

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

1. Beräkna gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{|x - 1|} \quad (2p)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \ln(1 + x^3) - x^2 \sin(\pi x)}{x^5} \quad (3p)$$

2. (a) Bestäm definitionsmängd samt beräkna eventuella asymptoter och lokala extempunkter till funktionen $f(x) = \frac{x^2}{1 + \ln(x)}$, samt skissa grafen. Konvexitet behöver inte undersökas.
(b) För vilka värden på den reella konstanten a har ekvationen $f(x) = a$ en unik lösning x ?

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{xe^y}{y} dA, \quad (5p)$$

där området D ges av $0 \leq x \leq 1$ och $x^2 \leq y \leq x$.

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 3x + y^2 - 3y$$

i området som ges av $x^2 + y^2 \leq 4$ och $y \geq 0$.

5. Låt $D = \{(x, y) \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq x^{-b}\}$, där $b > 0$ är en reell konstant. För vilka b fås en ändlig volym om området D roterar

(a) runt x -axeln? (2.5p)

(b) runt y -axeln? (2.5p)

Ange i förekommande fall de ändliga volymerna.

6. Lös begynnelsevärdesproblemen

$$(a) y'' + 9y = e^{2x}, \quad \text{där } y(0) = y'(0) = 0, \quad (2.5p)$$

$$(b) (1 + x)y' - y - y^2 = 0, \quad \text{där } y(0) = 1. \quad (2.5p)$$