

Лабораторная работа №3
«Численные методы решения систем
алгебраических уравнений»
Студент: Копорушкин Данил
Группа: МТ-301
Вариант 12

Постановка задачи:

Решить систему линейных уравнений вида $Ax = b$

методами:

- a) Метод Гаусса;
- b) Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице;
- c) Метод Якоби;
- d) Метод Зейделя.

Для методов a), b): прокомментировать результаты решения.

Для методов c), d): проверить сходимость метода; в случае сходимости найти решение с точностью $0.5 \cdot 10^{-4}$; сравнить количество итераций.

$$A = \begin{pmatrix} -0,2988 & 0,2 & -0,488 \\ -0,1 & 0,4988 & -0,1 \\ 0,563 & -0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1,3619 \\ 0,7801 \\ 0,4093 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса:

$$\begin{cases} -0,2988x_1 + 0,2x_2 - 0,488x_3 = -1,3619 \\ -0,1x_1 + 0,4988x_2 - 0,1x_3 = 0,7801 \\ 0,563x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 0,4093 \end{cases}$$

-0,2988	0,2	-0,488	-1,3619
-0,1	0,4988	-0,1	0,7801
0,563	-0,2	0,1	0,4093

Составим новую таблицу коэффициентов:

-0,2988	0,2	-0,488	-1,3619
0	0,4319	0,0633	1,2359
0	0	-0,8454	-2,6628

$$\begin{cases} -0,2988x_1 + 0,2x_2 - 0,488x_3 = -1,3619 \\ 0,4319x_2 + 0,0633x_3 = 1,2359 \\ x_3 = 3,1498 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1=1,0201 \\ x_2=2,3999 \\ x_3=3,1498 \end{pmatrix} = \xi$$

$$(A\xi - B) = \begin{pmatrix} -0,00000 \\ -0,00009 \\ -0,00009 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента:

$$\begin{cases} -0,2988x_1 + 0,2x_2 - 0,488x_3 = -1,3619 \\ -0,1x_1 + 0,4988x_2 - 0,1x_3 = 0,7801 \\ 0,563x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 0,4093 \end{cases}$$

0,563	-0,2	0,1	0,4093
-0,1	0,4988	-0,1	0,7801
-0,2988	0,2	-0,488	-1,3619

0,563	-0,2	0,1	0,4093
0	0,4633	-0,0822	0,8528
0	0,0939	-0,4349	-1,1447

0,563	-0,2	0,1	0,4093
0	0,4633	-0,0822	0,8528
0	0	-0,4182	-1,3176

$$\begin{cases} 0,563x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 0,4093 \\ 0,4633x_2 - 0,0822x_3 = 0,8528 \\ x_3 = 3,1506 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1=1,0198 \\ x_2=2,3997 \\ x_3=3,1506 \end{pmatrix} = \xi$$

$$(A\xi - B) = \begin{pmatrix} 0,00028 \\ 0,00004 \\ 0,00001 \end{pmatrix}$$

Вывод: метод Гаусса и метод Гаусса с выбором главного элемента работают, результаты вычислений хорошо согласуются с точностью вычислений.

Метод Якоби:

$$\begin{cases} 0,563x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 0,4093 \\ -0,1x_1 + 0,4988x_2 - 0,1x_3 = 0,7801 \\ -0,2988x_1 + 0,2x_2 - 0,488x_3 = -1,3619 \end{cases}$$

Построим итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0,7269 + 0,3552x_2^{(k)} - 0,1776x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1,5639 + 0,2005x_1^{(k)} + 0,2005x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2,7908 - 0,6123x_1^{(k)} + 0,4098x_2^{(k)} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,3552 & -0,1776 \\ 0,2005 & 0 & 0,2005 \\ -0,6123 & 0,4098 & 0 \end{pmatrix} = B \qquad \begin{pmatrix} 0,7269 \\ 1,5639 \\ 2,7908 \end{pmatrix} = C$$

Вычислим норму матрицы B:

$$\|B\|_1 = \max\{0,8128; 0,765; 0,3781\} = 0,8128 < 1 \Rightarrow \text{метод Якоби сходится.}$$

Метод Зейделя:

$$\begin{cases} 0,563x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 0,4093 \\ -0,1x_1 + 0,4988x_2 - 0,1x_3 = 0,7801 \\ -0,2988x_1 + 0,2x_2 - 0,488x_3 = -1,3619 \end{cases}$$

Построим итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0,7269 + 0,3552x_2^{(k)} - 0,1776x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1,5639 + 0,2005x_1^{(k+1)} + 0,2005x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2,7908 - 0,6123x_1^{(k+1)} + 0,4098x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0 \\ -0,2988 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0,563 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4988 & 0 \\ 0 & 0 & -0,488 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(R+(L+D))=0$$

$$137\lambda^3 - 34\lambda^2 - 6\lambda = 0$$

$$1) \lambda = 0$$

2,3) λ комплексные числа по модулю меньше 1

Следовательно, метод Зейделя сходится.

Вывод: метод Гаусса-Зейделя решает систему линейных уравнений быстрее, чем метод Якоби.

Приложение для метода Якоби и Гаусса-Зейделя

First app - [C:\Users\darl0\Desktop\First app] - ...\Лаба3.py - PyCharm 2017.2.3

File Edit View Navigate Code Refactor Run Tools VCS Window Help

First app Лаба3.py

```
16 count=0
17 converge = False
18 while not converge:
19     x_new = np.copy(x)
20     for i in range(n):
21         s1 = sum(A[i][j] * x_new[j] for j in range(i))
22         s2 = sum(A[i][j] * x[j] for j in range(i+1, n))
23         x_new[i] = (b[i] - s1 - s2) / A[i][i]
24     count+=1
25     converge = sqrt(sum((x_new[i] - x[i]) ** 2 for i in range(n))) <= eps
26     x = x_new
27 return print('Решение по методу Зейделя: '+str(x)+str(count))
28
29 def jacobi(A,b,ITERATION_LIMIT):
30     count = 0
31     x = np.zeros_like(b)
32     for it_count in range(ITERATION_LIMIT):
33         print("Решение на шаге:", x)
34         x_new = np.zeros_like(x)
35         count+=1
36         for i in range(A.shape[0]):
37             s1 = np.dot(A[i, :i], x[:i])
38             s2 = np.dot(A[i, i+1:], x[i+1:])
39             x_new[i] = (b[i] - s1 - s2) / A[i, i]
40         x = x_new
41         print()
42         print("Решение по методу Якоби :"+str(x)+'str(count))
43
44 jacobi(A,b,ITERATION_LIMIT)
45 seidel(A, b, eps)
```

Лаба3

Решение на шаге: [0.78687891 2.26920147 2.9866058]
Решение на шаге: [1.00262827 2.32046606 3.2389772]
Решение на шаге: [0.97601331 2.41431545 3.12788501]
Решение на шаге: [1.02908453 2.38670776 3.18264409]
Решение на шаге: [1.00955088 2.4083257 3.13883421]
Решение на шаге: [1.02501194 2.39562652 3.15965438]
Решение на шаге: [1.0168026 2.40290022 3.14498307]
Решение на шаге: [1.02199243 2.39831309 3.15299063]
Решение на шаге: [1.01894059 2.40095891 3.14793295]
Решение на шаге: [1.02077884 2.39933311 3.15088593]
Решение на шаге: [1.01967678 2.40029366 3.14909407]
Решение на шаге: [1.02033628 2.39971348 3.15016252]
Решение на шаге: [1.0199404 2.4000599 3.14952093]
Решение на шаге: [1.02017742 2.39985191 3.14990531]
Решение на шаге: [1.02003526 2.39997649 3.14967494]
Решение на шаге: [1.02012043 2.3999018 3.14981304]
Решение на шаге: [1.02006937 2.39994657 3.14973028]
Решение на шаге: [1.02009997 2.39991974 3.14977989]
Решение на шаге: [1.02008163 2.39993582 3.14975015]
Решение на шаге: [1.02009263 2.39992618 3.14976798]
Решение на шаге: [1.02008604 2.39993196 3.14975729]
Решение на шаге: [1.02008999 2.39992849 3.1497637]
Решение на шаге: [1.02008762 2.39993057 3.14975986]
Решение на шаге: [1.02008904 2.39992933 3.14976216]
Решение на шаге: [1.02008819 2.39993007 3.14976078]
Решение на шаге: [1.0200887 2.39992962 3.14976161]
Решение на шаге: [1.02008839 2.39992989 3.14976111]
Решение на шаге: [1.02008857 2.39992973 3.14976141]

Решение по методу Якоби : [1.02008846 2.39992983 3.14976123] 30
Решение по методу Зейделя: [1.0200843 2.39992929 3.14976367] 27

Process finished with exit code 0

Debug TODO Python Console Terminal

Unregistered VCS root detected: The directory C:\Users\darl0 is under Git, but is not registered in the Settings. // Add root Configure Ignore (50 minutes ago)

12:1 CRLF: U 22 09.1