

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

1. (a) Beräkna gränsvärdet

(3p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt{n}) (\sqrt{n+b} + \sqrt{n}),$$

där a, b är reella konstanter.

- (b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$.

(2p)

2. Bestäm inversen till funktionen

(5p)

$$f(x) = 1 + \frac{x}{x+1}.$$

Ange speciellt inversens definitions- och värdemängder.

3. (a) Bestäm $\int xe^{7x} dx$.

(2p)

- (b) Beräkna integralen $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$.

(3p)

- (c) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ är divergent eller konvergent och bestäm i så fall dess värde.

4. Undersök lokala och globala extremvärden, asymptoter samt konvexitetsegenskaper till funktionen

$$f(x) = 2 \arctan(|x|) - x,$$

samt skissa grafen.

5. (a) Avgör, med noggrann motivering, om det går att hitta ett tal $a \in \mathbb{R}$ så att

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{om } x \neq 0, \\ a & \text{om } x = 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

- (b) Låt $f(x)$ vara en jämn funktion som är definierad och deriverbar på hela \mathbb{R} . Visa, utifrån derivatans definition, att $f'(x)$ är en udda funktion.