LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2024-11-01 kl 14-19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel.

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. 14 poäng eller mer ger 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \ln\sqrt{x}$ i punkten där $x = 1$.

b) Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$.

c) Bestäm A så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)\sin(3x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

2. Lös ekvationerna

a) $2\ln(x+2) = \ln(x+4)$, b) $\cos 2x = 3\cos x + 1$.

3. Beräkna nedanstående gränsvärden

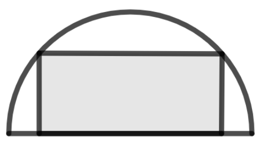
a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10} - 2e^x + x\ln x}{5x^{10} - x^2e^{-x} + 3e^x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x + x^2 + 2\ln x}{(x+3)\ln x - e^x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x)$.

4. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$, $x \neq 0$. Ange speciellt alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

5. a) Ange en ekvation till en ellips som har medelpunkten i $(2, -1)$ och tangerar båda koordinataxlarna.

b) En rätvinklig triangel har kateter av längd 3 och 4. Bisektrisen till den räta vinkeln delar triangeln i två mindre trianglar. Bestäm dessa trianglars areor. [*Inga trigonometriska uttryck i svaret.*]

6. I en halvcirkel med radie 5 är en rektangel inskriven på ett sådant sätt att en sida ligger på diametern (se figur). Bestäm den största omkretsen en sådan rektangel kan ha.

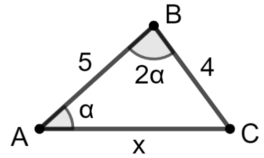


Var god vänd!

Överbetygsdel.

Om du klarat godkäntdelen så kan du få överbetyg genom att lösa nedanstående problem. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från förra delen) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. I en triangel $\triangle ABC$ är $|AB| = 5$, $|BC| = 4$ och vinkeln $\angle B$ dubbelt så stor som vinkeln $\angle A$ (se figur). Bestäm $|AC|$. [*Inga trigonometriska uttryck eller α i svaret.*]



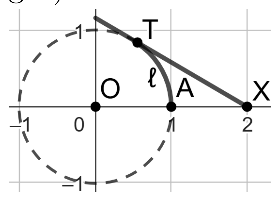
8. Bestäm alla $a, b \in \mathbb{R}$ sådana att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, & x \geq 0, \\ ax^2 + bx, & x < 0, \end{cases}$$

blir deriverbar. Bestäm sedan för vilka av dessa a, b som funktionen är injektiv. Välj något sådant a och b och beräkna den inversa funktionen till $f(x)$ med dessa a, b.

9. Punkten A med koordinaterna $(1, 0)$ ligger på cirkeln med radie 1 m och medelpunkt i origo O. Vid tidpunkten $t = 0$ befinner sig punkten X i A, och börjar röra sig åt höger med den konstanta hastigheten 3 m/s. I varje tidpunkt $t > 0$ dras en linje genom X som tangerar cirkeln i punkten T i den första kvadranten (se figur).

Uttryck båglängden ℓ från A till T som en funktion av t, och beräkna med vilken hastighet denna båglängd kommer att förändras i det ögonblick då $|OX| = 2$ m.



Lycka till!