LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2023-04-12 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. *Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.*

a) För vilka vinklar, med $0° \leq v \leq 360°$, gäller det att $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

b) Lös ekvationen $x^3 - 2x^2 = 3x$.

c) Låt l vara linjen som går genom punkterna $(x_1, y_1) = (1, 4)$ och $(x_2, y_2) = (-1, 2)$. Ange linjens ekvation på formen $y = kx + m$.

d) Lös olikheten $\dfrac{x+1}{3-x} < 0$.

e) Lös ekvationen $\ln(x+2) = \ln 3 - \ln x$.

f) Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, $x > 0$.

Svar.

a) $v = 30°$ *eller* $330°$

b) $x \in \{0, -1, 3\}$.

c) Insättning av punkterna i linjens ekvation ger $4 = k + m$ *och* $2 = -k + m$. *Lösningen är* $k = 1, m = 3$ *d.v.s.* $y = kx + m = x + 3$.

d) Alla $x \in \mathbb{R}$ *sådana att* $x < -1$ *eller* $x > 3$.

e) $\ln(x+2) = \ln 3 - \ln x \Leftrightarrow e^{\ln(x+2)} = e^{\ln \frac{3}{x}} \Leftrightarrow x(x+2) = 3$ *om* $(x > 0) \Leftrightarrow x = 1$. *(Roten* $x = -3$ *är ej definierad för* $\ln x$.*)*

f) $f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$

2. Beräkna nedanstående gränsvärden:

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\ln(x-1)^2}{x^2 - 4}$ b) $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k$

Svar. *a)*

$$\frac{\ln(x-1)^2}{x^2-4} = \frac{2\ln(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \begin{bmatrix} x-1 = 1+t & \Leftrightarrow & x-2 = t & \Leftrightarrow & x+2 = t+4 \\ x \to 2 & \Leftrightarrow & t \to 0 & & \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{t+4} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \to 0} 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

b)

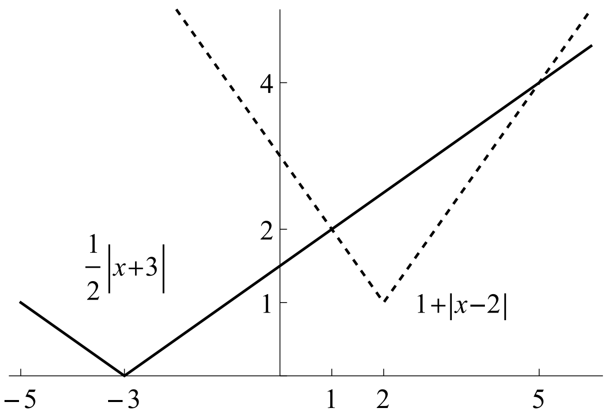
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{3}{5})^n-1}{3/5-1} - 1 = \frac{1}{1-3/5} - 1\\
&= 5/2 - 1 = 3/2.
\end{aligned}$$

3. Lös ekvationerna

a) $|x+3| - 2|x-2| = 2$ b) $(1-\cos x)(1+\cos x) = \sin(2x)$

Svar.

a) Vi har $|x+3|-2|x-2| = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x+3| = 1+|x-2|$. *Vi ritar graferna till VL och HL:*



Genomskärningspunkterna ges vid

$$\frac{1}{2}(x+3) = 1-(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad 3/2x = 3-3/2 = 3/2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$
$$\frac{1}{2}(x+3) = 1+x-2 \quad \Leftrightarrow \quad -x/2 = -1-3/2 = -5/2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

Alternativ: algebraisk lösning.

b)

$$(1-\cos^2 x) = \sin(2x)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\sin^2 x = 2\cos x \sin x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\sin x = 0 \ \textit{eller} \ \sin x = 2\cos x$$

Den första ekvationen ger $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. *Den andran ekvationen ger* $\tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + 2\pi k$ *eller* $x = -\pi + \arctan 2 + 2\pi k = \arctan 2 + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Slutsats: vi får

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
$$x = \arctan 2 + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

4. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$$

Ange speciellt alla asymptoter och lokala extrempunkter.

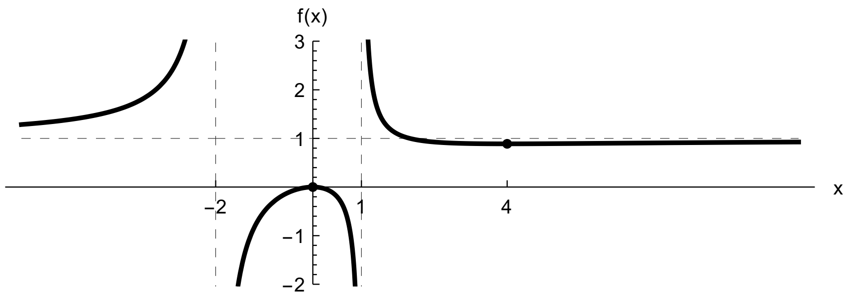
Svar.
Vi faktoriserar nämnaren:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}.$$

Vertikala asymptoter i $x = 1$ *och* $x = -2$.
Horisantala/sneda asymptoter $y = kx + m$*:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = 1$$

Det finns endast en horisantal asymptot: $y = 1$.
Lokala extrempunkter:



$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + x - 2} - \frac{x^2(2x+1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{(x-4)x}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$f'(x) = 0$ *ger extrempunkter i* $x = 0$ *och* $x = 4$*, med funktionsvärdena* $f(0) = 0$ *och* $f(4) = 8/9$.

x		-2		0		1		4	
$f'(x)$	+	$\wr$	+	0	-	$\wr$	-	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\wr$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	8/9	$\nearrow$

5. Härled derivatan av funktionen $y = \arctan(x)$, d.v.s. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Svar.
Detta är fråga 100 på instuderingsfrågorna för B1 och visas med hjälp av instuderingsfråga 96b. Betrakt $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$. Derivering i y på båda och kädjeregeln ger

$$\frac{d}{dy}y = 1 = \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dy}f^{-1}(y)$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}f(x)} = \left.\frac{1}{\frac{d}{dx}f(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}, \qquad \textit{då} \quad \frac{d}{dx}f(x) \neq 0$$

Använd på arctan*:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\arctan(y) &= \left.\frac{1}{\frac{d}{dx}\tan(x)}\right|_{x=\arctan(y)} \\ &= \cos^2(x)\Big|_{x=\arctan(y)} \\ &= \frac{1}{1+y^2}\end{aligned}$$

$\arctan x$ *och* $\frac{d}{dx}\arctan x$ *är definierad för* $x \in \mathbb{R}$, *och f.*

6. Rita en ellips i xy-planet med medelpunkt i $(x, y) = (1, -1)$ och x-halvaxel 2 och y-halvaxel 3. Skriv ner ekvationen som beskrivar denna ellips i xy-planet.

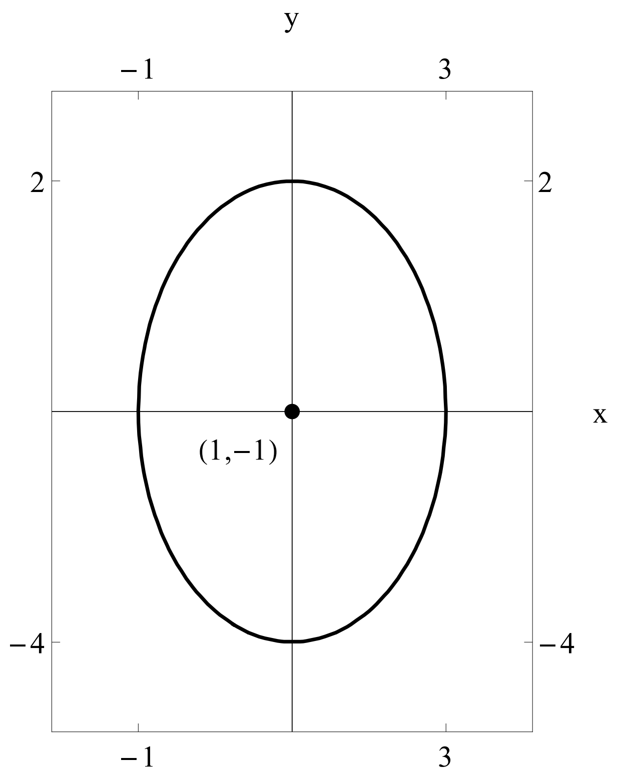
Svar. Ellipsen har medelpunktet $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Halvaxlerna är $a = 2$ och $b = 3$. Insättning i ellipsens standardform

$$1 = \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2$$

ger

$$1 = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{3}\right)^2$$

VAR GOD VÄND!



Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $f(x) = \dfrac{1}{\sin(1/x)}$.

Svar. *Funktionen* $f(x)$ *är sammansatt av två funktioner,* $g(x) = 1/\sin x$ *och* $h(x) = 1/x$*, d.v.s. att* $f(x) = g(h(x))$.

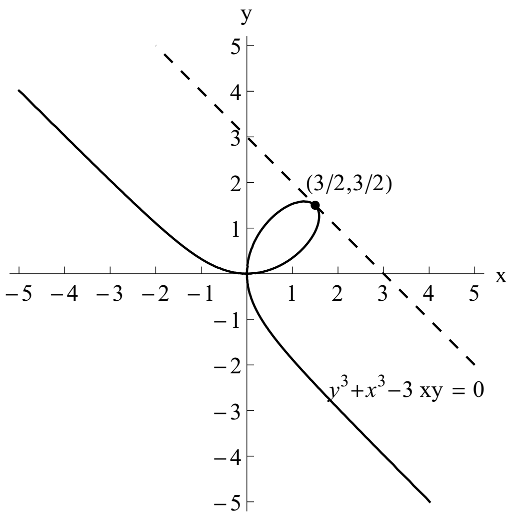
Delfunktionen $h(x)$ *är ej definierad om* $x = 0$*. Delfunktionen* $g(x)$ *är ej definierad om* $\sin(1/x) = 0$*, vilket är fallet om* $x = 1/(\pi k)$ *då* $k \in \mathbb{Z}$*. D.v.s. att definitionsmängden är* $D_f = D_g \cap D_h = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{1}{k\pi}$ *och* $x \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Om vi bara ser på delfunktionen $g(x)$*, så har den värdemängden* $V_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1$ *eller* $x \leq -1\}$*. Värdesmängden är den samma för* f*:* $V_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1$ *eller* $x \leq -1\}$.

8. Bestäm tangentlinjens ekvation för kurvan $y^3 + x^3 - 3xy = 0$ i punkten $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, som illustreras i figuren (Denna kurva är känd som Descartes folium (eller blad).). Använd att variabeln y kan ses som beroende av x, dvs $y = y(x)$ för punkter (x, y) nära $(3/2, 3/2)$ på kurvan.

Svar. *Antag formen* $y = kx + m$ *för tangentlinjens ekvation.*
Vi bestämmar lutningen k *vid att hitta derivatan* dy/dx*:*

$$\frac{d}{dx}(y^3 + x^3 - 3xy) = \frac{d}{dx}(0) \Leftrightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 - (3y + \frac{dy}{dx}3x) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$$



Insättning av koordinaterna $(x, y) = (3/2, 3/2)$ i uttrycket för derivatan ger lutningen av tangentkurvan:

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}\right|_{(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)} = -1 = k.$$

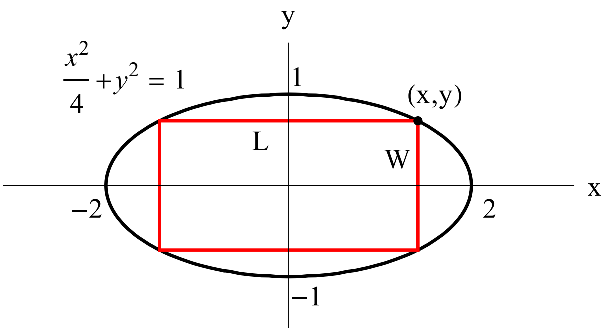
Tangentlinjans ekvation ger därför $m = y + x$. Vi vetar att linjen går igenom koordinaterna $(x, y) = (3/2, 3/2)$. Insättning ger $m = 3/2 + 3/2 = 2$. Slutsats: $y = -x + 3$.

9. En rektangel ska inskrivas i ellipsen som ges av

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Vilka mått har en rektangel som maximerar dess area?
Vad är den maximala arean av en inskriven rektangel?

Svar.



Steg 1) För att en rektangel ska skrivas in i ellipsen måste rektangelns sidor vara parallella med axlarna. Låt L vara längden på rektangeln och W dess bredd. Låt A vara rektangelns area. Det ges av $A = L \cdot W$. Problemet är att maximera A.

Steg 2) Låt (x, y) vara hörnet av rektangeln som ligger i den första kvadranten, som visas i figuren. Vi kan skriva längden $L = 2x$ och bredden $W = 2y$. Eftersom $x^2/4+y^2 = 1$ och $y > 0$ har vi $y = \sqrt{1 - x^2/4}$. Därför är området

$$A(x) = L \cdot W = (2x) \cdot (2y) = 4x\sqrt{1 - x^2/4} = 2x\sqrt{4 - x^2}.$$

Steg 3) Inspektion av ellipsekvationen visar att x-halvaxeln är $a = 2$. x-koordinaten för hörnet i den första kvadranten måste därför uppfylla $0 < x < 2$ så att problemet reduceras till att leta efter maxvärdet på $A(x)$ över det öppna intervallet $(0, 2)$. Eftersom $A(x)$ kommer att ha ett absolut maximum (och absolut minimum) över det stängda intervallet $[0, 2]$, betraktar vi $A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$ över intervall $[0, 2]$. Om det absoluta maximum inträffar vid en inre punkt, så har vi hittat ett absolut maximum i det öppna intervallet.

Steg 4) Som nämnts tidigare är $A(x)$ en kontinuerlig funktion över det kompakta intervallet [0,2]. Därför har den ett absolut maximum (och absolut minimum). Vid slutpunkterna $x = 0$ och $x = 2$ gäller $A(x) = 0$. För $0 < x < 2$ gäller $A(x) > 0$. Därför måste det maximala antas vid en stationär punkt. Om vi tar derivatan av $A(x)$ får vi

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\sqrt{4 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}(-2x) \\ &= 2\sqrt{4 - x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{4 - x^2}} \\ &= \frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}}. \end{aligned}$$

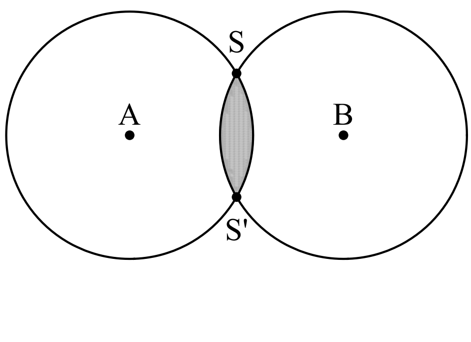
För att hitta stationära punkter måste vi hitta var $A'(x) = 0$. Således definierar $x = \pm\sqrt{2}$ möjliga lösningar för detta villkår. Eftersom vi betraktar x över intervallet $[0, 2]$ är $x = \sqrt{2}$ en möjlighet för en stationär punkt, men $x = -\sqrt{2}$ är det inte. Vi drar slutsatsen att $x = \sqrt{2}$ är den enda stationära punkten för $A(x)$ i intervallet [0,2]. Därför måste $A(x)$ ha ett absolut maximum vid den stationära punkten $x = \sqrt{2}$.

För att bestämma måtten på rektangeln måste vi hitta längden L och bredden W. Om $x = \sqrt{2}$, då

$$y = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{2})^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Slutligen är rektangelns mått $L = 2x = 2\sqrt{2}$ och $W = 2y = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Arean av denna rektangel är $A = L \cdot W = (2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) = 4$.

10. Beräkna arean av snittet (d.v.s. det skuggade området) mellan de två cirkelskivorna



som visas i figuren. Avståndet mellan cirklarnas mittpunkter A och B är $|AB| = 2$, avstånden från mittpunkterna A och B till skärningspunkterna S och S' är $|AS| = |AS'| = |BS| = |BS'| = 2/\sqrt{3}$.

Svar.

Linsens area, A, kan beräknas genom att dela den längs linjen SS'. De två cirklarna är lika stora: Genom symmetri är de två halvorna lika så att vi har $A = 2A_h$. Uppgiften är alltså att beräkna arean A_h för halva linsen.

För kortare notation, låt $d = |AB| = 2$ och $r = |SA| = |SA'| = |SB| = |SB'| = 2/\sqrt{3}$. En halv linsregion konstrueras genom att förbinda raka linjer mellan AS och AS'. Hälften av linsarean ges då av $A_h = A_s - A_l$, där $A_s = r^2 \cdot \Phi = r \cdot \arccos \frac{d/2}{r}$ är sektorn area och $A_t = \frac{1}{2}dh$ där $h = |SS'|/2$. Vi hittar höjden med Pythagoras sats, $h = \sqrt{r^2 - (d/2)^2}$. Således får vi att

$$
\begin{aligned}
A_h &= A_s - A_l \\
&= r^2 \cdot \arccos\left(\frac{d/2}{r}\right) - \frac{d}{2}\sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 \cdot \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

För det slutliga resultatet får vi $A = 2A_h = \dfrac{4\pi}{9} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

LYCKA TILL!