


 **Persamaan Differensial Orde 1**


Slide : Tri Harsono  
S2 TIK dan S2 TE  
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

1 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

 **Jenis PD**


- Berdasarkan ruas kanannya:
  - PD Homogin
  - PD Non Homogin
- Berdasarkan independent variable-nya:
  - PD Biasa
  - PD Parsial
- Berdasarkan derajat differensialnya:
  - PD Linier
  - PD Non Linier

2 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

 **Istilah-Istilah dalam PD**


- Derajat PD**: pangkat *tertinggi* pada PD,
- Orde PD**: turunan *tertinggi* pada PD
- PUPD**(: Penyelesaian Umum PD) adl: penel. yg masih mengandung konstanta esensial,
- PKPD**(: Penyelesaian Khusus PD) adl: penel. yg tidak mengandung konstanta esensial.
- Konstanta esensial** (konstanta dasar): konstanta yang tidak dapat disederhanakan lagi.

3 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

 **Bentuk-Bentuk PD Biasa *Orde 1***


- PD Variabel Terpisah,
- PD Variabel yg dapat dipisah,
- PD Eksak,
- Integrating Factors,
- Linear First-Order Differential Equation,
- Variation of Paramaters,
- Picard's Iteration Method

4 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

 **Initial Value Problem**

- Masalah Nilai Awal (Initial Value Problem) digunakan untuk mencari nilai konstanta dasar (= c),
- Dengan adanya initial value problem maka PUPD akan menjadi PKPD.

5 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

 **Soal : Newton's law of cooling**

- A copper ball is heated to a temperature of 100°C. Then at time t=0 it is placed in water which is maintained at a temperature of 30°C. At the end of 3 minutes the temperature of the ball is reduced to 70°C. Find the time at which the temperature of the ball is reduced to 31°C.

**Model matematik dari hukum pendingin Newton:**

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

↓

- Termasuk PD Variabel yang dapat dipisah Orde1
- Tentukan PUPD-nya
- Carilah PKPD-nya

6 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## PD Variabel yg dapat Dipisah

- PD orde 1 tertentu terkadang variabelnya tidak dapat dipisah,
- Tetapi dapat dibuat terpisah dengan suatu cara yg mudah, yaitu:

- Dengan merubah variabelnya menjadi

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \dots\dots\dots(1)$$

- Dimana g adalah fungsi y/x yang telah diberikan,
- Contoh :  $(y/x)^3$ ,  $\sin(y/x)$ , dsb

7

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## PD Variabel yg dapat Dipisah

- Setting  $y/x = u$ ,
- Bisa dinyatakan bahwa y dan u adalah fungsi dari x,
- Maka dapat dibentuk fungsi  $y = ux$ ,
- Differensiasi dari y didapatkan:

$$\frac{dy}{dx} = u + u'x \dots\dots\dots(2)$$

- Substitusi 2 ke dalam 1 dan  $g(y/x)=g(u)$ , didapatkan:

$$u + u'x = g(u)$$

8

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## PD Variabel yg dapat Dipisah

- Akhirnya dapat dipisahkan var x dan u, sehingga :

$$\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

- Dengan mengintegrasikan dan mengganti u dengan y/x, didapatkan PUPD-nya.

9

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## PD Variabel yg dapat Dipisah

Contoh:

1. Selesaikan Pers Diff berikut:

$$a. \frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$$

$$b. \frac{dy}{dx} \sin 2x = y \cos 2x$$

$$c. y \frac{dy}{dx} = 0.5 \sin^2 \omega x$$

2. "Initial Value Problem". Selesaikan PD di bwh ini.

$$a. L \frac{di}{dt} + Ri = 0; \quad i(0) = i_0$$

$$b. dr \sin \theta = 2r \cos \theta d\theta; \quad r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$c. \frac{dr}{dt} = -tr; \quad r(0) = r_0$$

$$d. v \frac{dv}{dx} = k; \quad k = \text{konstan} \quad v(x_0) = v_0$$

10

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## PD Variabel yg dapat Dipisah

- Contoh:

1. Selesaikan PD orde 1 berikut:

$$a. 2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

$$b. (2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0$$

2. Carilah PUPD dari PD orde 1 berikut:

$$a. xy' = x + y$$

$$b. xy' = (y - x)^3 + y$$

$$c. x^2y' = y^2 + xy + x^2$$

$$d. y' = (y - x)/(y + x)$$

11

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## PD Variabel yg dapat Dipisah

3. Selesaikan *masalah nilai awal* berikut:

$$a. 2x^2yy' = \tan(x^2y^2) - 2xy^2; \quad y(1) = \sqrt{\pi/2}$$

$$b. y' = (y - x)/(y - x - 1); \quad y(-5) = -5$$

12

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**PD Orde 1 Linier**

- Bentuk Umum :
 
$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$$
- Ciri linier PD itu ada pada y dan dy/dx  
•f dan r terkadang fungsi dari x
- PUPD nya:
 
$$y(x) = e^{-h} \left( \int e^h r dx + c \right)$$
 dimana  

$$h = \int f(x) dx$$

13 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**PD Orde 1 Linier**

- Contoh:
  - Selesaikan PD Orde 1 berikut:
    - $y' - y = e^{2x}$
    - $xy' + y + 4 = 0$
    - $xy' + y = \sin x$
  - Selesaikan *masalah nilai awal* berikut:
    - $y' + y \tan(x) = \sin(2x); y(0) = 1$
    - $x^2 y' + 2xy - x + 1 = 0; y(1) = 0$

14 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**PD Orde 1 Linier**

3. "Hukum Pendingin Newton".

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$$

T = temperatur sebuah bola logam, diletakkan pada suatu medium yang dijaga temperaturnya konstan  $T_1$ . Carilah penyelesaian umum dari temperatur bola bila temperatur awal bola  $T(0) = T_0$ .

15 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**PD Orde 1 Linier**

4. Selesaikan PD Orde 1 berikut:

- $y' + y = \sin(x)$
- $y' + 2y = 6e^x$
- $y' + ky = e^{-kx}$ , dimana k adalah koefisien
- $xy' - 2y = x^3 e^x$
- $y' + y = (x + 1)^2; y(0) = 0$
- $xy' - 3y = x^4(e^x + \cos x) - 2x^2; y(\pi) = \pi^3 e^\pi + 2\pi^2$

16 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Soal-Soal**

- Selesaikan Pers. Diff. berikut ini :
  - $xy' = 2x + 2y$
  - $y' = (y+x)/(y-x)$
  - $xyy' = 2y^2 + 4x^2; y(2) = 4$
  - $y' - y = e^x; y(1) = 0$
  - An extended object falling downward is known to experience a resistive force of the air (called *drag*). We assume the magnitude of this force to be proportional to the speed v. Using Newton's second law, show that :
 
$$mv' = -kv - mg$$

$g = 9.80 \text{ m/sec}^2$       Selesaikan model PD itu dengan metode:  
 a. PD Orde1 Linier  
 b. PD Var Terpisah

17 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

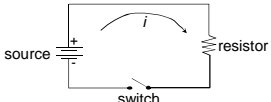
**Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)**

- PD orde 1 linier mempunyai banyak aplikasi dalam bidang fisika dan teknik
- Untuk contoh adalah aplikasi pada rangkaian listrik
- Tujuan: bagaimana kita **memodelkan**, yaitu menyatakan kondisi fisik menjadi relasi matematik
- Transisi dari sistem fisik ke suatu model matematik yang bersesuaian "selalu" menjadi langkah pertama dalam **matematika teknik**
- Langkah pertama ini "penting", membutuhkan pengalaman dan latihan yang hanya dapat diperoleh dengan mencoba memodelkan contoh-contoh khusus dari berbagai plant (obyek fisik).

18 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)**

- Rangkaian listrik yang paling sederhana adalah sebuah rangkaian seri,
- Dimana kita mempunyai sebuah sumber energi listrik (electromotive force) misal sebuah generator atau sebuah baterai dan sebuah resistor yang menggunakan energi.
- Sebagai contoh: sebuah *lampu pijar elektrik* pada gambar di bawah ini.



19 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)**

- Bila switch ditutup sebuah arus  $i$  akan mengalir melalui resistor dan menyebabkan tegangan turun, yaitu: potensial elektrik pada kedua ujung resistor akan berbeda,
- Perbedaan potensial/tegangan turun tadi dapat diukur dengan menggunakan voltmeter.
- Eksperimen menunjukkan bahwa "penurunan tegangan  $E_R$  yg melewati sebuah resistor proporsional terhadap arus  $i$  pada saat itu, dan ditulis:

$$E_R = Ri$$

$R$  = konstanta proporsional disebut sebagai resistansi dari resistor

Hukum OHM

20 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)**

- Dua elemen penting lainnya adalah induktor dan kapasitor
- Sebuah induktor melawan suatu perubahan dalam arus,
- Mempunyai efek inersia dalam electricity yang sama dengan masa dalam bidang mekanik (analogi bid listrik dengan mekanik)
- Eksperimen menghasilkan hukum berikut: "Penurunan tegangan  $E_L$  yg melewati sebuah induktor proporsional thd nilai perubahan arus  $i$  pada saat itu", dan ditulis :

$$E_L = L \frac{di}{dt}$$

$L$  = konstanta proporsional disebut sebagai induktansi dari induktor

21 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)**

- Kapasitor adalah suatu elemen yg menyimpan energi,
- Eksperimen menghasilkan hukum berikut: "Penurunan tegangan  $E_C$  yang melintasi sebuah kapasitor proporsional terhadap muatan listrik (electric charge)  $Q$  pada kapasitor, ditulis :

$$E_C = \frac{1}{C} Q$$

$C$  = kapasitansi (farad) dan muatan  $Q$  diukur dalam coulomb

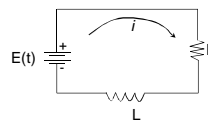
Sejak

$$i = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow E_C = \frac{1}{C} \int i(t^*) dt^*$$

22 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)**

- Untuk arus  $i(t)$  dalam suatu rangkaian dapat dicari dari persamaan-persamaan yang didapatkan dari hukum fisik berikut:
- "Jumlah penurunan tegangan pada suatu loop tertutup sama dengan NOL" (KVL)
- Contoh 1:** Perhatikan rangkaian **RL seri** berikut



Hitung arus yang mengalir, bila:

- $E(t) = E_0 = \text{Konstan}$
- $E(t) = E_0 \sin \omega t$

Ket.: gunakan cara **PD linier orde 1**

23 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)**

- Jawab 1a. **RL seri** :  $E(t) = E_0 = \text{konstan}$  (**Constant Electromotive Force**)
- Dari KVL,  $E_R$  dan  $E_L$  didapatkan model matematika dari RL seri :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t)$$

- Dengan menggunakan PD linier orde 1, didapatkan PUPDnya:

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left[ \frac{E_0}{R} \int e^{\frac{R}{L}t} dt + c \right]$$

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \text{untuk } t \text{ yang lama maka } i(t) \text{ konstan ke } E_0/R$$

24 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Jadi dari persamaan arus listrik  $i(t)$  yg didapatkan di atas (baris terakhir) terlihat bhw arus tidak bergantung dari konstanta dasar  $c$ , artinya berapapun besar  $c$ , arus tetap konstan ke  $E_0/R$ .
- Untuk Penyelesaian partikular (penyelesaian khusus/PKPD) pada "kondisi awal"  $i(0)=0$ , didapatkan persamaan arus:

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right)$$

$\tau_L = L/R$  dinamakan "**konstanta waktu induktif**" dari rangkaian

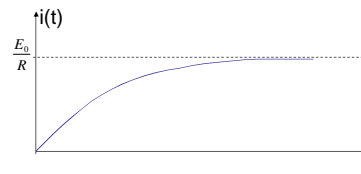
25

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Sketsa grafik kuat arus  $i(t)$  persamaan terakhir:



26

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Jawab 1b. **RL seri**:  $E(t) = E_0 \sin \omega t$  (Periodic Electromotive Force)
- Dengan menggunakan PD linier orde 1, didapatkan PUPDnya:

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left[ \frac{E_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt + c \right]$$

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)$$

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} R \sin(\omega t - \delta) \rightarrow \delta = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

Pada suku pertama, untuk  $t$  yang besar (infinity) nilainya menuju NOL, sehingga  $i(t)$  akhirnya mengalami getaran harmonisa.

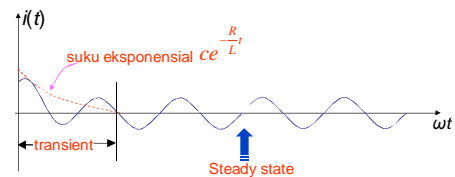
27

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Sketsa grafik dari fungsi arus yg didapatkan:



28

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

- Pengertian fisis dari soal RL seri di atas adalah:
  - Sebuah sistem elektrik atau dinamik dikatakan dalam kondisi setimbang (steady state) pada saat variabel-variabelnya (misal arus) merupakan fungsi "periodik" atau "konstan"
  - Sistem itu dikatakan dalam kondisi transien (transient state) pada saat tidak dalam kondisi steady state (unsteady state)
  - Variabel-variabel yg bersesuaian dinamakan : fungsi steady state dan fungsi transien
  - Pada contoh 1 di atas:
    - Fungsi steady state utk soal 1a. adl:  $E_0/R$
    - Fungsi steady state utk soal 1b. adl:  $\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \delta)$

29

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



## Aplikasi pada Rangkaian Listrik (PD Linier Orde 1)

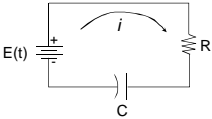
- Pengertian fisis dari soal RL seri di atas adalah:
  - Sebelum arus mencapai stedy state, pasti melalui kondisi transien lebih dahulu
  - Kondisi transien ini terjadi karena induktor dan kapasitor menyimpan energi, dan arus induktor serta tegangan kapasitor yg bersesuaian tidak dapat diubah dengan tiba-tiba
  - Secara praktis, kondisi/masa transien ini terjadi dalam "waktu yang singkat"

30

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Aplikasi pada Rangkaian Listrik**  
(PD Linier Orde 1)

• **Contoh 2:** Perhatikan rangkaian RC seri berikut



Hitung arus yang mengalir, bila:

- $E(t) = E_0 = \text{Konstan}$
- $E(t) = E_0 \sin \omega t$

Ket.: gunakan cara **PD linier orde 1**

31 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Soal-Soal**

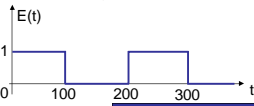
- Dapatkan penyelesaian contoh 1a. yg memenuhi kondisi awal  $i(0) = 0.5E_0/R$  dan gambarkan sketsa grafiknya.
- Dalam contoh 1a., bila  $R = 20 \text{ ohm}$ ,  $L = 0.03 \text{ millihenry}$ , dan  $i(0) = 0$ , hitung waktu  $t$  pada saat arus  $i$  mencapai 99.9% dari nilai akhir.
- Dalam contoh 1a., bila  $E_0 = 100 \text{ volt}$ ,  $R = 1000 \text{ ohm}$ , dan  $L = 4 \text{ henry}$ . Hitung  $\tau_L$ , gambarkan sketsa grafik  $i(t)$ , hitung  $E_R$  dan  $E_L$ .
- Berapa nilai  $L$  yang dipilih, dalam sebuah RL seri dengan  $R = 100 \text{ ohm}$  untuk arus yang mencapai 99.9% dari nilai akhir saat  $t = 0.01 \text{ detik}$ ?
- Sebuah RC seri dengan  $R = 200 \text{ ohm}$  dan  $C = 0.1 \text{ farad}$  diberi muatan (dari sumber  $E(t) = E_0 = 12 \text{ volt}$ ). Hitung tegangan pada kapasitor  $E_C$  dengan anggapan bahwa saat  $t = 0$  kapasitor belum diberi muatan.
- Tentukan arus  $i(t)$  dalam rangkaian RC seri dengan asumsi  $E = 100 \text{ volt}$ ,  $C = 0.25 \text{ farad}$ , dan  $R$  adalah variabel yg mengikuti persamaan  $R = (100 - t) \text{ ohm}$  untuk  $0 \leq t \leq 100 \text{ det}$ , dan  $R = 0$  untuk  $t > 100 \text{ det}$ . Kondisi awal  $i(0) = 1 \text{ ampere}$ .

32 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Soal-Soal**

- Tunjukkan bahwa persamaan differensial RC seri (dalam arus  $i(t)$ ) dapat dirubah menjadi persamaan dalam muatan  $Q(t)$ :  

$$RC(dQ/dt) + (1/C)Q = E(t)$$
 Selesaikan persamaan tsb utk  $E(t) = 0$  dengan asumsi  $Q(0) = Q_0$ .
- Dari persamaan muatan pada RC seri, bila  $R = 20 \text{ ohm}$ ,  $C = 0.01 \text{ farad}$  dan  $E(t) = 60e^{-2t} \text{ volt}$ , dengan asumsi  $Q(0) = 0$ , hitung  $Q(t)$  dan tampilkan sketsa grafiknya. Tentukan juga waktu yg dibutuhkan untuk  $Q(t)$  yang maksimum.
- Hitunglah arus  $i(t)$  dari rangkaian RL seri, dengan  $R = 1 \text{ ohm}$ ,  $L = 100 \text{ henry}$ , kondisi awal  $i(0) = 0$ , dan sumber tegangan  $E(t)$  seperti pada gambar di bawah ini



33 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Soal-Soal**

- Tentukan output dari RL seri bila nilai awal  $i(0) = 0$

34 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Soal-Soal**

Kerjakan soal-soal di atas 4 nomor dari 9 nomor (pilih sembarang). Kumpulkan 2 minggu. Lagi.

35 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Referensi**

- Edwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9<sup>th</sup> Edition, John Wiley and Sons, Inc., 2006
- CF Chan Man Fong, D De Kee, P N Kaloni, *Advanced Mathematics for Engineering and Science*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003.

36 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

**Terima Kasih**