

INGA HJÄLPMEDDEL. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar ska lämnas när så är möjligt.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga. Den som har minst 14 poäng på denna del får 1 bonuspoäng till överbetygsdelen.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas.
0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

 - a) För vilka vinklar v , med $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$, gäller det att $\sin v = \frac{1}{2}$?
 - b) En cirkel med radie 1 har medelpunkten i skärningspunkten av de två linjer som ges av $y = x$ och $y = -x + 1$. Ange cirkelns ekvation.
 - c) Bestäm talet a sådant att $x - 1$ blir en faktor till polynomet $x^3 - 2x^2 - x - a$, och faktorisera, för detta värde på a , polynomet i två faktorer.
 - d) Lös olikheten $\frac{x^2 - 1}{2 - x} < 0$.
 - e) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x}{x} (x^{-1} + \sin^2 x)$.
 - f) Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = \ln(\tan^2 x)$.
2. Beräkna nedanstående gränsvärdena:

 - a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{x + \sin 2x}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3(x) - 1}{\cos^2(x) - 1}$
3. Lös ekvationerna

 - a) $|x - 2| + 2|x - 1| = 5$.
 - b) $\ln(6 - x) - 2 \ln x = 0$.
4. a) Härled derivatan av funktionen $f(x) = \arctan(x)$ genom att använda derivata av invers funktion.

b) Ange den största möjliga definitionsmängden D_f för funktionen $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ samt beräkna derivatan $f'(x)$ för alla x i D_f .
5. Skissa grafen till $f(x) = \frac{x+1}{x^2} e^x$. Ange alla stationära punkter och asymptoter.
6. En cylindrisk burk med botten och lock ska tillverkas, och i locket ska det finnas ett cirkulärt hål med halva burkens radie. Vilken radie ska burken ha om man vill maximera burkens volym och materialets area ska vara $A = 42\pi$.



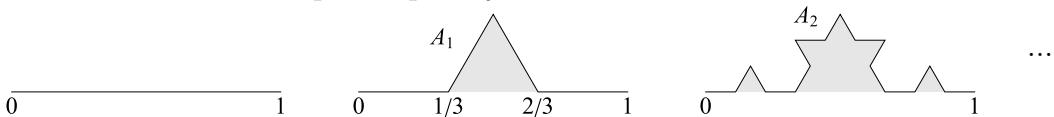
VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs att poängen på denna del (plus eventuell bonus från föregående del) är minst 3. För betyg 5 krävs minst 6 poäng.

7. Betrakta den hyperboliska ekvationen $y^2 - x^2 = 1$ och ekvationen för den räta linjen $y = ax + 1$ med värden $a \in \mathbb{R}$. Beräkna, för varje värde på a , alla skärningspunkter mellan dessa två kurvor. Bestäm och motivera sedan alla möjliga implikationer mellan följande påståenden:

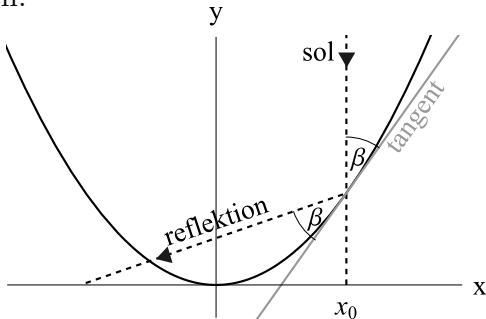
8. Konstruera en kurva i planet på följande sätt.



Börja med en rak horisontell linje med längden 1 ($k = 0$). I det första steget ($k = 1$), dela linjen i tre lika delar och förläng mittdelen som en liksidig triangel där basen är borttagen, som visas i figuren. I varje efterföljande steg, tillämpa denna operation på varje rakt linjesegment, som t.ex. visas för steg $k = 2$ med arean A_2 (skuggad). Visa att arean A_k under kurvan som bildas är konvergent när k går mot oändligheten, och beräkna dess exakta värde.

Ledtråd: För att beräkna A_k , beräkna arean av de nya mindre trianglarna samt deras antal.

9. En ingenjör vill bygga en solfångare för att producera elektrisk energi med hjälp av en paraboliskt spegel i form av kurvan $y = x^2$. (Vi tänker oss ett tvådimensionellt tvärsnitt genom spegelns symmetriaxel.) Solen är rakt ovanför och oändligt långt borta, d.v.s. solstrålarna faller vertikalt in i spegeln. Spegellagen säger att den infallande strålen med position $x = x_0$ reflekteras så att vinkeln β mellan den infallande strålen och tangenten är samma som vinkeln mellan den reflekterade strålen och tangenten, som illustrerad i figuren.



- a) Visa att den reflekterade strålens lutning är $x_0 - \frac{1}{4x_0}$.
 Ledtråd: För att beräkna lutningen observera exempelvis att $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

b) Visa att alla reflekterade strålar från infallande strålar med position $x_0 \in \mathbb{R}$ måste skära varandra i $(x, y) = (0, \frac{1}{4})$. (Således är detta det bästa läget att placera energiomvandlaren i.)

LYCKA TILL!