NELLE LEZIONI 15-18 SI PARLA DI VARIABILI ALEATORIE, VALORE ATTESO, VARIANZA E COVARIANZA, SI FA UN ACCENNO ALLA LEGGE DEI GRANDI NUMERI.

Esercizio 1. I pesi di una misura di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sono dati da $p_1 = 1/8$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 3/8$, $p_4 = 1/8$. Determinare il valore di p_5.

$$\sum_{x_i \in X} p_X(x_i) = 1 \Longrightarrow p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

$$\boxed{p_5} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{8-1-2-3-1}{8} = \boxed{0}$$

Esercizio 2. Sia $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Quanti eventi ci sono su Ω? Si consideri la misura di probabilità su Ω data dai pesi $p_0 = 1/2$, $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/6$. Calcolare $\mathbb{P}(A)$ per ogni evento A su Ω.

a) 3 ? ? ? ?

Esercizio 3. I pesi di una misura di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ sono dati da $p_1 = 1/5$, $p_2 = 2/5$, $p_3 = 2\alpha/3$, $p_4 = \alpha/3$. Determinare il valore di α.

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3}$$

$$1 = \frac{3}{5} + \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha} = -\boxed{\frac{3}{5}}$$

Esercizio 4. Determinare quali di queste collezioni di pesi definiscono una misura di probabilità su $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$:

(i) $p_n = 1/n$, ✗ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots$

(ii) $p_n = (-1)^n/n^2$, $-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \cdots$ ✗

(iii) $p_n = 1/2^n$, ✗

(iv) $p_n = 1/3^n$, ✗ $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{\ldots} \ldots$

(v) $p_n = \alpha(1/3)^n$ per qualche $\alpha \in (0, +\infty)$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{\ldots} \ldots$ ✗

(vi) $p_n = \dfrac{\alpha(\log 2)^n}{(n-1)!}$ per qualche $\alpha \in (0, +\infty)$. ✗

Esercizio 6. Consideriamo su $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ la distribuzione geometrica di parametro $p = 1/2$. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

(i) $A = \{1, 2, 3\}$,

(ii) $B = \{k : k \geq 10\}$,

(iii) $C = \{k \text{ pari}\}$,

(iv) $D = \{k \text{ dispari}\}$.

ESERCIZI FINO A GIOVEDÌ 14 NOVEMBRE

Dal materiale del corso

- **Esempio 7.1** del testo *[SN]*
- **Esercizio 1** del file *domande-31-ott-2024.pdf*

Dal libro di Ross – Capitolo 4

1. **Esercizio 1**
2. **Esercizio 25**
3. **Esercizio 19**
4. **Esercizio 40**
5. **Esercizio 51**
6. **Esercizio 52**
7. **Esercizio 53**

DAL ROSS

1. Si forma la classifica dei punteggi di un gruppo di 10 studenti – 5 studenti maschi e 5 femmine – dopo un esame. Non vi sono ex aequo, e tutte le 10! possibili classifiche diverse hanno pari probabilità. Sia X la migliore posizione ottenuta da una studentessa (ad esempio $X = 2$ se il primo in classifica è maschio e la seconda è femmina). Calcola, per $i = 1, 2, \ldots, 10$, quanto vale $P(X = i)$.

$$\mathbb{P}(X=1) = 9!/10!$$

$$\mathbb{P}(X=2) = 8!/10!$$

...

$$\mathbb{P}(X=i) = (10-i)!/10!$$

25. Il trasporto di 148 alunni di una scuola presso un campo sportivo viene realizzato tramite 4 autobus, sui quali salgono 40, 33, 25 e 50 ragazzini. Si sceglie un alunno a caso, e si denota con X il numero totale di quelli saliti sul suo stesso autobus. Si sceglie poi, indipendentemente, uno dei quattro autisti e si denota con Y il numero totale di alunni saliti sull'autobus da lui portato.

(a) Quale pensi che sarà il maggiore, tra $E[X]$ ed $E[Y]$? Perché?
(b) Calcola $E[X]$ ed $E[Y]$.

a) NON SAPREI

b) $E[X] = \sum_{x_i \in X} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = 40 \cdot 1/4 + 33 \cdot 1/4 + 25 \cdot 1/4 + 50 \cdot 1/4 = \ldots$

$E[Y] = E[X]$

40. Supponi che X possa assumere i valori 1, 2 e 3 con probabilità p_1, p_2 e p_3, e inoltre che $E[X] = 2$. Quali sono i valori di p_1, p_2 e p_3 che massimizzano e minimizzano $\mathrm{Var}(X)$?

$E(X) = 2$

$E(X) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3$

$Var(X) = E[X - E(X)]^2$

la varianza non dipende dalla densità discreta

51. Nell'Esempio 4.5.6 di pagina 121, calcola $\text{Cov}(X_i, X_j)$ e usa il risultato per dimostrare che $\text{Var}(X) = 1$.

52. Dimostra che se X_1 e X_2 hanno la stessa distribuzione, allora

$$\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0$$

Nota che non è necessario supporre che siano indipendenti.

53. Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità data da

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x > 0$$

Calcola la funzione generatrice dei momenti di X e impiegala per determinare valore atteso e varianza di X. Verifica il risultato ottenuto per la media con un calcolo diretto.

51) a) $Cov(X_i, X_j) =$

$$E(X_i) = \frac{1}{N} = E(X_j)$$

$$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] = E\left[-\frac{1}{N}(X_i + X_j)\right]$$

$$= -\frac{1}{N}\left[E(X_i + X_j)\right] = -\frac{1}{N}(E[X_i] + E[X_j]) = -\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right) =$$

$$-\frac{1}{N^2} - \frac{1}{N^2} = -\frac{2}{N^2}$$

b) $Var(X) == 1$?

DIM:

$Var(X) =$