V. Persamaan Beda Dengan koefisien Linier Konstan

Oleh:

Dr. Eng. Bima Sena Bayu Dewantara, S.ST., MT.

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

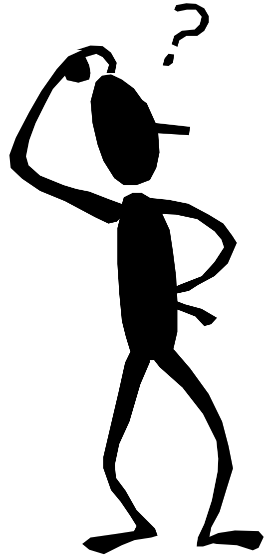
Sub Bahasan

1. Tujuan
2. Pendahuluan
3. Contoh Sistem Mekanik Translasi
4. Contoh Sistem Elektrik
5. Dasar-dasar Persamaan Beda Dengan Koefisien Linier Konstan
6. Persamaan Beda Hingga (FDE)
7. Barisan Impuls

1. Tujuan

- Mahasiswa memahami asal-usul persamaan diferensial dan persamaan beda
- Mahasiswa mengetahui contoh-contoh sistem dengan model persamaan diferensial
- Mahasiswa dapat menirukan perilaku sistem fisik (analog) dengan menggunakan model sistem diskrit
- Mahasiswa mengetahui maksud dan tujuan persamaan beda serta hubungannya dengan konsep superposisi

2. Pendahuluan



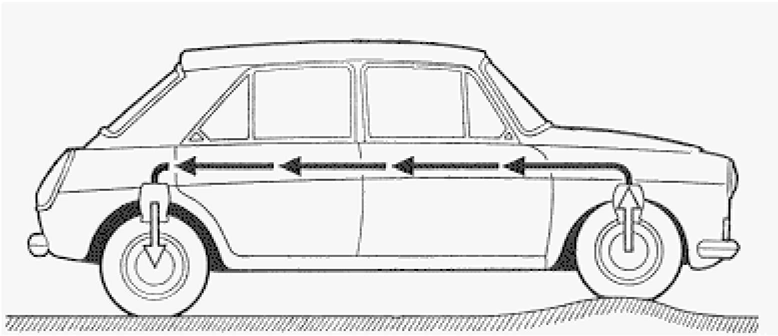
- Apakah persamaan beda itu?
- Beda = Different => Differential
- Persamaan Beda = Persamaan Differential ?
- Jawaban : Ya.
- Definisi : Sebuah persamaan yang menunjukkan hubungan antara nilai dari sebuah urutan dan perbedaannya antara satu terhadap yang lain. Seringkali dinyatakan sebagai formula rekursif sehingga keluaran sistem dapat dihitung dari sinyal masukan dan keluaran sebelumnya.
- Contoh : $y[n] + 7y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] - 4x$

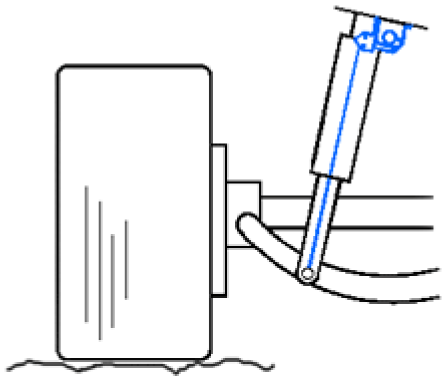
2. Pendahuluan

Mengapa persamaan beda?

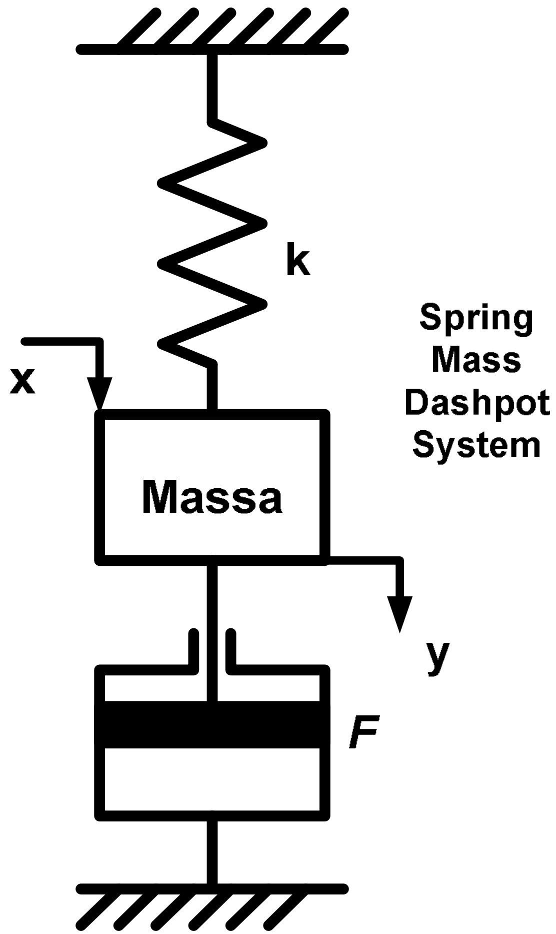
- Beragam fenomena fisik dan ragam sistem kebanyakan menggunakan model persamaan differential.
- Memberikan kemudahan untuk mempelajari persamaan dalam sistem LTI (Linier Time Invariant) terutama sistem diskrit.

3. Contoh Sistem Mekanik Translasi





3. Contoh Sistem Mekanik Translasi



$$\sum F = m \cdot a$$

$$F = force\ /\ gaya$$

$$m = mass\ /\ massa$$

$$a = accelerati\ \ on\ /\ percepa\ \ \tan(m / \sec^2)$$

$$E = \sum F \cdot y$$

$$E = Energi\ (Joule)$$

$$y = jarak\ (meter)$$

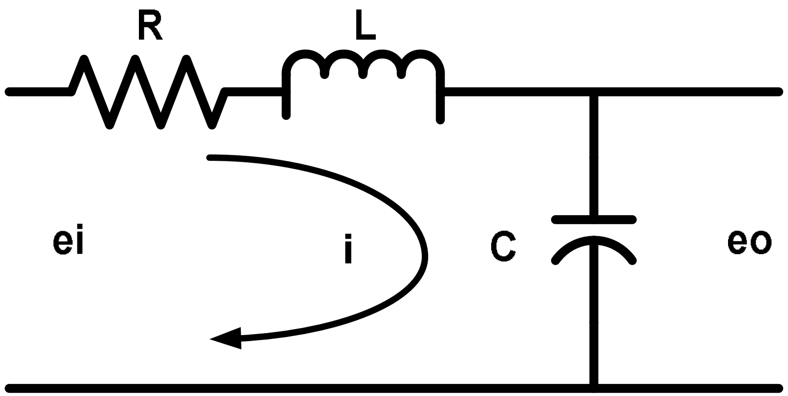
$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = x$$

$$mY(s)s^2 + fY(s)s + kY(s) = X(s)$$

$$Y(s)\cdot(ms\,2 + fs + k) = X(s)$$

$$TF = G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$$

4. Contoh Sistem Elektrik



$$e_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\cdot dt + i(t)\cdot R$$

$$Ei(s) = LI(s)s + \frac{1}{Cs}I(s) + I(s)\cdot R$$

$$Ei(s) = I(s)\cdot(Ls + \frac{1}{Cs} + R)$$

$$e_o(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\cdot dt$$

$$Eo(s) = I(s)\cdot\frac{1}{Cs}$$

$$TF = G(s) = \frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

5. Dasar-Dasar Persamaan Beda Dengan Koefisien Linier Konstan

- Sinyal diskrit sebagai barisan impuls

5. Dasar-Dasar Persamaan Beda Dengan Koefisien Linier Konstan

- Untuk setiap masukan particular x(t), maka akan menghasilkan keluaran berupa y(t), dimana $y(t) = y_p(t)+y_h(t)$

  Dimana $y_p(t)$ = penyelesaian particular

  $y_h(t)$ = penyelesaian homogen, saat $x(t) = 0$

Barisan Impulse

Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya bahwa representasi dari sinyal diskrit dapat ditunjukkan dengan menggunakan deretan fungsi impulse. Dengan demikian, fungsi impuls dapat digunakan untuk melihat respon sistem.

Tanggapan Impuls didefinisikan sebagai keluaran sistem bagi masukan sistem yang berbentuk barisan impuls :

$$\{u_k\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_0 \cdot \{\delta_k\}$$

Barisan Impulse

Definisikan tanggapan δ_k sebagai h_k, yakni barisan tanggapan impuls :

[δ_k] => [h_k]

Secara umum semua tanggapan barisan dinyatakan sebagai u, dimana :

$$\{u_k\} = \ldots + u_{-2} \cdot \{\delta_{k+2}\} + u_{-1} \cdot \{\delta_{k+1}\} + u_0 \cdot \{\delta_k\} + u_1 \cdot \{\delta_{k-1}\} + u_2 \cdot \{\delta_{k-2}\} + \ldots$$

Persamaan diatas menyatakan bahwa tanggapan impuls terdiri dari titik-titik yang tergeser dengan suatu variasi impuls $\{\delta_{k-j}\}$.

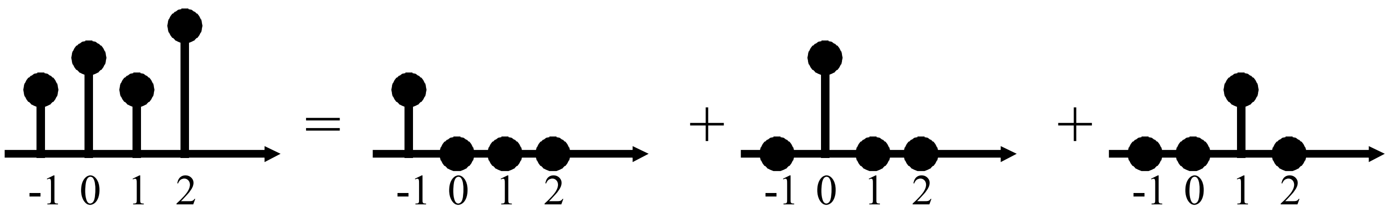
Barisan Impulse

Karena $y_{[n]} = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \cdot x_{[n-k]}$ bernilai satu untuk k=j dan

nol untuk yang lain, maka barisan pada persamaan diatas dapat dituliskan :

$$\{y_k\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j \cdot \{h_{k-j}\}$$

Ilustrasi persamaan diatas adalah sebagai berikut :



Barisan Impulse

Suku ke-k dari $\{y_k\}$ adalah

$$\{y_k\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j \cdot h_{k-j}$$

Persamaan diatas dikenal sebagai konvolusi dan dilambangkan sebagai :

$\{y_k\}=\{u_k\}*\{h_k\}$

atau

$y = u * h$

Barisan Impulse

Jika dimisalkan m=k-j, maka persamaan diatas menjadi

$$y_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{k-m} \cdot h_m$$

dengan membandingkan persamaan diatas dengan sebelumnya, maka dapat dikatakan bahwa konvolusi memiliki sifat komutatif (dapat dipertukarkan) yaitu :

y = u * h = h * u

Yang Mendasari LCCDE (2)

- Sebagai contoh, sebuah rangkaian RC seri memiliki persamaan sebagai berikut :

$$Vi(t) = i(t) \cdot R + \frac{1}{C}\int i(t) \cdot dt$$

$$Vo(t) = \frac{1}{C}\int i(t) \cdot dt$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dVo(t)}{dt}$$

$$Vi(t) = Vo(t) + RC \cdot \frac{dVo(t)}{dt}$$

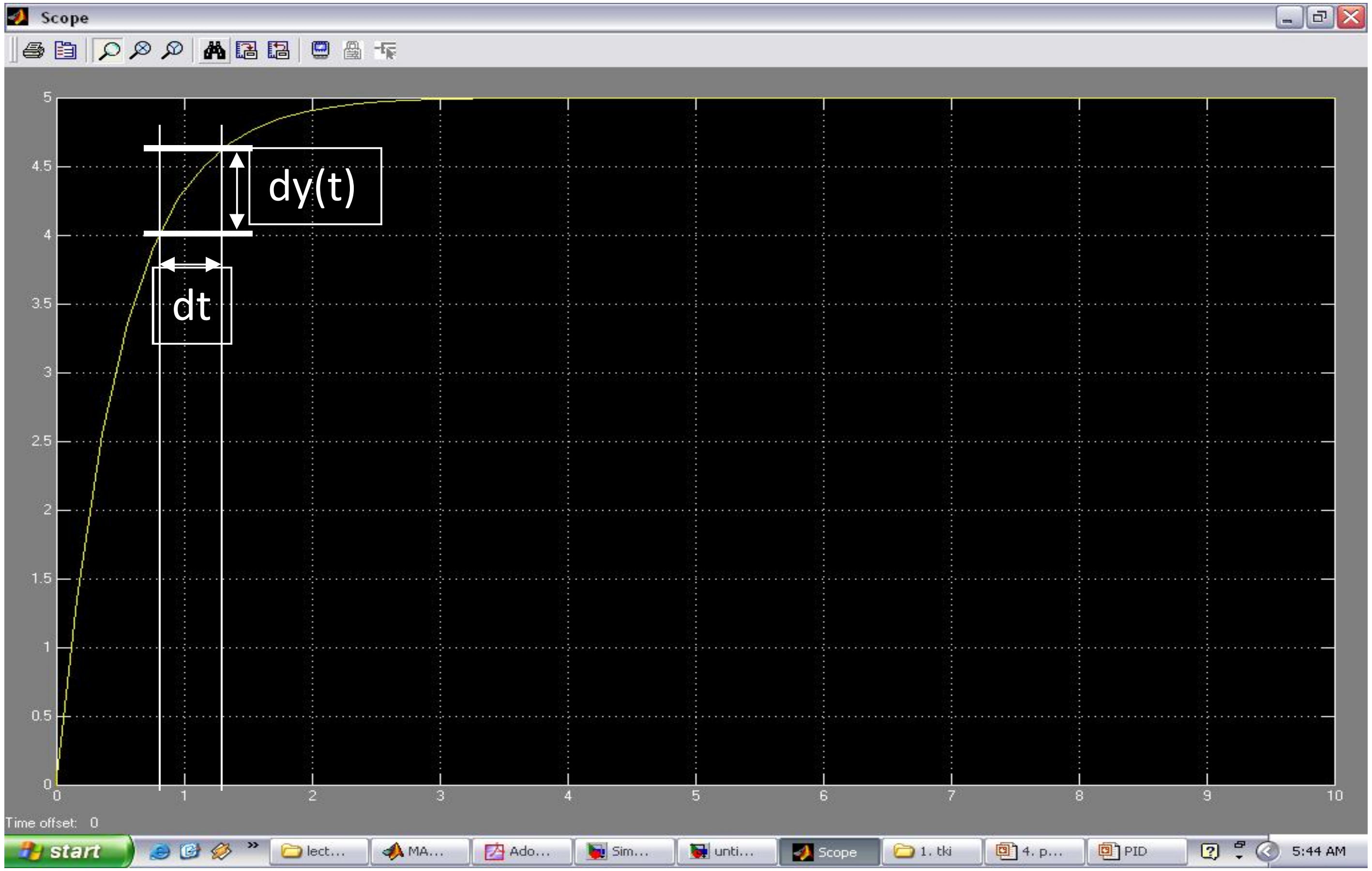
$$\int Vi(t) \cdot dt = \int Vo(t) \cdot dt + RC\int \frac{dVo(t)}{dt} \cdot dt$$

$$RC\int \frac{dVo(t)}{dt} \cdot dt = \int Vi(t) \cdot dt - \int Vo(t) \cdot dt$$

$$RC \cdot Vo(t) = \sum Vi(t) - \sum Vo(t)$$

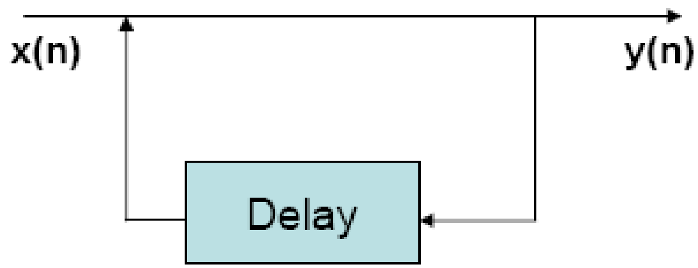
$$Vo(t) = \frac{\sum Vi(t) - \sum Vo(t)}{RC}$$

Respon Sistem Rangkaian RC Seri, dengan RC=0.5 dan input Unit Step max. 5



Yang Mendasari LCCDE (3)

- Jika masukan Vi(t) merupakan gabungan dari dVi(t)/dt dan Vo(t) juga merupakan gabungan dari dVo(t)/dt, maka persamaan sebelumnya dapat dituliskan sebagai berikut :



$$Vo(t) = \frac{1}{RC}\left(\sum \frac{dVi(t)}{dt} - \sum \frac{dVo(t)}{dt}\right)$$

Secara Umum dituliskan sbb :

$$y(t) = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{l=1}^{M} a_l \frac{d^l y(t)}{dt^l}\right)$$

Yang Mendasari LCCDE (4)

- Dimana y(t) pada persamaan sebelumnya adalah pada saat *l* = 0
- Sehingga persamaan sebelumnya dapat dirubah menjadi :

$$\sum_{l=0}^{M} a_l \frac{d^l y(t)}{dt^l} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Particular Solution (saat x(t) bukan bernilai 0)

Yang Mendasari LCCDE (5)

- Dalam perkembangannya, persamaan waktu kontinyu tersebut diadopsi dalam bentuk persamaan waktu diskrit, sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$\sum_{l=0}^{M} a_l \cdot y(n-l) = \sum_{k=0}^{N} b_k \cdot x(n-k)$$

From this equation, note that *y*[*n*−*k*] represents the outputs and *x*[*n*−*k*] represents the inputs. The value of *N* represents the order of the difference equation and corresponds to the memory of the system being represented. Because this equation relies on past values of the output, in order to compute a numerical solution, certain past outputs, referred to as the initial conditions, must be known.

Persamaan Beda Hingga / FDE (Finite Diff. Equation)

Persamaan Beda Hingga adalah suatu persamaan dalam kawasan waktu diskrit yang dipakai dalam sistem linier. Persamaan ini mentransformasikan barisan masukan, u_k dalam keluaran, y_k menurut rumus pengulangan (recursion formula) :

$$y_k = k_o \cdot U_k + k_1 \cdot U_{k-1} + k_2 \cdot U_{k-2} + \ldots + k_n \cdot U_{k-n}$$

dimana : $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n$ = konstanta linier

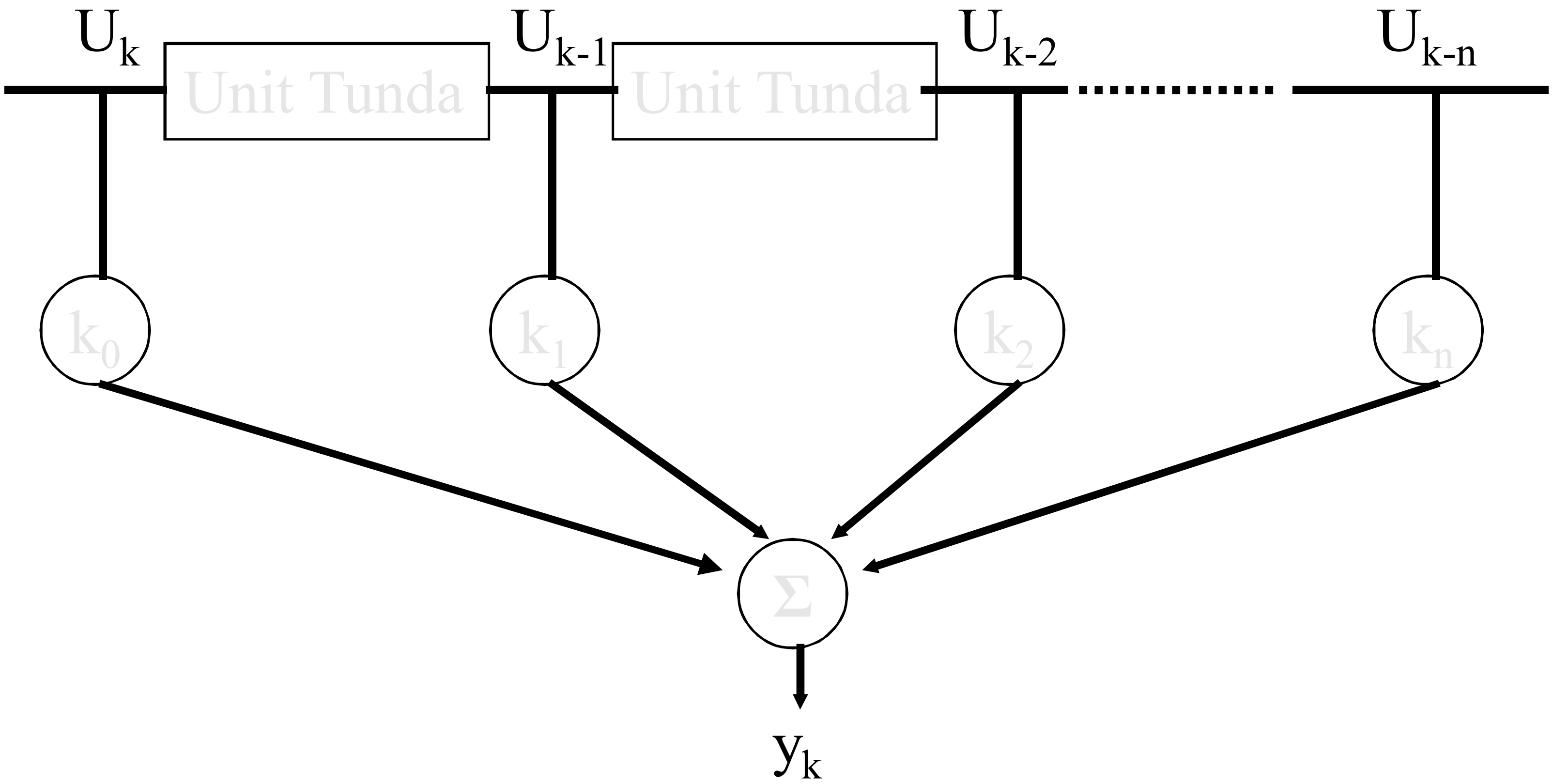
U_k = masukan sekarang

$U_{k-1}, U_{k-2}, U_{k-3}$ = unit tunda ke n

Persamaan Beda Hingga / FDE

Persamaan diatas menyatakan bahwa y_k adalah keluaran sistem yang merupakan gabungan antara k_0 kali masukan sekarang ditambah k_n kali masukan sebelumnya. Harga k dan u merupakan representasi sistem, misalnya k adalah pengganda (multiplier) dan u_{k-n} menyatakan unit tunda.

Persamaan Beda Hingga / FDE



Persamaan Beda Hingga / FDE

Komponen utama sistem yang merupakan representasi persamaan beda linier adalah pengganda (multiplier), unit tunda (delay unit) dan penjumlah (adder). Bila masukan sekarang adalah barisan bilangan u_k=a,b,c,d,… maka delay pertama dinyatakan dengan u_{k-1}=0,a,b,c,d,… karena dianggap bahwa tiap delay berharga nol. Dengan demikian pada u_{k-n} terdapat n harga nol sebelum a,b,c,d,...

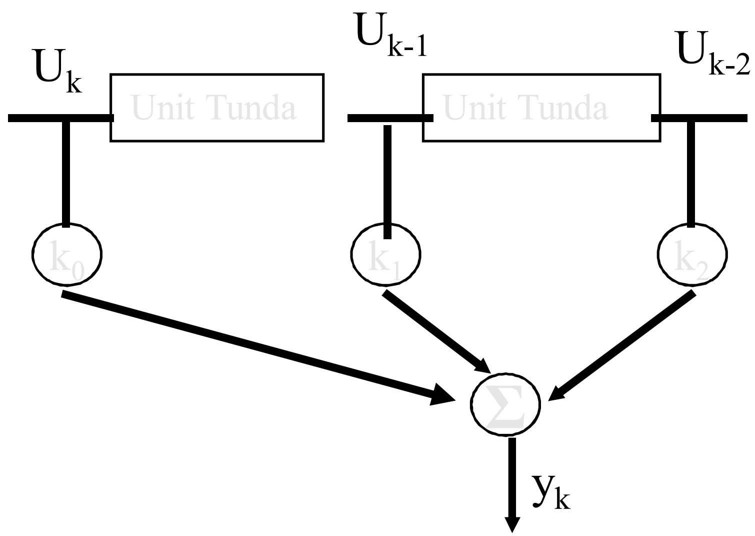
Persamaan Beda Hingga / FDE

Contoh :

Suatu sistem linier dinyatakan dengan persamaan :

$$y_k=2*u_k+3*u_{k-1}-4*u_{k-2}$$

Jika barisan masukan u_k adalah {1,0,1,2,0,0,0,…} tentukan keluaran y_k!



Persamaan Beda Hingga / FDE

Jawab :

Jika u_k = {1,0,1,2,0,0,0,..} maka $2*u_k$ = {2,0,2,4,0,0,0,..}

Jika u_{k-1} = {0,1,0,1,2,0,0,..} maka $3*u_{k-1}$ = {0,3,0,3,6,0,0,..}

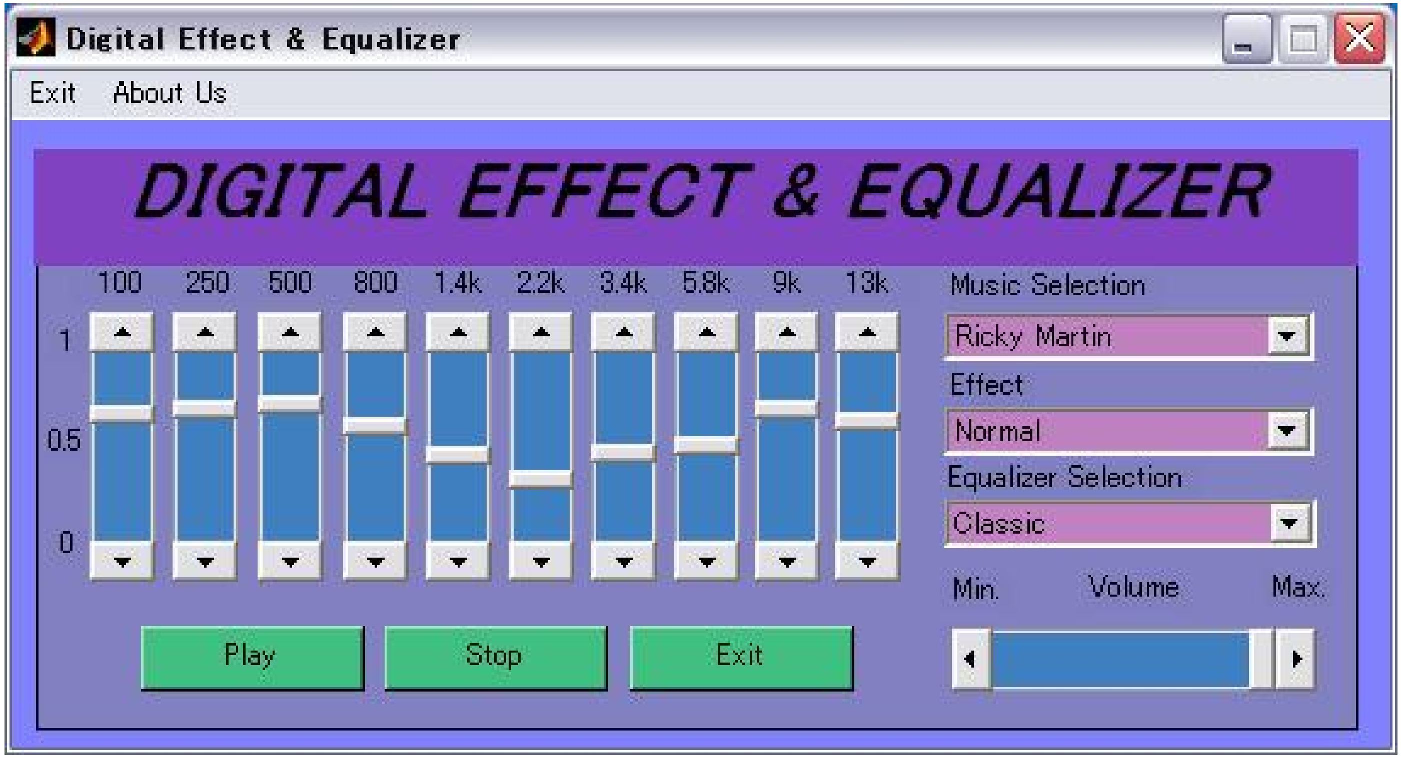
Jika u_{k-2} = {0,0,1,0,1,2,0,..} maka $-4*u_{k-2}$ = {0,0,-4,0,-4,-8,0,..}

maka $y_k=2*u_k+3*u_{k-1}-4*u_{k-2}$ = {2,3,-2,7,2,-8,0,…}

Dari sistem diatas tampak bahwa keluaran y_k hanya tergantung pada u_k dan nilai masukan lampau. Jenis ini disebut sebagai rangkaian filter tak berulang (non recursive filter) atau mempunyai tanggapan impuls berhingga (finite impulse response = FIR).

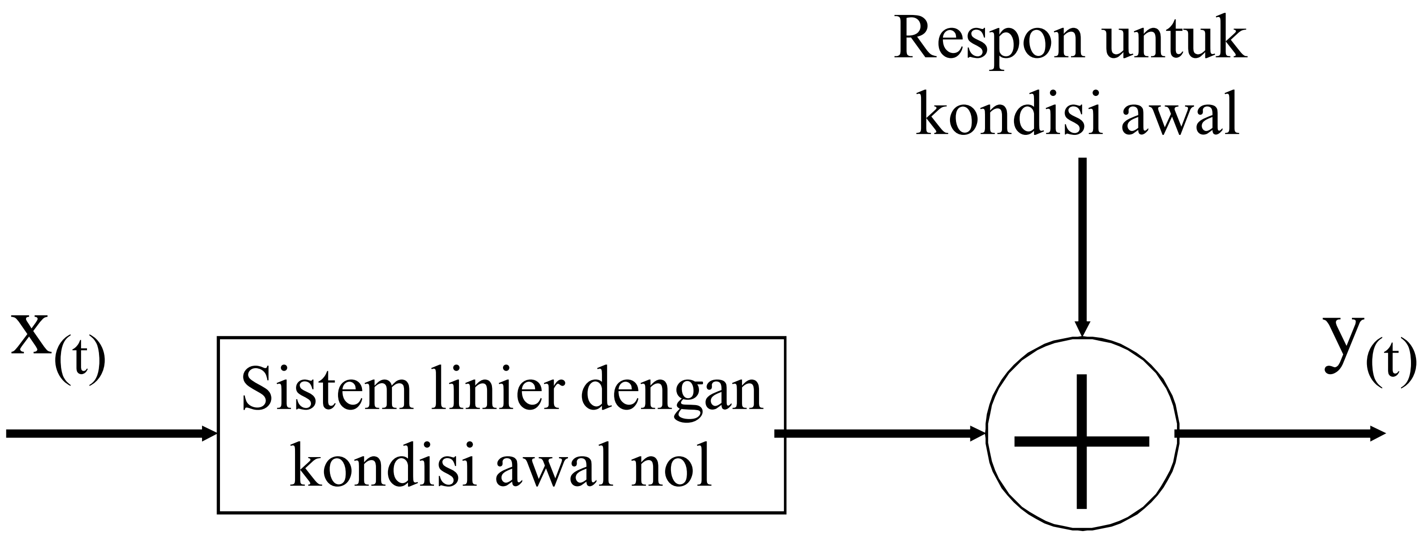
Persamaan Beda Hingga / FDE

Contoh Aplikasi :



Persamaan Beda Hingga / FDE

Blok diagram respon sistem :



Persamaan Beda Hingga / FDE

Jika sistem dinyatakan dalam persamaan diferensial linier dengan koefisien konstanta linier, maka sistem dinyatakan linier dan respon total untuk kondisi awal tidak nol dinyatakan secara sederhana sebagai penjumlahan respon seluruh sistem jika kondisi awalnya nol dan respon atas kondisi awal itu sendiri.

Secara umum persamaan linier dinyatakan dengan :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y_{[n-k]} = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x_{[n-k]}$$

Persamaan Beda Hingga / FDE

Persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$a_0 \cdot y_{[n]} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y_{[n-k]} = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x_{[n-k]}$$

Sehingga :

$$y_{[n]} = \frac{1}{a_0} \cdot \{ \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x_{[n-k]} - \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y_{[n-k]} \}$$

Dalam hal ini untuk N $\neq$ 0 maka persamaan diatas disebut filter IIR (Infinite Impulse Response)

Persamaan Beda Hingga / FDE

Persamaan diatas menyatakan output sekarang dinyatakan dari keadaan input dan output sebelumnya. Dari sini diperlukan untuk mengetahui kondisi awal untuk menyelesaikan permasalahan, yaitu untuk mendapatkan $y_{[n]}$, diperlukan mengetahui $y_{[n-1]}$, $y_{[n-2]}, \ldots, y_{[n-N]}$.

Jika N = 0, maka

$$y_{[n]} = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \cdot x_{[n-k]}$$

Dalam hal ini maka persamaan diatas disebut filter FIR (Finite Impulse Response)

14. Soal/Tugas

1. Apakah sinyal itu? Berikan penjelasan anda beserta contohnya!
2. Sinyal dapat diklasifikasikan menjadi beberapa jenis. Sebutkan dan jelaskan masing-masing!
3. Sebutkan dan jelaskan beberapa pembuktian bahwa sinyal sinus dan cosinus adalah sinyal dasar!
4. Anggaplah x[n] adalah sinyal dengan x[n]=0 untuk n<-2 dan n>4. Untuk setiap sinyal yang diberikan dibawah ini, tentukan harga n yang pasti berharga nol :
   - x[n-3]
   - x[n+4]
   - x[-n]
   - x[-n+2]
   - x[-n-2]
5. Sebuah sinyal disajikan dalam bentuk deret sbb: x[n]={1,-2,6,3,- -4,7,-5,6,9,2}. Hitunglah power sinyal tersebut!