LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2023-01-13 kl 08–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

I. Godkäntdel. *För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.*

1. Bestäm nollställena z_1 och z_2 till polynomet $p(z) = z^2 + 2z + 4iz - 3 + 2i$. Rita sedan i det komplexa talplanet mängden av alla z som uppfyller olikheten

$$|z + z_1 + z_2| \leq 1.$$

Svar. Kvadratkomplettering ger $z^2 + 2z + 4iz - 3 + 2i = (z + 1 + 2i)^2 - 2i$. *Sedan är nollställena givet vid* $(z+1+2i)^2 = 2i = 2e^{i\pi/2}$ *och vi får använde de Moivres formel, dvs* $z + 1 + 2i = \pm\sqrt{2}e^{\pi/4} = \sqrt{2} \cdot (1\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \pm(1 + i)$, *dvs.* $z = -1 - 2i \pm (1 + i)$. *Vi får sedan två nollställen* $z_1 = -i$ *och* $z_2 = -2 - 3i$. *Ritningen viser då en cirkel med radie 1 i centrum* $-z_1 - z_2 = 2 + 4i$. *Olikheten beskriver alla tal på och innan denna cirkel.*

2. Lös begynnelsevärdesproblemen

a) $y' + \dfrac{e^x}{e^x + 1} \cdot y = 0, \quad y(0) = 1,$

b) $y' = y^2 \cdot \cos^2 x, \quad y(0) = 4.$

Svar. a) Svar: $y(x) = \frac{2}{e^x+1}$.
Använd metoden av integrerande faktor. Vi har $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln|e^x + 1|$ *och vi får bortse från integrationskonstanten och absolutbeloppet (argumentet är strikt positivt). Den integrerande faktor blir då* $f = e^{\ln(e^x+1)} = e^x + 1$. *Multiplikation av differentialekvationen med den integrerande faktor ger* $(e^x+1)y' + e^x \cdot y = d/dx((e^x + 1) \cdot y(x)) = 0$. *Integration ger* $(e^x + 1 \cdot)y(x) = C$ *med* $C \in \mathbb{R}$ *en godtycklig integrationskonstant. Insättning av begynnelsesvillkoret ger* $(e^0 + 1)y(0) = 2 = C$. *Den bestämda lösningen blir då* $y(x) = \frac{2}{e^x+1}$.
b) Svar: $y(x) = -\frac{4}{2x+\sin 2x-1}$.

Använd separation av variabler, vilket ger

$$\int y^{-2}\,dy = \int \cos^2 x\,dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-1/y = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

I sista steg integreras HL t.ex. v.hj.a. av den trigonometriske identitet, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$; *alternativ v.hj. av partiell integration. Lösa ur för* y *ger*

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C} = -\frac{4}{2x + \sin(2x) + 4C} \tag{1}$$

med integrationskonstant $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsesvillkoret $y(0) = 4$ ger då $C = -1/4$.

3. Lös begynnelsesvärdesproblemet

$$y'' + 2y' + 5y = 5x^2 - x, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

Svar. Den allmänna lösning är givet vid $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
i) Vi löser först den homogena lösningen, y_h, till den homogena ekvationen, $y''+2y'+5y = 0$. Insättning av ansatsen $y = e^{rx}$ ger den karakteriska ekvationen, $r^2 + 2r + 5 = 0$ som har rötterna $r_{1,2} = -1 \pm 2i$. Sedan er den homogena lösningen på reell form, $y_h(x) = c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x)$.

ii) Sedan hittar vi en partikulär lösning, y_p, till $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 - x$. Ansatsen $y = Ax^2 + Bx + C$ ger, vid jämnförelse av koefficienterna för varje potens, $A = 1, B = -1, C = 0$, och vi får $y_p(x) = x^2 - x$.

iii) Den allmänna lösningen är $y(x) = y_h(x)+y_p(x) = y(x) = e^{-x}(c_1 \cos(2x)+c_2 \sin(2x))+ x^2-x$. För att hitta c_1, c_2 insättar vi begynnelsesvillkoren. Vi beräknar $y'(x) = -e^{-x}(c_1 \cos(2x)+ c_2 \sin(2x)) + e^{x}(-2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x)) + 2x - 1$. Insättning ger $c_1 = c_2 = 1$. Den bestämda lösningen är alltså

$$y(x) = e^{-x}(\cos(2x) + \sin(2x)) + x^2 - x.$$

4. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då ytan mellan x-axeln och kurvan

$$y = x\sqrt{\arctan x}, \quad 0 \le x \le 1,$$

roterar kring x-axeln.

Svar.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 x^2 \arctan x\,dx \\
&\overset{PI}{=} \pi \left[\frac{x^3}{3} \arctan x\right]_0^1 - \frac{\pi}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{3} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\,dx\right) \\
&= \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{3} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{\pi}{3} \left[\frac{1}{2} \ln|x^2+1|\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \ln 2 = \frac{\pi}{12}(\pi - 2 + \ln 4).
\end{aligned}$$

5. Använd Maclaurinutveckling för att:

a) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - \cos x + 1}{x^2}$.

b) Visa att $|\ln(1+x^2) - x^2| \le \dfrac{x^4}{2}$ för alla x.

Svar.
a) Vi har standard MacLaurin-utvecklingen

$$\ln(1+t) = t + t^2 B(t)$$

och entydighet av Maclaurinutvecklingen ger, om $t = x^2$,

$$\ln(1+x^2) = x^2 + x^4 B_1(x).$$

Dessutom har vi standard utvecklingen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^4 B_2(x).$$

Insättning ger

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x^2) - \cos x + 1}{x^2} &= \frac{x^2 - 1 + \frac{x^2}{2!} + 1 + x^4 B_3(x)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}x^2 + x^4 B_3(x)}{x^2} \\ &= \frac{3}{2} + x^2 B_4(x) \to \frac{3}{2} \quad (x \to 0)\end{aligned}$$

b) Beräkning av nästa derivat ger Lagrange resttermen (om vi ser på $f(t) = \ln(1+t)$ *igen)*

$$\ln(1+t) = t + R_2(t) = t + \frac{f''(\theta t)}{2!}t^2 = t - \frac{1}{2(1+\theta t)^2}t^2$$

där $0 \leq \theta \leq 1$. *Insättning av* $t = x^2$ *(entydighet av MacLaurinutvecklingen)*

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2(1+\theta x^2)^2}x^4.$$

Resttermen maximeras då $\theta = 0$, *och vi får då*

$$|\ln(1+x^2) - x^2| = \left| -\frac{1}{2(1+\theta x^2)^2}x^4 \right| \leq \frac{x^4}{2}$$

för alla x.

6. Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}.$$

Avgör även om den generaliserade integralen $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ är konvergent.

Svar. Partialbråksuppdelning ger $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-3}$.
Primitiverna finnas sedan vid direkt integration:

$$\int \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-3} dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C = \ln\left(\frac{|x-3|^2}{|x-1|}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Primitiven divergerar i $x = 1$. *Den generaliserade integral är divergent:*

$$\begin{aligned}\lim_{X\to 1^-} \int_0^X f(x)\,dx &= \lim_{X\to 1^-} \left[-\ln|x-1| + 2\ln|x-3|\right]_0^X \\ &= \lim_{X\to 1^-} \left(-\ln|X-1| + 2\ln(2) + \ln(1) - 2\ln(3)\right) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

II. Överbetygsdel. *Om du klarat godkäntdelen så kan du få överbetyg genom att lösa nedanstående problem. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.*

7. Låt K vara den rotationskropp som uppstår då ytan mellan y-axeln och kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring y-axeln. Beräkna masscentrum av K om densiteten beror endast av y enligt $\rho(y) = e^y$.

Svar. Rotationssymmetrin krings y-axeln innebär att uppgiften kan behandlas i xy-planet; speciellt ger det att mass centrum har koordinaterna $x_m = z_m = 0$. *Vi behöver därför bara bestämma mass centrum längs y-axeln.*
i) Vi bestämmer först massan av rotationskroppen:

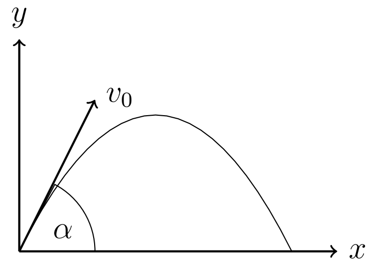
$$\begin{aligned}m &= \int \rho(y)\,dV \\ &= \int_0^1 \rho(y)\cdot \pi x(y)^2\,dy \\ &= \pi \int_0^1 e^y y\,dy \\ &\overset{PI}{=} \pi(e - [e^y]_0^1) = \pi(e - e + 1) = \pi.\end{aligned}$$

ii) Sedan bestämmar vi mass centrum i y-läget:

$$\begin{aligned}y_m &= \frac{1}{m}\int y\,dm \\ &= \frac{1}{m}\int y\rho(y)\,dV \\ &= \frac{1}{m}\int_0^1 y\rho(y)\cdot \pi x^2(y)\,dy \\ &= \int_0^1 y^2 e^y\,dy \\ &\overset{PI}{=} [e^y y^2]_0^1 - 2\int_0^1 y e^y\,dy = e - 2.\end{aligned}$$

8. Då ett objekt vid tiden $t = 0$ kastas iväg från marken med hastighet v_0 och vinkel α så kommer det, om luftmotståndet försummas, följa kurvan (kastparabeln)

$$\begin{cases} x(t) &= v_0\, t\, \cos\alpha \\ y(t) &= v_0\, t\, \sin\alpha - gt^2/2, \end{cases}$$



där g är tyngdaccelerationen. Sätt $g = 10, v_0 = 10$ och $\alpha = \pi/6$ och beräkna längden av kastparabeln från $t = 0$ till det t-värde där objektet träffar marken.

Svar. Vi bestämmer först tiden t_1 det tar till objektet kommer ner på marken igen:

$$y(t_1) = 0 = t_1 \left(v_0 \sin\alpha - \frac{g}{2}\, t_1\right)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$t_1 = 0 \quad \textit{eller} \quad t_1 = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha = \frac{2\cdot 10}{10} \sin(\pi/6) = 1$$

För att beräkna kurvans (parabelns) längd, uppfattar vi tiden t som parameter. Kurvans längd är

$$L = \int_0^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

och vi beräknar

$$x'(t) = v_0 \cos\alpha$$
$$y'(t) = v_0 \sin\alpha - gt$$

Insättning ger

$$L = \int_0^{t_1} \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}\; dt$$

Vi förenklar vid att insätta numeriska värden, $v_0 \sin\alpha = 10/2$ och $v_0 \cos\alpha = 10\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{75 + (5 - 10t)^2}\, dt \\ &= 5\sqrt{3} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{5 - 10t}{5\sqrt{3}}\right)^2}\, dt = 5\sqrt{3} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right)^2}\, dt \\ &= \left[\begin{array}{lll} x = \frac{2t-1}{\sqrt{3}} & & \\ dx = \frac{2}{\sqrt{3}} dt & \Leftrightarrow & dt = \frac{\sqrt{3}}{2} dx \\ t = 0: & x = -\frac{1}{\sqrt{3}} & \\ t = 1: & x = +\frac{1}{\sqrt{3}} & \end{array}\right] \overset{VB}{=} \frac{15}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{x^2 + 1}\; dx. \end{aligned}$$

Integralen beräknas v.h.a. partialbråksuppdelning (se Ex. 12.29 i boken eller utför variabelbyte ($x = \tan s$). En primitiv blir

$$\int \sqrt{x^2+1}\; dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right).$$

Insättning av gränserna ger

$$L = \frac{15}{2}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1}dx = \frac{15}{4}\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 5 + \frac{15}{4}\ln(3)$$

9. Ett glas i form av rotationsytan som bildas då $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, roterar kring y-axeln står på ett bord i en trädgård. När vädret är regnigt och kallt (så att avdunstning kan försummas) fylls tomt glas helt upp på ett dygn. När vädret är torrt och varmt tar det två dygn för fullt glas att helt torka ut. Hur lång tid tar det för tomt glas att fyllas upp till hälften av sin höjd om det är regnigt och varmt? Man kan utgå från att det alltid regnar lika intensivt samt att avdunstningen är proportionell mot arean av vattenytan (med samma proportionalitetskonstant oavsett fuktighet).

Svar. Vi har $y = x^2$ där $0 \le x \le 2$ dvs $0 \le y \le 4$, dvs maximum höjd är $H = 4$.

Uppfyllningsraten är proportionell med arean av vattenytan $A(H)$ vid höjd H, och avdunstningsraten är proportionell mot arean av vattenytan $A(y)$ vid höjd y. En modell för ändringshastigheten för vattens volym $V = V(y)$ vid höjd $y = y(t)$ vid tid t är då

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = k_r \cdot A(H) - k_a \cdot A(y).$$

- *Arean av vattenytan: $A(y) = \pi x^2(y) = \pi y$, dvs. $A(H) = 4\pi$.*
- *Vattens volym vid höjd y: $V(y) = \int_0^y \pi x^2(y)dy = \int_0^y \pi y dy = \pi y^2/2$, dvs $dV/dy = \pi y$.*

Modellen ges då av differentialekvationen

$$\pi y \cdot y' = 4\pi k_r - k_a \pi y \quad\Leftrightarrow\quad y \cdot y' = 4k_r - k_a y$$

Vi betraktar de två situationerna som beskrivs i uppgiften:

- *Regnigt väder, ingen avdunstning ($k_a = 0$):*

  $$y \cdot y' = 4k_r \quad\Leftrightarrow\quad \int y dy = \int 4k_r dt \quad\Leftrightarrow\quad y^2/2 = 4k_r t + C \quad\Rightarrow\quad y = +\sqrt{8k_r t + 2C}$$

  Begynnelsesvillkoret $y(0) = 0$ ger $C = 0$. När glaset er fullt, $y(1) = \sqrt{8k_r} = 4$ dvs. $k_r = 2$.

- *Torrt väder, med avdunstning ($k_r = 0$):*

  $$y' = -k_a \quad\Leftrightarrow\quad y = -k_a t + C$$

  Begynnelsesvillkoret $y(0) = 4$ ger $C = 4$. När glaset er tomt, $y(2) = -2k_a + 4 = 0$ dvs $k_a = 2$.

Modellen ges då med numeriska värden,

$$y \cdot y' = 8 - 2y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{8-2y}\frac{dy}{dt} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{8-2y}{y}\,dy = \int dt$$

Vi integrerar VL:

$$\int \frac{y}{8-2y}dy = \frac{1}{8}\int \frac{y}{1-y/4}dy = \begin{bmatrix} s & = y/4 \\ 4ds & = dy \end{bmatrix} \overset{VB}{=} \frac{16}{8}\int \frac{s}{1-s}ds$$
$$= 2\int -1 + \frac{1}{1-s}ds = -2s - 2\ln|1-s| = -\frac{y}{2} - 2\ln\left|1 - \frac{y}{4}\right|.$$

HL blir bara t, och vi får sambandet $t = -\frac{y}{2} - 2\ln\left|1 - \frac{y}{4}\right|$. *Vi vil bestämma tiden* t_1 *till glaset fylls till halv höjd, dvs. att* $y(t_1) = 2$. *Insättning ger*

$$t_1 = -1 - 2\ln\left|1 - \frac{1}{2}\right| = -1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(4) - 1 \approx 0.386.$$

10. Bestäm alla värden på $a \geq 0$ för vilka integralen

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x+x^a)}{x\sqrt{x}}\,dx$$

är konvergent.

Svar. Låt $f(x) = \frac{\ln(1+x+x^a)}{x\sqrt{x}}$. *Integralen är generaliserad både i 0, där integranden* $f(x)$ *inte är definierad, och i* ∞. *Vi delar därför upp integrationsintervallen i två delar*

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\infty f(x)dx$$
$$= \underbrace{\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^1 f(x)dx}_{=I_1} + \underbrace{\lim_{X\to\infty}\int_1^X f(x)\,dx}_{=I_2}$$

i) Vi visar att första integralen, I_1, *är konvergent. Vi använder t.ex. att*

$$\frac{x^a}{2} \leq \ln(1+x+x^a) \leq x + x^a \quad \textit{för alla} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Vi uppskattar integralen:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{a-3/2}dx < I_1 \leq \int_0^1 \frac{x+x^a}{x^{3/2}}dx = \int_0^1 x^{-1/2}dx + \int_0^1 x^{a-3/2}dx$$
$$= [x^{1/2}]_0^1 + \int_0^1 x^{a-3/2}dx$$

Integralen $\lim_{X\to0}\int_X^1 x^{a-3/2}dx = \lim_{X\to0}\left[\frac{x^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\right]_X^1$ *konvergerar om och endast om* $a > \frac{1}{2}$.
Det följar att integralen I_1 *konvergerar om och endast om* $a > \frac{1}{2}$.
ii) Vi visar att andra integralen, I_2, *är konvergent: Använd t.ex. uppskattningen*

$$1 + x + x^a < 3 \cdot x^{1+a}, \quad \textit{alla} \quad x \geq 1$$

dvs

$$\ln(1+x+x^a) < \ln(3\cdot x^{1+a}) = \ln 3 + (1+a)\ln x, \quad \textit{alla} \quad x \geq 1$$

Vi har då

$$I_2 < \int_1^\infty \frac{\ln 3 + (1+a)\ln x}{x^{3/2}}\, dx = \lim_{X\to\infty} \ln 3 \int_1^X \frac{1}{x^{3/2}}\, dx + \lim_{X\to\infty} (1+a) \int_1^X \frac{\ln x}{x^{3/2}}\, dx$$

Första integralen är konvergent (Sats 13.11 i boken). Andran integralen kan integreras direkt vha. partiell integration:

$$\begin{aligned}
\lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx &\overset{PI}{=} [\ln x(-2\cdot x^{-1/2})]_1^\infty - \int_1^\infty -2\cdot x^{-1/2}\cdot\frac{1}{x}\, dx \\
&= -2\left[\frac{\ln x}{x^{1/2}}\right]_1^\infty + 2\int_1^\infty x^{-3/2}\, dx \\
&= -2\cdot[0-\ln 1] + 2\cdot\left[-2x^{-1/2}\right]_1^\infty = 4,
\end{aligned}$$

dvs. att integralen är konvergent. Slutsats: Integralen $I_1 + I_2$ konvergerar för alla $a > \frac{1}{2}$.

LYCKA TILL!