LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR/LÖSNINGSFÖRSLAG
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2025-04-26 kl. 8.00–13.00

1. $z = 2i$, $z = -2i$, $z = 1 + \sqrt{3}$ eller $z = 1 - \sqrt{3}$

2. $y(x) = (-2x - 7)e^{-x} + x^2 - 4x + 7$

3. $\cdots$

4. $\ln 4 - 1$

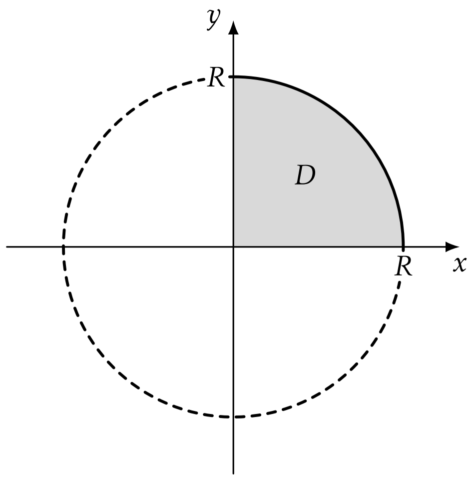
5. **a)** $y(x) = 2e^{x^2} - x^2 - 1$

b) $y(x) = \dfrac{1}{x + \ln(x+1) + 1}$

6. $F(4) = \ln 3$

7. **Svar:** Tungdpunkten ligger längs halvklotets symmetrilinje på avståndet 3/8 av radien från den plana ytan.

Lösningsförslag:
Betrakta cirkelskivan $x^2 + y^2 \le R^2$ med centrum i origo i xy-planet. Låt D vara den del av skivan som ligger i första kvadranten. Då D roterar ett varv kring x-axeln genereras ett halvklot K med radien R, som vi kan anta är homogent med konstant densitet ρ. Av symmetriskäl måste halvklotets tyngdpunkt ligga längs x-axeln, och därmed behöver vi endast beräkna dess position i x-led.



Om m betecknar halvklotets massa och V dess volym, så gäller att

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \Big/ 2 = \frac{2\rho\pi R^3}{3}.$$

Området D ligger mellan x-axeln och kurvstycket

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad 0 \le x \le R,$$

och ett volymelement dV av halvklotet i form av en smal skiva, som är vinkelrät mot x-axeln och har tjocklek dx, är således av formen

$$dV = \pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi\left(R^2 - x^2\right) dx.$$

Tyngdpunktens position i x-led ges därmed av

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m}\int_K x\, dm = \frac{1}{m}\int_K x\rho\, dV = \frac{1}{m}\int_0^R x\rho\pi\left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{\rho\pi}{m}\int_0^R \left(R^2 x - x^3\right) dx \\ &= \frac{\rho\pi}{m}\left[\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^R = \frac{\rho\pi}{m}\cdot\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \rho\pi\cdot\frac{3}{2\rho\pi R^3}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}R. \end{aligned}$$

Följaktligen ligger det homogena halvklotets tyngdpunkt längs symmetriaxeln på avståndet $3R/8$ från den plana ytan.

8. Lösningsförslag:

Sätt

$$H(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{2\arctan t}{\pi t}\, dt,$$

$$g(x) = \frac{2\arctan x}{\pi x}$$

och låt G vara en primitiv funktion till g. Då gäller att

$$H(x) = \int_{1/x}^{x} g(t)\, dt = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right),$$

och det följer att

$$\begin{aligned} H'(x) &= g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2\arctan x}{\pi x} + \frac{2\arctan(1/x)}{\pi/x}\cdot\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{2}{\pi x}\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

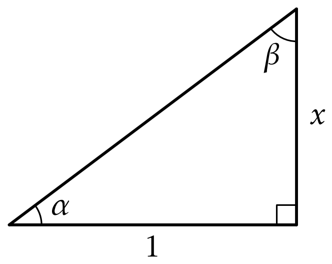
Eftersom $(\ln x)' = 1/x$, så kan påståendet i uppgiften vara sant endast om funktionen

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$$

antar värdet $\pi/2$ för alla $x > 0$. Derivering ger att

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

vilket speciellt innebär att f är konstant på intervallet $]0,\infty[$. Eftersom exempelvis $f(1) = \pi/2$, så gäller följaktligen att $f(x) = \pi/2$ för alla $x > 0$. Alternativt kan detta inses genom att betrakta nedanstående rätvinkliga triangel, där $\alpha = \arctan x$ och $\beta = \arctan(1/x)$.



Vi har nu visat att för $x > 0$ är

$$H'(x) = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(\ln x),$$

och därmed är skillnaden mellan $H(x)$ och $\ln x$ konstant. Eftersom $H(1) = 0$ och $\ln 1 = 0$, så följer det att $H(x) = \ln x$ för alla $x > 0$.

9. **Svar:** **a)** Se lösningsförslag **b)** $x - x^3 + \frac{7}{2}x^5$

Lösningsförslag:
a) Nedan betecknar B_1, B_2 och B_3 funktioner som är begränsade i en omgivning av noll. Låt Maclaurinutvecklingen av f av ordning n ges av

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + x^{n+1} B_1(x).$$

Då gäller att

$$\begin{aligned} f(-x) &= c_0 + c_1(-x) + c_2(-x)^2 + c_3(-x)^3 + \cdots + c_n(-x)^n + (-x)^{n+1} B_1(-x) \\ &= c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \cdots + (-1)^n c_n x^n + x^{n+1} B_2(x), \end{aligned}$$

och, eftersom f är udda, även att

$$f(-x) = -f(x) = -c_0 - c_1 x - c_2 x^2 - c_3 x^3 - \cdots - c_n x^n + x^{n+1} B_3(x).$$

Från entydigheten av Maclaurinutveckling följer det att polynomkoefficienterna i ovanstående uttryck för $f(-x)$ är lika, dvs. att $(-1)^k c_k = -c_k$ för alla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Om k är udda ger detta ingen inskränkning på c_k, men om k är jämnt så innebär det att

$$c_k = -c_k \quad \Longleftrightarrow \quad c_k = 0.$$

Alternativ lösning till **a***:*
Antag att u är en udda funktion, vilket innebär att

$$u(-x) = -u(x). \tag{$*$}$$

Derivering av båda led i $(*)$ ger att

$$u'(-x) \cdot (-1) = -u'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad u'(-x) = u'(x),$$

vilket visar att u' är en jämn funktion. Vidare gäller att om u är definierad i 0, så ger insättning av $x = 0$ i $(*)$ att

$$u(-0) = -u(0) \iff u(0) = 0.$$

Antag att v är en jämn funktion, dvs. att

$$v(-x) = v(x). \tag{$**$}$$

Derivering av båda led i $(**)$ ger att

$$v'(-x) \cdot (-1) = v'(x) \iff v'(-x) = -v'(x),$$

och sålunda är v' en udda funktion.

Vi har nu visat att derivatan av en udda funktion är jämn, att derivatan av en jämn funktion är udda, samt att en udda funktion som är definierad i 0 antar värdet noll där. Låt f vara en udda funktion. Då gäller följaktligen att $f^{(2k)}$ är udda och att $f^{(2k+1)}$ är jämn för alla $k \in \mathbb{N}$ sådana att derivatorna existerar. Om Maclaurinpolynomet till f av ordning n ges av

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n,$$

så gäller därmed att

$$c_{2k} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{0}{(2k)!} = 0,$$

då $0 \leq 2k \leq n$.

b) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4 och B_5 funktioner som är begränsade i en omgivning av noll. Från Maclaurinutvecklingen

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x)$$

följer det att

$$\ln\left(1+x^2\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + x^6 B_2(x),$$

och därmed är

$$g(x) = x + x\ln\left(1+x^2\right) = x + x^3 - \frac{x^5}{2} + x^7 B_2(x).$$

Eftersom g är en udda funktion så måste även g^{-1} vara udda, ty om $y = g(x)$ så gäller att

$$g^{-1}(-y) = g^{-1}\big(-g(x)\big) = g^{-1}\big(g(-x)\big) = -x = -g^{-1}(y).$$

Resultatet från deluppgift **a** ger således att Maclaurinutvecklingen av g^{-1} av ordning 6 är på formen

$$g^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + x^7 B_3(x),$$

för några tal a_1, a_3 och a_5. Genom att betrakta sammansättningen $g^{-1} \circ g$ erhålles att

$$\begin{aligned} x = g^{-1}\Big(g(x)\Big) &= a_1\left(x + x^3 - \frac{x^5}{2} + x^7 B_2(x)\right) + a_3\left(x + x^3 - \frac{x^5}{2} + x^7 B_2(x)\right)^3 \\ &\quad + a_5\left(x + x^3 - \frac{x^5}{2} + x^7 B_2(x)\right)^5 + x^7 B_4(x) \\ &= a_1 x + (a_1 + a_3)x^3 + \left(-\frac{a_1}{2} + 3a_3 + a_5\right)x^5 + x^7 B_5(x). \end{aligned}$$

Från entydigheten av Maclaurinutveckling följer det att

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_1 + \quad a_3 & = 0 \\ -\frac{1}{2}a_1 + 3a_3 + a_5 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -1 \\ a_5 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

och sålunda ges Maclaurinpolynomet av ordning 6 till g^{-1} av

$$x - x^3 + \frac{7}{2}x^5.$$