

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkändtel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Polynomet $p(z) = z^2 - (1 + i)z + i$ har ett reellt nollställe z_1 och ett rent imaginärt nollställe z_2 . Beräkna z_1 och z_2 , samt rita ut i det komplexa talplanet mängden av alla $z \in \mathbb{C}$ som uppfyller de båda olikheterna

$$|z + z_1| \leq 1, \quad |z - z_2| \leq 1.$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemen:

a) $y' = 2xy, \quad y(0) = 2.$

b) $y' = (y - 2)^2 x^{3/2}, \quad x > 0, \quad y(1) = 1.$

3. Bestäm en primitiv till funktionen

$$f(x) = \frac{x + 10}{x^3 + 4x^2 + 5x}, \quad x > 0.$$

4. Avgör om följande gränsvärden är ändliga.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1) - x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Ange gränsvärde då det finns. Ett argument som inte använder l'Hôpitals regel och som förklarar resultatet måste anges.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - 2y' + 4y = xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Svaret ska ges på reell form.

6. Bestäm för vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ som följande generaliserade integral är konvergent:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(x) \, dx$$

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Låt

$$f(k) = \frac{1 + \sin(k^3 + 3)}{4k^3 + 2k + 1}.$$

- a) Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ är konvergent.
- b) Bestäm ett heltal $m \geq 1$ sådant att $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < 10^{-6}$.

8. a) Följande begynnelsevärdesproblem har oändligt många lösningar:

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0, \quad x(t) \in \mathbb{R}.$$

Finn två av dessa lösningar.

b) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, \quad x(0) = -1$$

Är lösningen definierad för alla $t \geq 0$?

9. Funktionen u definieras som

$$u(x) = \int_0^x \frac{t}{\sin t} dt.$$

Beräkna

$$\int_0^{\pi/2} u(x) \cos(2x) dx.$$

10. Avgör om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\ln k)^2}$$

konvergerar.

LYCKA TILL!