Transformasi Fourier Waktu Diskrit

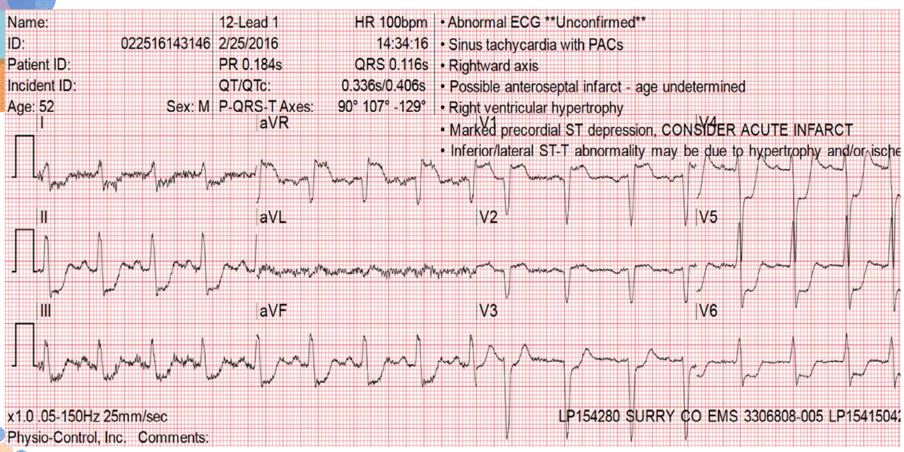
Bahan Ajar Sinyal dan Sistem

Pascasarjana Terapan

P E N S

288

Bagaimanakah cara membedakan sinyal-sinyal dibawah berkorelasi dengan jenis penyakit jantung tertentu?



Menurut anda bagaimana caranya?

Pendahuluan

- Transformasi Fourier didefinisikan sebagai sebuah persamaan kontinyu dalam range tertentu sebagai gabungan dari beberapa persamaan sinus.
- Dasar teori Fourier :

  "Ketika sebuah persamaan kontinyu f(t) didefinisikan pada range terbatas, f(t) merupakan gabungan dari gelombang sinus (sebagai gelombang dasar) dengan frekuensi 1/T dan gelombang sinus dengan periode kelipatan bilangan bulat dari frekuensi tersebut".

Representasi sinyal

- Berdasarkan pada teorema Fourier, gelombang dasar dengan frekuensi angular $\omega_o = 2\pi / T$, sehingga f(t) menjadi :

$$f(nt) = \frac{b_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ b_n \cdot \cos(\omega_o nt) + a_n \cdot \sin(\omega_o nt) \} \qquad (1)$$

dimana : $\frac{b_o}{2}$ adalah bilangan tetap

yang lainnya adalah bagian vibrasi.

Penyederhanaan sinyal menggunakan hukum Euler

- Dengan menggunakan hukum euler, maka persamaan (1) dapat diubah menjadi :

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \cdot \sin\theta \qquad (2)$$

- Sehingga dengan persamaan (2), persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{in\omega_0 t} \qquad (3)$$

Formulasi Fourier dari representasi sinyal 1-D

Dimana $C_n = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ dan $\theta = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n}$

- Persamaan yang digunakan dalam Fourier adalah persamaan yang terbatas oleh waktu T. Jika bergerak dari T ==> menjadi Fourier Transfer.
- Dari persamaan $-\infty$ (3), kita dapat memperoleh nilai variabel Fourier dari fungsi f(t) sebagai berikut :

$$C_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\omega_0 t} \cdot dt \qquad (4)$$

Formulasi Fourier dari representasi sinyal 1-D

- Jika sisi kanan (tanpa 1/T) dinotasikan sebagai Xn, maka:

$$X_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e^{-in\omega_o t}\cdot dt \qquad (5)$$

- Dengan menggunakan persamaan (5), maka persamaan (3) dapat ditulis menjadi :

$$f(t) = \frac{1}{T}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot e^{in\omega_o t} \qquad (6)$$

Formulasi Fourier dari representasi sinyal 1-D

- Persamaan (6) memiliki jarak frekuensi angular yang sama dimana $\omega = \omega_o$ dan n adalah bilangan bulat.
- Jarak antara masing-masing frekuensi angular adalah $\Delta\omega = \omega_o = 2\pi/T$
- Jika $T \to \infty$, $\Delta\omega \to 0$ nilai batas pada persamaan (6) adalah tergantung pada ω dan disimbolkan dengan $X(\omega)$.

$$X(\omega) = \lim_{T\to\infty} X_n \qquad (7)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\cdot dt$$

Formulasi Fourier dari representasi sinyal 1-D

- Pengukuran f(t) dimulai dari t=0 dengan rentang waktu . Data sampling adalah sejumlah N. Jika persamaan (7) diintegrasikan dari t=0 dengan rentang waktu Δt, maka menjadi :

Δt

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k \cdot \Delta t) \cdot e^{-i\omega k \Delta t} \qquad (8)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-i\omega k \Delta t}$$

Formulasi Fourier dari representasi sinyal 1-D

- Dimana k menunjukkan jumlah pengukuran
- $X(\omega)$ dapat dihitung dengan menggunakan $(k = 0,1,2,\ldots,N-1)$. Tetapi karena waktu terbatas $(N \cdot \Delta t)$, maka frekuensi angular ω dapat ditulis sebagai berikut : ω

$$\omega = l \cdot \Delta\omega \qquad (9)$$

$$= 0, \pm\Delta\omega, \pm 2\Delta\omega, \pm 3\Delta\omega, \ldots..$$

Formulasi Fourier dari representasi sinyal 1-D

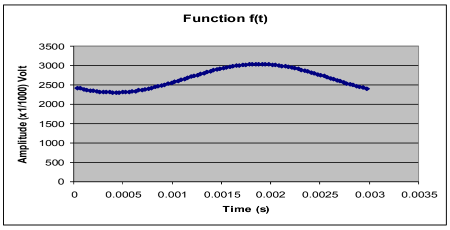
- Karena $X(\omega)=X(l\cdot\Delta\omega)$, itu berarti bahwa $X(\omega)$ tergantung pada perubahan harga ω sehingga $X(\omega)$ dapat dilambangkan dengan X_l.

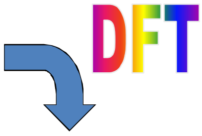
$$X_l=\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-ilkw} \qquad (10)$$

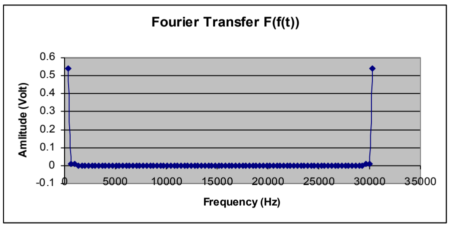
Implementasi riil formula Fourier 1-D

```
for(i=0;i<L;i++)
{
    re=0;im=0;
    for(j=0;j<N;j++)
    {
        re=x[j]*cos(2*pi*j*i/N);
        re+=re;
        im=x[j]*sin(2*pi*j*i/N);
        im+=im;
    }
    X[i]=sqrt(pow(re,2)+pow(im,2));
}
```

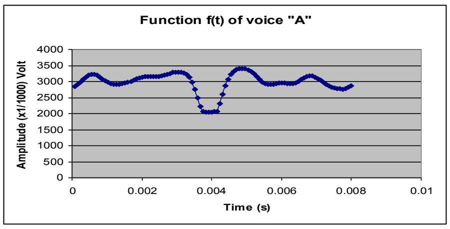
Transformasi Fourier pada sinyal 1-D

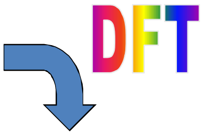


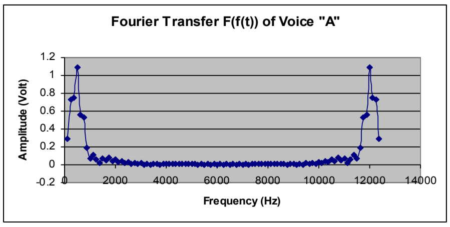




Transformasi Fourier pada sinyal 1-D







Transformasi Fourier pada sinyal 1-D

- Contoh lain:
  - FFT
  - Wavesurfer
  - Formant

Formulasi Fourier dari representasi sinyal 2-D

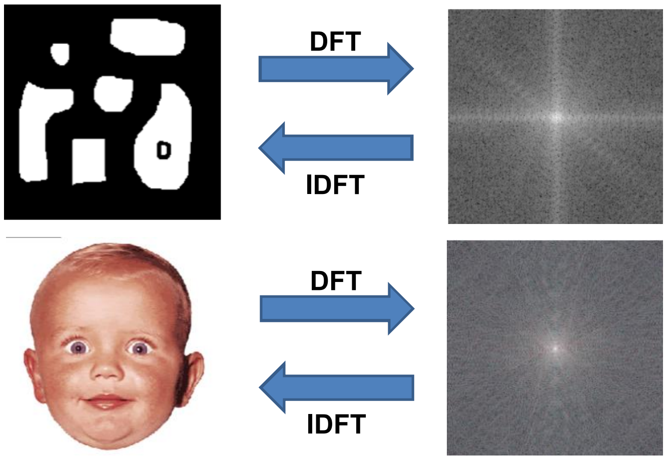
2D Discrete Fourier Transform:

$$F[k,l] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f[m,n] e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)}$$

2D Inverse Discrete Fourier Transform:

$$f[m,n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} F[k,l] e^{j2\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)}$$

Transformasi Fourier pada sinyal 2-D



Transformasi Fourier pada sinyal 2-D

- Contoh lain:
  - DFT → ujicoba contoh gambar lain