ESERCIZI LEZIONE 1

1.1.

monque, rouge, poiz

1.2.

$$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

1.3.

a) $[(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)]$

b) $[(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)]$

c) $[(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})]$

d) $[(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})]$

1.4.

$$\{(A_i, A_j) \mid i = j - 1\}$$

1.5.

a) $\Omega = \{(AAA), (AAB), (ABA), (BAA), (ABB), (BBA), (BAB), (BBB)\}$

$|\Omega| = 8$

b) $\{$Almeno due elementi di tipo B fra i tre estratti$\}$
$= \{(BBA), (BAB), (ABB), (BBB)\}$

$|\{$Almeno due elementi di tipo B fra i tre estratti$\}| = 4$

c) {almeno due elementi di tipo B}∪{l'elemento estratto alla seconda estrazione è di tipo B} $=$

$\{(BBA), (ABB), (BBB)\}$

$|${almeno due elementi di tipo B}∪{l'elemento estratto alla seconda estrazione è di tipo B}$| = 3$

1.6.

$$|\Omega| = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

1.7

a) $\{(AAA), (ABA), (AAB), (BAA), (BBA), (ABB), (BAB), (BBB)\}$

b) in questo caso non c'è alcuna differenza, possiamo notare differenze nel caso in cui estraiamo più di 3 palline.

1.8

$$|\Omega| = 4!\,3!$$

1.9

a) $\Omega = \{(T, c), (T, T), (c, T), (c, c)\}$

$|\Omega| = 4$

b) $|P(\Omega)| = 12$

1.10

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$H_1 = \{1, 5\}$

$H_2 = \{2, 3, 4\}$

$H_3 = \{3, 6\}$

a) SI'

b) NO

c) NO

° Lezione 2

PROPRIETA' DI ADDITIVITA' (DIMOSTRAZIONE)

DATI 3 eventi disgiunti 2 a 2 $\rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(E_i)$

$$\bigcup_{i=1}^{3} E_i = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = (E_1 \cup E_2) \cup E_3 =$$

$$[(E_1 \cup E_2) \cup E_3] - [(E_1 \cup E_2) \cap E_3] =$$

$$[E_1 \cup E_2 \cup E_3] - \cancel{(E_1 \cap E_3)} - \cancel{(E_2 \cap E_3)} =$$

$E_1 \cup E_2 \cup E_3$, quindi:

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}E_1 + \mathbb{P}E_2 + \mathbb{P}E_3 =$$

$$\sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{3} E_i\right)$$

... Lo stesso vale per n elementi.

CONSEGUENZE ASSIOMI DELLA PROBABILITA' Dimostrazioni

a) Ponendo $p(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ $i = 1, \dots, N$

per ogni $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ RISULTA:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\substack{i=1 \\ i:\omega_i \in E}}^{N} p(\omega_i) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$$

Dim:

1° ↓

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i:\omega_i \in E}}^{N} p(\omega_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i:\omega_i \in E}}^{N} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ i:\omega_i \in E}}^{N} \{(\omega_i)\}\right) = \mathbb{P}(\omega_1 \cup \dots \cup \omega_n)$$

$$= \mathbb{P}(E).$$

PROP (12)

$\forall A, B$ si ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ Dim:

$A = A \cup (B \cap \bar{B}) = A = A$ ▨

b)

$\forall E \in P(\Omega)$

$\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$ Dim:

$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cap E) \cup \mathbb{P}(\Omega \cap \bar{E}) = 1 \iff \mathbb{P}(\bar{E}) + \mathbb{P}(E) = 1$ ∎

c)

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

PER ASSURDO $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$

$\Omega \cup \emptyset = \Omega$

$\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega)$

ma dato che $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$, $\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset)$ dovrebbe essere $\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) > \mathbb{P}(\Omega)$ ma questo non è possibile $\to$ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

d)

$A \subseteq B$

$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) \cup \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$ però, dato che $A \subseteq B$, l'evento $(A \cap \bar{B})$ non è possibile dato che, se si verifica A deve verificarsi anche B. $\to$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$

$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$

OPPURE:

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap A)}_{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap \bar{A})}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A)$

e) IMPORTANTE!

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}\big((A\cap\bar{B}) \cup (A\cap B) \cup (B\cap A) \cup (B\cap\bar{A})\big)$$

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}\big((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\cup(A\cap B)\big)$$

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}\big(B\cup(A\cap\bar{B})\big)$$

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}\big(B\cup A/(A\cap B)\big) = \mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)$$

f) [...]

ESERCIZI

2.1 $\mathbb{P}(\text{Pari}) = \mathbb{P}(\text{Pari})\cdot 2$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\text{dispari}) + 2\mathbb{P}(\text{dispari})$$

$$1 = 0,\bar{3} + 0,\bar{6}$$

$$\mathbb{P}(\text{DISPARI}) = 0,\bar{3}\ \%$$

$$\mathbb{P}(\text{pari}) = 0,\bar{6}\ \%$$

2.2.

a) $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\cap\bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A}\cap B) = \mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B})$

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\cap\bar{B})$

? ? ?

b) $\mathbb{P}\{\text{ALMENO } 1\} = \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap\bar{B})+\mathbb{P}(\bar{A}\cap B)$

c) $\mathbb{P}\{\text{ESSATTAMENTE } 1\} = \mathbb{P}(A\cap\bar{B})+\mathbb{P}(\bar{A}\cap B)$

2.3

$$\mathbb{P}(E_1\cap\bar{E}_2) = \mathbb{P}(\bar{E}_1\cap E_2) \rightarrow \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2)$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_1\cap E_2)+\mathbb{P}(E_1\cap\bar{E}_2)$$

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\bar{E}_1\cap E_2)+\mathbb{P}(E_1\cap E_2) \rightarrow \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) \quad ▨$$

2.4.

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Dim: {

$$* \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}\left[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)\right]$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) \quad \blacksquare \quad \}$$

Dim:

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cup C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}\left[(A \cap C) \cup (B \cap C)\right]$$

$$=$$