

*INGA HJÄLPMEDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar ska lämnas när så är möjligt.*

## Godkändtel

*För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng på denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.*

1. Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}.$$

2. a) Lös ekvationen  $z^2 + 4z + 12 = 6i$ . Svara på formen  $a + bi$ , där  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- b) Beräkna

$$\left( \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^4$$

och skriv svaret på formen  $a + bi$  med  $a, b \in \mathbb{R}$ , utan att använda sin eller cos.

3. a) Formulera analysens huvudsats.

- b) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(x) = \int_1^{x^2} \ln(1+t^2) dt.$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet  $y'' - 2y' + y = xe^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

5. Undersök om den generaliserade integralen konvergerar, och beräkna i så fall dess värde

$$\int_1^\infty \frac{3x+4}{x^3+3x^2+2x} dx.$$

6. En behållare fylls med vatten med en tidsberoende hastighet  $r_{\text{in}}(t) = t$  (liter/minut),  $t \geq 0$ . Samtidigt läcker vattnet ut med en hastighet som är proportionell mot volymen i behållaren, med proportionalitetskonstant  $k = 0.05 \text{ min}^{-1}$ .

Låt  $V(t)$  beteckna volymen (liter) vid tiden  $t$ . Inledningsvis är behållaren tom.

- a) Ställ upp en differentialekvation för  $V(t)$  inklusive begynnelsevillkor.

- b) Bestäm lösningen  $V(t)$ .

VAR GOD VÄND!

## Överbetygsdel.

*Om du klarat godkänddelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från föregående del) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.*

7. Beräkna längden av kurvan

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

8. För vilka värden på parametern  $p$  konvergerar integralen

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx?$$

Motivera noggrant. (Ledning: undersök  $\ln(1+x)$  nära  $x = 0$ .)

9. Undersök om serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n + \ln n}$$

konvergerar eller divergerar. Motivera noggrant.

*LYCKA TILL!*