📌 1. Dal file *domande-6dicembre2024-solo testo.pdf*:

Esercizi da svolgere

- **Esercizio 1** (problema del collezionista di figurine / coupon collector)
- **Esercizio 2** (ancora sul coupon collector)
- **Esercizio 3** (distribuzioni multi-ipergeometriche e multinomiali)
- **Esercizio 4** (generalizzazione a n variabili geometriche i.i.d.)
- **Esercizio 5** (generalizzazione a n variabili di Poisson indipendenti)

📌 2. Dal file *ESERCIZI-MAX-SOMMA-8-1_8-2_verif8_4.pdf*:

Esercizi da svolgere

- **Esercizio 8.1**
- **Esercizio 8.4** (verifica)

  — (L'esercizio 8.2 è citato ma **non** richiesto da svolgere)

📌 3. Esercizi svolti a lezione sugli assolutamente continui

(rifare a casa)

1. **Uniforme[-2,10]**
   - Calcola:
     - $P(-5 < X < 4)$
     - $P(|X| \geq 2)$
     - $P(X = 5)$
2. **Densità $f(x) = cx^2$ su [1,5]**
   - (a) Trova c
   - (b) Trova $P(X > 3)$

📌 4. Esercizi sulle distribuzioni esponenziali e altre densità

1. **Variabile esponenziale con $E(X) = 1/2$**
   - (1) Trova λ
   - (2) Trova la mediana
2. **Densità $f(x) = ke^{-3|x|}$**
   - (1) Trova k
   - (2) Calcola $P(|X| \leq 1)$

📌 5. Dal file *Dal libro di ROSS-18-dic-2024.pdf* (Capitolo 5)

Esercizi da svolgere

- **Esercizio 4** (solo punti a) e b), NON il punto c))
- **Esercizio 7**
- **Esercizio 8**
- **Esercizio 11**
- **Esempio 4b** (rifare)
- **Esempio 4c** (rifare)

📌 6. Dal file *Esercizi-su-variabili-continue-20dic-2024-con-commenti.pdf*:

Esercizi da svolgere

- **Esercizio 1**
- **Esercizio 2**
- **Esercizio 3**
- **Esercizio 5** (solo punti 1) e 2))
- **Esercizio 6**
- **Esercizio 7**
- **Esercizio 8** (suggerito)
- **Esercizio 9** (suggerito)
- **Esercizio 10**
- **Esercizio 11**
- **Esercizio 12** (teorico ma richiesto)

📌 7. Dal file *APPROSS-NORMALE-PROB1-INFORM-2024-25.pdf*

Esercizi indicati

- **Esercizio 16.1**
- **Esercizio 16.2**
  (intervalli di confidenza con CLT e Chebyshev)

Esercizio 1. Quante volte bisogna lanciare in media un dado equo per vedere apparire tutte le facce?

1) RICONDUCIBILE AL COUPON COLLECTOR PROBLEM

per vedere presentarsi una nuova faccia il calcolo e' molto semplice ...

diamo X_i : lanci necessari per ottenere la i-esima nuova faccia

$$\mathbb{P}(X_1) = n/n$$

$$\mathbb{P}(X_2) = n-1/n$$

IN GENERALE:

$$\mathbb{P}(X_i) = \frac{n-i+1}{n}$$

POSSIAMO POI DIRE CHE

$$E(X_i) = \left(\text{DATO CHE E' UNA GEOMETRICA } \left(\frac{1}{p}\right)\right) = \frac{n}{n-i+1}$$

$$E(X_6) = n\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{n-i+1}$$ per le proprietà di linearità

$$E(X_6) = 6\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{6}\right) = \cancel{6}\cdot\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_{2}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{3}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}_{1}}{6}\cdot\frac{5}{\cancel{6}_{3}}$$

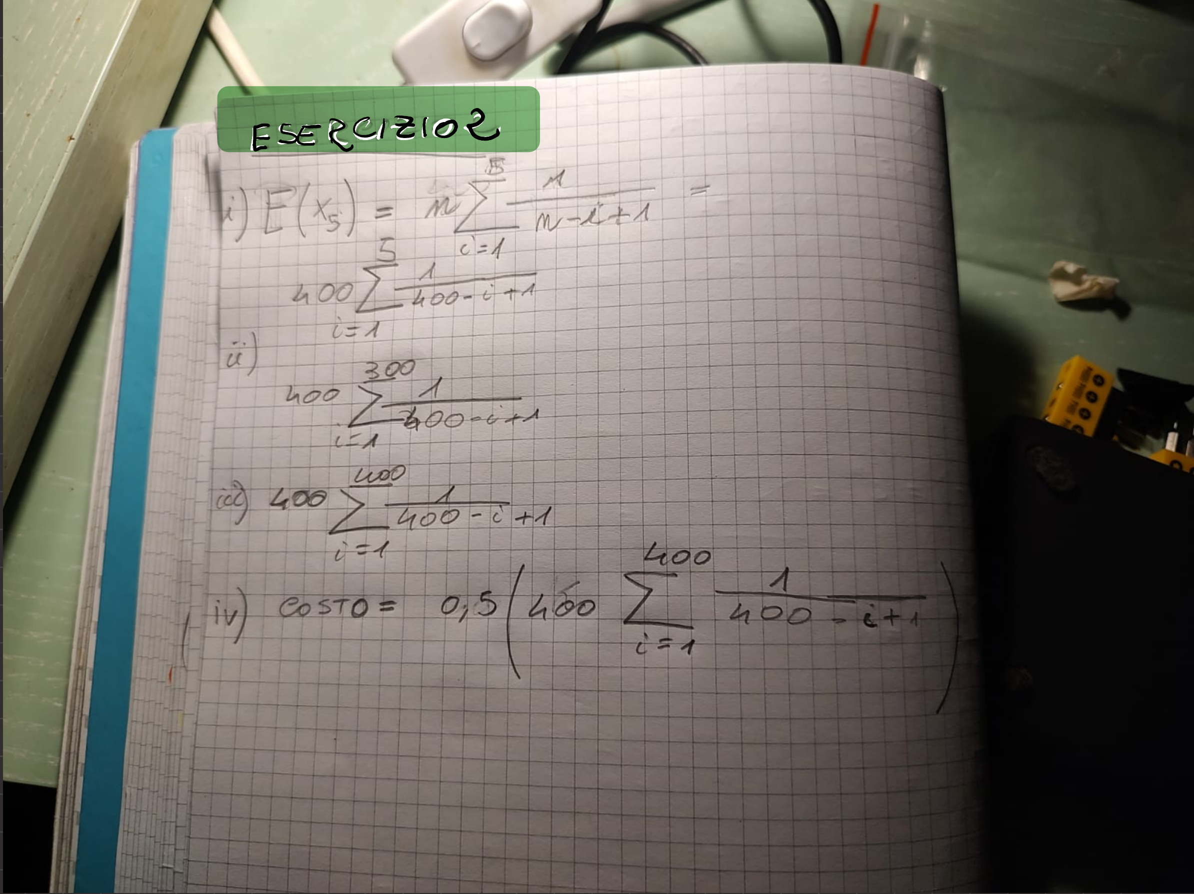
$$= \cancel{6}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{3}$$

$$= \frac{2\cdot 1\cdot 10}{6} = \frac{\cancel{20}\ 10}{\cancel{6}\ 3} = \frac{10}{3}$$

$= 3{,}3$ IMPOSSIBILE

$$\cancel{6}\left(\frac{1}{\cancel{6}_{\cancel{3}}}\right)\left(\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}}\right)\left(\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{3}}\right)\left(\frac{\cancel{4}^{1}}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cancel{\left(\frac{6}{6}\right)} = [\ldots]$$ SOMMATORIA...

$$6\left[\left(\frac{6}{1}\right)+\left(\frac{6}{2}\right)+\left(\frac{6}{3}\right)+\left(\frac{6}{4}\right)+\left(\frac{6}{5}\right)+1\right] =$$ CIRCA 14.



ESERCIZIO 2

i) $E(X_5) = n\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{n-i+1} =$

$400\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{400-i+1}$

ii) $400\sum_{i=1}^{300}\frac{1}{400-i+1}$

iii) $400\sum_{i=1}^{400}\frac{1}{400-i+1}$

iv) COSTO $= 0,5\left(400\sum_{i=1}^{400}\frac{1}{400-i+1}\right)$

(ERO IN BAGNO)

Esercizio 3. Un'urna contiene 20 palline: 6 bianche, 4 gialle, 3 nere e 7 verdi. Estraggo 5 palline senza rimpiazzo (ovvero senza reinserimento, ovvero senza rimbussolamento). Siano X:=*numero di palline bianche estratte*, Y:=*numero di palline gialle estratte* e Z:=*numero di palline verdi estratte*.

i) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $Var(X)$, $\mathbb{E}[Y]$, $Var(Y)$, $\mathbb{E}(X+Y)$, $Var(X+Y)$ (suggerimento: per $X+Y$ c'è un trucco che evita troppi calcoli).

ii) Determinare la densità discreta congiunta $p_{X,Y,Z}$.

iii) Posto W il numero di palline nere estratte, calcolare la densità discreta congiunta di X, Y, Z, **condizionata** a $W = 2$.

iv) Ripetere l'esercizio considerando estrazione con rimpiazzo (ovvero con reinserimento, ovvero con rimbussolamento).

suggerimento: *è importante capire bene che il fatto di sapere che il numero delle palline nere estratte è 2, significa che nelle rimanenti 3 := 5 − 2 estrazioni possono essere state estratte solo palline di colore bianco, giallo o verde, ma NON nere.*

20 PALLINE
6 BIANCHE
4 GIALLE
3 NERE
7 VERDI

i) $E[X] = ?$

$E[X] = ?$

$(\mathbb{P}(X) = k) = \binom{6}{k}\binom{14}{n-k}\Big/\binom{20}{n}$ con $k \le n$

$(\mathbb{P}(Y) = h) = \binom{4}{h}\binom{16}{n-h}\Big/\binom{20}{n}$ con $0 \le k \le 4$

$E[X] = n\frac{m}{M} = 5\,\frac{6}{20}$

$$E[Y] = n\frac{m}{M} = 5\frac{4}{20}$$

$$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)\left(1-\frac{n-1}{M-1}\right) = 5\cdot\frac{6}{20}\left(1-\frac{6}{20}\right)\left(1-\frac{4}{19}\right)$$

$$\mathrm{Var}[Y] = np(1-p)\left(1-\frac{n-1}{M-1}\right) = 5\cdot\frac{4}{20}\left(1-\frac{4}{20}\right)\left(1-\frac{4}{19}\right)$$

$$E[X+Y] = 5\,\frac{10}{20}$$

$$\mathrm{Var}[X+Y] = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{4}{19}\right)$$

ii)

DENSITÀ DISCRETA CONGIUNTA $p_{X,Y,Z}$

$$\mathbb{P}(X=k, Y=h, Z=w) = \frac{\binom{5}{k}\binom{4}{h}\binom{7}{w}\binom{3}{5-k-h-w}}{\binom{20}{5}}$$

se $k+h+w \leq 5$

altrimenti 0

iii)

$$\mathbb{P}\left[(X=k, Y=h, Z=w) \mid W=2\right] = \frac{\binom{5}{k}\binom{4}{h}\binom{7}{w}\binom{1}{5-k-h-w-2}}{\binom{20}{5}}$$

se $k+h+w+2 \leq 5$

altrimenti 0

iv) ESERCIZIO 3 BIS

i BIS)
$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{20}{5}\left(\frac{6}{20}\right)^k\left(\frac{14}{20}\right)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(Y=h) = \binom{20}{5}\left(\frac{4}{20}\right)^k\left(\frac{16}{20}\right)^{n-k}$$

$$E[X] = 5\cdot\binom{20}{5}\left(\frac{6}{20}\right)^k\left(\frac{14}{20}\right)^{n-k}$$

$$E[Y] = 5\cdot\binom{20}{5}\left(\frac{4}{20}\right)^k\left(\frac{16}{20}\right)^{n-k}$$

$$E[X+Y] = 5\cdot\binom{20}{5}\left(\frac{10}{20}\right)^k\left(\frac{10}{20}\right)^{n-k}$$

$$\mathrm{Var}[X+Y] = 5\left(\frac{10}{20}\right)\left(1-\frac{10}{20}\right)$$

ii BIS)
$$\mathbb{P}(X=k, Y=h, Z=w) = \frac{5!}{6!\,7!\,4!}\,\mathbb{P}(X=k)^k\,\mathbb{P}(Y=h)^h\,\mathbb{P}(Z=w)^w$$ se $k+h+t \leq 5$

altrimenti 0

iii BIS) $\mathbb{P}\left[(X=k, Y=h, Z=w) \mid U=2\right] = \dfrac{3!}{k!\,h!\,z!}\,\mathbb{P}(X=k)^k\,\mathbb{P}(Y=h)^h\,\mathbb{P}(Z=w)^w$

se $k+h+z+2=5$ altrimenti 0

iii) e iii BIS) SONO SBAGLIATI

RIFACCIAMOLI ...

iii) $\mathbb{P}\left((X=k, Y=h, Z=w) \mid U=2\right) = \dfrac{\mathbb{P}(X=k, Y=h, Z=w, U=2)}{\mathbb{P}(U=2)} =$

$$\frac{\binom{5}{k}\binom{4}{h}\binom{7}{w}\binom{3}{2}\cancel{\binom{20}{5}}}{\binom{3}{2}\cancel{\binom{20}{5}}\binom{17}{3}}$$

se $k+h+z+2=5$ altrimenti 0

iii BIS)
$$\frac{\dfrac{5!}{k!\,h!\,z!\,2!}\,\mathbb{P}(X=k)^k\,\mathbb{P}(Y=h)^h\,\mathbb{P}(Z=w)^w\,\cancel{\mathbb{P}(U=2)^2}}{\dfrac{5!}{2!\,3!}\,\cancel{\mathbb{P}(U=2)^2}}$$

se $k+h+z+2=5$ altrimenti 0

Esercizio 4. Sia $p \in (0,1)$ e $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie a valori in $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ indipendenti ed identicamente distribuite con densità

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \begin{cases} p(1-p)^k & \text{se } k \in \mathbb{Z}_+, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Equivalentemente si assuma che $X_i + 1$ abbia densità geometrica di parametro p.

i) Determinare la densità discreta di $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

ii) Per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$ determinare la densità discreta congiunta[5] di $(X_1, \dots, X_n)$ condizionata a $S_n = k$, ovvero

$$p_{X|S_n}(k_1, \dots, k_n | k) := \mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n | S_n = k) = \mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n | X_1 + \cdots + X_n = k),$$

specificando per quali valori di k ha senso e per quali valori di $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ è strettamente positivo.

4) i) $S_m := X_1 + \dots + X_m$ tempo di n-esimo successo

$\mathbb{P}(S_m = h) = \binom{m-1}{k-1}(1-p)^{m-k+1} p^{k-1} p$ se $h \in \mathbb{Z}_+$ altrimenti 0

ii) $\mathbb{P}[(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m) \mid S_n = k]$

$$\frac{\mathbb{P}[(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m) \wedge S_m = k]}{\mathbb{P}(S_n = k)} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i = k_i) \text{ t.c. } \sum k_i = k}{\binom{m-1}{k-1}(1-p)^{m-k+1} p^{k-1}}$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} p(1-p)^{k_i}}{\binom{m-1}{k-1}(1-p)^{m-k+1} p^{k-1}} = \frac{p^m (1-p)^k}{\binom{m-1}{k-1}(1-p)^{m-k+1} p^{k-1}}$$ se $\sum k_i = k$

Esercizio 5. Siano $Z_1, \dots, Z_n$ variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con distribuzione di Poisson di parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rispettivamente e sia $S_n := Z_1 + \cdots + Z_n$.

i) Determinare la densità discreta di S_n.

ii) Calcolare la densità discreta congiunta di $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ condizionata a $S_n = k$, dove $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$p_{Z|S_n}(k_1, \dots, k_n | k) := \mathbb{P}(Z_1 = k_1, \dots, Z_n = k_n | S_n = k), \qquad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+,$$

specificando per quali valori di k ha senso e per quali valori di $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ è strettamente positivo.

i) $$\mathbb{P}(S_n = h) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)} \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^h}{h!} \right)$$

ii) $\mathbb{P}(K_1 = \omega_1, \dots, K_m = \omega_m \mid S_m = h) =$

$$\frac{\mathbb{P}(K_1 = \omega_1, \dots, K_m = \omega_m, S_m = h)}{\mathbb{P}(S_m = h)} = \frac{\prod_{i=1}^{m} e^{-\lambda_i} \left(\frac{(\lambda_i)^{\omega_i}}{\omega_i!} \right)}{e^{-\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)} \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^h}{h!} \right)}$$ se $\sum \omega_i = h$

altrimenti 0

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i}\left(\frac{(\lambda_i)^{w_i}}{w_i!}\right)}{e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)}\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{h}}{h!}\right)} \text{ se } \sum_{i=1}^{n} w_i = h \qquad \text{altrimenti } 0$$

CALCOLI OMESSI ...