Résolution numérique des équations différentielles.

I/ Introduction et position du problème mathématique :

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction donnée, $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(t, y) \longmapsto f(t, y)$$

Problème : $y(t)$ une variable décrite par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \; ; t \in I = [a, b] \\ y(a) = y(t_0) = y_0 \quad (t_0 = a) \end{cases}$$

Le problème est connaissant la valeur initiale $y(a)$ comment déterminer $y(t)$, pour $t \in]a, b]$ quelconque ?

Donc 1) dans les équations différentielles, les inconnues sont des fonctions.

2) Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions y, définies sur $I = [a, b]$, vérifiant l'équation.

3) En général, on définit une équation différentielle comme suit :

Définitions :

1) On appelle équation différentielle, toute relation reliant une fonction $y(t)$ et ses dérivées successives

2) On dit qu'une équation différentielle est d'ordre n sur un intervalle I ssi l'équation fait intervenir les dérivées successive de $y(t)$ jusqu'à l'ordre n $(y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)})$

c-à-d : une équation de la forme :

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ \forall t \in I \end{cases}$$

Exemple:

•) (E_1) $x y''' + (1+x^2) y' + y^4 = y^{(3)}$

est une équation differentielle, d'ordre 3.

•) (E_2) $y' + y = \ln(x) y^2$

est une équation differentielle d'ordre 1.

Remarques:

1) Si y est une fonction du temps, il est d'usage de noté la dérivée première : $\frac{dy}{dt} = y' = \dot{y}$

et l'appeler vitesse.

De même la dérivée seconde : $\frac{d^2y}{dt^2} = y'' = \ddot{y}$ est appelée accélération.

2) Si on a une équation differentielle d'ordre n superieure à 1, on peut ramener le problème à un système linéaire d'équations differentielles de 1^{er} ordre en posant : $y = z_1$

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = z_3 \\ \vdots \\ \frac{dz_{n-2}}{dt} = z_{n-1} \\ \frac{d^{(n)}y}{dt} = \frac{dz_{n-1}}{dt} = f(t, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \end{cases}$$

Exemple : (E) $y''(t) = y'(t) + 2t\, y(t)$ équation du second ordre.

on pose : $y = z_1$ et $y' = z'_1 = z_2$

on aura : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = y'' = z_1 + 2t\, z_2 \end{cases}$

Donc : Si on pose $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$, l'équation (E)

sera sous la forme d'un système linéaire :

$$A(t)\, z(t) = \dot{z}(t)$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$ et $\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} z'_1(t) \\ z'_2(t) \end{pmatrix}$.

3) Dans la suite on s'interessera aux équations différentielles du 1er ordre (dite équation 1re ordre ordinaire)

II / Problème de Cauchy. Théorèmes d'existence et unicité

1. Problème de Cauchy :

on considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad , t \in I$$

L'équation (E) admet en général une infinité de solutions. Pour en sélectionner quelques unes (en particulier une seule) on impose une condition supplémentaire vérifiée par la solution y en un point t_0 de l'intervalle I : $y(t_0) = y_0$.

Définition :

La condition $y(t_0) = y_0$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ donné est appelée condition initiale de l'équation (E).

Scanné avec CamScanner

Définition :

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale

Donc Pour $I = [a, b]$, $t_0 = a$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ donnés on se donne un problème de Cauchy de la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) , & t \in I \\ y(t_0) = y_0 & \leftarrow \text{condition initiale.} \end{cases}$$

Remarque :

. La donnée d'une condition initiale, revient à donner un point (t_0, y_0) par lequel passe le graphe de la fonction solution $y(t)$.

2 - Existence et unicité :

Exemples de problèmes de Cauchy :

Existence et unicité de la solution.

Exemple 1 : Existence et unicité de la solution.

On considère l'équation :

$$(E_1) \begin{cases} y'(t) = 3t - 3y(t) , & \forall t \in]0, +\infty[. \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Résolution de (E_1) : $y'(t) = 3t - 3y(t) \Leftrightarrow y'(t) + 3y(t) = 3t$

a/ Equation homogène :

(E_H) $y'(t) + 3y(t) = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -3$$

$$\Longleftrightarrow \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int -3 dt$$

$\Leftrightarrow \ln|y(t)| = -3t + c.$

$\Leftrightarrow \boxed{y_H(t) = k e^{-3t}, \; k \in \mathbb{R}.}$ solution de (E_H)

* solution particulière de (E_1).

* variation de la constante :

on pose : $y_p(t) = k(t) e^{-3t}$

$\Longrightarrow y_p'(t) = k'(t) e^{-3t} - 3k(t) e^{-3(t)}.$

On remplace dans (E) on aura :

$y_p'(t) + 3y_p(t) = 3t$

$\Leftrightarrow k'(t) e^{-3t} - \cancel{3k(t) e^{-3t}} + \cancel{3k(t) e^{-3t}} = 3t$

$\Longleftrightarrow k'(t) = 3t e^{3t}$

Par partie
$u = t \longrightarrow u' = 1$
$v' = 3e^{3t} \longrightarrow v = e^{3t}$

Donc : $k(t) = \int 3t e^{3t} dt$

$= [t e^{3t}] - \int e^{3t} dt$

$= t e^{3t} - \cancel{3} \frac{e^{3t}}{3}$

D'où $\boxed{k(t) = (t - \frac{1}{3}) e^{3t}}$

Ainsi une solution particulière de (E_1) est

$\boxed{y_p(t) = k(t) e^{-3t} = (t - \frac{1}{3})}$

* solution générale de (E_1) :

$\boxed{y(t) = y_H(t) + y_p(t) = k e^{-3t} + (t - 1/3), \quad k \in \mathbb{R}.}$

* solution unique de (E_1) pour $y(0) = \alpha$.

on a : $y(0) = \alpha \Longleftrightarrow k - 1/3 = 0$

$\Longleftrightarrow k = 1/3$.

Donc : l'équation (E) : $\begin{cases} y'(t) = 3t - y(t) &, t > 0 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$

admet une unique solution :

$$\boxed{y(t) = \frac{e^{-3t}}{3} + \left(t - 1/3\right) \quad , t \in [0, +\infty[}$$

Exemple 2 : non existence :

$$(E_2)\begin{cases} y'(t) = (y(t))^3 &, t > 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

on a $(E_2) \Longleftrightarrow y'(t) - (y(t))^3 = 0$

Donc (E_2) est une équation homogène.

on a : $y'(t) - (y(t))^3 = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'(t)}{(y(t))^3} = 1$

$$\Longrightarrow \int \frac{y'(t)}{(y(t))^3} dt = \int dt$$

$$\Longrightarrow \frac{-1}{2(y(t))^2} = t + c.$$

Donc les solutions de l'équation (E_2) sont.

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\sqrt{c - 2t}} \quad , c \in \mathbb{R}.}$$

or $y(0) = 1 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} = 1 \Longrightarrow c = 1.$

D'où la solution de (E_2) est :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t}}}$$

D'où la solution de (E_2) n'existe pas pour $t \geqslant 1/2$.

Donc L'équation (E_2) montre qu'un problème de Cauchy n'a pas toujours une solution pour $t \geqslant 0$.

On a même $\lim_{t \to 1/2} y(t) = +\infty \Rightarrow$ la solution explose au voisinage de $1/2$

Exemple 3 : Non unicité de la solution :

on considère l'équation :

$$(E_3) \begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)} \quad , t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On aussi (E_3) est une équation homogène dont la solution est donnée par :

$$y'(t) = \sqrt[3]{y(t)} \Longleftrightarrow \frac{y'(t)}{\sqrt[3]{y(t)}} = y'(t)(y(t))^{-1/3} = 1.$$

$$\Longleftrightarrow \int y'(t)\,(y(t))^{-1/3} dt = \int dt$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3}{2}(y(t))^{2/3} = t + c.$$

$$\Longleftrightarrow (y(t))^{2/3} = \frac{2}{3}t + c.$$

$$\Longleftrightarrow (y(t))^2 = \left(2/3\, t + c\right)^3$$

Or $y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

D'où $(y(t))^2 = 8/27\, t^3 \Longleftrightarrow y(t) = \pm\sqrt{8/27\, t^3}$

Donc les trois fonction :

$y_1(t) = 0$, $y_2(t) = \sqrt{\frac{8}{27}t^3}$ et $y_3(t) = -\sqrt{\frac{8}{27}t^3}$

sont solutions de l'équation (E_3)

D'où Pour $t \geqslant 0$ la solution de (E_3) n'est pas unique.

Conclusion :

1) D'après les trois exemples précédents, l'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy ne sont pas toujours assurées.

2) On a aussi des solutions qui peuvent exploser en temps fini

c-à-d : $\exists\, t_1 > 0$ tq : $\lim\limits_{t \to t_1} y(t) = +\infty$.

Donc Pour ces deux raison on cherche une condition necessaire et suffisante sur la fonction $t \longmapsto f(t, y(t))$ pour controler le comportement de la solution du problème de Cauchy sur un intervalle I donné

Définition : (Application Lipschitzienne)

Une fonction $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne de rapport $K > 0$ par rapport à ~~la deuxième~~ variable ssi

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, u, v \in \mathbb{R} :$$

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K |u - v|$$

Pour tout $t \in I$, l'application $f(t, \cdot)$ est k-lipschitzienne.

On obtient ainsi le théorème d'existence et d'unicité suivant

Théorème : (de Cauchy-Lipschitz)

Si f est une application définie sur $I \times \mathbb{R}$ telle que :

i) Pour tout $\in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto f(t, \cdot)$ est continue sur I

2i) Pour tout $t \in I$, il existe $K > 0$ tels que

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R} : |f(t, u) - f(t, v)| < K |u - v|$$

($f(t, \cdot)$ est k-Lipschitzienne

Alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy (équation différentielle).

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \ , \ t \in I \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

admet une unique solution y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ($y \in \mathcal{C}^1(I)$)

•) $y \in \mathcal{C}^1(I) \iff$ y dérivable sur I et la fonction dérivée y' est continue sur I

$\iff$ les fonction y et y' sont continue sur I

<u>Remarque</u>.

Pour étudier numériquement une équation différentielle, on vérifie tout d'abord si le problème vérifie les conditions de Cauchy du théorème précédent

<u>Exemple</u> : 1) On considère le problème de Cauchy.

$$(E_1) \quad \begin{cases} y'(t) = 2t - y(t) \ , \ t \in [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1) Montrer que l'équation (E_1) vérifie les condition de Cauchy.

2) Trouver la solution exacte du problème (E_1).

solution :

on a $(E_1)\begin{cases} y'(t) = 2t - y(t) = f(t, y(t)) & , t\in[0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$

1) on a : $f : [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t, y) \longmapsto f(t,u) = 2t - u.$

•) Pour tout $u \in \mathbb{R}$; l'application $t \overset{[0,1]}{\longmapsto} f(t,u)$

est continue sur $I = [0,1]$

•) Pour tout $t \in [0,1] = I$

$\forall u, v \in \mathbb{R}$: $|f(t,u) - f(t,v)| = |2t - u - (2t - v)|$

$= |v - u|$.

Donc l'application $f(t,\cdot)$ est 1-Lipschitzienne

(Lipschitzienne de rapport $k = 1$)

Donc l'équation (E_1) admet une solution unique pour $(t_0, y_0) = (0,1)$ $(y(t_0) = 1)$

2) Calculons la solution de (E_1) :

On a : $(E_1)\begin{cases} y'(t) = 2t - y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y'(t) + y(t) = 2t \\ y(0) = 1 \end{cases}$

* solution homogène :

l'équation homogène est : (E_H) $y'(t) + y(t) = 0$

$(E_H) \iff \frac{y'(t)}{y(t)} = -1$

$\iff \int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int -\,dt$

$\iff \ln|y(t)| = -t + c.$

$\iff \boxed{y_H(t) = k e^{-t}, k\in\mathbb{R}, \; t\in[0,1]}$

* <u>solution particulière :</u>

  * <u>variation de constante :</u>

on pose : $y_p = k(t)\, e^{-t} \Rightarrow y_p'(t) = k'(t) e^{-t} - k(t) e^{-t}$

on remplace dans (E_1) on aura :

$$y_p'(t) + y_p(t) = 2t \Leftrightarrow k'(t) e^{-t} - \cancel{k(t) e^{-t}} + \cancel{k(t) e^{-t}} = 2t$$

$$\Leftrightarrow k'(t) = 2t\, e^{t}$$

par intégration par partie : $\begin{cases} u = t \longrightarrow u' = 1 \\ v' = e^{t} \longrightarrow v = e^{t} \end{cases}$

on aura : $k(t) = 2\int t\, e^{t} dt = 2\left([uv] - \int v\, dt\right)$

$$= 2\left([t e^{t}] - \int e^{t} dt\right)$$

$$= 2\, e^{t}(t-1)$$

<u>D'où</u> $\boxed{y_p(t) = k(t)\, e^{-t} = 2(t-1) \quad t \in [0,1]}$

* <u>Solution générale de (E_1).</u>

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= y_H(t) + y_p(t) \\ &= k e^{-t} + 2(t-1) \end{aligned} \quad ; \quad t \in [0,1],\ k \in \mathbb{R}}$$

comme $y(0) = 1$, la solution exacte de (E_1) est : $(k = 2)$

$$\boxed{y(t) = 2\left(e^{-t} + t - 1\right), \quad t \in [0,1]}$$

Exemple 2 :

$$(E_2) \begin{cases} y'(t) = \dfrac{-y(t)}{t\ln t} + \dfrac{1}{\ln(t)}, & t \in [e,5] \\ y(e) = e. \end{cases}$$

1) Montrons que (E_2) vérifie les conditions de Cauchy.

On pose : $f(t,u) = \dfrac{u}{t\ln(t)} + \dfrac{1}{\ln(t)}$, $\forall (t,u) \in [e,5] \times \mathbb{R}$.

•) Pour tout $u \in \mathbb{R}$: $t \longmapsto f(t,u) = \dfrac{u}{t\ln(t)} + \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[e,5]$, car :

$\forall t \in [e,5]$, $\ln(t) \neq 0$ et $t\ln(t) \neq 0$

•) Pour tout $t \in [e,5]$.

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}$: $|f(t,u) - f(t,v)| = \left|\dfrac{u}{t\ln t} - \dfrac{v}{t\ln t}\right|$

$= \dfrac{1}{t\ln(t)} |u - v|$.

Or $\forall t \in [e,5]$: $\begin{cases} 1 \leq \ln(t) \leq \ln(5) \\ e \leq t \leq 5 \end{cases}$

Donc : $\dfrac{1}{5\ln 5} < \dfrac{1}{t\ln t} \leq \dfrac{1}{e}$.

D'où $\forall u,v \in \mathbb{R}$: $|f(t,u) - f(t,v)| \leq \dfrac{1}{e} |u - v|$.

c-à-d : Pour tout $t \in [e,5]$, l'application $f(t,\cdot)$ est $\left(\dfrac{1}{e}\right)$ - lipschitzienne.

Par suite d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour $(t_0, y_0) = (e,e)$ l'équation (E_2) admet une solution unique $y \in C^1([e,5])$

2)

2°) Calculons y :

* **Solution homogène :**

$$(E_H) \quad y'(t) = \frac{-y(t)}{t\ln(t)} \iff \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{-1}{t\ln(t)}$$

$$\iff \int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = -\int \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$$

$$\iff \int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = -\int \frac{(\ln(t))'}{\ln(t)}\,dt$$

$$\left(-\ln|\ln(t)| = \ln\left(\frac{1}{|\ln(t)|}\right)\right) \iff \ln(|y(t)|) = -\ln|\ln(t)| + C.$$

$$\iff \boxed{y_H(t) = \frac{k}{\ln(t)}, \quad k \in \mathbb{R}, \ t \in [e,5]}$$

* **Solution particulière :**

on pose : $y_p(t) = \dfrac{k(t)}{\ln(t)} \Rightarrow y_p'(t) = \dfrac{k'(t)\ln(t) - k(t)/t}{(\ln(t))^2}$

$$\Rightarrow y_p'(t) = \frac{k'(t)}{\ln(t)} - \frac{k(t)}{t(\ln(t))^2}.$$

on remplace dans (E_2) on aura :

$$y_p'(t) + \frac{y_p(t)}{t\ln(t)} = \frac{1}{\ln(t)}$$

$$\iff \frac{k'(t)}{\ln(t)} - \cancel{\frac{k(t)}{t(\ln(t))^2}} + \cancel{\frac{k(t)}{t(\ln(t))^2}} = \frac{1}{\ln(t)}$$

$$\Rightarrow k'(t) = 1 \quad \Rightarrow \boxed{k(t) = t}$$

D'où $\boxed{y_p(t) = \dfrac{k(t)}{\ln(t)} = \dfrac{t}{\ln(t)}}$ $t \in [e,5]$

* **solution générale de (E_2) :**

$$\boxed{y(t) = y_H(t) + y_p(t) = \frac{k+t}{\ln(t)}} \quad t \in [e,5], \ k \in \mathbb{R}$$

Comme la condition initiale est : $y(e) = e$.
on aura : $e + k = e \Rightarrow \boxed{k = 1}$

D'où la solution exacte de (E_2) est :

$$\boxed{y(t) = \frac{1+t}{\ln(t)} \ , t \in [e, 5]}$$

Remarque :
En général, on ne peut expliciter la solution exacte d'une équation différentielle que pour des équations différentielle ordinaires très particulière (des équation avec des intégrales à primitives facile à calculer par exemple)
Donc, on cherche des méthodes numériques qui permettent d'approcher les solutions des équations différentielle vérifiant les conditions de Cauchy-lipschitz.

Exemple
* Modélisation d'un circuit électrique.

•) On considère un condensateur qui se charge dans une résistance non linéaire dépendant du courant électrique I
Le circuit est décrit par l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{I}{C\,R(I)} \\ I(t_0) = I_0. \end{cases}$$

I : courant électrique.
C : capacité électrique
R(I) : résistance dépendant du courant

•) Il est claire que cette équation est facile à intégrer (résoudre) si R(I) est constante.

•) En revanche, il devient très difficile de trouver la solution si R(I) varie.

Donc on passe par les méthodes d'intégration numérique pour élaborer une méthode qui permet d'approcher la solution.