

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

I. Godkäntdel. För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Bestäm nollställena z_1 och z_2 till polynomet $p(z) = z^2 + 2z + 4iz - 3 + 2i$. Rita sedan i det komplexa talplanet mängden av alla z som uppfyller olikheten

$$|z + z_1 + z_2| \leq 1.$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemen

a) $y' + \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot y = 0, \quad y(0) = 1,$

b) $y' = y^2 \cdot \cos^2 x, \quad y(0) = 4.$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2y' + 5y = 5x^2 - x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

4. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då ytan mellan x -axeln och kurvan

$$y = x\sqrt{\arctan x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

roterar kring x -axeln.

5. Använd Maclaurinutveckling för att:

a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2) - \cos x + 1}{x^2}.$

b) Visa att $|\ln(1 + x^2) - x^2| \leq \frac{x^4}{2}$ för alla x .

6. Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen

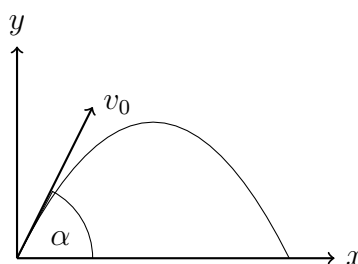
$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

Avgör även om den generaliserade integralen $\int_0^1 f(x) dx$ är konvergent.

VAR GOD VÄND!

II. Överbetygsdel. Om du klarat godkänddelen så kan du få överbetyg genom att lösa nedanstående problem. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Låt K vara den rotations kropp som uppstår då ytan mellan y -axeln och kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring y -axeln. Beräkna masscentrum av K om densiteten beror endast av y enligt $\rho(y) = e^y$.
8. Då ett objekt vid tiden $t = 0$ kastas iväg från marken med hastighet v_0 och vinkel α så kommer det, om luftmotståndet försummas, följa kurvan (kastparabeln)

$$\begin{cases} x(t) &= v_0 t \cos \alpha \\ y(t) &= v_0 t \sin \alpha - gt^2/2, \end{cases}$$


där g är tyngdaccelerationen. Sätt $g = 10$, $v_0 = 10$ och $\alpha = \pi/6$ och beräkna längden av kastparabeln från $t = 0$ till det t -värde där objektet träffar marken.

9. Ett glas i form av rotationsytan som bildas då $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, roterar kring y -axeln står på ett bord i en trädgård. När vädret är regnigt och kallt (så att avdunstning kan försummas) fylls tomt glas helt upp på ett dygn. När vädret är torrt och varmt tar det två dygn för fullt glas att helt torka ut. Hur lång tid tar det för tomt glas att fyllas upp till hälften av sin höjd om det är regnigt och varmt? Man kan utgå från att det alltid regnar lika intensivt samt att avdunstningen är proportionell mot arean av vattenytan (med samma proportionalitetskonstant oavsett fuktighet).
10. Bestäm alla värden på $a \geq 0$ för vilka den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x+x^a)}{x\sqrt{x}} dx$$

är konvergent.

LYCKA TILL!