




Persamaan Differensial Biasa Orde 2

Slide : Tri Harsono
S2 TE dan S2 TIK
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya




PD Linier Homogin Dengan Koefisien Konstan Orde 2

- Bentuk Umum:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t)$$
- Terhadap ruas kanan (fungsi input):
 - Bila $x(t) = 0 \rightarrow$ "PD Homogin"
 - Bila $x(t) \neq 0 \rightarrow$ "PD Non Homogin"
- a_0, a_1, a_2 = koefisien konstan
- t variabel bebas

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



1. PD Linier Homogin Dengan Koefisien Konstan Orde 2


- PD Linier Homogin Dengan Koefisien Konstan

$$a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

Bgm Penyelesaian Umum (PUPD) ?

Dapat diselesaikan dengan metode Operator D, Metode Koefisien Tdk Tentu, Transformasi Laplace.

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Operator D (Operator Differensial)

- $D = d/dt$ atau d/dx
- Artinya : differensial pertama
- Contoh:
 - Terdapat suatu fungsi dalam x , yaitu $y = e^{2x}$
 - Tentukan Dy , artinya mencari differensial pertama dari $y = e^{2x}$
 - Sehingga $Dy = 2e^{2x}$
- Bila dijumpai $D^2 y$, berarti differensial kedua dari fungsi $y = e^{2x}$
- Kondisi ini terjadi pada semua jenis fungsi y yang lainnya

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

1. PD Linier Homogin Dengan Koefisien Konstan Orde 2

- Dengan Operator D
- Ada 3 jenis penyelesaian umum:
 - Dua akar riil yang berbeda ($r_1 \neq r_2$) → Overdamping
 - Dua akar kompleks konjugat ($r_{1,2} = a \pm jb$) → Underdamping
 - Akar kembar ($r_1 = r_2 = r$) → Critical damping

Didapatkan dari Persamaan Karakteristik

5 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

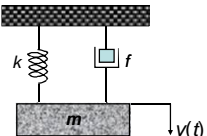
SOAL

- Buatlah latihan, soal-soal pada buku "Advanced Engineering Mathematics", Edwin Kreyszig, pada sesi problems for 2.4 dan 2.5 (hal. 71 – 75).

6 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

Pemodelan: Getaran Bebas

- Perhatikan Sistem mekanik getaran berikut:



Keterangan:
 m = masa benda (kg);
 f = koefisien redaman $\{(N \cdot det)/m\}$;
 k = koefisien kekakuan pegas (N/m)

- Bagaimana **model matematik** dari sistem getaran bebas di atas?
- Bagaimana bentuk **pergeseran** benda yg bermasa m pada sistem itu?

7 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

Pemodelan: Getaran Bebas

- Untuk memperoleh model matematik dari sistem getaran bebas di atas, digunakan hukum Newton ke-2,
- "**Massa x Percepatan = Gaya**",
- Gaya adalah **resultante** dari semua gaya aksi yang bekerja pada benda tersebut.

8 Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



2. PD Orde 2 Non Homogin

- Beberapa cara penyelesaian PD Non Homogin :
 - Metode Operator Differensial
 - Metode Koefisien Tidak Tentu

9

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Metode Operator Differensial

- METODE OPARATOR DIFFERENSIAL
 - Penyelesaian Umum PD (PUPD) utk PD Non Homogin:

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$$
 - $Y_h(t)$: penyelesaian homogin, didapatkan dari PD Homogin
 - $Y_p(t)$: penyelesaian partikular, didapatkan dari PD Non Homogin

10

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Metode Operator Differensial

- Dicontohkan PD Linier Koefisien Konstan Orde 2,
- Bentuk Umumnya:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = F(t)$$

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y = F(t)$$

$$y = \frac{1}{(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)} F(t)$$

$$y = \frac{1}{h(D)} F(t) \dots\dots\dots(1)$$

11

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Metode Operator Differensial

- Penyelesaian PD sangat ditentukan oleh input $F(t)$,
- Secara umum ada 5 jenis input $F(t)$:
 - Fungsi konstan (step function),
 - Fungsi polinomial (polynomial function),
 - Fungsi sinusoida (sinusoidal function),
 - Fungsi eksponensial (exponential function),
 - Kombinasi fungsi eksponensial dengan fungsi sinusoida

12

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input $F(t)$:
- 1. $F(t)=K$ (K =konstan) \rightarrow Step function
Penyelesaian Partikular $Y_p(t) = (K/a_0)$
- 2. $F(t)=e^{-at}$ (a konstan)
Penyelesaian Partikular $Y_p(t) = e^{-at}/h(D)$
 $= e^{-at}/h(-a) \rightarrow$ syarat $h(-a) \neq 0$
Bila $h(-a) = 0$, penye. Partikular :
 $Y_p(t) = (t^n/n!)e^{-at}$, n = orde dari PD

13

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input $F(t)$:
- 3. $F(t)$ =Fungsi sinusoida (ada 2 macam)
3.1. $F(t) = \sin(\omega t)$,

$$Y_p(t) = \frac{\sin \omega t}{h(D)} = \frac{\sin \omega t}{i(D^2)} = \frac{\sin \omega t}{i(-\omega^2)} \rightarrow i(-\omega^2) \neq 0$$

$$\text{Bila } i(-\omega^2) = 0 \Rightarrow Y_p(t) = \frac{-t}{2\omega} \cos \omega t$$

14

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input $F(t)$:
 - 3. $F(t)$ =Fungsi sinusoida (ada 2 macam)
3.2. $F(t) = \cos(\omega t)$,
- $$Y_p(t) = \frac{\cos \omega t}{h(D)} = \frac{\cos \omega t}{i(D^2)} = \frac{\cos \omega t}{i(-\omega^2)} \rightarrow i(-\omega^2) \neq 0$$
- $$\text{Bila } i(-\omega^2) = 0 \Rightarrow Y_p(t) = \frac{t}{2\omega} \sin \omega t$$

15

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

1) $y'(t) + 2y(t) = 4 \rightarrow y(0) = 0$

2) $\frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = -5 \rightarrow i(0) = -10$

3) $3\frac{dv(t)}{dt} + 9v(t) = 18 \rightarrow v(0) = 10$

4) $\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = 2e^{-3t} \rightarrow x(0) = 0$

5) $4\frac{dv(t)}{dt} + 8v(t) = 10e^{-3t} \rightarrow v(0) = 0$

6) $\frac{dp(t)}{dt} + 5p(t) = 2e^{-5t} \rightarrow p(0) = 10$

16

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

- 7) $2 \frac{di(t)}{dt} + 8i(t) = e^{-4t} \rightarrow i(0) = -3$
- 8) $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 7 \frac{di(t)}{dt} + 10i(t) = 20 \rightarrow i(0) = 0; i'(0) = 1$
- 9) $3 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 9 \frac{dv(t)}{dt} + 6v(t) = 36e^{-4t} \rightarrow v(0) = 0; v'(0) = 0$
- 10) $\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 6 \frac{dv(t)}{dt} + 9v(t) = 4e^{-3t} \rightarrow y(0) = 0; y'(0) = 0$
- 11) $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 7 \frac{dx(t)}{dt} + 10x(t) = 3e^{-2t} \rightarrow x(0) = 0; x'(0) = 0$
- 12) $\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + 3 \frac{dp(t)}{dt} + 2p(t) = 5e^{-2t} \rightarrow p(0) = 2; p'(0) = 10$

17

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

- 13) $\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 4 \cos 2t \rightarrow x(0) = 0$
- 14) $5 \frac{dv(t)}{dt} + 10v(t) = 10 \sin 5t \rightarrow v(0) = 0$
- 15) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 25y(t) = 20 \sin 5t \rightarrow y(0) = 5; y'(0) = 2$
- 16) $\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 9v(t) = 18 \cos 3t \rightarrow v(0) = 3; v'(0) = 2$

18

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input $F(t)$:
- $F(t)$ = ramp linier; $F(t) = kt$

$$Y_p(t) = \frac{t}{h(D)} = \frac{t}{(1+Q(D))} = \{1 - Q(D) + Q^2(D) - Q^3(D) + \dots\}t$$

19

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

- Selesaikan persamaan differensial berikut:

- 17) $2 \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = 20t \rightarrow x(0) = 0$
- 18) $\frac{dv(t)}{dt} + 3v(t) = 9t \rightarrow v(0) = 5$
- 19) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 16t \rightarrow y(0) = 5; y'(0) = 2$
- 20) $\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 4v(t) = 20t \rightarrow v(0) = 2; v'(0) = 0$

20

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Metode Operator Differensial

- Jenis-jenis fungsi input $F(t)$:
5. $F(t)$ = damped sinusoidal wave; $F(t) = e^{-at} \sin(\omega t)$

$$Y_p(t) = \frac{e^{-at} \sin(\omega t)}{h(D)} = e^{-at} \left\{ \frac{\sin(\omega t)}{h(D-a)} \right\}$$

21

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Soal: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan operator D:

- Selesaikan PD berikut:

21) $\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 12e^{-2t} \sin 2t \rightarrow x(0) = 5$

22) $5 \frac{dv(t)}{dt} + 25v(t) = 50e^{-3t} \cos 2t \rightarrow v(0) = 0$

23) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = e^{-t} \cos 2t \rightarrow y(0) = 0; y'(0) = 1$

22

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



4. METODE KOEFISIEN TIDAK TENTU

- Penyelesaian homogennya (Y_h) tetap menggunakan Operator D,
- Untuk penyelesaian partikularnya (Y_p) menggunakan **metode koefisien tidak tentu**,
- Lihat **tabel koefisien tidak tentu**,
- Tabel pemisalan Y_p , ditentukan oleh jenis fungsi input $F(t)$ yang digunakan.

23

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Tabel Koefisien Tidak Tentu

F(t)	Pilihan Y_p
ke^{at}	Ce^{at}
$kt^n (n = 0, 1, 2, \dots)$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega t$	$K \cos \omega t + M \sin \omega t$
$k \sin \omega t$	

24

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



METODE KOEFISIEN TIDAK TENTU

- Beberapa bentuk penyelesaian Y_p :
- 1. Jika input $F(t)$ merupakan salah satu jenis yang ada di tabel, maka pilihlah Y_p sesuai dengan pemisalan yang ada pada tabel,
- 2. Jika input $F(t)$ merupakan jumlahan dari fungsi-fungsi input pada tabel, maka pilihlah Y_p yang juga jumlahan dari fungsi-fungsi pemisalan yang bersesuaian,
- 3. Jika input $F(t)$ sama dengan jenis akar karakteristik, maka kalikan pemisalan Y_p dengan variabel ' t ' bila $x(t)$ sama dengan **akar tunggal**, dan kalikan dengan ' t^2 ' bila $x(t)$ sama dengan **akar kembar**.

25

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



METODE KOEFISIEN TIDAK TENTU

- Contoh: Selesaikan PD berikut dengan menggunakan Metode Koefisien Tidak Tentu.

$$1) \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = 8x^2$$

$$2) 5 \frac{d^2v(t)}{dt^2} - \frac{dv(t)}{dt} - 2v(t) = 10 \cos t$$

$$3) \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4y + e^{3t}$$

$$4) \frac{d^2v(t)}{dt^2} - 2 \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = (D-1)^2 y = e^t + 1$$

26

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



SOAL

- Untuk soal-soal di atas, selesaikan dengan metode koefisien tidak tentu (23 soal).

27

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)



Referensi

- Edwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition, John Wiley and Sons, Inc., 2006
- CF Chan Man Fong, D De Kee, P N Kaloni, *Advanced Mathematics for Engineering and Science*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003.

28

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS)

Terima Kasih