

## Endimensionell analys B1 2024-04-03 Svar och anvisningar

1.

a)  $a$ , b)  $y = -2x + 4$ , c) 45 grader, d)  $a = 0$ , e)  $x = 2$ , f)  $x = \sqrt{2} - 1$ .

2. a) Se boken!

b)  $x = -3$  eller  $3 - 2\sqrt{3} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{3}$ .

3.  $k = 3 + \sqrt{5}$ .

(Vi har  $g(x) - f(x) = k - 3 + 2 \cos x - \sin x$ . Skriv om summan av de sista två termerna med hjälpvinkel.)

4. a) 2. (Sätt  $x = 1 + h$  och använd standardgränsvärde.)

b) 1. (Förläng med konjugatkvantitet.)

c) Gränsvärde saknas om man som boken låter  $x^{1/3}$  vara definierat för alla reella  $x$ . Lösningar som utgick från att  $x^{1/3}$  inte är definierat för  $x < 0$  vilket leder till (det ensidiga) gränsvärdet  $+\infty$  accepterades också.

5. Funktionen  $f(x) = x + 2 \arctan(1/x)$  är definierad för alla  $x \neq 0$ . I  $x = 0$  har den ändliga (men olika) ensidiga gränsvärden

$$f(\pm 0) = \pm \pi$$

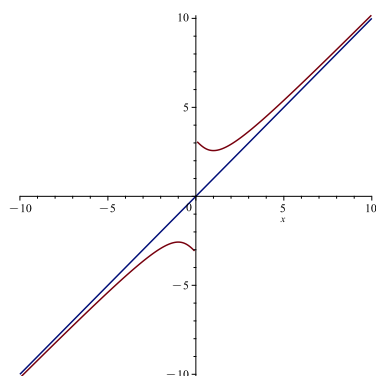
så det finns ingen lodrät asymptot.

Linjen  $y = x$  är en sned asymptot då  $x \rightarrow \pm\infty$ . (Vi har att  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 1$  ger  $k = 1$  och  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = 0$  ger  $m = 0$ .)

Stationära punkter fås ur  $f'(x) = 0$  där

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{1+x^2}.$$

Detta ger  $x = \pm 1$ , och en teckentabell visar att  $x = 1$  är ett lokalt minimum medan  $x = -1$  är ett lokalt maximum. Graf på nästa sida.



6. Låt  $(0, b)$  vara linjens skärningspunkt med  $y$ -axeln. Linjen genom  $(0, b)$  och  $(1, 2)$  har ekvation  $y = (2 - b)x + b$ . Skärningens med  $x$ -axeln blir  $(a, 0)$  där  $a = \frac{b}{b-2}$ . Här måste det gälla  $b > 2$  för att  $a$  och  $b$  skall bli positiva. Triangelns area kan ses som en funktion  $A(b)$  av  $b$ . Att hitta ett  $b > 2$  som minimerar  $A(b)$  är detsamma som att hitta ett  $b$  som minimerar  $f(b) = 2A(b)$

$$f(b) = ab = \frac{b^2}{b-2} = \frac{(b^2 - 2^2) + 2^2}{b-2} = b + 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Vi får  $f'(b) = 1 - \frac{4}{(b-2)^2}$ . Den enda lösningen till  $f'(b) = 0$  med  $b > 2$  är  $b = 4$ . En teckentabell visar att  $f(b)$  är avtagande för  $2 < b < 4$  och växande för  $b > 4$ . Vi har alltså minimum för  $b = 4$ .

Svar: Linjen skall dras genom punkten  $(0, 4)$  (varvid skärningen med  $x$ -axeln blir  $(2, 0)$ ).

7. Svar:  $\frac{200\pi}{3}$  km/min.

Fyren (F), punkten P och den punkt (R(t)) där ljusstrålen träffar stranden bildar en rättvinklig triangel. (Rita en figur.)

Låt  $\theta(t)$  vara vinkeln vid F vid tiden  $t$  och  $t_0$  vara en tidpunkt då avståndet från P till R(t) är 4 kilometer. Vi har  $\theta'(t) = +4 \cdot 2\pi$  eller  $\theta'(t) = -4 \cdot 2\pi$  beroende på om avståndet,  $d(t)$ , mellan P och R(t) är växande eller avtagande vid tiden  $t = t_0$ .

Om avståndet  $d(t)$  växande då  $t = t_0$  gäller  $\theta(t) = \theta(t_0) + 4 \cdot 2\pi(t - t_0)$ , där  $\theta(t_0) = \arctan 4/3$ , så länge som detta uttryck uppfyller  $\theta(t) < \pi/2$ , därefter träffar inte strålen stranden förrän den har snurrat ett halvt varv, varefter den träffar stranden på andra sidan P. Om istället  $d(t)$  är avtagande då  $t = t_0$  gäller  $\theta(t) = \theta(t_0) - 4 \cdot 2\pi(t - t_0)$ , där  $\theta(t_0) = \arctan 4/3$ , så länge som detta uttryck uppfyller  $\theta(t) \geq 0$ .

I båda fallen får vi  $d(t) = 3 \tan \theta(t)$ , med  $\tan \theta(t_0) = 4/3$ , för  $t$  nära  $t_0$ . Kedjeregeln ger nu

$$d'(t_0) = 3(1 + \tan^2 \theta_0) \cdot \theta'(t_0) = \dots = \pm \frac{200\pi}{3}.$$

Vi är intresserade av farten dvs beloppet av  $d'(t_0)$  så vi får en entydigt svar.

8. a) Se boken. b) Studera funktionen  $g(t) = \ln(1+t) - t + t^2/2$  för  $t \geq 0$ . Vi kan sedan sätta  $t = \sqrt{x}$ . Den uppfyller  $g'(t) = \frac{t^2}{1+t}$ . För  $\xi > 0$  har vi alltså  $g'(\xi) > 0$ . Enligt medelvärdessatsen har vi, för  $t > 0$ , att

$$g(t) = g(t) - g(0) = g'(\xi)(t - 0)$$

för något  $\xi \in ]0, t[$ . Detta visar att  $g(t) > 0$  för  $t > 0$ .

9.

Svar:  $-1/2 \leq x \leq 4$ .

Ekvationen kan skrivas  $(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2) = 0$ . För fixt  $x$  kan vi uppfatta detta som en fjärdegradsekvation  $P_x(y) = 0$  i  $y$ . Eftersom  $P_x(y)$  går mot  $+\infty$  då  $y^2 \rightarrow +\infty$  har  $P_x(y)$  ett minsta värde  $m(x)$ , och ekvationen har lösning bara om  $m(x) \leq 0$ .

Minimum antas i en punkt där  $P'_x(y) = 0$  vilket visar sig ge  $y = 0$  eller  $y^2 = 3 - (1 - x)^2$ , som bara är möjligt om  $(1 - x)^2 \geq 3$ . I det förra fallet får vi

$$P_x(0) = (x^2 - 2x)^2 - 4x^2 = (x^2 - 4x)x^2 = x^3(x - 4)$$

som vilket är icke-positiva värden för  $0 \leq x \leq 4$ . I det andra fallet har vi  $x^2 + y^2 = 2x + 2$  som ger

$$P_x(y) = 4 - 4(2x + 2) = -4 - 8x,$$

vilket är icke-positivt då  $x \geq -1/2$ . Men villkoret  $(1 - x)^2 \geq 3$  ger  $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3} \leq 4$ .