LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2
2025-04-26 kl. 8.00–13.00

INGA HJÄLPMEDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar ska lämnas när så är möjligt.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng på denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. En lösning till ekvationen

$$z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 8z - 8 = 0$$

är $z = 2i$. Lös ekvationen fullständigt.

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

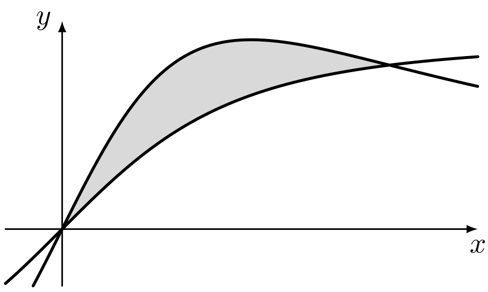
$$y'' + 2y' + y = x^2 + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

3. Visa att

$$\left|\cos(2x) - 1 + 2x^2\right| \leq \frac{2}{3}x^4$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

4. I koordinatsystemet nedan är kurvorna $y = x\big/\sqrt{1+x^2}$ och $y = 2x\big/\left(1+x^2\right)$ inritade. Beräkna arean av det skuggade området.



5. Lös begynnelsevärdesproblemen

a) $y' - 2xy = 2x^3, \quad y(0) = 1,$

b) $(x+1)y' + (x+2)y^2 = 0, \quad x > -1, \quad y(0) = 1.$

6. Bestäm det största värdet som funktionen

$$F(x) = \int_0^x \frac{2t - 8}{t^2 - 4t - 12}\, dt$$

antar då $0 \leq x \leq 5$.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från föregående del) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. Bestäm tyngdpunktens läge hos ett homogent halvklot. (Formeln för volymen av ett klot får användas utan härledning.)

8. Visa att

$$\ln x = \int_{1/x}^{x} \frac{2 \arctan t}{\pi t}\, dt$$

för alla $x > 0$.

9. **a)** Antag att f är en udda funktion vars Maclaurinpolynom $p_n(x)$ av ordning n ges av

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n.$$

Visa att $c_k = 0$ för varje jämnt tal k.

b) Låt

$$g(x) = x + x \ln\bigl(1 + x^2\bigr), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 6 till funktionen g^{-1}. (Det behöver inte visas att g är inverterbar, och inte heller att g^{-1} är tillräckligt deriverbar för att det efterfrågade polynomet ska existera.)

LYCKA TILL!