Lösningsskisser för TATA41 2021-01-17 (förmiddag)

1. Funktionen f är definierad för alla $x \neq 1$, och derivatan är

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{-x}) \cdot \frac{x^2-2}{x-1} + e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-2}{x-1}\right) \\
&= -e^{-x} \cdot \frac{x^2-2}{x-1} + e^{-x} \cdot \frac{2x(x-1)-(x^2-2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-e^{-x}x^2(x-2)}{(x-1)^2},
\end{aligned}
$$

vilket ger följande teckentabell:

x		0		1		2	
$-e^{-x}$	$-$		$-$		$-$		$-$
x^2	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	terrass-punkt	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

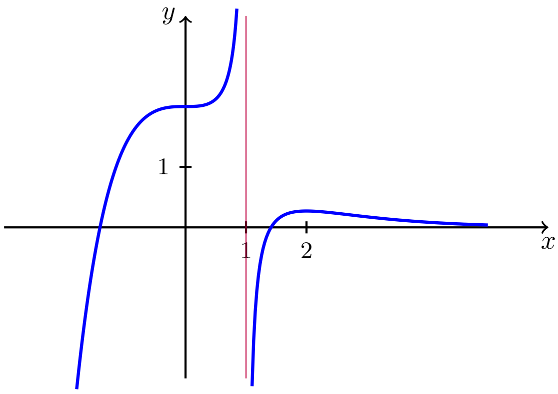
Relevanta gränsvärden:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 1^{\pm}} \left(\underbrace{e^{-x}(x^2-2)}_{\to \frac{-1}{e}<0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to \pm\infty} \right) = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} xe^{-x} \cdot \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \big[t=-x\big] = \lim_{t\to +\infty} \underbrace{(-te^{t})}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{2}{t^2}}{1+\frac{1}{t}}}_{\to 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}}_{\to 1} = 0,$$

det sista enligt ett standardgränsvärde.



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $y=0$ är en vågrät asymptot (då $x \to \infty$) och linjen $x=1$ är en lodrät asymptot. Det finns endast en lokal extrempunkt, nämligen den lokala maximipunkten $x=2$ (med det lokala maximivärdet $f(2)=2/e^2$). (Terrasspunkter är inte lokala extrempunkter.)

2. (a) Vi kan anta att $x > 0$; då är $\sqrt{x^2} = x$, och därmed $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \to \frac{2}{1+1} = 1$ då $x \to \infty$.

   (b) Med $t = x - \pi$ fås $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{x-\pi} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin 3(\pi+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin 3t}{3t} \cdot (-3) = 1 \cdot (-3)$, enligt ett standardgränsvärde.

   (c) Bytet $t = -x$ ger $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2^x+\ln(e^{-x}-x)}{\sqrt{2x^2+\ln|x|}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2^{-t}+\ln(e^t+t)}{\sqrt{2t^2+\ln t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vilket följande uträkning (där vi kan anta att $t > 0$) visar: $\frac{2^{-t}+\ln(e^t+t)}{\sqrt{2t^2+\ln t}} = \frac{2^{-t}+t+\ln(1+te^{-t})}{t\sqrt{2+\frac{\ln t}{t^2}}} = \frac{\frac{1}{t2^t}+1+\frac{1}{t}\cdot\ln(1+\frac{t}{e^t})}{\sqrt{2+\frac{\ln t}{t^2}}} \to \frac{0+1+0\cdot\ln(1+0)}{\sqrt{2+0}}$ då $t \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

Svar: (a) 1 (b) -3 (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. (a) Partiell integration, följt av partialbråksuppdelning, ger $\int \frac{\ln(x-2)}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}\ln(x-2) - \int \frac{-1}{x}\cdot\frac{1}{x-2}\,dx = -\frac{\ln(x-2)}{x} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{\ln(x-2)}{x} + \frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln x + C$. (Vi har $x > 2$ redan från början, så absolutbelopp i logaritmerna behövs ej.)

   (b) Med $t = \cos x$ (och $dt = -\sin x\,dx$) fås $\int \sqrt{\cos x}\sin 2x\,dx = \int \sqrt{\cos x}\cdot 2\sin x\cos x\,dx = -2\int \sqrt{t}\cdot t\,dt = -2\int t^{3/2}dt = -\frac{4}{5}t^{5/2} + C = -\frac{4}{5}\cos^{5/2}x + C$.

   (c) Kvadratkomplettering i nämnaren ger $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{(x+2)-1}{(x+2)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\big((x+2)^2+1\big) - \arctan(x+2) + C$.

Svar: (a) $\frac{1}{2}\ln\frac{x-2}{x} - \frac{\ln(x-2)}{x} + C$ (b) $-\frac{4}{5}\cos^{5/2}x + C$
(c) $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \arctan(x+2) + C$.

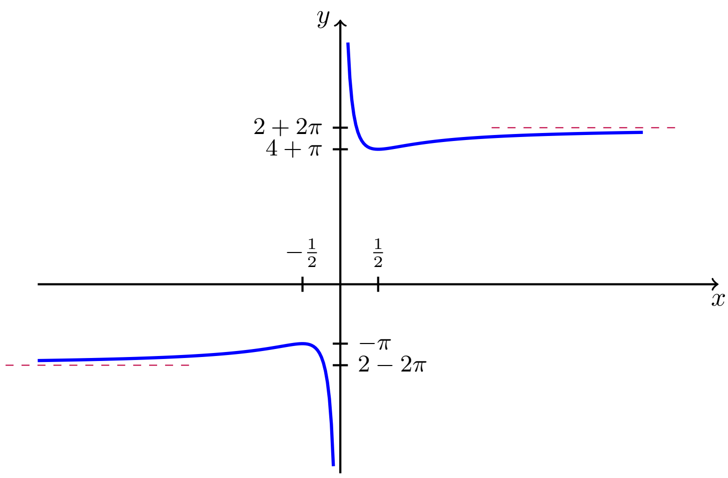
4. Låt $f(x) = 4\arctan 2x + \dfrac{1+2x}{x} = 4\arctan 2x + \dfrac{1}{x} + 2$, för $x \neq 0$. Då är

$$f'(x) = \frac{8}{1+4x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{(1+4x^2)x^2} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{(1+4x^2)x^2},$$

vilket ger oss följande:

x		$-1/2$		0		$1/2$	
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(1+4x^2)x^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

De relevanta gränsvärden är alla tämligen uppenbara: $f(x) \to 2 \pm 2\pi$ då $x \to \pm\infty$ och $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 0^{\pm}$. Och de lokala extremvärdena är $f(\pm\frac{1}{2}) = 2 \pm (2+\pi)$. Vi kan nu rita grafen $y = f(x)$ och läsa av antalet reella lösningar till ekvationen $f(x) = k$, dvs. antalet skärningar mellan grafen och linjen $y = k$:



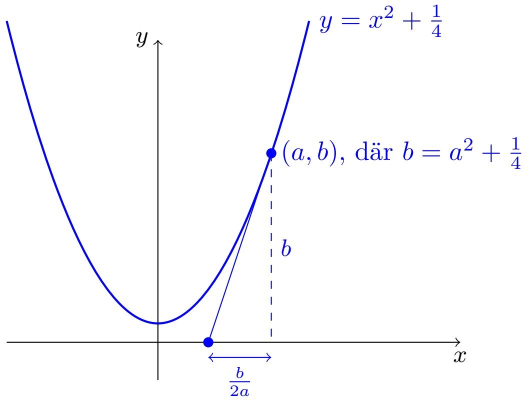
Svar: Ekvationen har en lösning om $k \geq 2 + 2\pi$ eller $k \leq 2 - 2\pi$ eller $k = 4 + \pi$ eller $k = -\pi$. Den har två lösningar om $4 + \pi < k < 2 + 2\pi$ eller $2 - 2\pi < k < -\pi$. Den har inga lösningar om $-\pi < k < 4 + \pi$.

5. Partialbråksuppdelning ger

$$\int_1^\infty \frac{3x^2+2x+1}{4x^4+x^2}\,dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{8x+1}{1+4x^2}\right)dx$$
$$= \lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{x}+2\ln x-\ln(1+4x^2)-\frac{1}{2}\arctan 2x\right]_1^\omega$$
$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\omega}-\ln\left(\frac{1}{\omega^2}+4\right)-\frac{1}{2}\arctan 2\omega+1+\ln 5+\frac{1}{2}\arctan 2\right)$$
$$= 0-\ln 4-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+1+\ln 5+\frac{1}{2}\arctan 2.$$

Svar: Integralen är konvergent, med värdet $1+\ln\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\arctan 2-\frac{\pi}{4}$.

6. Beteckna tangeringspunkten med (a,b), där $b=a^2+\frac{1}{4}$. Av symmetriskäl räcker det att undersöka $a>0$. Tangentens lutning ges av derivatan $dy/dx=2x$ (alltså $2a$ i detta fall), så vi får följande bild:



Avståndet som efterfrågades, mellan de två punkter som markerats i figuren, ges alltså enligt Pythagoras' sats av funktionen

$$f(a)=\sqrt{b^2+\left(\tfrac{b}{2a}\right)^2}=\tfrac{b}{a}\sqrt{a^2+\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{a}\left(a^2+\tfrac{1}{4}\right)^{3/2},\qquad a>0.$$

Derivatan

$$f'(a)=\tfrac{-1}{a^2}\left(a^2+\tfrac{1}{4}\right)^{3/2}+\tfrac{1}{a}\cdot\tfrac{3}{2}\left(a^2+\tfrac{1}{4}\right)^{1/2}\cdot 2a$$
$$=\tfrac{1}{a^2}\left(a^2+\tfrac{1}{4}\right)^{1/2}\left(-\left(a^2+\tfrac{1}{4}\right)+3a^2\right)$$
$$=\tfrac{1}{a^2}\left(a^2+\tfrac{1}{4}\right)^{1/2}\left(2a^2-\tfrac{1}{4}\right)$$

är negativ för $0<a<\frac{1}{\sqrt{8}}$ och positiv för $\frac{1}{\sqrt{8}}<a$, vilket visar att $f(a)$ antar sitt minsta värde då $a=\frac{1}{\sqrt{8}}$, nämligen

$$f(1/\sqrt{8})=\sqrt{8}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)^{3/2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

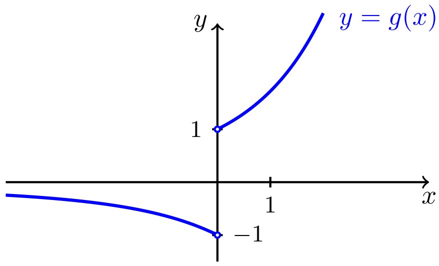
Svar: Det minsta möjliga avståndet är $3\sqrt{3}/8$.

7. Vi börjar med att undersöka $u(x) = (e^x - 1)/x$, $x \neq 0$. Derivatan är

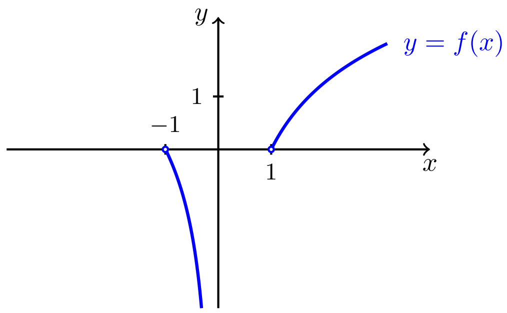
$$u'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2},$$

och för att kunna se vad den har för tecken undersöker vi täljaren, $v(x) = e^x(x-1)+1$, $x \in \mathbf{R}$. Dess derivata $v'(x) = xe^x$ har samma tecken som x, så v:s minsta värde är $v(0) = 1 \cdot (0-1) + 1 = 0$. Med andra ord är $v(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, och därmed är också $u'(x) > 0$ för alla $x \neq 0$. Alltså är u strängt växande på intervallen $]-\infty, 0[$ och $]0, \infty[$. Vidare har vi enligt standardgränsvärden att $u(x) \to 1$ då $x \to 0$, $u(x) \to 0$ då $x \to -\infty$ och $u(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.

Den funktion vi egentligen ville undersöka var ju $g(x) = (e^x - 1)/|x|$, som är lika med $u(x)$ för $x > 0$ och $-u(x)$ för $x < 0$, så att vi får g:s graf genom att spegla vänstra halvan av u:s graf i x-axeln och behålla den högra halvan som den är:



Från detta är det uppenbart att g är inverterbar, med en invers $f = g^{-1}$ som har definitionsmängd $D_f =]-1, 0[\cup]1, \infty[$ och vars graf ser ut såhär:



Gränsvärdet $\lim_{x\to 0} xf(x)$ (som alltså i själva verket är ett vänstergränsvärde, eftersom $f(x)$ är odefinierat för små $x > 0$) undersöks via bytet $x = g(t) \iff t = f(x)$, där $x \to 0^- \iff t \to -\infty$:

$$\lim_{x\to 0^-} xf(x) = \lim_{t\to-\infty} g(t)\,t = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^t - 1}{|t|}\,t = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^t-1}{-t}\,t = \lim_{t\to-\infty}(1-e^t) = 1.$$

Svar: Bevis enligt ovan. Gränsvärdet är 1.