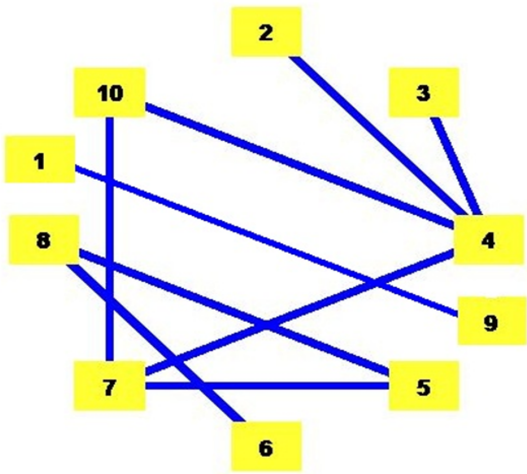
§1. Основные определения

G=(V,E) – неориентированный граф
(без петель и кратных ребер)
V – множество вершин графа
E – множество ребер графа

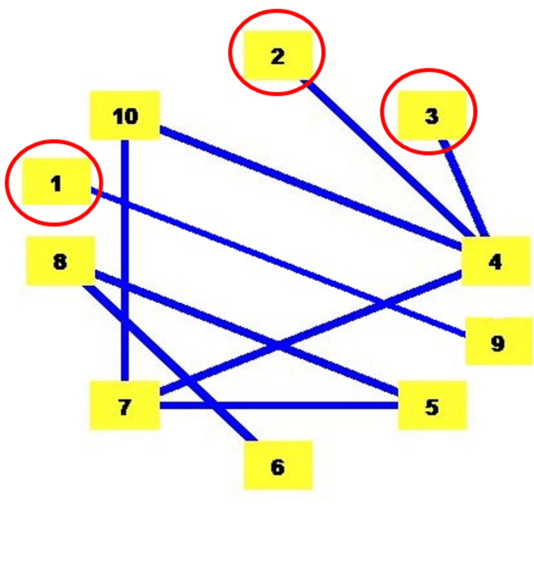


Пример 1.

$V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$E = \{(1,9),(2,4),(3,4),(4,7),(4,10),(5,7),(5,8),(6,8),(7,10\}$

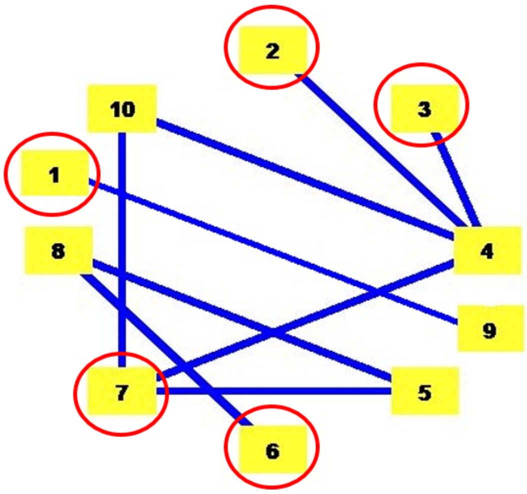
Множество вершин графа *G* называется *независимым*, если никакие две вершины из этого множества не соединены ребром.



Пример 2.

$Q_1 = \{1,2,3\}$ – *независимое множество вершин*

Независимое множество называется *максимальным независимым*, если к этому множеству нельзя добавить никакую другую вершину с сохранением независимости.

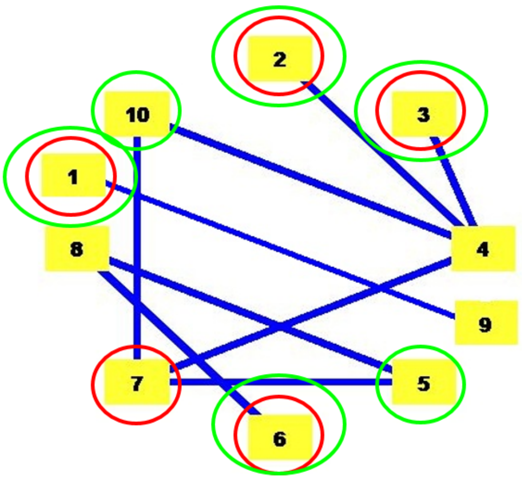


Пример 3.

Q_1 ={1,2,3} – независимое множество вершин

Q_2 ={1,2,3,6,7} – максимальное независимое множество

Максимальное независимое множество (МНМ) наибольшей мощности называется *наибольшим независимым* множеством.



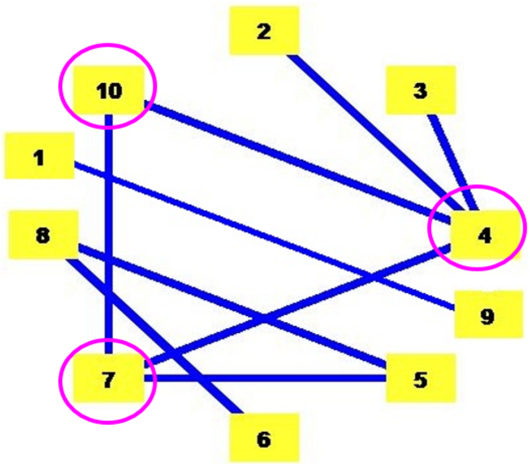
Пример 4.

Q_1 ={1,2,3} – независимое множество вершин

Q_2 ={1,2,3,6,7} – максимальное независимое множество

Q_3 ={1,2,3,5,6,10} – наибольшее независимое множество

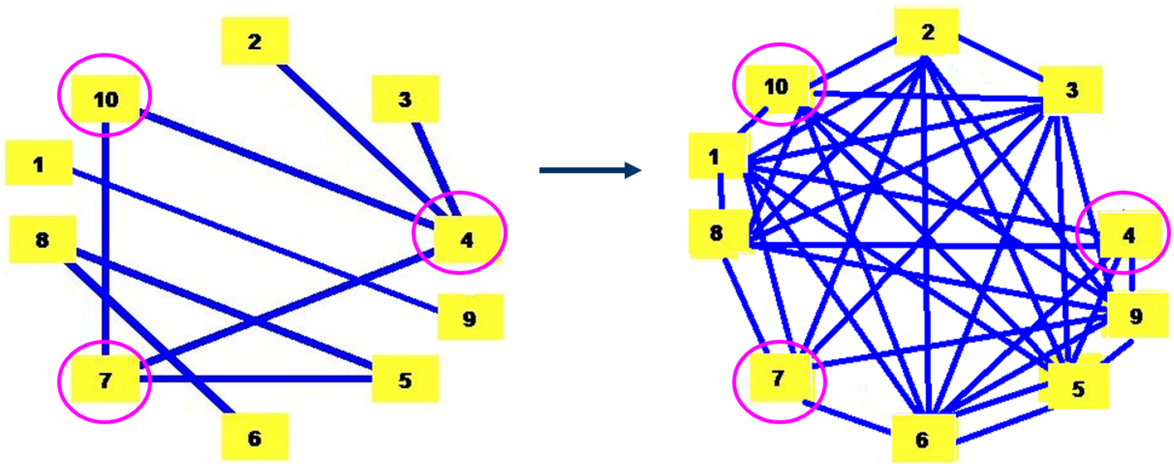
Клика графа – подмножество его вершин, попарно соединенных ребром



Пример 5.

K_1 ={4,7,10} – клика графа

Клика графа представляет собой независимое множество в дополнительном графе.



Замечание:

Кликой называют любой полный подграфа исходного графа. И тогда, по аналогии с независимыми множествами, различают понятия *«клика»*, *«максимальная клика»* и *«наибольшая клика»*.

Мощность наибольшей клики называется *кликовым* числом графа (*плотностью* $\varphi(G)$).
Мощность наибольшего независимого множества называется числом (*вершинной) независимости* графа (числом *внутренней устойчивости* графа, *неплотностью* $\varepsilon(G)$).

В англоязычной литературе:

independent set – независимое множество
maximal independent set – максимальное (по включению) независимое множество
maximum independent set – наибольшее независимое множество,
clique – клика
maximal clique – максимальная (по включению) клика
maximum clique – наибольшая клика

Задача о независимом множестве тесно связана не только с задачей о клике, но и с рядом других задач:

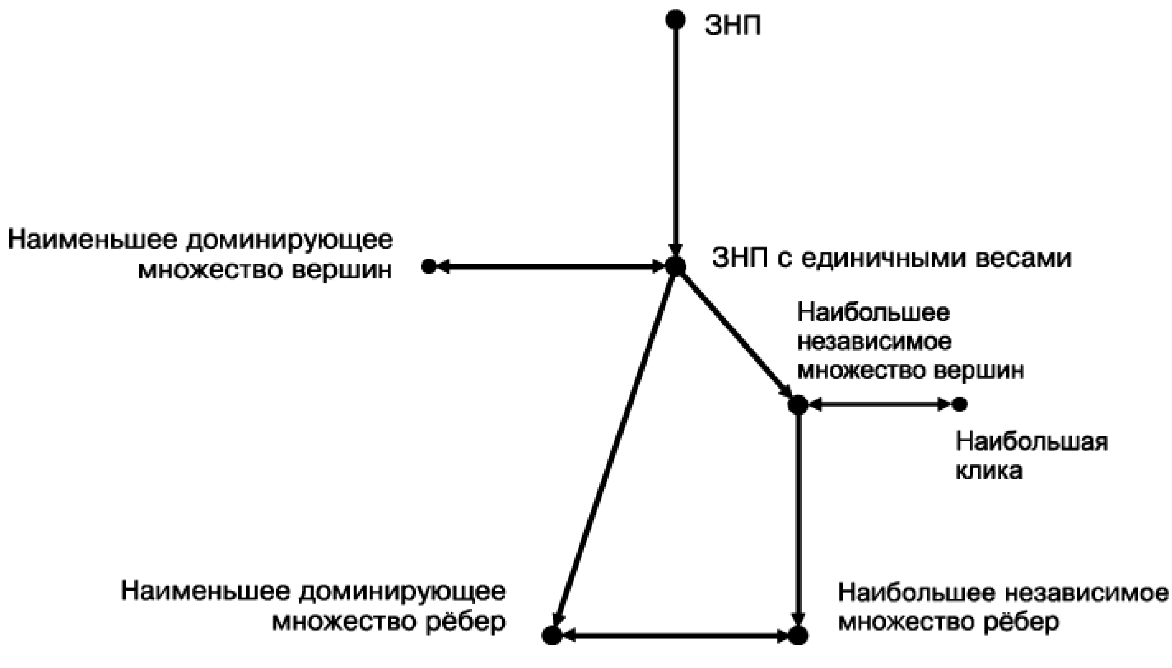


Рис. 10.7. Связь различных задач

Граф Турана

Граф Турана *T*(*n*,*r*) — это граф, образованный разложением *n* вершин на *r* подмножеств, с как можно близким размером, и вершины в этом графе соединены ребром, если они принадлежат разным подмножествам. Граф будет иметь $(n \mod r)$ подмножеств размером $\lceil n/r \rceil$ и $r - (n \mod r)$ подмножеств размером $\lfloor n/r \rfloor$. Таким образом, это полный *r*-дольный граф

$$K_{\lceil n/r \rceil, \lceil n/r \rceil, \ldots, \lfloor n/r \rfloor, \lfloor n/r \rfloor}.$$

Каждая вершина имеет степень либо $n - \lceil n/r \rceil$, либо $n - \lfloor n/r \rfloor$. Число рёбер равно

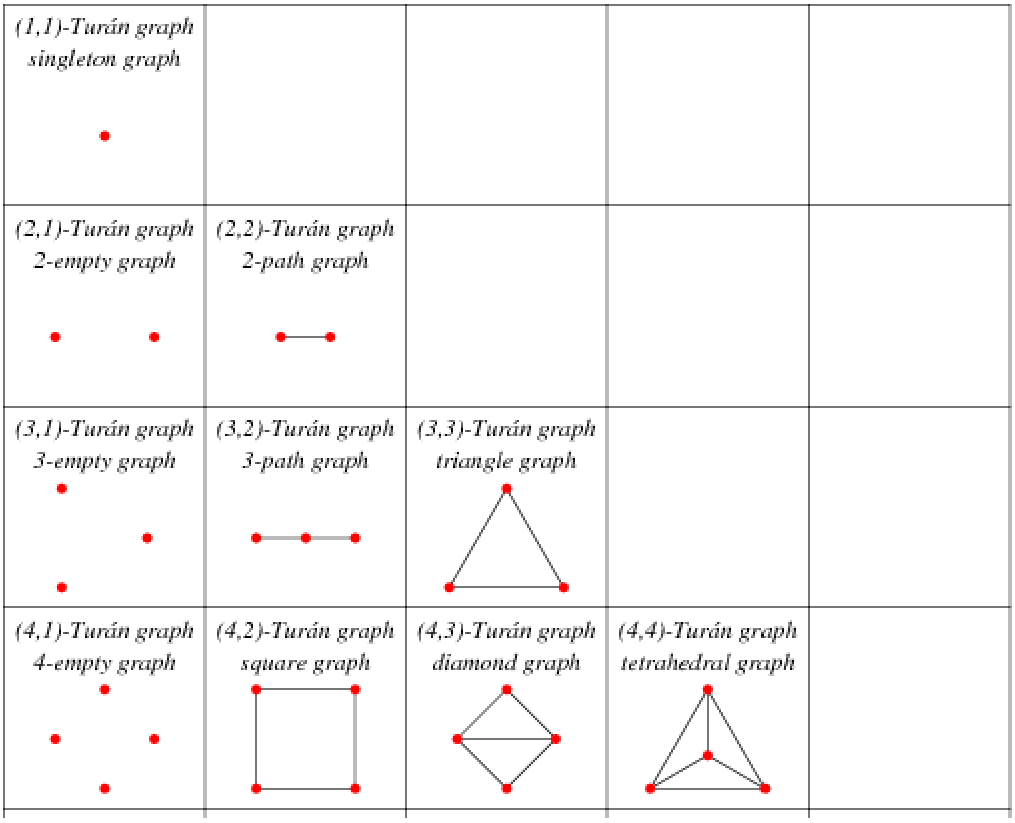
$$\left\lfloor \frac{(r-1)n^2}{2r} \right\rfloor$$

Примечание:

$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ – "пол" x – наибольшее целое, меньшее или равное x.

$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ – "потолок" x – наименьшее целое, большее или равное x.

Примеры: графы Турана



Особые случаи графа Турана.

Граф Турана $T(n,2)$ — это полный двудольный граф

Граф Турана $T(n, \lceil n/3 \rceil)$ имеет $3^a 2^b$ наибольших клик, где $3a + 2b = n$ и $b \le 2$. Каждая наибольшая клика образуется выбором одной вершины из каждой доли. Это число наибольших клик является наибольшим возможным среди всех графов с n вершинами, независимо от числа рёбер в графе (Мун и Мозер, 1965).

Число клик в графе может расти экспоненциально относительно числа вершин. Рассмотрим граф M_n Муна–Мозера с $3n$ вершинами $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, в котором вершины разбиты на триады $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, …, $\{3n - 2, 3n - 1, 3n\}$; M_n не имеет ребер внутри любой триады, но вне них каждая вершина связана с каждой из остальных. Графы M_1, M_2, M_3 показаны на рис. 1.

Легко доказать, что M_n имеет 3^n клик, каждая из которых содержит n вершин. Это верно для M_1, в котором кликами являются сами вершины. Если M_{n-1} имеет 3^{n-1} клик, каждый из которых состоит из $(n - 1)$ вершин, то каждая из трех вершин, добавленных для построения M_n, формирует клику с каждой из 3^{n-1} клик M_{n-1}. Поскольку только они являются новыми кликами, M_n имеет $3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$ клик, каждая из которых состоит из n вершин. Таким образом, число клик в M_n растет экспоненциально относительно числа вершин.