

Konvolusi dan Korelasi

Bima Sena Bayu Dewantara

Konvolusi

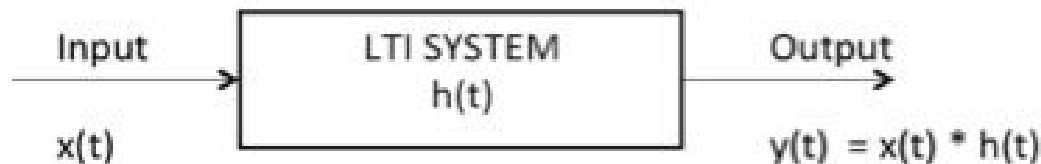
- Konvolusi : operasi matematika yang digunakan untuk menyatakan hubungan antara masukan, respon impulse, dan keluaran sebuah sistem LTI.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Dimana : $x(t) \rightarrow$ masukan sistem
 $y(t) \rightarrow$ keluaran sistem
 $h(t) \rightarrow$ respon impulse

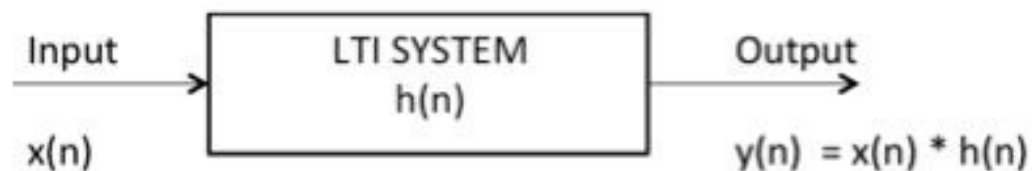
Konvolusi

- Tipe-tipe konvolusi
 - Kontinyu



$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\&\text{(or)} \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau\end{aligned}$$

- Diskrit



$$\begin{aligned}y(n) &= x(n) * h(n) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k) \\&\text{(or)} \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - k)h(k)\end{aligned}$$

Konvolusi

- Properti / sifat :

- Komutatif $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

- Distributif $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] + [x_1(t) * x_3(t)]$

- Asosiatif $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$

- Shifting / pergeseran $x_1(t) * x_2(t) = y(t)$

$$x_1(t) * x_2(t - t_0) = y(t - t_0)$$

- Scaling / skala

$$x_1(t - t_0) * x_2(t) = y(t - t_0)$$

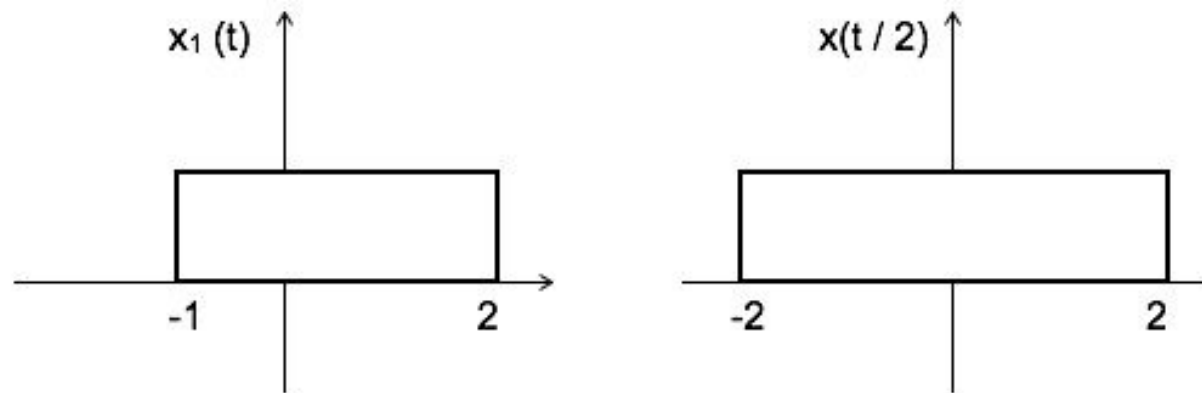
$$\text{If } x(t) * h(t) = y(t)$$

$$\text{then } x(at) * h(at) = \frac{1}{|a|} y(at)$$

$$x_1(t - t_0) * x_2(t - t_1) = y(t - t_0 - t_1)$$

Konvolusi

- Batasan sinyal konvolusi



Sum of lower limits $< t <$ sum of upper limits

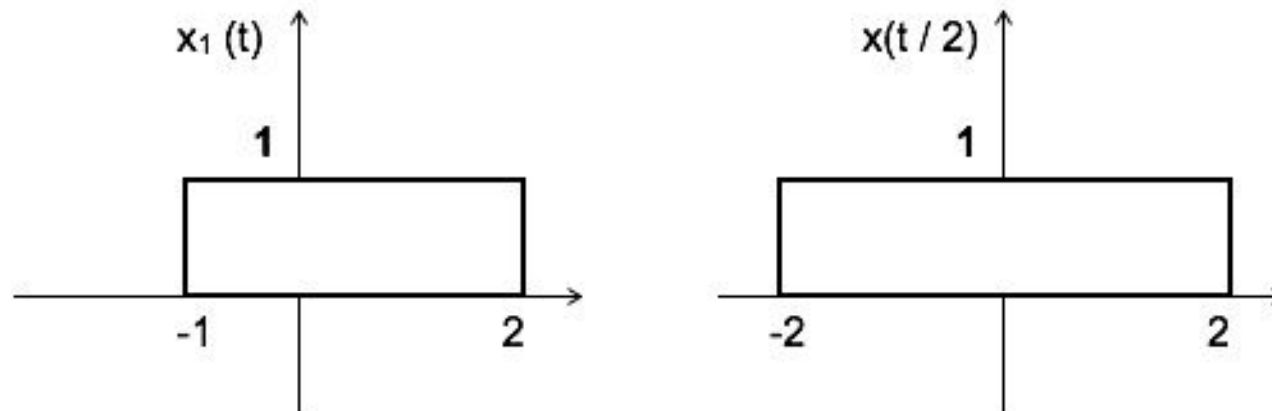
$$-1 + -2 < t < 2 + 2$$

$$-3 < t < 4$$

Konvolusi

- Komponen DC

$$\text{DC component} = \frac{\text{area of the signal}}{\text{period of the signal}}$$



$$\text{Area } x_1(t) = 1 \times 3 = 3$$

$$\text{Area } x_2(t) = 1 \times 4 = 4$$

$$\text{Area sinyal konvolusi } y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

Period / durasi sinyal konvolusi $y(t) \rightarrow$ sum of lower limits $< t <$ sum of upper limits

$$\text{Period / durasi} = -1 + -2 < t < 2 + 2 = -3 < t < 4 = 7$$

$$\text{Dc component} = \frac{12}{7}$$

Konvolusi

- Konvolusi diskrit

- Cara menghitung konvolusi diskrit

- Contoh : $x[n] = \{a,b,c\}$ dan $h[n] = \{e,f,g\}$, maka $y[n]$ adalah

	a	b	c
e	ea	eb	ec
f	fa	fb	fc
g	ga	gb	gc

$$y[n] = \{ea, eb+fa, ec+fb+ga, fc+gb, gc\}$$

- Contoh : $x[n] = \{1,2,3\}$ dan $h[n] = \{-1,2,2\}$, maka $y[n]$ adalah

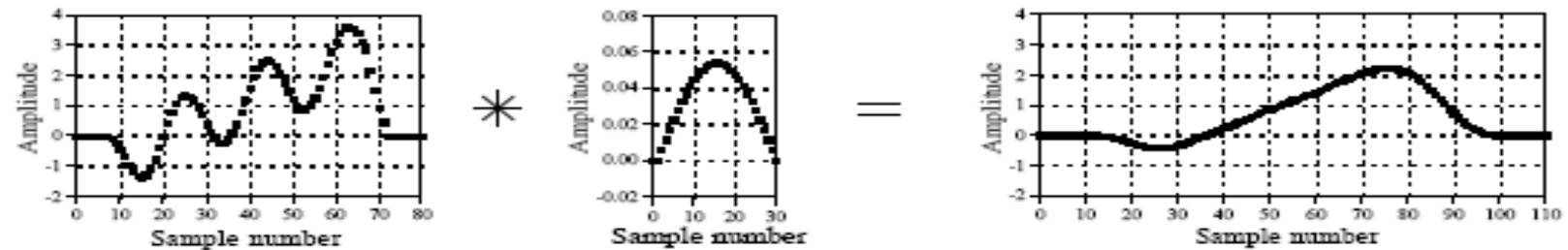
x	1	2	3
-1	-1	-2	-3
2	2	4	6
2	2	4	6

$$y[n] = \{-1, -2+2, -3+4+2, 6+4, 6\}$$

$$y[n] = \{-1, 0, 3, 10, 6\}$$

Konvolusi

a. Low-pass Filter



b. High-pass Filter

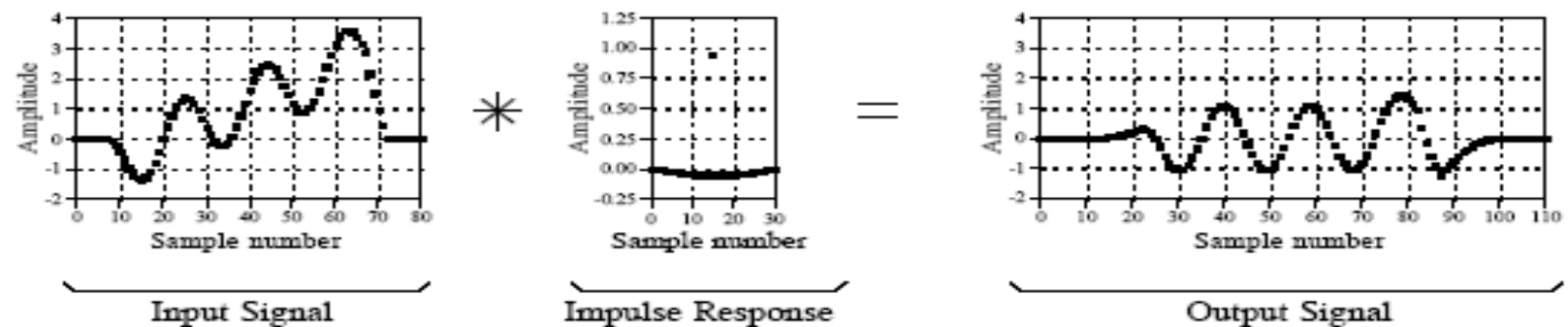


FIGURE 6-3

Examples of low-pass and high-pass filtering using convolution. In this example, the input signal is a few cycles of a sine wave plus a slowly rising ramp. These two components are separated by using properly selected impulse responses.

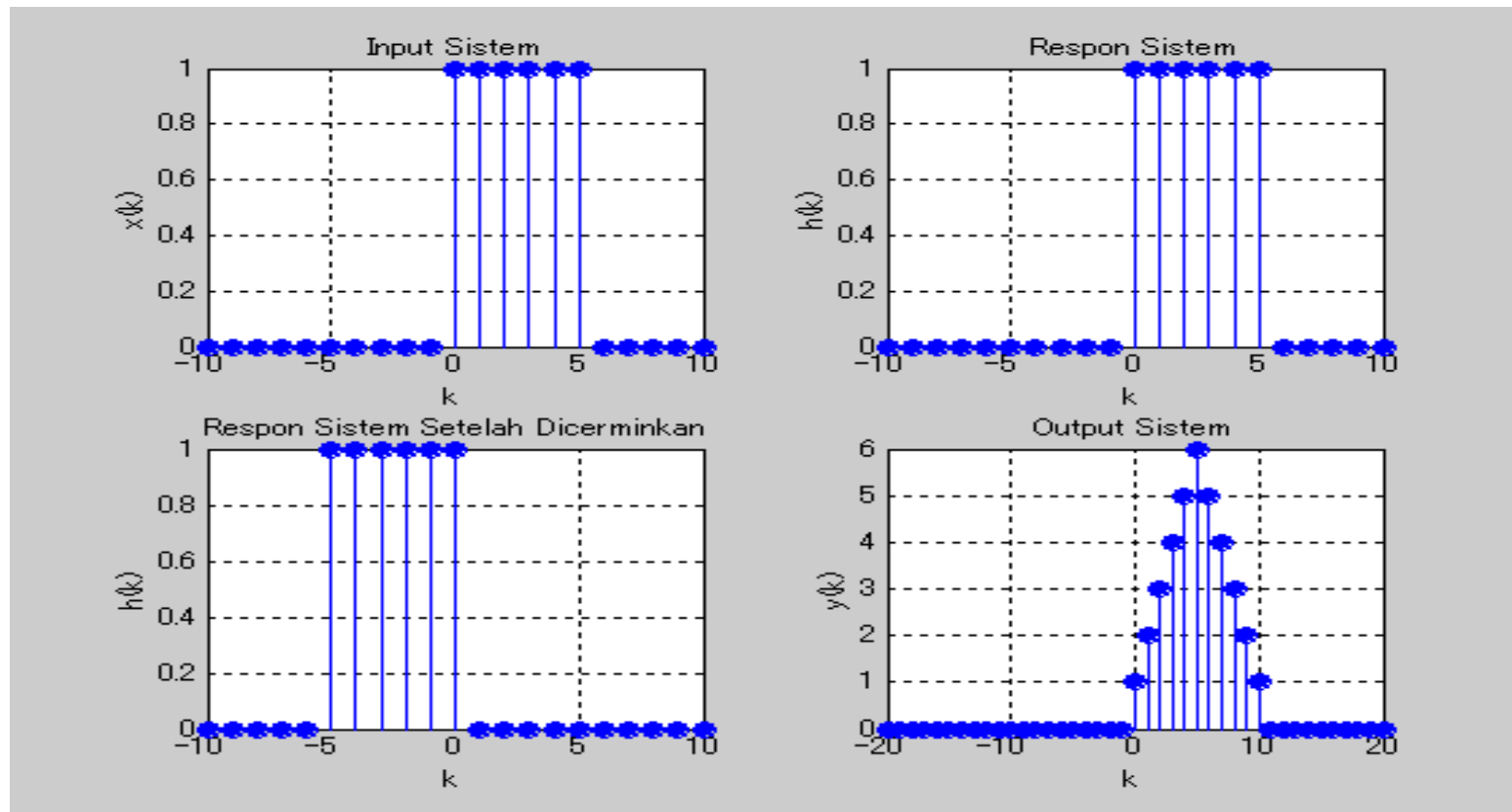
Konvolusi

Langkah-langkah dalam konvolusi :

- a. Pembangkitan sinyal masukan
- b. Pembangkitan respon impuls
- c. Pencerminkan sinyal masukan atau respon impuls (salah satu) terhadap sumbu y ==> sifat komutatif konvolusi
- d. Perkalian masing-masing titik sampel sinyal masukan dengan respon sistem
- e. Jumlahkan hasil perkalian dari masing-masing titik sampel sinyal masukan dengan respon sistem itu, sehingga diperoleh keluaran sampel yang pertama
- f. Pergeserkan sinyal / respon yang dicerminkan tadi tiap satu sampel, dan ulangi langkah d dan e, sehingga diperoleh keluaran sampel yang kedua dan seterusnya.

Konvolusi

- Ilustrasi gambar :



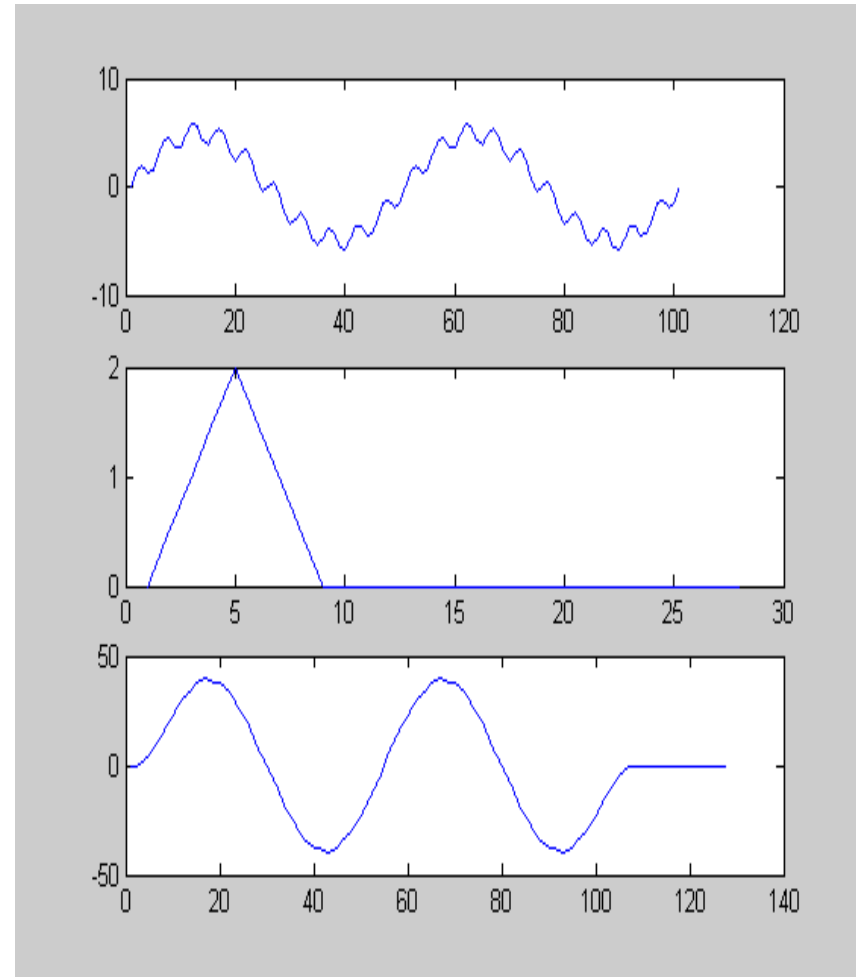
Konvolusi

- Penjelasan ilustrasi gambar setelah respon impuls dicerminkan :

- saat $k=0 \Rightarrow y(0) = (1*0)+(1*0)+(1*0)+(1*0)+(1*0)+(1*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1) = 1$
- saat $k=1 \Rightarrow y(1) = (0*0)+(1*0)+(1*0)+(1*0)+(1*0)+(1*1)+(1*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1) = 2$
- saat $k=2 \Rightarrow y(2) = (0*0)+(0*0)+(1*0)+(1*0)+(1*0)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1) = 3$
- saat $k=3 \Rightarrow y(3) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(1*0)+(1*0)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(0*1)+(0*1) = 4$
- saat $k=4 \Rightarrow y(4) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(1*0)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(0*1) = 5$
- saat $k=5 \Rightarrow y(5) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1) = 6$
- saat $k=6 \Rightarrow y(6) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1) = 5$
- saat $k=7 \Rightarrow y(7) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*1)+(0*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1) = 4$
- saat $k=8 \Rightarrow y(8) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(1*1)+(1*1)+(1*1) = 3$
- saat $k=9 \Rightarrow y(9) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(1*1)+(1*1) = 2$
- saat $k=10 \Rightarrow y(10) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(1*1) = 1$
- saat $k=11 \Rightarrow y(11) = (0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*0)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1)+(0*1) = 0$

Contoh Program MATLAB

```
N=100;
n1=0:N;
n2=0:N;
f1=1/(0.5*N);
f2=1/(0.05*N);
x1=5*sin(2*pi*f1*n1);
x2=sin(2*pi*f2*n2);
figure(1);
clf;
subplot(3,1,1)
x=(x1+x2);
plot(x)
subplot(3,1,2)
h=[0 0.5 1 1.5 2 1.5 1 0.5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
plot(h)
y=conv(x,h);
subplot(3,1,3)
plot(y)
```



Soal Latihan

1. Diketahui fungsi sinyal sebagai berikut :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \leq n < 3 \\ 2 & \text{untuk } n = 3 \\ 0 & \text{untuk } n > 3 \end{cases}$$

Jika $h[n] = \{1, 1, 2\}$, maka tentukan keluaran $y[n]$!

2. Dari soal no. 1, bila $x[n-5]$, maka tentukan $y[n]$!
3. Dari soal no. 2, bila $h[n] = \{0, 0, 2, 1, 0\}$, maka tentukan $y[n]$!

Korelasi

- Korelasi : mengukur kesamaan diantara dua sinyal

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t - \tau)dt$$

- Tipe Korelasi :
 - Auto
 - Cross

Korelasi

- Auto korelasi
 - Korelasi sebuah sinyal terhadap dirinya sendiri
 - Fungsi auto korelasi: pengukuran kesamaan sebuah sinyal dengan versi delay/tunda dari sinyal tersebut

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) = R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau)dt && [+ve \text{ shift}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt && [-ve \text{ shift}] \end{aligned}$$

Dimana τ adalah parameter delay/tunda

Korelasi

- Sifat fungsi auto korelasi untuk energi sinyal

- Auto korelasi menunjukkan conjugate symmetry

$$R(\tau) = R^*(-\tau)$$

- Fungsi auto korelasi dari energi sinyal pada $\tau = 0$ sama dengan total energi sinyal tersebut

$$R(0) = E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Fungsi auto korelasi akan bernilai maksimum pada saat $\tau = 0$
- Fungsi auto korelasi dan energy spectral density dinyatakan dengan Fourier Transform:

$$F.T[R(\tau)] = \Psi(\omega)$$

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = x(\tau) * x(-\tau)$$

Korelasi

- Sifat fungsi auto korelasi untuk power/daya sinyal
 - Auto korelasi dari power/daya sinyal menunjukkan conjugate symmetry
$$R(\tau) = R^*(-\tau)$$
 - Fungsi auto korelasi dari power/daya sinyal pada $\tau = 0$ sama dengan total power sinyal tersebut
$$R(0) = \rho$$
 - Fungsi auto korelasi dari power/daya sinyal akan bernilai maksimum pada saat $\tau = 0$
 - Fungsi auto korelasi dan power spectral density dinyatakan dengan Fourier Transform:

$$F.T[R(\tau)] = s(\omega)$$

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = x(\tau) * x(-\tau)$$

Korelasi

- Density Spectrum / Kerapatan Spektrum
 - Energy Density Spectrum

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(f)|^2 df$$

- Power Density Spectrum

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Korelasi

- Cross korelasi
 - Pengukuran kesamaan antara dua sinyal berbeda
 - Dua buah sinyal $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ memiliki cross korelasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t - \tau) dt && [+ve \text{ shift}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t + \tau)x_2(t) dt && [-ve \text{ shift}] \end{aligned}$$

Korelasi

- Sifat fungsi cross korelasi untuk energi dan power/daya sinyal

- Cross korelasi menunjukkan conjugate symmetry

$$R_{12}(\tau) = R_{21}^*(-\tau)$$

- Cross korelasi tidak bersifat komutatif seperti pada Konvolusi

$$R_{12}(\tau) \neq R_{21}(-\tau)$$

- Jika $R_{12}(0) = 0$, berarti kedua sinyal adalah orthogonal/tegak lurus satu sama lain
 - Fungsi cross korelasi berhubungan dengan perkalian dari spektrum sebuah sinyal terhadap komplek conjugate dari sinyal yang lainnya

$$R_{12}(\tau) \longleftrightarrow X_1(\omega)X_2^*(\omega)$$