

Hjälpmaterial: Inga.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels minst 9 av 18 poäng på godkäntdelen, dels att högst en uppgift bedöms med 0 poäng. Om du får 14 poäng eller mer, får du en bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella fullständiga lösningar kommer inte att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng på uppgiften, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

- Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + 8x - 10$.
- Skriv uttrycket $\sqrt{27} + \sqrt{3}$ på formen $a\sqrt{3}$, där a är ett heltal.
- Lös ekvationen $\ln(x+4) + \ln(x+1) = \ln(18)$.
- Vad är $\sin 240^\circ$? Ange det exakta värdet.
- Lös olikheten $x^2 - 6x - 27 > 0$.
- Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

2. Lös ekvationerna

$$\text{a) } \sin(2x) = \cos(5x), \quad \text{b) } \cos(2x) + \cos(x) = 0.$$

3. Knif är på semester i New York och bor på hotellet Four Seasons. Han vill ta reda på hur hög hotellbyggnaden är och lägger en liten spegel på marken, 50 meter från hotellentrén och backar så att han precis kan se toppen av byggnaden i spegeln. Knifs ögon befinner sig 180 cm över marken och han står 45 cm från spegeln. Hur högt är hotellet? (Du kan betrakta spegeln som punktformig och förutsätta att marken är plan.)

4. Beräkna gränsvärdena

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) + 2 \ln(2x)}{2 \ln(2x) + 3 \ln(3x)} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) + 2 \ln(2x)}{2 \ln(2x) + 3 \ln(3x)}.$$

5. Definiera vad som menas med att funktionen f är kontinuerlig, respektive deriverbar i punkten $x = a$. För vilka värden på talen C och D är funktionen

$$g(x) = \begin{cases} Cx, & \text{då } x > 1 \\ x^2 + D, & \text{då } x \leq 1 \end{cases}$$

kontinuerlig i $x = 1$? För vilka värden är den deriverbar i $x = 1$?

6. Bestäm den punkt på kurvan $y = \sqrt{x}$ som ligger närmast punkten $(5, 0)$.

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans på överbetyg. För betyget 4 krävs minst 3 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från grunddelen) på denna del. För betyget 5 krävs minst 6 poäng.

7. Skissa grafen till funktionen $f(x) = |x^2 - 2|e^{-x/2}$. Ange speciellt alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

8. För vilka värden på (det reella) talet a gäller att

$$1 + 2a \ln x \leq x^2$$

för alla $x > 0$?

9. Polynomet $p(x)$ har grad 2023 och uppfyller att

$$p(n) = \frac{1}{n}$$

för alla heltalet $n = 1, 2, \dots, 2024$. Beräkna $p(2025)$. *Ledning:* studera polynomet $q(x) = xp(x)$.