Beräkna $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

VÄND!

DEL C

7. Bestäm minsta avståndet mellan origo och en punkt på kurvan i $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$-6x_1^2 - 24x_1x_2 + x_2^2 = 5.$$

Ange också de punkter på kurvan där detta minsta avstånd antas.

8. Matrisen $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ är avbildningsmatrisen (med avseende på standardbasen) för en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ger ortogonal projektion på ett delrum $U \subset \mathbb{R}^3$. Visa detta, och ange en bas för U.

9. Lös systemet av ordinära differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = -x_2(0) = 1$.

10. Låt X och Y vara två nollskilda $(n \times 1)$-matriser, för något positivt heltal n. Visa att kolonnrummet till matrisen XY^t har dimension 1.

LYCKA TILL!