

0 ESERCIZI LEZIONE 1

1.1.

monque, rouge, noir

1.2.

$$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

1.3.

$$a) [(A \cap B \cap \bar{e}) \cup (A \cap \bar{B} \cap e) \cup (\bar{A} \cap B \cap e) \cup (A \cap B \cap e)]$$

$$b) [(A \cap B \cap \bar{e}) \cup (A \cap \bar{B} \cap e) \cup (\bar{A} \cap B \cap e)]$$

$$c) [(A \cap B \cap \bar{e}) \cup (A \cap \bar{B} \cap e) \cup (\bar{A} \cap B \cap e) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{e}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap e) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{e})]$$

$$d) [(A \cap \bar{B} \cap \bar{e}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap e) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{e})]$$

1.4.

$$\{(A_i, A_j) \mid i = j-1\}$$

1.5.

$$a) \Omega = \{(AAA), (AAB), (ABA), (BAA), (ABB), (BBA), (BAB), (BBB)\}$$

$$|\Omega| = 8$$

$$b) \{ \text{almeno due elementi di tipo B fra i tre estratti} \} \\ = \{(BBA), (BAB), (ABB), (BBB)\}$$

$$|\{ \text{almeno due elementi di tipo B fra i tre estratti} \}| = 4$$

$$c) \{ \text{almeno due elementi di tipo B} \} \cup \{ \text{l'elemento estratto alla seconda estrazione è di tipo B} \} = \\ \{(BBA), (ABB), (BBB)\}$$

$$|\{ \text{almeno due elementi di tipo B} \} \cup \{ \text{l'elemento estratto alla seconda estrazione è di tipo B} \}| = 3$$

1.6.

$$|\Omega| = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

1.7

a) $\{(AAA), (ABA), (AAB), (BAA), (BBA), (ABB), (BAB), (BBB)\}$

b) in questo caso non c'è alcuna differenza, possiamo notare differenze nel caso in cui estraiamo più di 3 palline.

1.8

$$|\Omega| = 4!3!$$

1.9

a) $\Omega = \{(\tau, e), (\tau, \tau), (e, \tau), (e, e)\}$

$$|\Omega| = 4$$

b) $|P(\Omega)| = 12$

1.10

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$H_1 = \{1, 5\}$$

$$H_2 = \{2, 3, 4\}$$

$$H_3 = \{3, 6\}$$

a) SI'

b) NO

c) NO

Lezione 2

PROPRIETÀ DI ADDITIVITÀ (DIMOSTRAZIONE)

DATI 3 eventi disgiunti 2 a 2 $\rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^3 E_i\right) = \sum_{i=1}^3 P(E_i)$

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^3 E_i &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 = (E_1 \cup E_2) \cup E_3 = \\ &= [(E_1 \cup E_2) \cup E_3] - [(E_1 \cup E_2) \cap E_3] = \\ &= [E_1 \cup E_2 \cup E_3] - (E_1 \cap E_3) - (E_2 \cap E_3) = \\ &= E_1 \cup E_2 \cup E_3, \text{ quindi:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P E_1 + P E_2 + P E_3 = \\ &= \sum_{i=1}^3 P(E_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^3 E_i\right) \end{aligned}$$

... Lo stesso vale per n elementi.

CONSEGUENZE ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ Dimostrazioni

a) Ponendo $P(\omega_i) = P(\{\omega_i\})$ $i = 1, \dots, N$
per ogni $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ RISULTA:

$$P(E) = \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in E}}^N P(\omega_i) = \sum_{\omega \in E} P(\omega) \quad \text{Dim:}$$

1° ↓

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in E}}^N P(\omega_i) &= \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in E}}^N P(\{\omega_i\}) = P\left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in E}}^N \{\omega_i\}\right) = P(\omega_1 \cup \dots \cup \omega_n) \\ &= P(E). \end{aligned}$$

PROP
(12)

$\forall A, B$ si ha $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ Dim:

$A = A \cup (B \cap \bar{B}) = A = A \quad \square$

b)

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \quad \text{Dim.}$$

$$P(\Omega) = P(\Omega \cap E) \cup P(\Omega \cap \bar{E}) = 1 \leftrightarrow P(\bar{E}) + P(E) = 1 \quad \square$$

c)

$$P(\emptyset) = 0$$

PER ASSURDO $P(\emptyset) \neq 0$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega$$

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega)$$

ma dato che $P(\emptyset) \neq 0$, $P(\Omega \cup \emptyset)$ dovrebbe essere
 $P(\Omega \cup \emptyset) > P(\Omega)$ ma questo non è possibile \rightarrow
 $P(\emptyset) = 0$

d)

$$A \subseteq B$$

$$P(A) \leq P(B)$$

$P(A) = P(A \cap B) \cup P(A \cap \bar{B})$ però, dato che $A \subseteq B$,
 l'evento $(A \cap \bar{B})$ non è possibile dato che, se si verifica
 A deve verificarsi anche B. \rightarrow

$$P(A) = P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) \leq P(B)$$

OPPURE:

$$P(B) = P(B \cap \bar{A}) + \underbrace{P(B \cap A)}_{P(A)}, \quad P(A) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{\geq 0} \geq P(A)$$

e)

IMPORTANTE!

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}))$$

$$P(A \cup B) = P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B))$$

$$P(A \cup B) = P(B \cup (A \cap \bar{B}))$$

$$P(A \cup B) = P(B \cup A / (A \cap B)) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$$

8) [...]

ESERCIZI

2.1 $P(\text{Pari}) = P(\text{Pari}) \cdot 2$

$$P(\Omega) = P(\text{dispari}) + 2P(\text{dispari})$$

$$1 = 0,3 + 0,6$$

$$P(\text{DISPARI}) = 0,3\%$$

$$P(\text{PARI}) = 0,6\%$$

2.2.

a) $P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B})$$

???

b) $P\{\text{ALMENO 1}\} = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$

c) $P\{\text{ESSATTAMENTE 1}\} = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$

2.3

$$P(E_1 \cap \bar{E}_2) = P(\bar{E}_1 \cap E_2) \rightarrow P(E_1) = P(E_2)$$

$$P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap \bar{E}_2)$$

$$P(E_2) = P(\bar{E}_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2) \rightarrow P(E_1) = P(E_2) \quad \blacksquare$$

2.4.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Dim: Σ

$$* P(A \cup B) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})]$$

$$P(A \cup B) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A) \quad \square \quad \}$$

Dim:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ESERCIZI MERCOLEDÌ 2 OTTOBRE.

Esercizio 3.1. Le lettere AAMMM vengono ordinate a caso. Qual è la probabilità di ottenere la parola MAMMA?

Esercizio 3.2. Si fanno n lanci di una moneta perfetta. Per $1 \leq h \leq n$, qual è la probabilità di ottenere il risultato testa per la prima volta all' h -esimo lancio?

Esercizio 3.3. Da un'urna, che contiene 6 oggetti numerati da 1 a 6, si estraggono a caso tre oggetti contemporaneamente. Qual è la probabilità che il minimo numero estratto sia superiore a 2?

3.1.) $\Omega = \{\text{TUTTI GLI ANAGRAMMI DI AAMMM}\}$

$$|\Omega| = \frac{5!}{2!3!}$$

$$P(E) = \frac{1}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{2!3!}{5!} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

3.2.) $\Omega = \{\text{DISPOSIZIONI CON REINSERIMENTO}\}$

$$|\Omega| = 2^n$$

$$P(E) = \frac{(1)^{h-1} \cdot 1 \cdot (2)^{n-h}}{2^n}$$

$$P(E) = \frac{2^n}{2^n \cdot 2^h} = \frac{1}{2^h}$$

3.3.

$$|\Omega| = \binom{6}{3}$$

"NON CI INTERESSA L'ORDINE"

$$\bar{E} = \binom{2}{1} \binom{5}{2}$$

$$E = 1 - \left[\binom{2}{1} \binom{5}{2} \right]$$

$$P(E) = \frac{1 - \left[\binom{2}{1} \binom{5}{2} \right]}{\binom{6}{3}}$$

ESERCIZI GIOVEDÌ 3 OTTOBRE

ESERCIZIO

Calcolare il numero degli anagrammi della parola

PATATE con 2 lettere A, 2 lettere T, 1 lettera E 1 lettera P

e scrivere l'espressione del numero degli anagrammi della parola

RABARBARO con 3 lettere A, 3 lettere R, 2 lettere B, 1 lettera O

$$|PATATE A| = \frac{6!}{2!}$$

$$|RABARBARO A| = \frac{9!}{3!3!2!}$$

Esercizio 3.4. In una mano del gioco della roulette si punta su {pair}, {passe}, {16}. Qual è la probabilità a di vincere almeno una di queste puntate?

Esercizio 3.5. Qual è la probabilità a che il numero 16 esca almeno una volta su cinque mani del gioco della roulette?

3.4.)

SFRUTTAMO IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE

$$P(\text{PAIR}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{PASSE}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{SEDCI}) = \frac{1}{37}$$

$$P(\text{PAIR} \cap \text{PASSE}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{PAIR} \cap \text{SEDCI}) = \frac{1}{37}$$

$$P(\text{SEDCI} \cap \text{PASSE}) = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(\text{ALMENO 1}) &= P(\text{PAIR}) + P(\text{PASSE}) + P(\text{SEDCI}) \\ &\quad - [P(\text{PAIR} \cap \text{PASSE}) + P(\text{PAIR} \cap \text{SEDCI}) + \\ &\quad P(\text{SEDCI} \cap \text{PASSE})] + \\ &\quad P(\text{SEDCI} \cap \text{PASSE} \cap \text{PAIR}) = \end{aligned}$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(\text{ALMENO } 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{37} - \frac{1}{4} - \frac{1}{37} = \frac{3}{4}$$

$$3.5) |\Omega| = (37)^5$$

$$|\bar{E}| = (36)^5$$

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \left(\frac{36^5}{37^5} \right) \approx 0,13$$

Esercizio 3.9) Vengono lanciati contemporaneamente 5 dadi perfetti.

Calcolate la probabilità degli eventi elencati qui di seguito:

(a) {tutti i dadi danno punteggi diversi fra loro}

(b) {due dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri tre danno punteggi tutti diversi} ("coppia")

(c) {tre dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri due danno due punteggi diversi} ("tris")

(d) {quattro dadi danno punteggi uguali fra loro e uno da un punteggio diverso} ("poker")

(e) {tutti i dadi danno lo stesso punteggio} ("jazzi")

(f) {due diverse coppie di punteggi fra loro uguali e un punteggio diverso dagli altri due} ("doppia coppia")

(g) {tre punteggi uguali fra loro e gli altri due uguali fra loro e diversi dal precedente} ("full").

$$a) |\Omega| = 6^5$$

$$|E| = 6!$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{6!}{6^5}$$

$$b) |\Omega| = 6^5$$

$$|E_1| = \binom{6}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \left(\frac{\binom{5}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \right)$$

$$c) |\Omega| = 6^5$$

$$|E_2| = \binom{6}{1} \binom{5}{3} \binom{5}{1} \binom{4}{1}$$

$$\mathbb{P}(E_2) = \left(\frac{\binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \right)$$

$$d) \mathbb{P}(E_3) = \frac{\binom{5}{4} \binom{6}{1}}{6^5}$$

$$e) \mathbb{P}(E_4) = \binom{6}{1} / 6^5$$

$$f) P(E_5) = \frac{\binom{6}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{4}{1}}{6^5}$$

$$g) \cancel{P}(E_6) = \frac{\binom{6}{1} \binom{5}{3} \binom{5}{1} \binom{2}{2}}{6^5}$$