

Lösningsförslag till tentamen i Envariabelanalys 2, 2024-06-01 kl 08.00–13.00

1. (a) Då nämnaren är av grad 4 räcker det att utveckla täljaren till ordning 4. Vi får

$$\begin{aligned}\arctan x^2 &= x^2 + \mathcal{O}((x^2)^3) = x^2 + \mathcal{O}(x^6), \\ 2 \cos x &= 2 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right) = 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^6), \\ 2e^{x^4} &= 2 \left(1 + x^4 + \mathcal{O}((x^4)^2)\right) = 2 + 2x^4 + \mathcal{O}(x^8).\end{aligned}$$

Ovanstående ger

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(x^2) + 2 \cos x - 2e^{x^4}}{x^4} &= \frac{x^2 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 - (2 + 2x^4) + \mathcal{O}(x^6)}{x^4} = \\ &= \frac{(\frac{1}{12} - 2)x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4} = -\frac{23}{12} + \mathcal{O}(x^2) \rightarrow -\frac{23}{12}\end{aligned}$$

då $x \rightarrow 0$

- (b) Sätt $f(x) = \ln(1+x)$ och derivera fram Maclaurinutvecklingen med restterm på Lagranges form. Vi får

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \\ f(0) &= 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(\xi) = \frac{2}{(1+\xi)^3}.\end{aligned}$$

Maclaurins formel (Sats 8.1, sid 352) med restterm på Lagranges form (Sats 8.5, sid 369) ger då

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!(1+\xi)^3}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3(1+\xi)^3}x^3$$

för något ξ mellan 0 och x . Insättning av $x = -1/10$ ger då

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{1}{10}\right) &= \ln\frac{9}{10} = \left(-\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{3(1+\xi)^3}\left(-\frac{1}{10}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{10} - \frac{1}{200} - \frac{1}{3(1+\xi)^3}\frac{1}{1000} = -\frac{21}{200} - \frac{1}{3(1+\xi)^3}\frac{1}{1000}\end{aligned}$$

för något ξ mellan 0 och $-1/10$. Detta ger då att

$$\begin{aligned}\left|\ln\frac{9}{10} - \left(-\frac{21}{200}\right)\right| &= \left|-\frac{1}{3(1+\xi)^3}\frac{1}{1000}\right| \leq \frac{1}{3\left(1 - \frac{1}{10}\right)^3}\frac{1}{1000} = \\ &= \frac{1}{3\left(\frac{9}{10}\right)^3}\frac{1}{1000} = \frac{1}{3 \cdot 9^3} = \frac{1}{3 \cdot 81 \cdot 9} = \frac{1}{243 \cdot 9} < \frac{1}{1000},\end{aligned}$$

d.v.s. $-21/200$ approximerar $\ln(9/10)$ med ett fel vars absolutbelopp är mindre än $1/1000$

2. Vi börjar med lösningen till den homogena ekvationen $y''' - 3y' + 2y = 0$. Denna ger den karakteristiska ekvationen $P(r) = r^3 - 3r + 2 = 0$. Prövning ger $P(1) = 0$. Enligt Faktorsatsen (Sats 1.2, sid 28) är $r - 1$ en faktor. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r} r^2 + r - 2 \\ \hline r^3 + 0r^2 - 3r + 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} P(r) &= r^3 - 3r + 2 = \\ &= (r - 1)(r^2 + r - 2) = \\ &= \left[\begin{array}{l} r^2 + r - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow r = 1, -2 \end{array} \right] = \\ &= (r - 1)^2(r + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ r &= -2, 1(\text{dubbel}). \end{aligned}$$

Ovanstående ger då att $y_h = (C_0 + C_1x)e^x + C_2e^{-2x}$.

För att bestämma y_p bestämmer vi y_{p_1}, y_{p_2} så att $P(D)y_{p_1} = 2$ och $P(D)y_{p_2} = e^x$. Då ekvationen är linjär följer det att $y_{p_1} + y_{p_2} = y_p$ är en partikulärlösning till ekvationen. En snabb titt på ekvationen ger att $y_{p_1} = 1$ duger. Då e^x är en lösning till den homogena ekvationen ($C_0 = 1, C_1 = 0$) fungerar inte standardansatsen $y_p = Ce^x$. Ansätt istället $y_p = e^x \cdot z(x)$. Vi får

$$\begin{aligned} y'_p &= e^x(z + z'), \\ y''_p &= e^x(z + z' + z' + z'') = e^x(z + 2z' + z''), \\ y'''_p &= e^x(z + 2z' + z'' + z' + 2z'' + z''') = e^x(z + 3z' + 3z'' + z''') \Rightarrow \\ y''' - 3y' + 2y &= e^x(z + 3z' + 3z'' + z''' - 3(z + z') + 2z) = \\ &= e^x(z''' + 3z'') = e^x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z''' + 3z'' = 1. \end{aligned}$$

Alternativt kan man använda förskjutningsregeln. Om vi utnyttjar att vi kan skriva $P(r) = (r - 1)^2(r + 2)$ fås med samma ansats att

$$\begin{aligned} P(D)y_p &= P(D)(e^x z) = e^x P(D + 1)z = e^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(D + 1)z &= ((D + 1) - 1)^2((D + 1) + 2)z = D^2(D + 3)z = \\ &= (D^3 + 3D^2)z = z''' + 3z'' = 1. \end{aligned}$$

Om man i ovanstående ekvation sätter in ett polynom av grad $n \geq 2$ fås som resultat ett polynom av grad $n - 2$. Om vi då vill ha resultatet 1, som är ett polynom av grad 0, måste vi sätta in ett polynom av grad 2, t.e.x. $z = Ax^2 \Rightarrow z' = 2Ax$, $z'' = 2A$, $z''' = 0$ (några termer av grad 1 eller konstanter behövs ej då dessa redan finns med i y_h och ju dessutom försvinner direkt vid insättning i ekvationen) vilket ger

$$\begin{aligned} z''' + 3z'' &= 0 + 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6} \Rightarrow z = \frac{1}{6}x^2 \Rightarrow y_{p_2} = e^x z = \frac{1}{6}x^2 e^x, \\ y_p &= y_{p_1} + y_{p_2} = 1 + \frac{1}{6}x^2 e^x \end{aligned}$$

Slutligen,

$$y = y_h + y_p = \left(C_0 + C_1x + \frac{1}{6}x^2 \right) e^x + C_2 e^{-2x} + 1.$$

3. (a) För stora värden på k ser vi att

$$a_k = \frac{2k+3}{3k^3 - 2k^2} \approx \frac{2k}{3k^3} = \frac{2}{3k^2}.$$

Då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k^2} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent ($\alpha = 2 > 1$) är vår **hypotes** att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3k^3 - 2k^2}$ är konvergent. För att **bevisa** detta kan vi utnyttja Sats 10.6 (Jämförelsesats för positiva serier) och försöka hitta en konvergent positiv serie med större termer att jämföra med:

$$a_k = \frac{2k+3}{3k^3 - 2k^2} \leq \frac{2k+3k}{3k^3 - 2k^2} \leq \frac{5k}{3k^3 - 2k^3} = \frac{5k}{k^3} = \frac{5}{k^2} = b_k.$$

Då $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2}$ är konvergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3k^3 - 2k^2}$ konvergent enligt jämförelsesatsen.

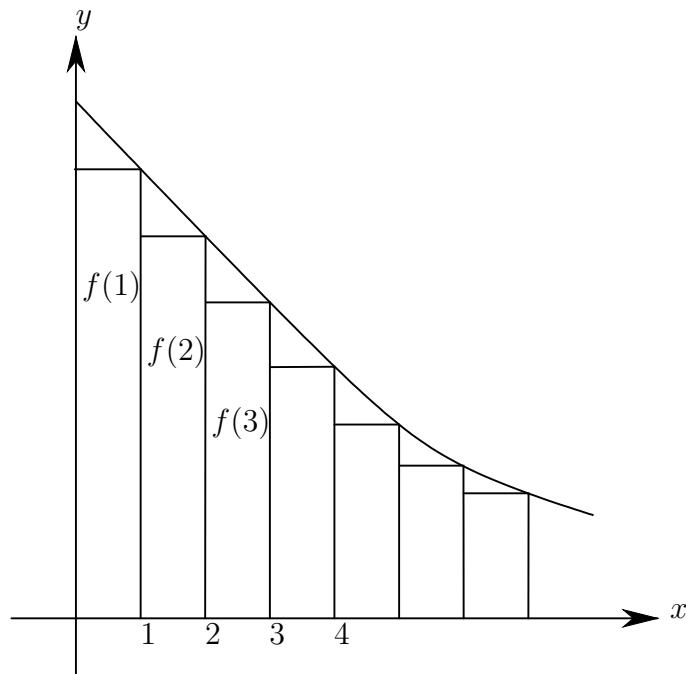
Det går utmärkt att använda jämförelse på gränsvärdesform (Sats 10.7) istället:

$$a_k = \frac{2k+3}{3k^3 - 2k^2} = \frac{k}{k^3} \frac{2 + \frac{3}{k}}{3 - \frac{2}{k}} = \frac{1}{k^2} \frac{2 + \frac{3}{k}}{3 - \frac{2}{k}}.$$

Då $c_k \rightarrow 2/3 > 0$ då $k \rightarrow \infty$ och då $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent så ger

Sats 10.7 att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3k^3 - 2k^2}$ är konvergent.

(b) Vi skall visa uppskattningen genom att uppskatta seriens summa med en integral. Låt $f(k) = \frac{1}{1+k^2}$ och betrakta nedanstående figur.



Ur denna följer omedelbart att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

så att

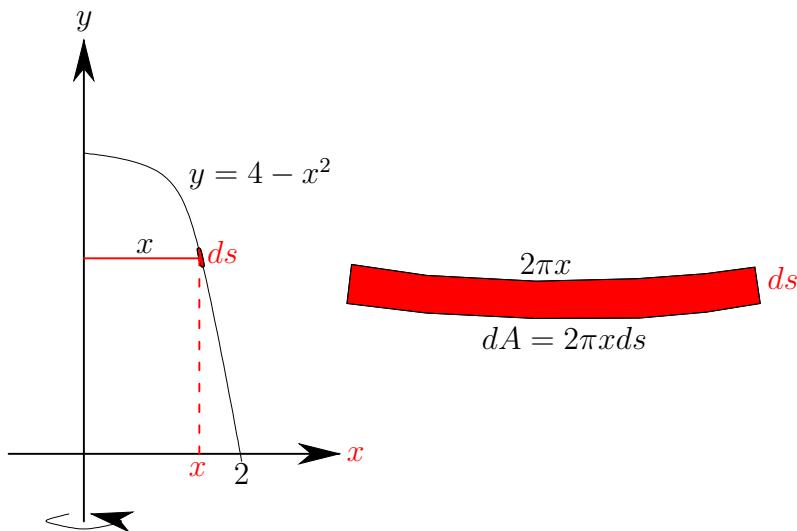
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq 1 + \frac{\pi}{2} \leq 3.$$

- (c) Integralen är endast generalisera i ∞ och då integranden växlar tecken undersöker vi om integralen är absolutkonvergent.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x+e^x} \right| dx &= \int_0^{\infty} \frac{|\cos x|}{x+e^x} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{x+e^x} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

så integralen är absolutkonvergent och därmed konvergent enligt Sats 10.14

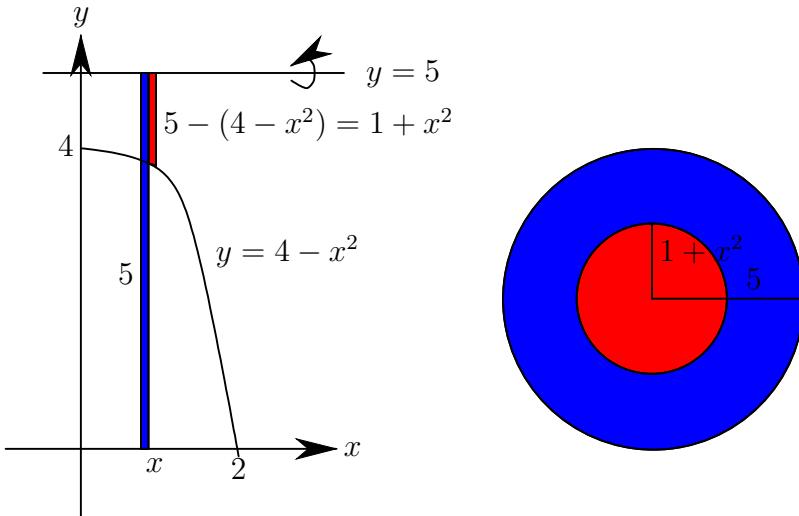
4. (a) Vi börjar med det viktigaste, FIGUREN!



Med $y = 4 - x^2$ fås ur ovanstående figur att

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1+(y')^2} dx = \sqrt{1+4x^2} dx, \quad dA = 2\pi l ds = 2\pi x \sqrt{1+4x^2} dx, \\ A &= \int dA = 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1+4x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t=1+4x^2 \\ dt=8xdx \\ xdx=dt/8 \end{array} \right] = \frac{2\pi}{8} \int_1^{17} \sqrt{t} dt = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^{17} = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

(b) Vi börjar med det viktigaste, FIGUREN!



Ur detta ser vi att

$$dV = dV_1 - dV_2 = \pi \left(5^2 - (1 + x^2)^2 \right) dx = \pi (24 - 2x^2 - x^4) dx$$

$$V = \int dV = \pi \int_0^2 (24 - 2x^2 - x^4) dx.$$

5. Antag $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ löser ekvationen och att serien är konvergent då $|x| < R$ för något $R > 0$. Då är $y(0) = c_0 = 1$ och $y'(0) = c_1 = 0$. Vidare, enligt Sats 10.16, sid 465 är serien då deriverbar och dess derivata fås genom att derivera term för term. Detta ger

$$y' = D \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) = D \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k D(x^k) = x \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1},$$

$$xy' = x \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k,$$

$$y'' = Dy' = D \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} \right) = D \left(c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k k x^{k-1} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k D(x^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} = \begin{bmatrix} m = k-2 \\ k = m+2 \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m.$$

Insättning i ekvationen ger (byt tillbaka från m till k som summationsindex i y'')

$$y'' - xy' - y = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k =$$

$$= 2c_2 - c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k k - c_k] x^k =$$

$$= 2c_2 - c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) [c_{k+2}(k+2) - c_k] x^k = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k.$$

Entydigheten hos maclaurinutvecklingar ger då att

$$2c_2 - c_0 = 0 \iff c_2 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{2},$$

$$c_{k+2}(k+2) - c_k = 0 \iff c_{k+2} = \frac{1}{k+2}c_k, \quad k \geq 1.$$

Vi fortsätter med att beräkna de efterfrågade nollskilda koefficienterna.

$$\underline{\underline{k=1}} : c_3 = \frac{1}{1+2}c_1 = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 \quad \underline{\underline{k=2}} : c_4 = \frac{1}{2+2}c_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\underline{\underline{k=3}} : c_5 = \frac{1}{3+2}c_3 = \frac{1}{5} \cdot 0 = 0 \quad \underline{\underline{k=4}} : c_6 = \frac{1}{4+2}c_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}.$$

Ur ovanstående inses att alla koefficienter med udda index, $c_{2k-1} = 0$ för $k \geq 1$ och att koefficienterna med jämnt index, $c_{2k} \neq 0$ för $k \geq 0$, dvs

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k}.$$

Då vi nu har beräknat de fyra första nollskilda koefficienterna återstår endast att beräkna seriens konvergensradie. Sätt $a_k = c_{2k}x^{2k}$ och använd kvotkriteriet (Sats 10.9 (b), sid 450). Från rekursionsformeln ovan fås då att

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{c_{2(k+1)}x^{2(k+1)}}{c_{2k}x^{2k}} \right| = \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} |x^2| = \frac{1}{2k+2}x^2 \rightarrow 0 = Q$$

då $k \rightarrow \infty$. Då $Q < 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ ger kvotkriteriet (Sats 10.9 (b), sid 450) att potensserien är absolutkonvergent för alla $x \in \mathbb{R}$ vilket då rätfärdigar vår inledande ansats.

Anmärkning: Tittar man lite noggrannare på koefficienterna ser man

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \dots = 1 + \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^3 + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k = e^{x^2/2}.$$

För att bevisa detta påstående noterar vi att med $y = e^{x^2/2}$ är $y(0) = 1$ och

$$y' = xe^{x^2/2}, \quad y'(0) = 0, \quad y'' = e^{x^2/2} (1 + x^2),$$

$$y'' - xy' - y = e^{x^2/2} (1 + x^2 - x^2 - 1) = 0$$

vilket visar att $y = e^{x^2/2}$ är lösningen till ekvationen.

6. Multiplisera upp nämnaren i högerledet och förenkla. Då fås

$$e^{-x} (1 + cx + dx^2) = 1 + ax + bx^2 + (1 + cx + dx^2) \mathcal{O}(x^5) = 1 + ax + bx^2 + \mathcal{O}(x^5).$$

Då högerledet ser ut som en Maclaurinutveckling av ordning 4 (med restterm av ordning 5) följer det att om vi kan bestämma a, b, c, d så att detta överensstämmer

med Maclaurinutecklingen av vänsterledet till ordning 4 så är problemet löst.
Bestäm Maclaurinutvecklingen av vänsterledet.

$$\begin{aligned}
e^{-x} (1 + cx + dx^2) &= \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^5)\right) (1 + cx + dx^2) = \\
&= (1 + \textcolor{brown}{c}\textcolor{brown}{x} + d\textcolor{red}{x}^2) - (\textcolor{brown}{x} + c\textcolor{red}{x}^2 + d\textcolor{blue}{x}^3) + \frac{1}{2}(\textcolor{red}{x}^2 + cx^3 + d\textcolor{green}{x}^4) - \\
&\quad - \frac{1}{6}(\textcolor{blue}{x}^3 + c\textcolor{green}{x}^4) + \frac{1}{24}\textcolor{green}{x}^4 + \mathcal{O}(x^5) = \\
&= 1 + \textcolor{brown}{x}(c - 1) + \textcolor{red}{x}^2 \left(d - c + \frac{1}{2}\right) + \textcolor{blue}{x}^3 \left(-d + \frac{1}{2}c - \frac{1}{6}\right) + \\
&\quad + \textcolor{green}{x}^4 \left(\frac{1}{2}d - \frac{1}{6}c + \frac{1}{24}\right) + \mathcal{O}(x^5) = 1 + ax + bx^2 + \mathcal{O}(x^5).
\end{aligned}$$

Entydighetssatsen för Maclaurinpolynom (Sats 8.4, sid 368) ger då att om detta skall vara möjligt så måste det gå att välja a, b, c, d så att

$$\begin{array}{lcl}
\textcolor{brown}{x} : a &=& c & - & 1 \\
\textcolor{red}{x}^2 : b &=& -c & + & d & + & \frac{1}{2} \\
\textcolor{blue}{x}^3 : 0 &=& \frac{1}{2}c & - & d & - & \frac{1}{6} \\
\textcolor{green}{x}^4 : 0 &=& -\frac{1}{6}c & + & \frac{1}{2}d & + & \frac{1}{24}
\end{array}.$$

Ur ekvationerna som fås från x^3 - och x^4 -koeffienterna bestämmer vi c och d .

$$\left\{ \begin{array}{l} c - 2d = \frac{1}{3} \\ c - 3d = \frac{1}{4} \end{array} \right. \xrightarrow{r_2 - r_1} \left\{ \begin{array}{l} c - 2d = \frac{1}{3} \\ -d = -\frac{1}{12} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{12} \end{array} \right..$$

Insatt i de resterande ekvationerna fås

$$\begin{aligned}
a &= c - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\
b &= -c + d + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

och vi har visat att

$$e^{-x} = \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2} + \mathcal{O}(x^5),$$

d.v.s. $a = -\frac{1}{2}$, $b = d = \frac{1}{12}$, $c = \frac{1}{2}$.