

4.3 Esercizi di verifica

Esercizio 4.1. A e B sono due eventi tali che

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3, \quad \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = 0.2, \quad \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0.1.$$

Calcolare $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A|B)$.

Esercizio 4.2. Vengono estratti a caso, senza reinserimento, due elementi dall'insieme $\{1, 2, \dots, 9\}$. Poniamo

$$A_i \equiv \{X_i \text{ pari}\}, \quad i = 1, 2.$$

Utilizzando la formula delle probabilità composte, calcolare le probabilità degli eventi $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap \overline{A_2}$, $\overline{A_1} \cap A_2$, $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

Esercizio 4.3. Nel lancio di due dadi, qual è la probabilità condizionata che nessuno dei due punteggi sia superiore a 4 sapendo che la somma dei due punteggi è uguale a 7?

Esercizio 4.4. Abbiamo due urne: l'urna U contiene una sola pallina gialla ed r palline rosse; l'urna V contiene una sola pallina rossa ed r palline gialle. Viene scelta a caso una fra queste due urne e ne estraiamo (ancora a caso) una pallina.

(a) Calcolare la probabilità dell'evento

$$E \equiv \{\text{la pallina estratta è gialla}\}$$

(b) Condizionatamente all'osservazione dell'evento E , qual è la probabilità di aver eseguito le estrazioni dall'urna U ?

Esercizio 4.5. Nel gioco della roulette, qual è la probabilità condizionata del risultato *pair*, dato che si è ottenuto il risultato *passee*? (Ricordiamo che il risultato $\{0\}$, non è *passee*, ne' *manque*, ne' *pair*, ne' *unpair*).

Esercizio 4.6. Un'urna contiene 3 palline rosse e 7 bianche; si esegue un'estrazione casuale e se ne reinserisce una pallina di colore opposto a quella estratta; si procede quindi ad una successiva estrazione casuale.

(a) Qual è la probabilità di una pallina rossa alla seconda estrazione?

(b) Sapendo che le palline estratte nelle due successive estrazioni sono dello stesso colore, qual è la probabilità che siano entrambe bianche?

Esercizio 4.7. Sto organizzando un appuntamento per una cena fra amici per questa sera. Non riesco a raggiungere Emilio per telefono e chiedo a Aldo e a Bruno di provare ad avvertirlo. Aldo e a Bruno proveranno separatamente ad avvertirlo, Aldo inviandogli un messaggio di posta elettronica e Bruno inviando un messaggio sul telefono cellulare. Dò le seguenti valutazioni di probabilità

$$\mathbb{P}(\{\text{Emilio leggerà la sua posta elettronica}\}) = 0.7$$

$$\mathbb{P}(\{\text{Emilio riceverà il messaggio sul suo cellulare}\}) = 0.8$$

$$\mathbb{P}(\{\text{Emilio leggerà la posta elettronica e riceverà il messaggio sul cellulare}\}) = 0.56.$$

(a) Come devo valutare la probabilità che Emilio venga all'appuntamento?

(b) Dato che Emilio effettivamente si presenta all'appuntamento, come devo valutare la probabilità che egli abbia letto la sua posta elettronica?

Esercizio 4.8. Relativamente a due eventi A , B , suppongo di aver assegnato le probabilità

$$\mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A|B).$$

Come devo valutare la probabilità che si sia verificato A , condizionatamente all'informazione che si è verificato almeno uno fra i due eventi A e B ?

Esercizio 4.1. A e B sono due eventi tali che

$$P(A \cap B) = 0.3, \quad P(A \cap \bar{B}) = 0.2, \quad P(\bar{A} \cap B) = 0.1.$$

Calcolare $P(A \cup B)$, $P(A|B)$.

$$P(A \cap B) = 0,3$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,2$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,1$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0,5$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,4$$

$$1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6$$

$$2) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \left(\frac{0,3}{0,4} \right) = 0,75$$

Esercizio 4.2. Vengono estratti a caso, senza reinserimento, due elementi dall'insieme $\{1, 2, \dots, 9\}$. Poniamo

$$A_i \equiv \{X_i \text{ pari}\}, \quad i = 1, 2.$$

Utilizzando la formula delle probabilità composte, calcolare le probabilità degli eventi $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap \bar{A}_2$, $\bar{A}_1 \cap A_2$, $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$$

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}$$

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}$$

Esercizio 4.3. Nel lancio di due dadi, qual è la probabilità condizionata che nessuno dei due punteggi sia superiore a 4 sapendo che la somma dei due punteggi è uguale a 7?

$$P(\text{"NON MAGGIORE DI 4"} | \text{"SOMMA UGUALE A 7"}) = \frac{P(X_1 \leq 4) \cdot P(X_2 \leq 4) \cdot P(X_1 + X_2 = 7)}{P(X_1 + X_2 = 7)} = \frac{2/36}{6/36} = 0,33$$

Esercizio 4.4. Abbiamo due urne: l'urna U contiene una sola pallina gialla ed r palline rosse; l'urna V contiene una sola pallina rossa ed r palline gialle. Viene scelta a caso una fra queste due urne e ne estraiamo (ancora a caso) una pallina.

(a) Calcolare la probabilità dell'evento

$$E \equiv \{\text{la pallina estratta è gialla}\}$$

a)

$$\mathbb{P}(E) = \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r+1} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{r+1} \right) \right]$$

✓

(b) Condizionatamente all'osservazione dell'evento E , qual è la probabilità di aver eseguito le estrazioni dall'urna U ?

b) $U \equiv \{\text{le palline e' estratte dall'urna } U\}$

$$\mathbb{P}(U|E) = \frac{\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(E|U)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r+1} \right)}{\left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r+1} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{r+1} \right) \right]} = \dots$$

✓