Лабораторная работа №3
«Численные методы решения систем алгебраических уравнений»

Студент: Копорушкин Данил
Группа:МТ-301

Вариант 12

Постановка задачи:

Решить систему линейных уравнений вида ***Ax = b***

методами:

a) Метод Гаусса;
b) Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице;
c) Метод Якоби;
d) Метод Зейделя.

Для методов a), b): прокомментировать результаты решения.

Для методов c),d): проверить сходимость метода; в случае сходимости найти решение с точностью $0.5\cdot10^{-4}$; сравнить количество итераций.

$$A=\begin{pmatrix} -0,2988 & 0,2 & -0,488 \\ -0,1 & 0,4988 & -0,1 \\ 0,563 & -0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1,3619 \\ 0,7801 \\ 0,4093 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусаа:

$$\begin{cases} -0,2988x_1 + 0,2x_2 - 0,488x_3 = -1,3619 \\ -0,1x_1 + 0,4988x_2 - 0,1x_3 = 0,7801 \\ 0,563x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 0,4093 \end{cases}$$

-0,2988	0,2	-0,488	-1,3619
-0,1	0,4988	-0,1	0,7801
0,563	-0,2	0,1	0,4093

Составим новую таблицу коэффициентов:

-0,2988	0,2	-0,488	-1,3619
0	0,4319	0,0633	1,2359
0	0	-0,8454	-2,6628

$$\begin{cases} -0,2988x_1 + 0,2x_2 - 0,488x_3 = -1,3619 \\ 0,4319x_2 + 0,0633x_3 = 1,2359 \\ x_3 = 3,1498 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x1=1,0201 \\ x2=2,3999 \\ x3=3,1498 \end{pmatrix}=\xi$$

$$(A\xi-B)=\begin{pmatrix} -0,00000 \\ -0,00009 \\ -0,00009 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента:

$$\begin{cases} -0{,}2988x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}488x_3 = -1{,}3619 \\ -0{,}1x_1 + 0{,}4988x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}7801 \\ 0{,}563x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}4093 \end{cases}$$

0,563	-0,2	0,1	0,4093
-0,1	0,4988	-0,1	0,7801
-0,2988	0,2	-0,488	-1,3619

0,563	-0,2	0,1	0,4093
0	0,4633	-0,0822	0,8528
0	0,0939	-0,4349	-1,1447

0,563	-0,2	0,1	0,4093
0	0,4633	-0,0822	0,8528
0	0	-0,4182	-1,3176

$$\begin{cases} 0{,}563x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}4093 \\ 0{,}4633x_2 - 0{,}0822x_3 = 0{,}8528 \\ x_3 = 3{,}1506 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x1=1{,}0198 \\ x2=2{,}3997 \\ x3=3{,}1506 \end{pmatrix} = \xi$$

$$(A\xi\text{-}B) = \begin{pmatrix} 0{,}00028 \\ 0{,}00004 \\ 0{,}00001 \end{pmatrix}$$

Вывод: метод Гаусса и метод Гаусса с выбором главного элемента работают, результаты вычислений хорошо согласуются с точностью вычислений.

Метод Якоби:

$$\begin{cases} 0{,}563x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}4093 \\ -0{,}1x_1 + 0{,}4988x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}7801 \\ -0{,}2988x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}488x_3 = -1{,}3619 \end{cases}$$

Построим итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0{,}7269 + 0{,}3552x_2^{(k)} - 0{,}1776x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1{,}5639 + 0{,}2005x_1^{(k)} + 0{,}2005x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2{,}7908 - 0{,}6123x_1^{(k)} + 0{,}4098x_2^{(k)} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3552 & -0{,}1776 \\ 0{,}2005 & 0 & 0{,}2005 \\ -0{,}6123 & 0{,}4098 & 0 \end{pmatrix} = B \qquad \begin{pmatrix} 0{,}7269 \\ 1{,}5639 \\ 2{,}7908 \end{pmatrix} = C$$

Вычислим норму матрицы В:

$\|B\|_1 = max\{0{,}8128; 0{,}765; 0{,}3781\}$=0,8128<1 =>метод Якоби сходится.

Метод Зейделя:

$$\begin{cases} 0{,}563x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}4093 \\ -0{,}1x_1 + 0{,}4988x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}7801 \\ -0{,}2988x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}488x_3 = -1{,}3619 \end{cases}$$

Построим итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0{,}7269 + 0{,}3552x_2^{(k)} - 0{,}1776x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1{,}5639 + 0{,}2005x_1^{(k+1)} + 0{,}2005x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2{,}7908 - 0{,}6123x_1^{(k+1)} + 0{,}4098x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0 \\ -0{,}2988 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 0{,}563 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4988 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}488 \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det(R+(L+D))=0

137⅄^3-34⅄^2-6⅄=0
1)⅄=0
2,3)⅄ комплексные числа по модуля меньше 1

Следовательно, метод Зейделя сходится.

Вывод: метод Гаусса-Зейделя решает систему линейных уравнений быстрее, чем метод Якоби.

Приложение для метода Якоби и Гаусса-Зейделя