Расчетно-графическая работа №4

Студент: Копорушкин Данил

Группа: Мт-301

Вариант: 9

Постановка задачи:
Дан интеграл $\int_1^2 e^{-x^3}\,dx$. Необходимо вычислить значение интеграла по двум составным формулам: по формуле средних прямоугольников и формуле 3/8 с шагом 0,1; 0,05; 0,025, оценить погрешность по Рунге и вычислить значение, используя формулу Гаусса по 2 узлам.

Формула средних прямоугольников

1) Шаг h=0,1

$n = \frac{2-1}{0.1} = 10$ $x_i = 1 + i * h = 1 + i * 0.1$ где i = 0,.., 10

$I \approx h * \sum_{i=0}^{n=9} f * (x_i + \frac{h}{2})\, f$ ≈0,084983

2) Шаг h=0,05

$n = \frac{2-1}{0.05} = 20$ $x_i = 1 + i * h = 1 + i * 0.05$ где i=0,…,20

$I \approx h * \sum_{i=0}^{n=19} f * (x_i + \frac{h}{2})$ ≈0,085328

3) Шаг h=0,025

$n = \frac{2-1}{0.025} = 40$ $x_i = 1 + i * h = 1 + i * 0.025$ где i=0…,40

$I \approx h * \sum_{i=0}^{n=39} f * (x_i + \frac{h}{2})$ ≈0,085414

4) Погрешность

$R_h \approx \frac{2^p}{2^p - 1} * \left(S_{\frac{h}{2}} - S_h\right) \approx \frac{4}{3} * 0{,}000345 \approx 0{,}00046$

$R_{h/2} \approx \dfrac{S_{h/2} - S_h}{3} \approx \dfrac{0{,}000345}{3} \approx 0{,}000115$

$R_{h/4} \approx \dfrac{S_{\frac{h}{4}} - S_{\frac{h}{2}}}{3} \approx 0{,}0000286666$

```
{
    class Program
    {
        static double Fx(double x) => Exp(Pow(-x, 3));
        static double Ft(double t) => Exp(Pow(-(0.5 * t + 1.5), 3));
        static double RectangleMethod(double a, double b, double h)
        {
            var result = 0d;
            var n = (b - a) / h;
            for (var i = 1; i <= n; i++)
            {
                var xPrev = a + (i - 1) * h;
                var xCurrent = a + i * h;
                result += Fx((xPrev + xCurrent) / 2);
                xPrev = xCurrent;
                xCurrent = i;
            }
            return result * h;
        }
```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe

```
Метод средних прямоугольников.
Шаг h = 0,1. Результат: ,084983
Шаг h = 0,05. Результат: ,085328
Шаг h = 0,025. Результат: ,085414
```

Формула 3/8 h1=h/3(для 0,1 0,05 0,025)

$$\int_1^2 e^{-x^3}dx \approx \frac{3}{8} * h1[f(x_{0)} + f(x_n) + 3[f(x_1) + f(x_2) + f x_4) + f(x_5) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + 2[f(x_3) + f(x_6) + \cdots + f(x_{n-3}) + f(x_n)$$

Для шага h=0,1 $\int_1^2 e^{-x^3} \approx 0{,}0854422$

Для шага h=0,05 $\int_1^2 e^{-x^3} \approx 0{,}08544232$

Для шага h=0,025 $\int_1^2 e^{-x^3} \approx 0{,}08544233$

```
{
    static void Main(string[] args)
    {
        double Sum = 0, Sum1 = 0, Sum2 = 0, a = 0, b = 0;
        double x = 1;
        for (int i = 0; i <= 9; i++)
        {
            a = a + func(x + 0.1 / 3) + func(x + 0.2 / 3);
            b = b + func(x + 0.1);
            x = x + 0.1;
        }
        Sum = func(1) + 3 * a + 2 * b - func(2);
        a = 0;
        b = 0;
        x = 1;
        for (int i = 0; i <= 19; i++)
        {
            a = a + func(x + 0.05 / 3) + func(x + 0.1 / 3);
            b = b + func(x + 0.05);
            x = x + 0.05;
        }
        Sum1 = func(1) + 3 * a + 2 * b - func(2);
        a = 0;
        b = 0;
        x = 1;
        for (int i = 0; i <= 39; i++)
        {
            a = a + func(x + 0.025 / 3) + func(x + 0.05 / 3);
            b = b + func(x + 0.025);
            x = x + 0.025;
        }
```

file:///c:/users/алена/documents/visual studio 20

```
3/8 0.1: 0,085442205656
3/8 0.05: 0,085442324273
3/8 0.025: 0,085442331662
```

Погрешность

$$R_h \approx \frac{2^p}{2^p - 1} * \left(S_{\frac{h}{2}} - S_h\right) \approx \frac{16}{15} * 0{,}00000012 = 0{,}000000128$$

$$R_{h/2} \approx \frac{S_{\frac{h}{2}} - S_h}{15} \approx 0{,}000000008$$

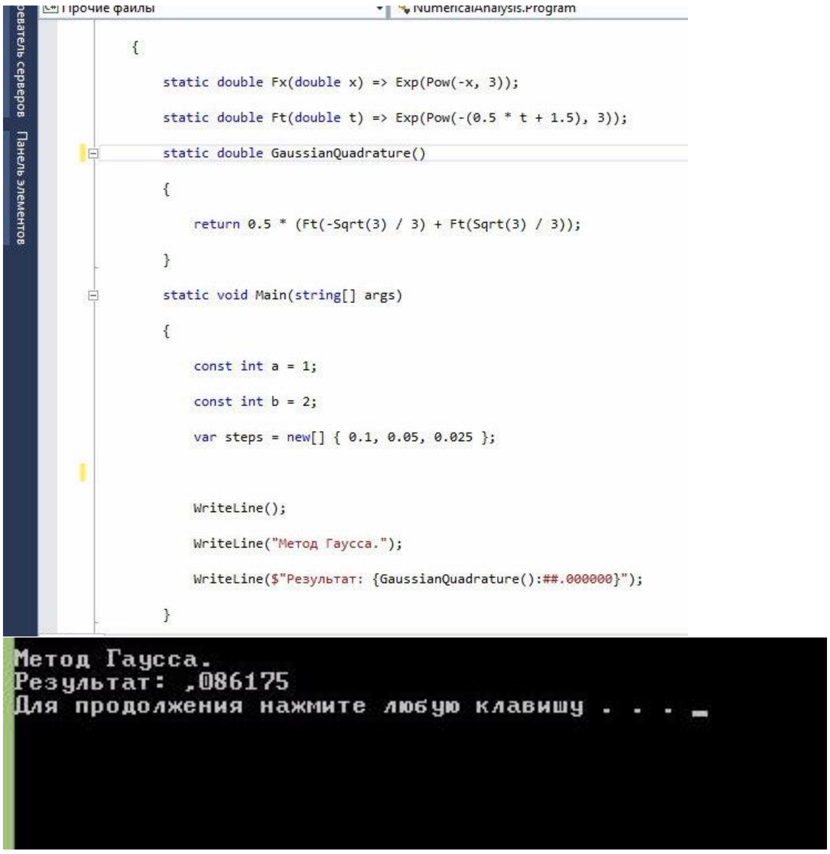
$$R_{h/4} \approx \frac{S_{\frac{h}{4}} - S_{\frac{h}{2}}}{15} \approx 0{,}00000000066$$

Формула Гаусса

Используем оптимальные узлы и веса на отрезке [-1,1]: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

Сведем исходный интеграл по промежутку [1,2] к интегралу по промежутку [-1,1] с помощью замены переменных x=at+b: $\begin{cases} 1 = -a + b \\ 2 = a + b \end{cases}$ a=0,5; b=1,5

$\int_1^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{-(0{,}5t+1{,}5)^3} dt \approx$0,086175



```
Прочие файлы                          NumericalAnalysis.Program
    {
        static double Fx(double x) => Exp(Pow(-x, 3));

        static double Ft(double t) => Exp(Pow(-(0.5 * t + 1.5), 3));

        static double GaussianQuadrature()
        {
            return 0.5 * (Ft(-Sqrt(3) / 3) + Ft(Sqrt(3) / 3));
        }

        static void Main(string[] args)
        {
            const int a = 1;
            const int b = 2;
            var steps = new[] { 0.1, 0.05, 0.025 };


            WriteLine();
            WriteLine("Метод Гаусса.");
            WriteLine($"Результат: {GaussianQuadrature():##.000000}");
        }
```

```
Метод Гаусса.
Результат: ,086175
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Вывод:

Результаты всех 3 методов отличаются совсем немного. Формула 3/8 дала более точный результат, по сравнению с формулой средних прямоугольников.