

INGA HJÄLPMEDDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

- 1.** Bestäm alla lösningar till

$$\text{a) } y' - xy = x, \quad \text{b) } y' - xy^2 = x.$$

- 2.** Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då kurvan

$$y = 1 - \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},$$

roterar kring x -axeln.

- 3.** Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 3y = 4xe^x.$$

- 4.** Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{8}{x^3 + 4x} dx.$$

- 5.** Visa att

$$|\tan x - x| \leq 8x^2 \quad \text{då} \quad |x| \leq \frac{\pi}{3}.$$

- 6.** Polynomen

$$p(z) = z^3 - z^2 - (1 + 8i)z + 1 - 8i \quad \text{och} \quad q(z) = z^2 - 1$$

har ett gemensamt nollställe. Lös ekvationen $p(z) = 0$.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Ett rykte om en lärare som gör sällsynt svåra tentor sprids bland studenterna på en teknisk högskola. Detta sker med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet studenter som hört ryktet och antalet som inte hört det. Vid en viss tidpunkt har 1000 studenter hört ryktet, och två dagar senare har 2500 hört det. Hur många studenter har hört ryktet efter ytterligare två dagar? Högskolan kan antas ha 5000 studenter. (Förenkla ditt svar så långt det går.)
8. Låt K vara ett klot med radie R m och med varierande densitet, och låt π vara ett plan på avståndet $2R$ m från klotets medelpunkt. Klotets densitet i punkten P ges av $a \text{ kg/m}^3$, där a anger avståndet från P till π . Bestäm klotets massa och masscentrum.
9. Visa att det inte finns några heltal $m, n > 0$ sådana att ekvationerna

$$z^m = 1 + i \quad \text{och} \quad z^n = 2 - i$$

har en gemensam lösning.

10. Antag att funktionen f är strängt växande (och således även inverterbar) på intervallet $[a, b]$, samt att f och f^{-1} är deriverbara. Visa att

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a).$$

LYCKA TILL!