

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

1. (a) Beräkna gränsvärdet (2p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + b} - n),$$

där  $a$  och  $b$  är reella konstanter.

- (b) Beräkna gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{x \ln(1 + 4x)}$ . (3p)

2. Undersök lokala och globala extremvärden, konvexitetsegenskaper och asymptoter till funktionen (5p)

$$f(x) = x^4 e^{-x},$$

samt skissa grafen.

3. En rätvinklig triangel med hypotenusan  $a$  roteras kring en av sina kateter, så att en rak cirkulär kon bildas. Bestäm längderna på kateterna så att konen får maximal volym. (Volymen av en kon är  $V = Ah/3$ , där  $A$  är bottensarealet och  $h$  höjden.) (5p)

4. Beräkna dubbelintegralen (5p)

$$\iint_D x^2 \ln(x^2 + y^2) dx dy,$$

där området  $D$  ges av  $y \geq 0$  och  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ .

5. Bestäm största värdet av  $f(x, y) = xye^{-x-y}$  då  $x, y \geq 0$  och  $x + y \leq 4$ . (5p)

6. (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen (2.5p)

$$(1 + x^2)y' + xy = x\sqrt{x^2 + 1}$$

som uppfyller  $y(0) = 1$ .

- (b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen (2.5p)

$$y'' - 4y = 8x^2 - e^x.$$