ESERCIZI DA VECCHI ESAMI

Un'urna inizialmente vuota viene riempita con il seguente meccanismo:
vengono lanciate tre monete truccate in modo che la probabilità di testa sia $1/3$.

se escono 3 teste vengono inserite nell'urna 3 palline bianche e 1 pallina rossa,
se escono 2 teste vengono inserite nell'urna 2 palline bianche e 2 palline rosse,
altrimenti vengono inserite nell'urna 1 pallina bianca e 3 palline rosse.

Successivamente si effettuano 2 estrazioni **con reinserimento** dall'urna.

Posto $H_k =$ {*l'urna contiene k palline bianche*}, per $k = 1, 2, 3$,
$B_1 =$ {*alla prima estrazione esce una pallina bianca*}, $B_2 =$ {*alla seconda estrazione esce una pallina bianca*},

i) ***(a)*** Calcolare $\mathbb{P}(H_1)$, $\mathbb{P}(H_2)$ e $\mathbb{P}(H_3)$. ***(b)*** Calcolare $\mathbb{P}(B_1)$

ii) ***(a)*** Calcolare $\mathbb{P}(B_2)$ e $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$. ***(b)*** Gli eventi B_1 e B_2 sono indipendenti?

iii) **Sapendo che la prima pallina estratta è bianca**, calcolare la probabilità (condizionata) di H_1, H_2 e H_3.

Sia $X = \mathbf{1}_{B_1} + \mathbf{1}_{B_2}$ il numero di palline bianche estratte

iv) Calcolare $\mathbb{E}(X|H_1)$, $\mathbb{E}(X|H_2)$, $\mathbb{E}(X|H_3)$ e $\mathbb{E}(X)$.

v) Calcolare $\mathbb{E}(X^2)$.

i) (a) $\mathbb{P}(H_1) = \binom{3}{2}\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3,$

$\mathbb{P}(H_2) = \binom{3}{2}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2,$

$\mathbb{P}(H_3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3;$

(b) $\mathbb{P}(B_1) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}^2\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}^3\right)\cdot\frac{1}{4} + \binom{3}{2}\binom{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{3}{4}$

ii) (a)

$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2|B_1) + \mathbb{P}(B_2|\bar{B}_1)$

$\mathbb{P}(B_2) = \binom{3}{2}\binom{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{4} +$
$\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}^2\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}^3\right)\cdot\frac{1}{4} + \binom{3}{2}\binom{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{3}{4}$

$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \binom{3}{2}\binom{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}$

iii) **Sapendo che la prima pallina estratta è bianca**, calcolare la probabilità (condizionata) di H_1, H_2 e H_3.

Sia $X = \mathbf{1}_{B_1} + \mathbf{1}_{B_2}$ il numero di palline bianche estratte

iv) Calcolare $\mathbb{E}(X|H_1)$, $\mathbb{E}(X|H_2)$, $\mathbb{E}(X|H_3)$ e $\mathbb{E}(X)$.

v) Calcolare $\mathbb{E}(X^2)$.