

Endimensionell analys B1 2024-04-03 Svar och anvisningar

1.

- a) a, b) $y = -2x + 4$, c) 45 grader, d) $a = 0$, e) $x = 2$, f) $x = \sqrt{2} - 1$.

2. a) Se boken!

- b) $x = -3$ eller $3 - 2\sqrt{3} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{3}$.

3. $k = 3 + \sqrt{5}$.

(Vi har $g(x) - f(x) = k - 3 + 2 \cos x - \sin x$. Skriv om summan av de sista två termerna med hjälpinkel.)

4. a) 2. (Sätt $x = 1 + h$ och använd standardgränsvärde.)

b) 1. (Förläng med konjugatkvantitet.)

c) Gränsvärde saknas om man som boken låter $x^{1/3}$ vara definierat för alla reella x . Lösningar som utgick från att $x^{1/3}$ inte är definierat för $x < 0$ vilket leder till (det ensidiga) gränsvärdet $+\infty$ accepterades också.

5. Funktionen $f(x) = x + 2 \arctan(1/x)$ är definierad för alla $x \neq 0$. I $x = 0$ har den ändliga (men olika) ensidiga gränsvärden

$$f(\pm 0) = \pm \pi$$

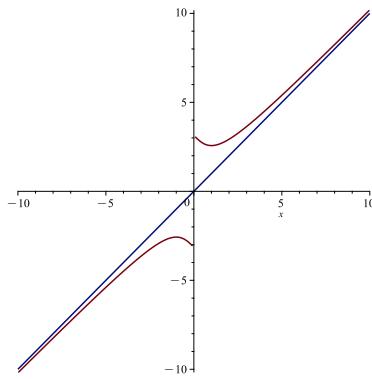
så det finns ingen lodrävt asymptot.

Linjen $y = x$ är en sned asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$. (Vi har att $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 1$ ger $k = 1$ och $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = 0$ ger $m = 0$.)

Stationära punkter fås ur $f'(x) = 0$ där

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{1+x^2}.$$

Detta ger $x = \pm 1$, och en teckentabell visar att $x = 1$ är ett lokalt minimum medan $x = -1$ är ett lokalt maximum. Graf på nästa sida.



6. Låt $(0, b)$ vara linjens skärningspunkt med y -axeln. Linjen genom $(0, b)$ och $(1, 2)$ har ekvation $y = (2 - b)x + b$. Skärningens med x -axeln blir $(a, 0)$ där $a = \frac{b}{b-2}$. Här måste det gälla $b > 2$ för att a och b skall bli positiva. Triangelns area kan ses som en funktion $A(b)$ av b . Att hitta ett $b > 2$ som minimerar $A(b)$ är detsamma som att hitta ett som minimerar $f(b) = 2A(b)$

$$f(b) = ab = \frac{b^2}{b-2} = \frac{(b^2 - 2^2) + 2^2}{b-2} = b + 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Vi får $f'(b) = 1 - \frac{4}{(b-2)^2}$. Den enda lösningen till $f'(b) = 0$ med $b > 2$ är $b = 4$. En teckentabell visar att $f(b)$ är avtagande för $2 < b < 4$ och växande för $b > 4$. Vi har alltså minimum för $b = 4$.

Svar: Linjen skall dras genom punkten $(0, 4)$ (varvid skärningen med x -axeln blir $(2, 0)$).

7. Svar: $\frac{200\pi}{3}$ km/min.

Fyren (F), punkten P och den punkt $(R(t))$ där ljusstrålen träffar stranden bildar en rätvinklig triangel. (Rita en figur.)

Låt $\theta(t)$ vara vinkelns vid F vid tiden t och t_0 vara en tidpunkt då avståndet från P till $R(t)$ är 4 kilometer. Vi har $\theta'(t) = +4 \cdot 2\pi$ eller $\theta'(t) = -4 \cdot 2\pi$ beroende på om avståndet, $d(t)$, mellan P och $R(t)$ är växande eller avtagande vid tiden $t = t_0$.

Om avståndet $d(t)$ växande då $t = t_0$ gäller $\theta(t) = \theta(t_0) + 4 \cdot 2\pi(t - t_0)$, där $\theta(t_0) = \arctan 4/3$, så längre som detta uttryck uppfyller $\theta(t) < \pi/2$, därefter träffar inte strålen stranden förrän den har snurrat ett halvt varv, varefter den träffar stranden på andra sidan P . Om istället $d(t)$ är avtagande då $t = t_0$ gäller $\theta(t) = \theta(t_0) - 4 \cdot 2\pi(t - t_0)$, där $\theta(t_0) = \arctan 4/3$, så längre som detta uttryck uppfyller $\theta(t) \geq 0$.

I båda fallen får vi $d(t) = 3 \tan \theta(t)$, med $\tan \theta(t_0) = 4/3$, för t nära t_0 . Kedjeregeln ger nu

$$d'(t_0) = 3(1 + \tan^2 \theta_0) \cdot \theta'(t_0) = \dots = \pm \frac{200\pi}{3}.$$

Vi är intresserade av farten dvs bellopet av $d'(t_0)$ så vi får en entydigt svar.

- 8.** a) Se boken. b) Studera funktionen $g(t) = \ln(1+t) - t + t^2/2$ för $t \geq 0$. Vi kan sedan sätta $t = \sqrt{x}$. Den uppfyller $g'(t) = \frac{t^2}{1+t}$. För $\xi > 0$ har vi alltså $g'(\xi) > 0$. Enligt medelvärdessatsen har vi, för $t > 0$, att

$$g(t) = g(t) - g(0) = g'(\xi)(t - 0)$$

för något $\xi \in]0, t[$. Detta visar att $g(t) > 0$ för $t > 0$.

9.

Svar: $-1/2 \leq x \leq 4$.

Ekvationen kan skrivas $(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2) = 0$. För fixt x kan vi uppfatta detta som en fjärdegradsekvation $P_x(y) = 0$ i y . Eftersom $P_x(y)$ går mot $+\infty$ då $y^2 \rightarrow +\infty$ har $P_x(y)$ ett minsta värde $m(x)$, och ekvationen har lösning bara om $m(x) \leq 0$.

Minimum antas i en punkt där $P'_x(y) = 0$ vilket visar sig ge $y = 0$ eller $y^2 = 3 - (1-x)^2$, som bara är möjligt om $(1-x)^2 \geq 3$. I det förra fallet får vi

$$P_x(0) = (x^2 - 2x)^2 - 4x^2 = (x^2 - 4x)x^2 = x^3(x - 4)$$

som vilket är icke-positiva värden för $0 \leq x \leq 4$. I det andra fallet har vi $x^2 + y^2 = 2x + 2$ som ger

$$P_x(y) = 4 - 4(2x + 2) = -4 - 8x,$$

vilket är icke-positivt då $x \geq -1/2$. Men villkoret $(1-x)^2 \geq 3$ ger $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3} \leq 4$.