

Tentamen i Envariabelanalys 1

2018-08-28 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmaterial. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedöms med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna de obestämda integralerna

$$(a) \int \arctan 2x \, dx \quad (b) \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \quad (c) \int \frac{dx}{\cos 3x}.$$

2. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + \sqrt{x})}{3x + \ln x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{-1/x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}.$$

3. Skissa grafen för $f(x) = x^2 - 20 + 8 \arctan 2x - \frac{13}{4} \ln(1 + 4x^2)$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

4. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a .
(b) Definiera vad som menas med att en funktion f är deriverbar i en punkt a .
(c) Visa att f är kontinuerlig i a om f är deriverbar i a .

5. Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} \, dx$ (eller visa divergens).

6. En rektangel har ett hörn i origo, ett till på x -axeln och ett till på y -axeln. Det fjärde hörnet ligger på grafen till $f(x) = \frac{e^{-x^3+6x^2-9x}}{x}$, $x > 0$. Vilka värden kan rektangelns area anta?

7. Undersök gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(\frac{2x+1}{x} \right)^{\frac{x}{2x+1}} - \sqrt{2} \right)$.