LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2023-10-27 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng på denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. *Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer inte att bedömas. 0-3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.*

a) Ange alla vinklar α mellan 0 och 360 grader sådana att $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$.

b) Faktorisera polynomet $x^3 + 2x^2 - 3x$ i faktorer med så låg grad som möjligt.

c) Lös ekvationen $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{2x-1}$.

d) Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = x \arctan x^2$.

e) Lös olikheten $\dfrac{x+3}{x+1} < 1$.

f) Bestäm alla lösningar till ekvationen $4^x - 2\cdot 2^x - 8 = 0$.

2. Lös ekvationerna

a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$, b) $|2x-1| + |x+2| = 4$.

3. a) Visa logaritmlagen $\ln x^k = k\ln x$, $x > 0$, med hjälp av lämplig potenslag.

b) Bestäm eventuellt största och minsta värde av $f(x) = x\ln x^2 - 2x$ på intervallet $0 < x \leq 3$.

4. Bestäm den maximala definitionsmängden till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1)$$

samt rita funktionsgrafen. Ange speciellt alla asymptoter och lokala extrempunkter.

5. a) Beräkna gränsvärdena $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 2^x - \sqrt{x}}{\ln 3^x + x}$ och $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 2^x - \sqrt{x}}{\ln 3^x + x}$.

b) Bestäm talet a så att koefficienten framför x^4 i $(2x-a)^7$ blir 70.

6. En 2.4 m hög mur står 2 m från ett högt hus. En bil med strålkastarna på kör i mörkret mot muren, och på husväggen ses skuggan av muren. Härled ett samband mellan skuggans höjd och avståndet från bilen till muren. Med vilken hastighet rör sig skuggans överkant då bilen är 4 m från muren och kör med en hastighet av 2 m/s? Bilen kör vinkelrätt mot muren/huset och har sina strålkastare 0.4 m över marken. Muren kan anses ha försumbar tjocklek.

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från förra delen) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. En partikel rör sig i planet längs en rät linje från punkten $A : (-1, 0)$ till en punkt P på den övre halvan av enhetscirkeln, och sedan vidare (längs en rät linje) från P till punkten $B : (2, 0)$. Farten är dubbelt så hög mellan P och B som mellan A och P. Hur skall punkten $P : (x, y)$ väljas för att partikelns förflyttning skall ta så lång tid som möjligt?

8. a) Bestäm alla geometriska talföljder $(a_k)_{k=0}^{\infty} = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ sådana att summan av samtliga element i följden är 6, och summan av deras kvadrater är 18. Det räcker att svara med det första elementet samt kvoten. (En geometrisk talföljd är en sekvens av tal sådan att kvoten av två på varandra följande tal är konstant.)

b) Bestäm alla stationära punkter för

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (2x)^{-k}.$$

9. För polynomet $p(x)$ gäller det att $p(x) \geq 0$ för alla x och $p(0) = 0$, samt att $p(x)$ ej är nollpolynomet. Vilka av påståendena nedan är säkert sanna? Ge motivering eller motexempel.

a) Ekvationen $p(x) = 1000$ har minst två lösningar.

b) $p'(0) > 0$.

c) $p''(0) > 0$.

d) $p(x)$ är delbart med x^2.

e) $p(x)$ kan skrivas som $q(x^2)$ för något polynom $q(x)$.

3 rätt (med korrekt motivering/motexempel) ger 1 poäng, 4 rätt ger 2 poäng och 5 rätt ger 3 poäng. Glöm inte att motivera ordentligt!

LYCKA TILL!