LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2024-01-12 kl. 8.00–13.00

INGA HJÄLPMEDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar ska lämnas när så är möjligt.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng på denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y' - 2y = 2x + 1, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

2. Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 3x\ln(1-x) - e^{x^2}}{x^3}.$$

3. Finn nollställena till polynomet $p(z) = z^4 + 1$, och faktorisera $p(z)$ som en produkt av reella polynom av så låg grad som möjligt. Nollställena ska anges på formen $a + bi$, där a och b är reella tal som inte är uttryckta med trigonometriska funktioner.

4. Bestäm volymen av den kropp som genereras då området mellan x-axeln och kurvan

$$y = e^{\sqrt{x}}, \qquad 0 \le x \le 1,$$

roterar ett varv kring x-axeln.

5. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{4}{(x+1)\big(x^2+1\big)}\,dx.$$

6. En tank innehåller ursprungligen 75 liter saltlösning med koncentrationen 0,04 kg salt per liter. Vid en viss tidpunkt startar en process varvid saltlösning med koncentrationen 0,12 kg salt per liter pumpas in i tanken med hastigheten 5 liter per minut, samtidigt som lösning avtappas från tanken med samma hastighet (så att volymen vätska i tanken förblir densamma). Bestäm ett uttryck för hur mycket salt det finns i tanken efter t minuter från att processen påbörjats. (Antag att lösningen i tanken hela tiden är väl blandad.)

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från föregående del) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. För vilka värden y_0 har begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y, \qquad y(0) = y_0,$$

en lösning som är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$? Skissera grafen till en icke-konstant sådan lösning.

8. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\arctan x}}{x(x+1)}\, dx$$

är konvergent.

9. Visa att om f är kontinuerlig på ett öppet intervall I som innehåller 0, så gäller att

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(u)\, du \right) dt = \int_0^x (x-t) f(t)\, dt,$$

för alla $x \in I$.

LYCKA TILL!