

Расчетно-графическая работа №4

Студент: Копорушкин Данил

Группа: МТ-301

Вариант: 9

Постановка задачи:

Дан интеграл $\int_1^2 e^{-x^3} dx$. Необходимо вычислить значение интеграла по двум составным формулам: по формуле средних прямоугольников и формуле 3/8 с шагом 0,1; 0,05; 0,025, оценить погрешность по Рунге и вычислить значение, используя квадратурную формулу Гаусса по 2 узлам.

Формула средних прямоугольников

1) Шаг $h=0,1$

$$n = \frac{2-1}{0.1} = 10 \quad x_i = 1 + i * h = 1 + i * 0.1 \quad \text{где } i = 0, \dots, 10$$

$$I \approx h * \sum_{i=0}^{n-1} f * (x_i + \frac{h}{2}) \approx 0,084983$$

2) Шаг $h=0,05$

$$n = \frac{2-1}{0.05} = 20 \quad x_i = 1 + i * h = 1 + i * 0.05 \quad \text{где } i = 0, \dots, 20$$

$$I \approx h * \sum_{i=0}^{n-1} f * (x_i + \frac{h}{2}) \approx 0,085328$$

3) Шаг $h=0,025$

$$n = \frac{2-1}{0.025} = 40 \quad x_i = 1 + i * h = 1 + i * 0.025 \quad \text{где } i = 0, \dots, 40$$

$$I \approx h * \sum_{i=0}^{n-1} f * (x_i + \frac{h}{2}) \approx 0,085414$$

4) Погрешность

$$R_{h/2} \approx \frac{S_{h/2} - S_h}{3} \approx \frac{0,000345}{3} \approx 0,000115$$

$$R_{h/4} \approx \frac{S_{h/4} - S_{h/2}}{3} \approx 0,0000286666$$

```
{
    class Program
    {
        static double Fx(double x) => Exp(Pow(-x, 3));
        static double Ft(double t) => Exp(Pow(-(0.5 * t + 1.5), 3));
        static double RectangleMethod(double a, double b, double h)
        {
            var result = 0d;
            var n = (b - a) / h;
            for (var i = 1; i <= n; i++)
            {
                var xPrev = a + (i - 1) * h;
                var xCurrent = a + i * h;
                result += Fx((xPrev + xCurrent) / 2);
                xPrev = xCurrent;
                xCurrent = i;
            }
            return result * h;
        }
    }
}
```

```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
Метод средних прямоугольников.
Шаг h = 0,1. Результат: ,084983
Шаг h = 0,05. Результат: ,085328
Шаг h = 0,025. Результат: ,085414

```

Формула 3/8 $h_1=h/3$ (для 0,1 0,05 0,025)

$$\int_1^2 e^{-x^3} dx \approx \frac{3}{8} * h_1 [f(x_0) + f(x_n) + 3[f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + 2[f(x_3) + f(x_6) + \dots + f(x_{n-3}) + f(x_n)]$$

Для шага h=0,1 $\int_1^2 e^{-x^3} \approx 0,0854422$

Для шага h=0,05 $\int_1^2 e^{-x^3} \approx 0,08544232$

Для шага h=0,025 $\int_1^2 e^{-x^3} \approx 0,08544233$

```

{
    static void Main(string[] args)
    {
        double Sum = 0, Sum1 = 0, Sum2 = 0, a = 0, b = 0;
        double x = 1;
        for (int i = 0; i <= 9; i++)
        {
            a = a + func(x + 0.1 / 3) + func(x + 0.2 / 3);
            b = b + func(x + 0.1);
            x = x + 0.1;
        }
        Sum = func(1) + 3 * a + 2 * b - func(2);
        a = 0;
        b = 0;
        x = 1;
        for (int i = 0; i <= 19; i++)
        {
            a = a + func(x + 0.05 / 3) + func(x + 0.1 / 3);
            b = b + func(x + 0.05);
            x = x + 0.05;
        }
        Sum1 = func(1) + 3 * a + 2 * b - func(2);
        a = 0;
        b = 0;
        x = 1;
        for (int i = 0; i <= 39; i++)
        {
            a = a + func(x + 0.025 / 3) + func(x + 0.05 / 3);
            b = b + func(x + 0.025);
            x = x + 0.025;
        }
    }
}

```

```

file:///c:/users/алена/documents/visual studio 20
3/8 0.1: 0,085442205656
3/8 0.05: 0,085442324273
3/8 0.025: 0,085442331662

```

Погрешность

$$R_h \approx \frac{2^p}{2^p - 1} * \left(S_{h/2} - S_h \right) \approx \frac{16}{15} * 0,00000012 = 0,000000128$$

$$R_{h/2} \approx \frac{S_h - S_{h/2}}{15} \approx 0,000000008$$

$$R_{h/4} \approx \frac{S_h - S_{h/2}}{15} \approx 0,00000000066$$

Формула Гаусса

Используем оптимальные узлы и веса на отрезке $[-1,1]$: $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

Сведем исходный интеграл по промежутку $[1,2]$ к интегралу по промежутку $[-1,1]$ с помощью замены переменных $x=at+b$: $\begin{cases} 1 = -a + b \\ 2 = a + b \end{cases} \quad a=0,5; b=1,5$

$$\int_1^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-(0,5t+1,5)^3} dt \approx 0,086175$$

```

1  // прочие файлы
2  // NumericalAnalysis.Program
3
4  {
5
6      static double Fx(double x) => Exp(Pow(-x, 3));
7
8      static double Ft(double t) => Exp(Pow(-(0.5 * t + 1.5), 3));
9
10     static double GaussianQuadrature()
11     {
12         return 0.5 * (Ft(-Sqrt(3) / 3) + Ft(Sqrt(3) / 3));
13     }
14
15     static void Main(string[] args)
16     {
17         const int a = 1;
18         const int b = 2;
19         var steps = new[] { 0.1, 0.05, 0.025 };
20
21         WriteLine();
22         WriteLine("Метод Гаусса.");
23         WriteLine($"Результат: {GaussianQuadrature():#.000000}");
24     }
25 }

```

```

Метод Гаусса.
Результат: .086175
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .

```

Вывод:

Результаты всех 3 методов отличаются совсем немного. Формула 3/8 дала более точный результат, по сравнению с формулой средних прямоугольников.

Метод	Шаг	Значение	Погрешность
средних прямоугольников	0.1	0.084983	
средних прямоугольников	0.05	0,085328	0,000115
средних прямоугольников	0.025	0.085414	0,0000286666
3/8	0.1	0,0854422	
3/8	0.05	0,08544232	0,000000008
3/8	0.025	0,08544233	0,00000000066
Гаусс		0,086175	