

Inga hjälpmmedel tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. 15 poäng (inklusive bonus) ger säkert godkänt.

1. Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(\arctan x)^2} - \frac{1}{x^2} \right).$$

2 p

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \sin n}{\ln n^2 + \sin n^2}.$$

2 p

2. Betrakta funktionen $f(x) = x + 2 \arctan \frac{1}{x}$. Undersök definitions- och värdemängd, extrempunkter, konvexitetsegenskaper och asymptoter, samt skissa grafen. 5 p
3. För vilka värden på det reella talet a har ekvationen

$$x + 2 \sin x = a$$

precis två reella lösningar?

5 p

4. Låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion med kontinuerliga partiella derivator i hela \mathbb{R}^2 . Antag vidare att $f(t, 2t) = 3 \sin t$ och $f(2s, s) = 2s$ för alla $s, t \in \mathbb{R}$. Bestäm f :s tangentplan i origo. 5 p
5. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy,$$

där D är området $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}$.

5 p

6. a) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemets

$$y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad y(0) = 1.$$

3 p

- b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + x - 1.$$

3 p