Расчетно-графическая работа №6

Студент: Копорушкин Данил

Группа: М-301

Вариант:9

Постановка задачи

Дана краевая задача на отрезке [0,1]:

$$\begin{cases} y'' = y + 5.8 + 2 + 2.9x(1-x) \\ y(0) = 0 \\ y'(1) + y(1) = 2e + 0.9 \end{cases} \qquad (1)$$

Необходимо решить ее методом стрельбы и методом прогонки, используя:

- Метод Тейлора 3 порядка для решения задачи Коши в методе стрельбы
- Метод хорд для решения нелинейного уравнения в методе стрельбы
- Аппроксимация краевых условий в методе прогонки по формуле ЧД по 2 узлам

Точное решение

Найдем точное решение задачи (1):

Соответствующее однородное уравнение: $y''-y=0$

Общее решение однородного: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

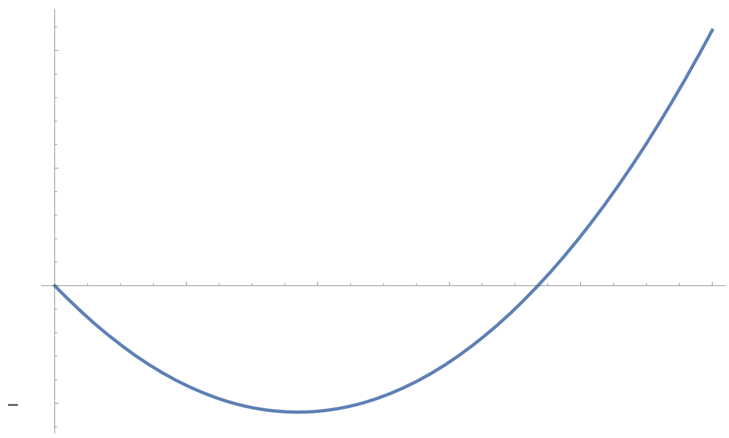
Частное решение неоднородного:$y(x) = 2.9x^2 - 2.9x - 2$

Тогда общее решение: : $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2.9x^2 - 2.9x - 2$

Найдем константы из граничных условий:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2Ce_1 = 2e \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{matrix}$$

Точное решение: $y(x) = e^x + e^{-x} + 2.9x^2 - 2.9x - 2$



Метод прогонки

Применим формулы численного дифференцирования по 2 узлам:

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \qquad y_n^{i} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

Подставим формулы в задачу (1):

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} - h^2 y_i = h^2\left(7.8 + 2.9x_i\left(1 - x_i\right)\right) \\ y_n - y_{n-1} + hy_n = (2e + 0.9)h \end{cases}$$

Перепишем полученную систему:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{i-1} + y_{i+1} + (-h^2 - 2)y_i = h^2\left(7.8 + 2.9x_i\left(1 - x_i\right)\right) \\ y_n(h + 1) - y_{n-1} = (2e + 0.9)h \end{cases}$$

Заметим:

$$\left|-2-h^2\right| = 2 + h^2 > 2$$

|1+h|> -1

То есть выполнено диагональное преобладание, значит метод прогонки осуществим.

Прогоночные коэффициенты:

$$\mu_1 = \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{i+1} = \frac{1}{2 + h^2 - \lambda_i} \qquad \mu_{i+1} = \frac{\mu_i - h^2(7.8 + 2.9x_i(1 - x_i)}{2 + h^2 - \lambda_i}$$

Тогда, $y_n = \dfrac{\mu_n + (2e + 0.9)*h}{1 + h - \lambda_n}$

Метод стрельбы

Сведем задачу (1) к следующей:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y + 7.8 + 2.9x(1 - x) \\ y(0) = 0 \\ z(0) = \mu \end{cases}$$

Решаем задачу Коши методом 3 порядка, основанном на разложение в ряд Тейлора:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\left(x_{i+1} - x_i\right) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} * y_i'' = y_i + z_i * h$$

$$z_{i+1} = z_i + h(y_i + 7.8 + 2.9x_i\left(1 - x_i\right) + \frac{h^2}{2}\left(2.9 - 5.8x_i + y_i + 7.8 + 2.9x_i\left(1 - x_i\right)\right) + \frac{h^3}{6}(- 5.8 + (2.9 - 5.8x_i + y_i + 7.8 + 2.9x_i(1 - x_i)$$

y (0) = 0

z (0) = μ

Для метода хорд делаем пару выстрелов, выбирая μ произвольно для выстрелов

$$\mu_{n+1} = \mu_n - \frac{F\left(\mu_n\right)(\mu_n - \mu_0)}{F\left(\mu_n\right) - F\left(\mu_0\right)}$$ общая формула для метода хорд

Вывод:

Метод стрельбы для задачи (1) получился точнее метода прогонки, так как из-за аппроксимации по 2 узлам метод прогонки дал большую погрешность.