

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

1. Bestäm antalet reella lösningar till ekvationen $4x \ln x + 1 = 0$. (5p)
2. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{4-x}$, där $1 \leq x \leq 3$. Beräkna volymen av den kropp som uppstår när grafen till f roteras runt x -axeln. (5p)
3. Bestäm minimum och maximum av funktionen (5p)
$$f(x, y) = xye^{x^2+y^2}$$

på det område i planet som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $y = 2 - x$.

4. (a) Byt integrationsordning i den itererade integralen (2p)
$$\int_1^7 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} f(x, y) dy \right) dx,$$
där f är en kontinuerlig funktion.

(b) Beräkna (3p)
$$\iint_D x(x^2 + y^2)^3 dx dy,$$
där D är den del av cirkeln $x^2 + y^2 \leq 4$ där $x \geq 0$.

5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen (5p)
$$y'' - 7y' + 12y = e^{3x}.$$

6. Antag att f är en fyra gånger deriverbar funktion i en omgivning av $x = 0$ och att den fjärde derivatan är kontinuerlig.
 - (a) Ange Maclaurinpolynomet av grad 3 till f samt ange den tillhörande resttermen på Lagranges eller svag form. (1p)
 - (b) Antag nu dessutom att $f(0) \neq 0$ samt $f(0)f''(0) - f'(0)^2 = 0$. Bestäm en reell konstant α (beroende på värdena av f och dess derivator i $x = 0$) sådan att gränsvärdet (4p)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x) + f'(x)}{x^2}$$

är ändligt.