8.6.3. Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры[1] находит кратчайший путь между двумя данными вершинами (узлами) в (ор)графе, если длины рёбер (дуг) неотрицательны.

Алгоритм 8.4. Алгоритм Дейкстры

Вход: орграф $G(V, E)$, заданный матрицей длин дуг C : **array** $[1..p, 1..p]$ **of real**; s и t — вершины графа.

Выход: векторы T : **array** $[1..p]$ **of real**; и H : **array** $[1..p]$ **of** $0..p$. Если вершина v лежит на кратчайшем пути от s к t, то $T[v]$ — длина кратчайшего пути от s к v;

$H[v]$ — вершина, непосредственно предшествующая v на кратчайшем пути.
for v **from** 1 **to** p **do**
  $T[v] := \infty$ { кратчайший путь неизвестен }
  $X[v] := 0$ { все вершины не отмечены }
end for
$H[s] := 0$ { s ничего не предшествует }
$T[s] := 0$ { кратчайший путь имеет длину 0… }
$X[s] := 1$ { …и он известен }
$v := s$ { текущая вершина }
M: { обновление пометок }
for $u \in \Gamma(v)$ **do**
  if $X[u] = 0$ & $T[u] > T[v] + C[v, u]$ **then**
    $T[u] := T[v] + C[v, u]$ { найден более короткий путь из s в u через v }
    $H[u] := v$ { запоминаем его }
  end if
end for
$m := \infty; v := 0$
{ поиск конца кратчайшего пути }
for u **from** 1 **to** p **do**
  if $X[u] = 0$ & $T[u] < m$ **then**
    $v := u; m := T[u]$ { вершина v заканчивает кратчайший путь из s }
  end if
end for
if $v = 0$ **then**
  stop { нет пути из s в t }
end if
if $v = t$ **then**
  stop { найден кратчайший путь из s в t }

[1] Эдсгер Дейкстра (1930–2002).

end if
$X[v] := 1$ { найден кратчайший путь из s в v }
goto M

ЗАМЕЧАНИЕ

Для применимости алгоритма Дейкстры достаточно выполнения *неравенства треугольника*:

$$\forall\, u, v, w \in V \ \ (d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v))\,,$$

которое, очевидно, выполняется, если длины дуг неотрицательны. Если же допускаются отрицательные длины дуг, то алгоритм Дейкстры может оказаться неприменимым. Например, в графе с тремя узлами, s, t и u, если $C[s,t] = 2$, $C[s,u] = 3$ и $C[u,t] = -2$, алгоритм 8.4. не найдет кратчайшего пути длиной 1 и выдаст путь длиной 2.

Обоснование. Для доказательства корректности алгоритма Дейкстры достаточно заметить, что при каждом выполнении тела цикла, начинающегося меткой M, в качестве v используется вершина, для которой известен кратчайший путь из вершины s. Другими словами, если $X[v] = 1$, то $T[v] = d(s,v)$, и все вершины на пути $\langle s, v\rangle$, определяемом вектором H, обладают тем же свойством, то есть

$$\forall\, u \ \ (X[u] = 1 \Longrightarrow T[u] = d(s,u) \ \&\ X[H[u]] = 1)\,.$$

Действительно (по индукции), первый раз в качестве v используется вершина s, для которой кратчайший путь пустой и имеет длину 0 (непустые пути не могут быть короче, потому что длины дуг неотрицательны). Пусть $T[u] = d(s,u)$ для всех ранее помеченных вершин u. Рассмотрим вновь помеченную вершину v, которая выбрана из условия $T[v] = \min\limits_{X[u]=0} T[u]$. Заметим, что если известен путь, проходящий через помеченные вершины, то тем самым известен кратчайший путь. Допустим (от противного), что $T[v] > d(s,v)$, то есть найденный путь, ведущий из s в v, не является кратчайшим. Тогда на этом пути должны быть непомеченные вершины. Рассмотрим первую вершину w на этом пути, такую, что $X[w] = 0$. Имеем $T[w] = d(s,w) \leqslant d(s,v) < T[v]$, что противоречит выбору вершины v. $\square$