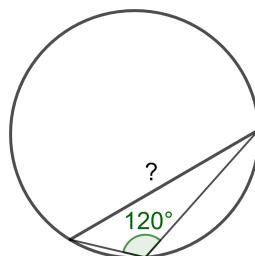


INGA HJÄLPMEDDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.
Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel.

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas.
0-3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.
 - a) En cirkel med medelpunkten i $(1, -2)$ går genom origo. Ange cirkelns ekvation.
 - b) Bestäm alla vinklar α mellan 0 och 360 grader som uppfyller $\tan \alpha = -1$.
 - c) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 + \ln x)e^{-x}$.
 - d) Bestäm alla värden för $x^{2/3} \cdot 2^{-1/3}$ om $x = 2\sqrt{x}$. Svaret skall vara utan potenser.
 - e) Lös olikheten $\frac{x^2 - 1}{x} > 0$.
 - f) Derivera $\ln(\cos^2 x)$.
2. Funktionen f definieras av $f(x) = x^2 - |x + 1|$, $D_f = \mathbb{R}$.
 - a) Lös olikheten $f(x) \leq 1$.
 - b) Är funktionen f inverterbar? Bestäm inversen eller motivera varför den saknas.
3. Definiera vad som menas med "log b". Lös sedan ekvationen ${}^2\log x = {}^4\log(x + 3) + 1$.
4. Definiera för en funktion f vad som menas med att " f är kontinuerlig i punkten a " samt att " f är deriverbar i punkten a ". Visa sedan att om f är deriverbar i a så är f även kontinuerlig i a . Ge ett exempel på att omvändningen inte gäller.
5. Bestäm största och minsta värde för $f(x) = 2 \arctan x - \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, om de existerar.
6. En korda i enhetscirkeln syns från en punkt på cirkeln med vinkeln 120° (se figur). Bestäm kordans längd.



Var god vänd!

Överbetygsdel.

*Om du klarat godkäntdelen så kan du få överbetyg genom att lösa nedanstående problem.
För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.*

7. Lös ekvationen $4^x + 6^x = 9^x$.
8. Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att linjen $y = x$ tangerar kurvan $y = a^x$. Bestäm även tangeringspunkten.
9. Rita kurvan $y = \sqrt[3]{2 - 3x + x^3}$, $x \in \mathbb{R}$. Ange speciellt alla eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. Principutseendet vid intressanta punkter skall studeras noggrant.
10. Ekvationen $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ definierar en kurva i planet (*Bernoullis lemniskata*). Kurvan är begränsad, dvs alla (x, y) på kurvan uppfyller

$$|x| \leq A, \quad |y| \leq B.$$

Bestäm de minsta möjliga konstanterna A, B .

Lycka till!