5. fejezet

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

5.1. Alapfogalmak

Egy mátrix jellemzésének különösen hatékony eszköze azoknak az x vektoroknak a meghatározása, amelyeket a mátrixszal való szorzás egy önmagával párhuzamos vektorba visz, azaz amelyekre $Ax = \lambda x$.

A sajátérték és a sajátvektor fogalma. Az előző paragrafus példái azt mutatják, hogy sok kérdés vezet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ alakú egyenletre.

5.1. DEFINÍCIÓ: SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR. Azt mondjuk, hogy a λ szám az \mathbf{A} mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla \mathbf{x} vektor, melyre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen \mathbf{x} vektorokat az \mathbf{A} mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak nevezzük.

5.2. PÉLDA: SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR. Könnyen ellenőrizhatő, hogy az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak a -1 egy sajátértéke, és (2,1) az egyik hozzátartozó sajátvektora, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrix egy másik sajátértéke 2, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ha x egy sajátvektor, akkor minden nemnulla konstansszorosa is, ugyanis

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$. Ennél több is igaz:

5.3. ÁLLÍTÁS: A SAJÁTVEKTOROK ALTEREI. Ha az $\bf A$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ -hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\bf A - \lambda \bf I$ nullterével.

BIZONYÍTÁS. A nem nullvektor \mathbf{x} pontosan akkor egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha kielégíti az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet, azaz az $\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletet, vagyis ha megoldása a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek. Ez pedig épp azt jelenti, hogy \mathbf{x} eleme $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ nullterének.

5.4. DEFINÍCIÓ: SAJÁTALTÉR. A négyzetes ${\bf A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor alkotta alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

5.5. PÉLDA: SAJÁTALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz tartozó sajátalterének bázisát!

MEGOLDÁS. Először ellenőrizzük, hogy a 2 sajátérték-e! Ehhez meg kell mutatni, hogy az $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Hozzuk az együtthatómátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel rang $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 1$, ezért az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer szabad változóinak száma 2, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a sajátaltér egy bázisa a (-6,1,0) és (-1,0,1) vektorokból áll.

Karakterisztikus polinom. Láttuk, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ egyenletnek pontosan akkor van a zérusvektortól különböző megoldása, ha a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Ez a 4.51. tétel szerint pontosan akkor igaz, ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \tag{5.1}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy λ pontosan akkor sajátérték, ha kielégíti az (5.1) egyenletet. Ezt az egyenletet az $\bf A$ mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük. Ha $\bf A$ egy $n\times n$ -es mátrix, akkor az egyenlet bal oldala a determináns kifejtése után egy n-edfokú polinom, melyet karakterisztikus polinomnak nevezünk.

5.6. PÉLDA: KARAKTERISZTIKUS POLINOM FELÍRÁSA. Határozzuk meg az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & e^3 & \pi \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. A 2×2 -es mátrixok karakterisztikus polinomját a mátrix nyomával és determinánsával is ki tudjuk fejezni:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$
$$= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$
$$= \lambda^2 - \operatorname{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A}.$$

 ${\bf A}~{\bf B}$ mátrix karakterisztikus polinomjának felírásából az is leolvasható, hogy a háromszögmátrixok karakterisztikus polinomjának alakját nem befolyásolják a főátlón kívüli elemek:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & e^3 & \pi \\ 0 & 1 - \lambda & x \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3.$$

A C mátrix karakterisztikus polinomja azt sejteti, hogy minden karakterisztikus egyenlethez könnyen konstruálható mátrix, melynek az a karakterisztikus egyenlete:

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ c & b & a - \lambda \end{bmatrix}$$
$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & a - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c.$$

Az előző feladat egyik tanulságát külön állításban is megfogalmazzuk:

5.7. ÁLLÍTÁS: HÁROMSZÖGMÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEI. Háromszög mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

BIZONYÍTÁS. Ha **A** háromszögmátrix, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ is, és háromszögmátrix determinánsa megegyezik főátlóbeli elemeinek szorzatával. Eszerint az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix karakterisztikus egyenlete

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0$$

aminek a gyökei a_{ii} (i = 1, ..., n). Így ezek az **A** sajátértékei.

Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása. Az előző paragrafusokban leírtak alapján egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása két lépésben elvégezhető:

- 1. megoldjuk a $\det(\mathbf{A} \lambda \mathbf{I}) = 0$ karakterisztikus egyenletet, ennek gyökei a sajátértékek,
- 2. minden λ sajátértékhez meghatározzuk az $\mathbf{A} \lambda \mathbf{I}$ nullterének egy bázisát, az általa kifeszített altér nemzérus vektorai a λ -hoz tartozó sajátvektorok.

5.8. PÉLDA: AZ ÖSSZES SAJÁTÉRTÉK ÉS SAJÁTVEKTOR MEGHATÁROZÁSA. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. Az első lépés a karakterisztikus egyenletet felírása és megoldása. A kiszámítandó determináns háromszögalakú, így értéke a főátlóbeli elemek szorzata:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda (2 - \lambda)^2$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei, és így az ${\bf A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1=0,$ $\lambda_2=\lambda_3=2.$

Tekintsük először a $\lambda_1=0$ esetet. $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$ nullterének meghatározásához redukált lépcsős alakra hozzuk az $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$ mátrixot:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ennek megoldása $x_1 = t$, azaz az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\lambda_1=0$ saját
értékhez tartozó sajátaltér az (1,0,0) vektor által kifeszített altér.

Tekintsük ezután a $\lambda_2=\lambda_3=2$ esetet. Meghatározzuk az $\mathbf{A}-2\mathbf{I}$ mátrix nullterét.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Ennek az (egy egyenletből álló) egyenletrendszernek a megoldása: $x_2=s,$ $x_3=t,$ $x_1=(s+t)/2,$ azaz

$$\begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\lambda_2=\lambda_3=2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(\frac{1}{2},1,0)$ és az $(\frac{1}{2},0,1)$ vektorok által kifeszített altér.

Az $n \times n$ -es mátrixok karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Egy ilyen egyenlet megoldására $n \leq 4$ esetén van megoldóképlet, ezért ezeket az egyenleteket – például egy komputer algebra program segítségével – meg tudjuk oldani. Egyébként vagy szerencsénk van, és az egyenlet olyan alakú, amilyenhez vannak gyors megoldási lehetőségek, vagy csak közelítő megoldás megtalálására van esély.

 ${\bf 5.9.}$ PÉLDA: MAGASABBFOKÚ KARAKTERISZTIKUS EGYENLET. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$
$$= (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda) + 24 - 12(1 - \lambda) - 4(2 - \lambda)$$
$$= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6)$$

E harmadfokú egyenlet megoldására használhatunk számítógépet, vagy például a függelékben megtalálható Rolle-féle gyöktételt. Eszerint a karakterisztikus egyenlet $-(\lambda+1)^2(\lambda-6)=0$, így gyökei $\lambda_1=\lambda_2=-1$ és $\lambda_3=6$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ esetben

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ennek megoldása

$$\begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz a -1 sajátértékhez tartozó sajátalteret a (-1,1,0) és a (-1,0,1) vektorok feszítik ki.

A $\lambda_3 = 6$ esetben

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2\\ 2 & -5 & 2\\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & -2/3\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 & -\frac{2}{3}x_3 = 0\\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0. \end{cases}$$

Ennek megoldása a törtek alkalmazását elkerülő $x_3=3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_3=6$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a (2,2,3) vektor feszíti ki.

5.10. TÉTEL: KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEKHEZ TARTOZÓ SAJÁTVEKTOROK. Ha $\lambda_1,\ \lambda_2,\dots$ λ_k különböző sajátértékei az $n\times n$ -es $\mathbf A$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf x_1,\ \mathbf x_2,\dots$ $\mathbf x_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

BIZONYÍTÁS. ???

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei. Ha valóselemű mátrixot vizsgálunk, megeshet, hogy a karakterisztikus egyenletnek vannak komplex gyökei. Mivel a valós számok egyúttal komplexek is, a valós elemű mátrixot tekinthetjük komplex eleműnek is, ekkor viszont a karakterisztikus egyenlet komplex gyökeit is sajátértéknek tekinthetjük. Ebben az esetben a komplex sajátértékhez komplex elemű sajátvektor fog tartozni.

5.11. PÉLDA: KOMPLEX SAJÁTÉRTÉKEK ÉS KOMPLEX ELEMŰ SAJÁTVEKTOROK. Határozzuk meg a komplex elemű

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

A $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ egyenlet gyökei $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Először vizsgáljuk a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértéket:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x - iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az y=t paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisa az (i,1) vektorból áll

A $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátérték esetén

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x + iy = 0.$$

Ennek az egyenlet
(rendszer)nek a megoldása az $\boldsymbol{y}=t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ saját
értékhez tartozó sajátalteret a (-i,1) sajátvektor feszíti ki.

Lineáris transzformációk sajátértékei. Mivel minden $\mathbf{A} \in \mathbb{T}^{n \times n}$ mátrixnak megfelel egy $A: \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ lineáris transzformáció, ezért a sajátérték, sajátvektor és sajátaltér fogalma lineáris transzformációkra is átvihető. Később látni fogjuk, hogy az így definiált sajátértéksajátvektor-fogalom általánosabb körülmények között is használható.

5.12. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTVEKTORA. Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla ${\bf x}$ vektor, melyre $L{\bf x}=\lambda{\bf x}$. Az ilyen ${\bf x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak nevezzük.

Ha a lineáris transzformáció $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vagy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, mely valamilyen egyszerű geometriai transzformációt valósít meg, akkor néha a transzformáció mátrixának ismerete nélkül is könnyen meghatározhatjuk a sajátértékeket és sajátvektorokat.

- **5.13.** PÉLDA: LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTVEKTORA. Adjuk meg pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva az alábbi lineáris leképezések sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket.
- (a) a sík (vektorainak) tükrözése egy (origón átmenő) egyenesre;
- (b) a sík (vektorainak) merőleges vetítése egy (origón átmenő) egyenesre;
- (c) a tér elforgatása egy origón átmenő egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;
- (d) a tér merőleges vetítése egy síkra.

MEGOLDÁS. Az előző fejezetben, így a 4.34. példában bizonyítottakhoz hasonlóan látható, hogy mindegyik feladatbeli transzformáció lineáris.

- (a) Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere a tengellyel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.
- (b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre hasonlóan az előző esethez helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a 0-vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.
- (c) A tér π egész számú többszörösétől különböző szöggel való elforgatása egy egyenes körül a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és semelyik másikat sem viszi a saját skalárszorosába, így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyes párhuzamos vektorokból áll.
- (d) A tér merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a 0 vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

Sajátértékek és a mátrix hatványai.

5.14. TÉTEL: MÁTRIX HATVÁNYAINAK SAJÁTÉRTÉKEI ÉS SAJÁTVEKTORAI. Ha λ az \mathbf{A} mátrix egy sajátértéke, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az \mathbf{A}^n mátrixnak. (Természetesen ha n negatív, akkor az \mathbf{A} -nak invertálhatónak kell lennie.)

5.15. TÉTEL: MÁTRIX INVERTÁLHATÓSÁGA ÉS A 0 SAJÁTÉRTÉK. AZ **A** mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

BIZONYÍTÁS. A pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, de ez ekvivalens azzal, hogy $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$, azaz 0 nem sajátértéke **A**-nak.

5.16. TÉTEL: MÁTRIX HATVÁNYAINAK HATÁSA. Tegyük fel, hogy λ_1 , $\lambda_2,\ldots\lambda_k$ sajátértékei az $n\times n$ -es $\mathbf A$ mátrixnak, és hogy $\mathbf x_1,\ldots\mathbf x_k$ a hozzájuk tartozó sajátvektorok. Ha egy n-dimenziós $\mathbf v$ vektor előáll a sajátvektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + c_k \mathbf{x}_k,$$

akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m \mathbf{v} = c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \ldots + c_k \lambda_m^m \mathbf{x}_k.$$

5.2. Diagonalizálhatóság

Mind bizonyos problémák megértésében, mind a gyakorlati alkalmazásokban fontos lehet, hogy egy lineáris leképezés mátrixát milyen bázisban írjuk fel. Nagyon egyszerű például azoknak a lineáris leképezéseknek a kezelése, amelyeknek mátrixa valamely bázisban diagonális.

Hasonlóság.

5.17. DEFINÍCIÓ: HASONLÓSÁG. Azt mondjuk, hogy az $n \times n$ -es \mathbf{A} és \mathbf{B} mátrixok hasonlóak, ha létezik olyan invertálható \mathbf{C} mátrix, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C}.$$

Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Például $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \left(\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right).$$

Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$ összefüggés ekvivalens az $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$ összefüggéssel, amit még egyszerűbb lehet ellenőrizni. Példánk esetében

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

5.18. TÉTEL: HASONLÓSÁG TULAJDONSÁGAI. Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor

- (a) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$.
- (b) $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\mathbf{B}),$
- (c) megegyezik ${\bf A}$ és ${\bf B}$ karakterisztikus polinomja, így sajátértékei is.

Diagonalizálhatóság.

5.19. DEFINÍCIÓ: DIAGONALIZÁLHATÓSÁG. Az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik olyan diagonális \mathbf{D} és egy invertálható \mathbf{C} mátrix, hogy

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}.$$

5.20. TÉTEL: DIAGONALIZÁLHATÓSÁG SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE. Az $n \times n$ -es $\bf A$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\bf A$ sajátértékeiből, $\bf C$ a sajátvektoraiból áll.

BIZONYÍTÁS. Ha **A** hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz létezik egy olyan **C** invertálható mátrix, amelyre $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, akkor **C**-vel balról szorozva az $\mathbf{CD} = \mathbf{AC}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$ a sajátvektorokból álló mátrix, és $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, akkor

$$[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] egin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n],$$

ugyanis a bal oldali mátrix *i*-edik oszlopa $\lambda_i \mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{A}\mathbf{x}_i$, amik megegyeznek, hisz λ_i épp az \mathbf{x}_i sajátvektorhoz tartozó sajátérték.

5.21. PÉLDA: MÁTRIX DIAGONALIZÁLÁSA. Diagonalizálható-e az 5.8. példabeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix?

MEGOLDÁS. Az **A** mátrix sajátértékeit és sajátvektorait meghatároztuk az 5.8. példában. Mivel $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=2,$ a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1,0,0),\ (1/2,1,0)$ és (1/2,0,1), és ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ezért **A** hasonló a **D** diagonális mátrixhoz, ahol

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez könnyen igazolható a $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ egyenlőség ellenőrzésével:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vagy a CD = AC összefüggés ellenőrzésével:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tárgymutató

additív inverz, 111 adjumgált, 170 afin altér, 66 alakzat egyenletrendszere, 32 also háromszögmátrix, 124 altér, 64 alfin, 66 aluksordulás, 72 atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bövített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diamenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 ifop, 69 formulamátrix, 82 Gauss-módszer, 52 Gauss-módszer, 52 dauss-Jordan-módszer, 56 gyűrű, 137 dháromszögmátrix, 98 hipernátrix, 99 hipersík, 41 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bizisoszlop, 51 implicit, 32 invertálható, 112 irányított szög, 19 irányított szög, 19 irányított szög, 19 irányított szökasz, 10 irányvektor, 33 liSO 31-11, 11 blokkmátrix, 99 jól kondicionált, 70 Jacobi-iteráció, 77 jobbrendszer, 19 Jordan-mérték, 156 hossza, 27 kódszó, 27 kidvektorok, 10 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 koordináták, 22 koordinátak, 22 koordinátak, 22 koordinátak, 22 koordinátak, 52 koordinátak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris főoszlop, 51	általános megoldás, 53	fejléc, 85
adjungált, 170 affin altér, 66 alakzat egyenletrendszere, 32 alapvektor, 22 alsó háromszögmátrix, 124 altér, 64 affin, 66 alulcsordulás, 72 atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 blokkmátrix, 99 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus	1142 : 111	felső háromszögmátrix, 124
affin altér, 66 alakzat egyenletrendszere, 32 alapvektor, 22 alsó háromszögmátrix, 124 altér, 64 affin, 66 aluksordulás, 72 atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 eukideszi norma, 11 explicit, 33 főátló, 45 főélem, 51		
alakzat egyenletrendszere, 32 alayvektor, 22 alsó háromszögmátrix, 124 altér, 64 affin, 66 alulcsordulás, 72 atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadi		
alapvektor, 22 alsó háromszögmátrix, 124 altér, 64 affin, 66 affin, 66 alulcsordulás, 72 atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 32 háromszögmódszer, 12 Hamming-kód, 59 hipermátrix, 99 hipermátrix, 91 implicit, 32 imávrott szög, 19 irányított szög, 19 irányított szakasz, 10 irányvektor, 33 lipermátrix, 12 irányított szög, 19 irányított szakasz, 10 irányvektor, 33 lipermátrix, 45 eirányított szög, 19 irányított szakasz, 10 iránytott szög, 19 irányított szakasz, 10 irányvektor, 33 lipermátrix, 45 irányított szög, 19 irányított szög, 19 irányított szakasz, 10 iránytett szakasz, 10 iránytett szákasz, 10 iránytett szakasz, 10 iránytett szákasz, 10 iránytett, 23 kóttett szákasz,		formulamátrix, 82
alsó háromszögmátrix, 124 altér, 64 affin, 66 alulcsordulás, 72 atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bizisfelbontás, 143 bizisoszlop, 51 bövített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diamenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris line	,	G (1 F)
altér, 64	1	
affin, 66 alulcsordulás, 72 atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bövített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokmátrix, 99 bidetrmináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 elépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51 háromszögmódszer, 12 Hamming-kód, 59 hipermátrix, 99 hipermátrix, 99 inpermátrix, 99 hipermátrix, 99 inpermátrix, 32 implicit, 32 implict, 32 implicit, 32 implicit, 32 implicit, 32 implicit, 32 implict, 32 implicit, 32 implicit, 32 implicit, 32 implict, 41 implicit, 41 implicit, 41 implicit, 42 irányítotation, implicit, 42 irán		
alulcsordulás, 72 atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bövített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokmátrix, 99 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diamenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elemí mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elemí sorműveletek, 51 elemí mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 eleníőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 lépcsős alak, 51 lépcsős alak, 51 lebesgue-mérték, 156 lineáris egyenerték, 156 lineáris egyenerték, 156 lineáris		
atommátrix, 82 bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 börített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bivektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diamenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elemí sorműveletek, 51 elelenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		gyűrű, 137
bázis, 22 hipermátrix, 99 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 implicit, 32 bázisozlop, 51 invertálható, 112 bővített mátrix, 45 irányított szög, 19 balrendszer, 19 irányított szakasz, 10 irányvektor, 33 bitvektor, 27 iso 31-11, 11 blokkmátrix, 99 csoport, 13 Jacobi-iteráció, 77 jobbrendszer, 19 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diidikus szorzat, 97 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elemí rátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elení rátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elení rátrix, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		háromazörmádazor 19
bázis, 22 altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bövített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletremdszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elemi sorműveletek, 51 elemérső összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 limpirát, 45 lineáris egyenemátrix, 99 hipermátrix, 32 hipersík, 41 simplicit, 32 invertálható, 112 irányított szög, 19 irányított szök, 15 kötit valtozó, 52 kötött változó, 52 kötött változó, 52 kötött változó, 52 kötött véktorok, 10 kígyó, 123 kód hossza, 27 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris	atommatrix, 82	
altéré, 141 standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 implicit, 32 imvertálható, 112 irányított szakasz, 10 irányított szákasz, 10 irányított szakasz, 10 irányított szákasz, 10 irányított száksz, 10 irányít	hógic 99	
standard, 141 bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diamenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 32 invertálható, 112 invertálható, 112 irányított szög, 19 irányított szöksz, 10 irányított szöks, 10 irányított szöksz, 10 irányított szöks, 12 irányított szöksz, 10 irányított szöks, 12 köráltt, 11 linéariskex, 45 kötöttor, 15 kötött változó, 52 kötött változó, 52 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód hossza, 27 kódvektor, 27 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordinátak, 22 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		-
bázisfelbontás, 143 bázisoszlop, 51 bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 32 invertálható, 112 invertálható, 112 irányított szögs, 19 irányított szakasz, 10 irányított szögs, 19 irányított szögs, 19 irányított szöks, 12 irányított szögs, 19 irányított szöks, 12 irányított szöks, 13 kod 12 irányított szöksz, 10 irányított szögs, 19 irányított szöks, 13 köt 31-11, 11 blokkmátrix, 70 Jacobi-iteráció, 77 jobbrendszer, 19 determináts, 45 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód hossza, 27 kódszó, 27 kódvektor, 27 kerekítés, 72 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		inpersix, 41
bázisoszlop, 51 bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 didimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51 ekvivalens linvertálható, 112 irányított szög, 19 irányított szóg, 19 irányított szákasz, 10 irányított szóg, 19 irányított szóg, 19 irányított szóg, 19 irányított szóg, 19 irányított szákasz, 10 irányított szóg, 19 irányított szákasz, 10 irányított szóg, 19 irányított szákasz, 10 irányítot szákasz, 10 irányított szákasz, 10 irányítotte szákasz, 10 irányítot szákaszá, 10 irányítotte szákaszá, 10 irányítottekto, 77 isákaszá		implicit, 32
bővített mátrix, 45 balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diamenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51 lineáris eigyenerrenték, 156 lineáris lineáris eigyenletrenték, 156 lineáris lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris lineáris lirányított szög, 19 irányított szakasz, 10 irányvektor, 33 ISO 31-11, 11 Jochan-mérték, 156 irávit változó, 52 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód együtthatómátrix, 45 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód együtthatómátrix, 45 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód együtthatómátrix, 45 kötött változó, 52 kötött változó, 72 kötött változó, 52 kötött változó, 72 kötött változó, 72 kötött változó, 72 kötött változó, 72 kötött változó, 7		- :
balrendszer, 19 BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 expilott szakasz, 10 irányított szakasz, 10 irányvektor, 33 IsO 31-11, 11 jól kondicionált, 70 jobbrendszer, 19 dottor, 19 dottor, 19 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód együtthatómátrix, 45 hossza, 27 kódszó, 27 kódvektor, 27 egységmátrix, 97 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 komplanáris, 45 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 elenísorműveletek, 51 elenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		•
BCD-kód, 27 bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51 lineáris egyenerrendszerek, 156 lineáris erányvektor, 33 liso 31-11, 11 blokondicionált, 70 jól kondicionált, 70 kötött változó, 52 kötött változó, 52 kötött véktorok, 10 kígyó, 123 kód hossza, 27 kódszó, 27 kódvektor, 27 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 koordináták, 22 koordinátat, 22 koordinátatengely, 22 elepesgue-mérték, 156 lineáris		
bitvektor, 27 blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		
blokkmátrix, 99 csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diamenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lordinátik, 70 Jacobi-iteráció, 77 jobbrendszer, 19 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód kódzó, 27 kódszó, 27 kódvektor, 27 kédvektor, 27 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 koordináták, 22 elelnőrző összeg, 31 evklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		
csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 euklideszi norma, 11 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lordan-mérték, 156 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód kód ektör, 27 kódszó, 27 kódvektor, 27 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 elelnőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		100 01 11, 11
csoport, 13 determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diamenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51	biokkmatrix, 99	jól kondicionált, 70
determináns, 157 rendje, 157 diád, 95 diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 jobbrendszer, 19 Jordan-mérték, 156 kötött változó, 52 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód hossza, 27 kódszó, 27 kódvektor, 27 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51	csonort 13	
determináns, 157 Jordan-mérték, 156 rendje, 157 diád, 95 kötött változó, 52 diadikus szorzat, 95 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód együtthatómátrix, 45 hossza, 27 egyenletrendszer kódszó, 27 numerikusan instabil, 70 kódvektor, 27 egységmátrix, 97 kerekítés, 72 Einstein-konvenció, 107 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 lineáris helyettesítéseké, 87 elemi mátrix, 98 konstans tag, 42 elemi sorműveletek, 51 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordinátat engely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	esoport, 10	jobbrendszer, 19
rendje, 157 diád, 95 kötött változó, 52 diadikus szorzat, 95 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód együtthatómátrix, 45 hossza, 27 egyenletrendszer kódszó, 27 numerikusan instabil, 70 kódvektor, 27 egységmátrix, 97 kerekítés, 72 Einstein-konvenció, 107 kibővített mátrix, 45 ekvivalens kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 lineáris helyettesítéseké, 87 elemi mátrix, 98 konstans tag, 42 elemi sorműveletek, 51 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordináta, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	determináns, 157	
diád, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 kötött vektorok, 10 kígyó, 123 kód hossza, 27 kódszó, 27 kédvektor, 27 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 koordináták, 22 koordináták, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51		
diadikus szorzat, 95 dimenzió, 146 együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elelnőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 köd hossza, 27 kódszó, 27 kédszó, 27 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 euklideszi norma, 11 koordinátak, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51		kötött változó, 52
együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 kód hossza, 27 kódszó, 27 kédvektor, 27 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		kötött vektorok, 10
együtthatómátrix, 45 egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 elemőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 főátló, 45 főelem, 51 egyenletrendszerek, 44 kódszó, 27 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordináták, 22 elépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris	dimenzió, 146	kígyó, 123
egyenletrendszer numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51 egyenletrendszerek, 44 kódvektor, 27 kódvektor, 27 kérekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 koordináták, 22 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordináta, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		kód
numerikusan instabil, 70 egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 főátló, 45 főelem, 51 kódvektor, 27 kerekítés, 72 kerekítés, 72 kibővített mátrix, 45 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 koordináták, 22 koordináták, 22 elemi sorműveletek, 51 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris		
egységmátrix, 97 Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 kordinátak, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51 kibővített mátrix, 45 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris	egyenletrendszer	kódszó, 27
Einstein-konvenció, 107 ekvivalens átalakítások, 45 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51 kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 komplanáris, 13 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 ekoordináták, 22 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris	numerikusan instabil, 70	kódvektor, 27
ekvivalens kifeszített altér, 65 kollineáris vektor, 11 lineáris egyenletrendszerek, 44 komplanáris, 13 kompozíció előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 lineáris helyettesítéseké, 87 elemi mátrix, 98 konstans tag, 42 elemi sorműveletek, 51 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordináta, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris	egységmátrix, 97	kerekítés, 72
átalakítások, 45 kollineáris vektor, 11 lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 kompozíció előjeles terület, 155 lineáris helyettesítéseké, 87 elemi mátrix, 98 konstans tag, 42 elemi sorműveletek, 51 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordináta, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris	Einstein-konvenció, 107	kibővített mátrix, 45
lineáris egyenletrendszerek, 44 előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 főátló, 45 főelem, 51 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 koordináta, 22 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris	ekvivalens	kifeszített altér, 65
előjeles aldetermináns, 166 előjeles terület, 155 elemi mátrix, 98 elemi sorműveletek, 51 ellenőrző összeg, 31 euklideszi norma, 11 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 főelem, 51 kompozíció lineáris helyettesítéseké, 87 konstans tag, 42 koordináták, 22 koordinátat, 22 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 lineáris	átalakítások, 45	kollineáris vektor, 11
előjeles terület, 155 lineáris helyettesítéseké, 87 elemi mátrix, 98 konstans tag, 42 elemi sorműveletek, 51 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordináta, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	lineáris egyenletrendszerek, 44	komplanáris, 13
elemi mátrix, 98 konstans tag, 42 elemi sorműveletek, 51 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordináta, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	előjeles aldetermináns, 166	kompozíció
elemi sorműveletek, 51 koordináták, 22 ellenőrző összeg, 31 koordináta, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	előjeles terület, 155	lineáris helyettesítéseké, 87
ellenőrző összeg, 31 koordináta, 22 euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	elemi mátrix, 98	konstans tag, 42
euklideszi norma, 11 koordinátatengely, 22 explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	elemi sorműveletek, 51	koordináták, 22
explicit, 33 lépcsős alak, 51 főátló, 45 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	ellenőrző összeg, 31	koordináta, 22
lépcsős alak, 51 főátló, 45 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	euklideszi norma, 11	koordinátatengely, 22
főátló, 45 Lebesgue-mérték, 156 főelem, 51 lineáris	explicit, 33	
főelem, 51 lineáris		-
,		
főoszlop, 51 egyenlet, 42		
	tőoszlop, 51	egyenlet, 42

TÁRGYMUTATÓ 178

egyenletrendszer, 44 kombináció, 14	pivotelem, 51 PLU-felbontás, 132
lineáris egyenletrendszer homogén, 44	precedencia-elv, 108
inhomogén, 44	rang, 61, 146
megoldása, 44	reakció egyenlet, 81
lineáris helyettesítés, 87	redukált lépcsős alak, 55
lineáris leképezés, 152	ritka mátrix, 45
lineáris transzformáció, 96	rosszul kondicionált, 70
lineárisan összefüggő, 16	
lineárisan független, 16, 138	Sarrus-szabály, 165
LU-felbontás, 128	skalár, 10
	skaláris szorzat, 17
mátrix, 45, 89	sorlépcsős alak, 51
diagonális, 90	soronként domináns főátló, 79
elemi, 98	sorvektor, 46
ellentettje, 91	standard bázis, 141 sudoku, 104
ferdén szimmetrikus, 93	szabad változó, 52
négyzetes, 90	szabad vartozo, 52 szabad vektor, 11
rangja, 61	szimmetrikus mátrix, 93
soronként domináns főátlójú, 79	szimultán egyenletrendszer, 58
szimmetrikus, 93 szinguláris, 112	szinguláris, 112
sztöchiometriai, 82	sztöchiometriai mátrix, 82
mátrixok tere, 90	,
mátrixszorzat	túlcsordulás, 72
diádok összegére bontása, 101	test, 137
mátrixtranszformáció, 96	test (algebrai), 29
maradékosztály, 28	torzor, 13
megoldás	
általános, 53	vektor, 10
általános, 53 partikuláris, 53	összeg, 12
	összeg, 12 abszolút értéke, 11
partikuláris, 53	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25 oszlopvektor, 23, 46	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25 oszlopvektor, 23, 46 osztási maradék, 28	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25 oszlopvektor, 23, 46 osztási maradék, 28 párhuzamos vektor, 11	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25 oszlopvektor, 23, 46 osztási maradék, 28 párhuzamos vektor, 11 parallelogramma	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25 oszlopvektor, 23, 46 osztási maradék, 28 párhuzamos vektor, 11 parallelogramma előjeles területe, 155	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25 oszlopvektor, 23, 46 osztási maradék, 28 párhuzamos vektor, 11 parallelogramma	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19
partikuláris, 53 megoldásvektor, 44 megoldható, 44 merőleges alterek, 147 multiplikatív inverz, 112 nilpotens, 113 norma euklideszi, 11 nullosztó, 106 nulltér, 64 nullvektor, 11 numerikusan instabil, 70 numerikusan stabil, 70 origó, 11, 22 ortogonális, 25 ortonormált bázis, 25 ortonormált bázis, 25 oszlopvektor, 23, 46 osztási maradék, 28 párhuzamos vektor, 11 parallelogramma előjeles területe, 155 paritásbit, 30	összeg, 12 abszolút értéke, 11 azonos irányú, 11 egyirányú, 11 ellenkező irányú, 11 hossza, 11 kollineáris, 11 koordinátás alakja, 22 párhuzamos, 11 vektoregyenlet, 32 vektori szorzat, 19