

Data della Lezione	Esercizi/Esempi da Svolgere	Riferimenti	Argomento Principale
<b>Mercoledì 20 Nov</b>	Discussione degli Esercizi della Lezione 7 (con varianti e aggiunte)	File <b>ESERCIZI-LEZ-7SOLUZIONI.pdf</b> <i>DA FARE</i>	Densità discreta congiunta, Valore atteso di $g(X, Y)$ .
<b>Giovedì 21 Nov</b>	Esempio sulla Lotteria	<b>Esempio 9.5</b> (pagg. 121/122 di [SN])	Valore atteso.
	Esempio sul Gioco al Raddoppio	<b>Esempio* 9.7</b>	Gioco favorevole e sfavorevole.
<b>Venerdì 22 Nov</b>	Esercizio sulla distribuzione congiunta (punti i, ii, iii, iv e calcolo di valore atteso e varianza del punto v)	<b>Esercizio 2 a risposta aperta</b> del 16 luglio 2020 (File <b>CP-INFORM-16-luglio-2020-corretto.pdf</b> )	Distribuzione congiunta, Valore atteso di una trasformazione $Z = g(X, Y)$ (Proposizione 9.13, Esempio 9.8).
	Analisi dei controesempi (senza esercizio numerico specifico, ma da comprendere bene)	<b>CONTROESEMPIO 1 e 2</b>	La non implicazione: $\text{Cov}(X, Y) = 0 \nRightarrow X \text{ e } Y \text{ indipendenti}$ .
<b>Mercoledì 27 Nov</b>	Completamento dell'esercizio precedente (punto 5(a))	<b>Esercizio 5(a)</b> del 16 luglio 2020 (File <b>CP-INFORM-16-luglio-2020-corretto.pdf</b> )	Disuguaglianza di Chebyshev.
	Esempi sulla Disuguaglianza di Chebyshev	<b>Esempio*10.6 e Esempio*10.7</b> in [SN]	Disuguaglianza di Chebyshev.
<i>DA FARE</i>	Esercizio su carte (Bastoni e Denari)	Dal libro di <b>ROSS-18-dic-2024.pdf / ROSS-14nov2024.pdf</b>	Distribuzione congiunta Ipergeometrica (HyP).
	Esercizio sui Transistor Difettosi	<b>Esercizio 6 dal Capitolo 6 del ROSS</b>	Densità discreta congiunta di $N_1$ e $N_2$ .
	Esercizio teorico sulla funzione $f(t)$	(Non numerico)	Il valore atteso minimizza $f(t) = E[(X - t)^2]$ .

### Esercizio preliminare e riassuntivo

Sia  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$

e sia  $\mathbb{P}$  definito tramite  $p$ , come  $\mathbb{P}(E) = \sum_{i: \omega_i \in E} p(\omega_i)$ , dove la funzione  $p$  è definita da  $p: \Omega \rightarrow [0, 1]$ ,  $\omega_i \mapsto p(\omega_i) = K i^2$

(i) Calcolare  $K$  (si ricordi che  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ )

Sia  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$X(\omega_1) = 3, \quad X(\omega_2) = 2, \quad X(\omega_3) = 1, \quad X(\omega_4) = 4, \quad X(\omega_5) = 2,$$

$$X(\omega_6) = 3, \quad X(\omega_7) = 1, \quad X(\omega_8) = 1, \quad X(\omega_9) = 3, \quad X(\omega_{10}) = 4,$$

(ii) Trovare la partizione generata da  $X$  e calcolare la densità discreta di  $X$ , tramite la formula

$$p_X(x_k) := \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{i: X(\omega_i) = x_k} p(\omega_i)$$

(iii) Scrivere il valore atteso di  $X$  tramite la formula  $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^N X(\omega_i) p(\omega_i)$

(iv) Scrivere il valore atteso di  $X$  tramite la formula  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_X(x_k)$

e verificare che l'espressione al punto (iii) e al punto (iv) danno luogo allo stesso valore.

### Esercizio 7.1

Indichiamo con  $X_1, \dots, X_5$  i 5 numeri estratti su una ruota del lotto (si estrae senza reinserimento da un'urna contenente i numeri  $\{1, 2, \dots, 90\}$ ) e sia inoltre  $X$  il valore più alto fra  $X_1, \dots, X_5$ .

Calcolare  $\mathbb{P}(X \leq k)$  e  $\mathbb{P}(X = k)$  per  $k = 1, 2, \dots, 90$ .

7.1)

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \frac{\binom{k}{5}}{\binom{90}{5}}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k}{4}}{\binom{90}{5}}$$

### Esercizio 7.2

Supponiamo che  $X$  sia una variabile aleatoria a valori nell'insieme  $\{0, 1, \dots, n\}$  e che, per una coppia di costanti positive  $A$  e  $p$ , risulti

$$\mathbb{P}(X = k) = A \cdot \frac{p^k}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

Dimostrare che  $X$  segue una distribuzione binomiale ed individuarne i parametri.

7.2)

$$\mathbb{P}(X = k) = A \cdot \frac{p^k}{k!(n-k)!}$$

• SEGUIRE UNA DISTRIBUZIONE BINOMIALE SIGNIFICA CHE :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{A \cdot \sigma^k}{k!(n-k)!}$$

quindi...

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{A \cdot \sigma^k}{k!(n-k)!}$$

quindi...

$$n! p^k (1-p)^{n-k} = A \sigma^k \quad \text{DIAMO } A = n!$$

$$n! p^k (1-p)^{n-k} = n! \sigma^k \quad \text{DIAMO } \sigma = p \cdot (1-p)^{\frac{n}{k}-1}$$

NO

perché  $\sigma$  deve essere una costante...

$$P(X=k) = A \cdot \frac{\sigma^k}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \sigma^k$$

PONENDO  
 $A = n!$

$$\binom{n}{k} \sigma^k = \binom{n}{k} \sigma^k$$

### Esercizio 7.3

Individuare una distribuzione di probabilità (non degenere) per una variabile aleatoria  $X$  in modo tale che risulti degenere la distribuzione della variabile aleatoria  $Y = X^2$ .

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

$$X(\Omega) = \{2, -2\}$$

$$Y(\Omega) = \{4\}$$

### Esercizio 7.4

Individuare una distribuzione di probabilità per una variabile aleatoria  $X$  (non binaria) in modo tale che  $Y = X^2$  risulti una variabile aleatoria binaria.

$$X(\Omega) = \{0, 1, -1\}$$

### Esercizio 7.5

Sia  $X$  una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità binomiale  $\text{Bin}(6, \frac{1}{3})$ . Trovare qual è il valore più probabile per  $X$ . (confrontare il risultato con il successivo Esercizio 7.8).

SI CONSIGLIA DI CALCOLARE ANCHE IL VALORE ATTESO DI  $X$

$$p = \frac{1}{3} \quad (1-p) = \frac{2}{3}$$

$$P(X=k) = \binom{6}{k} p^k (1-p)^{6-k}$$

$$\text{per } k=0 \rightarrow 0,09$$

$$1 \rightarrow 0,26$$

$$2 \rightarrow 0,32$$

3	→	0,21
4	→	0,08
5	→	0,01
6	→	0,001

il valore più probabile per  $X$  è 2

$$E[X] = 1 \cdot 0,26 + 2 \cdot 0,32 + 3 \cdot 0,21 + 4 \cdot 0,08 + 5 \cdot 0,01 + 6 \cdot 0,001$$

$$= 1,906 \text{ circa}$$

### Esercizio 7.6

Consideriamo una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità ipergeometrica

$$X \propto \text{Hyp}(6, 3; 3).$$

6 ELEMENTI  
3 "FAVOREVOLI" ELEMENTI SPECIALI  
3 "CANCI"

Qual è il più probabile fra i due eventi  $\{X \leq 1\}$ ,  $\{X > 1\}$ ?

SI CONSIGLIA DI CALCOLARE ANCHE IL VALORE ATTESO DI  $X$

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{6-3}{3-k}}{\binom{6}{3}}$$

dove  $M = 6$   
 $m_1 = 3$   
 $m_2 = 3$   
 $n = 3$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3 \cdot \frac{3!}{2!1!}}{\frac{6!}{3!3!}} = \frac{\frac{9}{6!}}{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{9}{20}$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{3}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{\frac{6!}{3!3!}} = \frac{1}{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{20}$$

$$P(X \leq 1) = \frac{10}{20}$$

$$P(X > 1) = \frac{10}{20}$$

=

Calcoliamo ora il valore atteso  $E[X]$

$$P(X=0) = \frac{1}{20}$$

$$P(X=1) = \frac{9}{20}$$

$$P(X=2) = \dots$$

$$P(X=3) = \dots$$

sappiamo che  $E[X]$  per una ipergeometrica è  $n \frac{K}{N} \Rightarrow$

$$E[X] = \frac{3 \cdot 3}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$$

### Esercizio 7.7

In una lotteria sono stati emessi 1000 biglietti e vengono distribuiti 2 primi premi del valore di 1000 Euro, 4 secondi premi del valore di 500 Euro e 20 terzi premi del valore di 100 Euro.

(a) Trovare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria  $X$  che indica il valore del premio associato ad un singolo biglietto (*ossia trovare l'insieme  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dei valori che può assumere la variabile aleatoria  $X$  e la sua densità discreta, ossia  $p_X(x_k) (= \mathbb{P}(X = x_k))$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ).*

(b) Scrivere la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria  $2X$ .

Un tizio ha acquistato 2 biglietti della lotteria ed indichiamo con  $Z$  la variabile aleatoria che indica il valore complessivo dei premi che potrebbe vincere alla lotteria.

(c) Trovare la distribuzione di probabilità di  $Z$ .

SI CONSIGLIA DI CALCOLARE il valore atteso di  $X$ , di  $2X$  e di  $Z$ ,  
e inoltre (lasciato per casa)

SI CONSIGLIA DI RIPETERE L'ESERCIZIO nel caso in cui si ci sono 100 biglietti e un premio da 100 euro, due premi da 50 euro e cinque premi da 10 euro.

$$a) \quad X(\Omega) = \{0, 100, 500, 1000\}$$

$$P(X=0) = \frac{974}{1000}$$

$$P(X=100) = \left(\frac{20}{1000}\right)$$

$$P(X=500) = \left(\frac{4}{1000}\right)$$

$$P(X=1000) = \left(\frac{2}{1000}\right)$$

$$e) Z(\Omega) = \{0, 100, 200, 500, 600, 1000, 1100, 1500, 2000\}$$

$$P(Z=0) = \left(\frac{974}{1000}\right) \left(\frac{973}{999}\right)$$

$$P(Z=100) = \left(\frac{20}{1000}\right) \left(\frac{973}{999}\right) + \left(\frac{974}{1000}\right) \left(\frac{19}{999}\right)$$

$$P(Z=500) = \left(\frac{4}{1000}\right) \left(\frac{973}{999}\right) + \left(\frac{974}{1000}\right) \left(\frac{3}{999}\right)$$

$$P(Z=1000) = \frac{2}{1000} \left(\frac{973}{999}\right) + \dots$$

$$P(Z=200) =$$

$$P(Z=500) =$$

[...]

$$P(Z=1100) =$$

$$P(Z=1500) =$$

$$P(Z=2000) =$$

$$b) 2X = Y$$

$$P(Y=0) = \left(\frac{974}{1000}\right)$$

$$P(Y=200) = \left(\frac{20}{1000}\right)$$

$$P(Y=1000) = \left(\frac{4}{1000}\right)$$

$$P(Y=2000) = \left(\frac{2}{1000}\right)$$

### Esercizio 7.8

Sia  $S_n$  una variabile aleatoria binomiale di parametri  $n$  e  $\theta$ .

(a) Verificate che, per  $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\mathbb{P}(S_n = k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \mathbb{P}(S_n = k).$$

(b) Utilizzando la proprietà precedente, verificate che esiste un  $k_*$  tale che

$$\mathbb{P}(S_n = k+1) \geq \mathbb{P}(S_n = k) \quad k \leq k_*$$

$$\mathbb{P}(S_n = k+1) \leq \mathbb{P}(S_n = k) \quad k > k_*$$

a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k+1) &= \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k} \\ &\quad \downarrow \\ &= \left( \frac{n-k}{k+1} \cdot \theta^{k+1} (1-\theta)^{n-(k+1)} \binom{n}{k} \right) \\ &\quad \downarrow \\ &= \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \theta^{k+1} (1-\theta)^{n-k-1} \\ &\quad \downarrow \\ &= \frac{n!}{(k+1)! (n-k-1)!} \theta^{k+1} (1-\theta)^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \mathbb{P}(S_n = k) \geq \mathbb{P}(S_n = k) & \text{se } k \leq k_* \\ \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \mathbb{P}(S_n = k) \leq \mathbb{P}(S_n = k) & \text{se } k > k_* \end{cases}$$

TROVA  $k_*$

$$\begin{cases} \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \cancel{\mathbb{P}(S_n = k)} \geq \cancel{\mathbb{P}(S_n = k)} & \text{se } k \leq k_* \\ \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \cancel{\mathbb{P}(S_n = k)} \leq \cancel{\mathbb{P}(S_n = k)} & \text{se } k > k_* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \geq 1 & \text{se } k \leq k_* \\ \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \leq 1 & \text{se } k > k_* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n-k}{k+1} - 1 \geq 0 & \text{se } k \leq k_* \\ \frac{n-k}{k+1} - 1 \leq 0 & \text{se } k > k_* \end{cases}$$

$$\text{se } k = n \rightarrow \frac{n-k}{k+1} - 1 = 0$$

$$\text{se } k > n \rightarrow \frac{n-k}{k+1} - 1 = \frac{n-(n+1)}{n+1+1} = \frac{-1}{[\dots]} \leq 0$$

$$\text{se } k < n \rightarrow \frac{n-m+1}{n} - 1 = \frac{1}{[\dots]} \geq 0$$

$$k_* = n$$

b) SBAGLIATO!