1. Esercizio sui transistor (Ross, Cap. 6, Es. 6)

Calcolare la **densità congiunta di (N_1, N_2).**

2. Esercizi sui modelli di occupazione

- **Esercizio 14.2 (Estrazioni di assi)** – modello Bose–Einstein.
- **Esempio 14.3** – modello Fermi–Dirac.
- **Esempio 14.4*** (ascensore) – calcolare:
  - $P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 2)$
  - $P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 4)$

Esercizio 1. Quante volte bisogna lanciare in media un dado ben equilibrato per vedere apparire per la prima volta un 6?

Esercizio 2. Silvia lancia ripetutamente due dadi ben equilibrati. Lo scopo è ottenere un doppio sei. Sia S il numero di lanci effettuati da Silvia fino ad ottenere il primo *doppio sei* (ultimo lancio incluso). **(attenzione per lancio si intende il lancio contemporaneo dei due dadi)**

i) Calcolare la probabilità di ottenere un *doppio sei* in un lancio e individuare la distribuzione di S.

ii) **Sapendo che Silvia ha già effettuato 3 lanci,** calcolare la probabilità che $S = 5$.

Dopo i lanci effettuati da Silvia, anche Taddeo vuole provare lo stesso gioco. Sia T il numero di lanci di effettuati da Taddeo (sempre per ottenere per la prima volta un doppio sei)

iii) Calcolare il valore atteso di $S + T$, il numero totale di lanci effettuati (da Silvia e Taddeo).

iv) ***(a)*** Calcolare la probabilità che il numero totale di lanci effettuati sia 5, ossia la probabilità che $S+T = n$, con $n = 5$.
(b) stessa domanda con n generico.

v) ***(a)*** **Sapendo che il numero totale di lanci effettuati da Silvia e Taddeo è n, con $n = 5$,** calcolare la probabilità che Silvia abbia effettuato $k = 2$ lanci.
(b) stessa domanda sempre con $n = 5$ ma prendendo $k = 5$ (invece di $k = 2$)
(c) Stessa domanda con n e k generici, specificando per quali valori di n e k viene strettamente positiva.

Esercizio 3. Un dado equo viene lanciato finché non esce[1] 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

i) Calcolare $\mathsf{P}(T = 3, X = 5)$.

ii) Calcolare la distribuzione di T.

iii) Calcolare la distribuzione di X.

iv) Le variabili aleatorie T e X sono indipendenti?

Esercizio 4. (METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA) Si dispone di una moneta truccata con "*parametro di truccatura*" p incognito (il parametro p rappresenta la probabilità che esca testa).

i) Si lancia la moneta n volte. Trovare il valore $\hat{p}(k)$, per il parametro p, che massimizza la probabilità dell'evento "si è ottenuta testa k volte".

ii) Si lancia la moneta finché si ottiene una testa (per la prima volta). Trovare il valore $\hat{r}(k)$, per il parametro p, che massimizza la probabilità dell'evento "si è ottenuta testa per la prima volta al k-esimo lancio".

Esercizio 1. Quante volte bisogna lanciare in media un dado ben equilibrato per vedere apparire per la prima volta un 6?

1) $E[X] = \frac{1}{6} = \frac{1}{1/6} = 6$ PERCHE $E[X]$ se $X \sim GEOM = \frac{1}{p}$

Esercizio 2. Silvia lancia ripetutamente due dadi ben equilibrati. Lo scopo è ottenere un doppio sei. Sia S il numero di lanci effettuati da Silvia fino ad ottenere il primo *doppio sei* (ultimo lancio incluso). **(attenzione per lancio si intende il lancio contemporaneo dei due dadi)**

i) Calcolare la probabilità di ottenere un *doppio sei* in un lancio e individuare la distribuzione di S.

ii) **Sapendo che Silvia ha già effettuato 3 lanci,** calcolare la probabilità che $S = 5$.

Dopo i lanci effettuati da Silvia, anche Taddeo vuole provare lo stesso gioco. Sia T il numero di lanci di effettuati da Taddeo (sempre per ottenere per la prima volta un doppio sei)

iii) Calcolare il valore atteso di $S + T$, il numero totale di lanci effettuati (da Silvia e Taddeo).

iv) **(a)** Calcolare la probabilità che il numero totale di lanci effettuati sia 5, ossia la probabilità che $S+T = n$, con $n = 5$.
(b) stessa domanda con n generico.

v) **(a) Sapendo che il numero totale di lanci effettuati da Silvia e Taddeo è n, con $n = 5$,** calcolare la probabilità che Silvia abbia effettuato $k = 2$ lanci.
(b) stessa domanda sempre con $n = 5$ ma prendendo $k = 5$ (invece di $k = 2$)
(c) Stessa domanda con n e k generici, specificando per quali valori di n e k viene strettamente positiva.

2 — 11
3 — 12 21
4 — 13 22 31
5 — 14 23 32 41
6 — 15 ... 51
7 — 16 ... 61
8
9
10
11
12

2

i) $\mathbb{P}(X=2) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)$ $\qquad \mathbb{P}(X=8) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 5$

$\mathbb{P}(X=3) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 2$ $\qquad \mathbb{P}(X=9) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 4$

$\mathbb{P}(X=4) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 3$ $\qquad \mathbb{P}(X=10) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 3$

$\mathbb{P}(X=5) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 4$ $\qquad \mathbb{P}(X=11) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 2$

$\mathbb{P}(X=6) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) 5$ $\qquad \mathbb{P}(X=12) = \frac{1}{36}$

$\mathbb{P}(X=7) = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 6$

$$\mathbb{P}(S=k) = \left(1-\frac{1}{36}\right)^{k-1}\frac{1}{36}, \quad \boxed{i)\ \frac{1}{36}}$$

ii) PER LA PROPRIETA' DI MANCANZA DI MEMORIA DELLE VARIABILI GEOMETRICHE

$$\mathbb{P}(S=5) = \mathbb{P}(S=5 \mid S>3)$$

QUINDI:

$$\mathbb{P}(S=5) = \left(1-\frac{1}{36}\right)^4\cdot\frac{1}{36}$$

iii PREF) $\mathbb{P}(T=z) = \left(1-\frac{1}{36}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{36}$

iii) $\mathbb{P}(S+T=h) = \mathbb{P}(S=k, T=h-k) =$

$$\sum_{k=0}^{h-1} \left[\mathbb{P}(S=k, T=h-k)\right] =$$

$$(h-1)\left(1-\frac{1}{36}\right)^{k-1} \frac{1}{36} \cdot \left(1-\frac{1}{36}\right)^{h-k-1} \frac{1}{36} = (h-1) \cdot \frac{1}{36}^{2} \cdot \left(1-\frac{1}{36}\right)^{h-2}$$

iv) $\mathbb{P}(S+T=5) = 4 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{36}\right)^3 = [\ldots]$

v) a) $\mathbb{P}(S=2 \mid S+T=5) = \frac{\mathbb{P}(S=2, S+T=5)}{\mathbb{P}[(S+T)=5]} =$

$$\frac{\mathbb{P}(S=2, T=3)}{\mathbb{P}(S+T=5)} = \frac{\cancel{\left(1-\frac{1}{36}\right)} \cancel{\frac{1}{36}} \cdot \cancel{\left(1-\frac{1}{36}\right)^2} \cancel{\frac{1}{36}}}{4\cancel{\left(\frac{1}{36}\right)^2} \cancel{\left(1-\frac{1}{36}\right)^3}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) $\mathbb{P}(S=5 \mid S+T=5) = 0$

ci si arriva a logica ma poi, ripetendo i calcoli ci accorgiamo che è così

c) $\mathbb{P}(S=k \mid S+T=n) = \frac{\mathbb{P}(S=k, T=n-k)}{\mathbb{P}(S+T=n)}$

$$= \frac{1}{(n-1)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{n-1}}$$

Esercizio 3. Un dado equo viene lanciato finché non esce[1] 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

i) Calcolare $\mathsf{P}(T = 3, X = 5)$.

ii) Calcolare la distribuzione di T.

iii) Calcolare la distribuzione di X.

iv) Le variabili aleatorie T e X sono indipendenti?

i) $\mathbb{P}(T=3, X=5) = ?$ FACCIAMO PRIMA GLI ALTRI PUNTI...

ii) $\mathbb{P}(T=k) = \left(\frac{4}{6}^{k-1}\right)\frac{2}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$

iii) $\mathbb{P}(X=h) = \frac{1}{6}$

QUINDI i) $\mathbb{P}(T=3, X=5) = ?$

VERIFICHIAMO SE SONO INDIPENDENTI IV

$$\mathbb{P}(T=k, X=h) = \mathbb{P}(T=k)\mathbb{P}(X=h)$$

NON SONO INDIPENDENTI INFATTI...

$$\mathbb{P}(T=3, X=3) = 0 \neq \mathbb{P}(T=3)\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$$

i) COME LA CALCOLIAMO ALLORA $\mathbb{P}(T=3, X=5)$?

NO

Esercizio 3. Un dado equo viene lanciato finché non esce[1] 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

i) Calcolare $\mathsf{P}(T = 3, X = 5)$.

ii) Calcolare la distribuzione di T.

iii) Calcolare la distribuzione di X.

iv) Le variabili aleatorie T e X sono indipendenti?

ii) $\mathbb{P}(T=k) = \left(\frac{4}{6}^{k-1}\right)\frac{2}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$

iii) $\mathbb{P}(X=h) = \frac{1}{2}$ con $5 \leq h \leq 6$

IV) YES infatti:

$$\mathbb{P}(T=k, X=5) = \mathbb{P}(T=k)\mathbb{P}(X=5) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}^{k-1}}$$

$$\mathbb{P}(T=k, X=6) = \mathbb{P}(T=k)\mathbb{P}(X=6) =$$

i) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{54}$

NO

NON SI RISOLVE COSÌ

Esercizio 3. Un dado equo viene lanciato finché non esce[1] 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

i) Calcolare $\mathsf{P}(T = 3, X = 5)$.

ii) Calcolare la distribuzione di T.

iii) Calcolare la distribuzione di X.

iv) Le variabili aleatorie T e X sono indipendenti?

i) $\mathbb{P}(T=3, X=5) = \mathbb{P}(A_1 \le 4)\mathbb{P}(A_2 \le 4)\mathbb{P}(A_3 = 5) = \frac{2}{3}^2 \cdot \frac{1}{6}$

ii) $\mathbb{P}(T=k) = \left(\frac{4}{6}^{k-1}\right)\frac{2}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$

iii) $\mathbb{P}(X=h) = \frac{1}{2}$ con $1 \le h \le 2$

iv) $\mathbb{P}(T=k)\mathbb{P}(X=6) = \mathbb{P}(T=k, X=6) \quad \forall k \ge 1$

$\mathbb{P}(T=k)\mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}(T=k, X=5) \quad \forall k \ge 1$

(iv): SI

Esercizio 4. (METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA) Si dispone di una moneta truccata con "*parametro di truccatura*" p incognito (il parametro p rappresenta la probabilità che esca testa).

i) Si lancia la moneta n volte. Trovare il valore $\hat{p}(k)$, per il parametro p, che massimizza la probabilità dell'evento "si è ottenuta testa k volte".

ii) Si lancia la moneta finché si ottiene una testa (per la prima volta). Trovare il valore $\hat{r}(k)$, per il parametro p, che massimizza la probabilità dell'evento "si è ottenuta testa per la prima volta al k-esimo lancio".

i) $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\hat{p}(k) = 0,5$

perché se $\hat{p}(k) < 0,5$ se $k < n/2$

$\mathbb{P}(X=k) < \mathbb{P}(X=k)$ utilizzando 0,5

e al contrario le stesse cose

ii)

NO

6. Una scatola di transistor ne contiene 5, dei quali sappiamo che 2 sono difettosi. I transistor devono essere testati, uno alla volta, fino a che quelli difettosi vengono individuati. Denotiamo con ~~X_1~~ X il numero di test fatti per trovare il primo transistor difettoso e con ~~N_2~~ Y il numero di ulteriori test necessari per trovare il secondo transistor difettoso. Si determini la densità discreta congiunta di ~~X_1~~ X e ~~N_2~~ Y.

(DAL ROSS)

$$p_{x,y}(X=1, Y=2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$$
$$p_{x,y}(X=1, Y=3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$$
$$p_{x,y}(X=1, Y=4) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$p_{x,y}(X=1, Y=5) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$p_{x,y}(X=3, y=4) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$p_{x,y}(X=3, y=5) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$p_{x,y}(X=4, y=5) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$p_{x,y}(X=2, y=3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}$$
$$p_{x,y}(X=2, y=4) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$p_{x,y}(X=2, y=5) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

per svolgerlo in maniera rigorosa guarda gli APPUNTI...

7. Si consideri una successione di prove indipendenti di Bernoulli, ognuna delle quali sia un successo con probabilità pari a p. Sia ~~X_1~~ X il numero aleatorio di insuccessi che precedono il primo successo e sia ~~X_2~~ Y il numero aleatorio di insuccessi tra il primo e il secondo successo. Si determini la densità discreta congiunta di ~~X_1~~ X e ~~X_2~~ Y.

EXTRA (DA ROSS)

$$\mathbb{P}(X=k, Y=h) = (1-p)^k \cdot (1-p)^h = (1-p)^{h+k}$$

6. Una scatola di transistor ne contiene 5, dei quali sappiamo che 2 sono difettosi. I transistor devono essere testati, uno alla volta, fino a che quelli difettosi vengono individuati. Denotiamo con ~~X_1~~ X il numero di test fatti per trovare il primo transistor difettoso e con Y il numero di ulteriori test necessari per trovare il secondo transistor difettoso. Si determini la densità discreta congiunta di ~~X_1~~ X e ~~X_2~~ Y.

6) (FATTO MEGLIO)

SIANO

X_i I "LANCI" PRIMA DEL PRIMO TRANSISTOR GUASTO

X_J [...] // SECONDO //

DOPO IL PRIMO

X_K // DOPO IL SECONDO

$$\mathbb{P}(X_i = i, X_J = J, X_K = k) = ?$$

POSSIAMO INDICARE I RISULTATI CON LE TRIPLE

(X_i, X_J, X_K) --- ESEMPIO

$(1,2,0),(0,0,3)$ ... e questi sono ?

con il modello "$*|$" sono 3 stelle e 3 barre

quindi $\binom{6}{3}$ modi

$$\mathbb{P}(X_i = i,\ X_j = j,\ X_k = k) = \boxed{1 \Big/ \binom{6}{3} = \frac{1}{20}}$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

11. Il proprietario di un negozio di televisori stima che il 45 per cento dei clienti che entrano nel suo negozio compera un televisore normale, il 15 per cento un televisore al plasma e il 40 per cento entra solo per curiosare. Se in un dato giorno entrano 5 clienti nel suo negozio, qual è la probabilità che venda esattamente 2 televisori ordinari e 1 al plasma?

$$\mathbb{P}(P = 1,\ O = 2) = ?$$

$$\mathbb{P}(P = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{15}{100}\right)^k \cdot \left(\frac{75}{100}\right)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(O = h) = \binom{n}{h}\left(\frac{45}{100}\right)^h \cdot \left(\frac{65}{100}\right)^{n-h}$$

$$\mathbb{P}(P = k,\ O = h) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{h}\left(\frac{15}{100}\right)^k\left(\frac{45}{100}\right)^h\left(\frac{40}{100}\right)^{n-k-h}$$

$$\mathbb{P}(P = k,\ O = h) = \binom{4}{2}\binom{5}{1}\left(\frac{15}{100}\right)^1\left(\frac{45}{100}\right)^2\left(\frac{40}{100}\right)^2$$