Data della Lezione	Esercizi/Esempi da Svolgere	Riferimenti	Argomento Principale
Mercoledì 20 Nov	Discussione degli Esercizi della Lezione 7 (con varianti e aggiunte)	File **ESERCIZI-LEZ-7SOLUZIONI.pdf** DA FARE	Densità discreta congiunta, Valore atteso di $g(X,Y)$.
Giovedì 21 Nov	Esempio sulla Lotteria	**Esempio 9.5** (pagg. 121/122 di [SN])	Valore atteso.
	Esempio sul Gioco al Raddoppio	**Esempio* 9.7**	Gioco favorevole e sfavorevole.
Venerdì 22 Nov	Esercizio sulla distribuzione congiunta (punti i, ii, iii, iv e calcolo di valore atteso e varianza del punto v)	**Esercizio 2 a risposta aperta** del 16 luglio 2020 (File **CP-INFORM-16-luglio-2020-corretto.pdf**)	Distribuzione congiunta, Valore atteso di una trasformazione $Z = g(X,Y)$ (Proposizione 9.13, Esempio 9.8).
	Analisi dei controesempi (senza esercizio numerico specifico, ma da comprendere bene)	**CONTROESEMPIO 1 e 2**	La non implicazione: $\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \not\Rightarrow X$ e Y indipendenti.
Mercoledì 27 Nov	Completamento dell'esercizio precedente (punto 5(a))	**Esercizio 5(a)** del 16 luglio 2020 (File **CP-INFORM-16-luglio-2020-corretto.pdf**)	Disuguaglianza di Chebyshev.
	Esempi sulla Disuguaglianza di Chebyshev	**Esempio*10.6** e **Esempio*10.7** in [SN]	Disuguaglianza di Chebyshev.
DA FARE	Esercizio su carte (Bastoni e Denari)	Dal libro di **ROSS-18-dic-2024.pdf** / **ROSS-14nov2024.pdf**	Distribuzione congiunta Ipergeometrica (HyP).
	Esercizio sui Transistor Difettosi	**Esercizio 6 dal Capitolo 6 del ROSS**	Densità discreta congiunta di N_1 e N_2.
	Esercizio teorico sulla funzione $f(t)$	(Non numerico)	Il valore atteso minimizza $f(t)=E[(X-t)^2]$.

Esercizio preliminare e riassuntivo

Sia $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$
e sia $\mathbb{P}$ definito tramite p, come $\mathbb{P}(E) = \sum_{i:\omega_i \in E} p(\omega_i)$, dove la funzione p è definita da $p : \Omega \to [0,1], \quad \omega_i \mapsto p(\omega_i) = K\, i^2$

(i) Calcolare K $\left(\textit{si ricordi che } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right)$

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$X(\omega_1)=3, \quad X(\omega_2)=2, \quad X(\omega_3)=1, \quad X(\omega_4)=4, \quad X(\omega_5)=2,$$
$$X(\omega_6)=3, \quad X(\omega_7)=1, \quad X(\omega_8)=1, \quad X(\omega_9)=3, \quad X(\omega_{10})=4,$$

(ii) Trovare la partizione generata da X e calcolare la densità discreta di X, tramite la formula

$$p_X(x_k) := \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{i:X(\omega_i)=x_k} p(\omega_i)$$

(iii) Scrivere il valore atteso di X tramite la formula $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^N X(\omega_i)\, p(\omega_i)$

(iv) Scrivere il valore atteso di X tramite la formula $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k\, p_X(x_k)$
e verificare che l'espressione al punto (iii) e al punto (iv) danno luogo allo stesso valore.

Esercizio 7.1

Indichiamo con $X_1, \dots, X_5$ i 5 numeri estratti su una ruota del lotto (si estrae senza reinserimento da un'urna contenente i numeri $\{1,2,\dots, 90\}$) e sia inoltre X il valore più alto fra $X_1, \dots, X_5$.
Calcolare $\mathbb{P}(X \leq k)$ e $\mathbb{P}(X = k)$ per $k = 1, 2, \dots, 90$.

7.1)

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \binom{k}{5} \Big/ \binom{90}{5}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k}{4} \Big/ \binom{90}{5}$$

Esercizio 7.2

Supponiamo che X sia una variabile aleatoria a valori nell'insieme $\{0, 1, \dots, n\}$ e che, per una coppia di costanti positive A e ρ, risulti

$$\mathbb{P}(X = k) = A \cdot \frac{\rho^k}{k!\,(n-k)!}, \qquad k = 0, 1, \dots, n,$$

Dimostrare che X segue una distribuzione binomiale ed individuarne i parametri.

7.2)

$$\mathbb{P}(X = k) = A \cdot \frac{\rho^k}{k!\,(n-k)!}$$

- SEGUIRE UNA DISTRIBUZIONE BINOMIALE SIGNIFICA CHE:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{A \cdot \sigma^k}{k!\,(n-k)!}$$

quindi...

$$\frac{n!}{\cancel{k!\,(n-k)!}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{A \cdot \sigma^k}{\cancel{k!\,(n-k)!}}$$

quindi...

$$n!\, p^k (1-p)^{n-k} = A \sigma^k \qquad \text{DIAMO } A = n!$$

$$n!\, p^k (1-p)^{n-k} = n!\, \sigma^k \qquad \text{DIAMO } \sigma = p \cdot (1-p)^{\frac{n}{k}-1}$$

NO

perché σ deve essere una costante...

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{A \cdot \sigma^k}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\sigma^k$$

$$\boxed{\text{PONENDO } A = n!}$$

$$\binom{n}{k}\sigma^k = \binom{n}{k}\sigma^k$$

Esercizio 7.3

Individuare una distribuzione di probabilità (non degenere) per una variabile aleatoria X in modo tale che risulti degenere la distribuzione della variabile aleatoria $Y = X^2$.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

$$X(\Omega) = \{2, -2\}$$

$$Y(\Omega) = \{4\}$$

Esercizio 7.4

Individuare una distribuzione di probabilità per una variabile aleatoria X (non binaria) in modo tale che $Y = X^2$ risulti una variabile aleatoria binaria.

$$X(\Omega) = \{0, 1, -1\}$$

Esercizio 7.5

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità binomiale $Bin(6, \frac{1}{3})$. Trovare qual è il valore più probabile per X. **(confrontare il risultato con il successivo Esercizio 7.8).**

SI CONSIGLIA DI CALCOLARE ANCHE IL VALORE ATTESO DI X

$$p = \frac{1}{3} \qquad (1-p) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{6}{k} p^k (1-p)^{6-k}$$

per $k = 0 \rightarrow 0{,}09$

$1 \rightarrow 0{,}26$

$\boxed{2 \rightarrow 0{,}32}$

$3 \to 0,21$
$4 \to 0,08$
$5 \to 0,01$
$6 \to 0,001$

il valore più probabile per X è 2

$$E[X] = 1\cdot 0{,}26 + 2\cdot 0{,}32 + 3\cdot 0{,}21 + 4\cdot 0{,}08 + 5\cdot 0{,}01 + 6\cdot 0{,}001$$
$$= 1{,}906 \text{ circa}$$

Esercizio 7.6

Consideriamo una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità ipergeometrica

$$X \propto Hyp(6, 3; 3).$$

6 ELEMENTI
3 "FAVOREVOLI" "ELEMENTI SPECIALI"
3 "CANEI"

Qual è il più probabile fra i due eventi $\{X \leq 1\}, \{X > 1\}$?

SI CONSIGLIA DI CALCOLARE ANCHE IL VALORE ATTESO DI X

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{6-3}{3-k}}{\binom{6}{3}}$$

dove $M = 6$
$m_1 = 3$
$m_2 = 3$
$n = 3$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3 \cdot \frac{3!}{2!\,1!}}{\left(\frac{6!}{3!\,3!}\right)} = \frac{9}{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{9}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{6!}{3!\,3!}\right)} = \frac{1}{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1}{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 1) &= \frac{10}{20} \\ \mathbb{P}(X > 1) &= \frac{10}{20} \end{aligned}\right\} =$$

Calcoliamo ora il valore atteso $E[X]$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{20}$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{9}{20}$

$\mathbb{P}(X=2) = \dots$

$\mathbb{P}(X=3) = \dots$

sappiamo che $E[X]$ per una ipergeometrica e' $n\frac{K}{N} \Rightarrow$

$E[X] = \frac{3 \cdot 3}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Esercizio 7.7

In una lotteria sono stati emessi 1000 biglietti e vengono distribuiti 2 primi premi del valore di 1000 Euro, 4 secondi premi del valore di 500 Euro e 20 terzi premi del valore di 100 Euro.

(a) Trovare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X che indica il valore del premio associato ad un singolo biglietto (*(ossia trovare l'insieme* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *dei valori che può assumere la variabile aleatoria* X *e la sua densità discreta, ossia* $p_X(x_k)\big(:= \mathbb{P}(X = x_k)\big),\ k = 1, 2, \dots, n.\big)$.

(b) Scrivere la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $2X$.

Un tizio ha acquistato 2 biglietti della lotteria ed indichiamo con Z la variabile aleatoria che indica il valore complessivo dei premi che potrebbe vincere alla lotteria.

(c) Trovare la distribuzione di probabilità di Z.

SI CONSIGLIA DI CALCOLARE il valore atteso di X, di $2X$ e di Z,
e inoltre (lasciato per casa)
SI CONSIGLIA DI RIPETERE L'ESERCIZIO nel caso in cui si ci sono 100 biglietti e un premio da 100 euro, due premi da 50 euro e cinque premi da 10 euro.

a) $X(\Omega) = \{\overset{974}{0}, \overset{20}{100}, \overset{4}{500}, \overset{2}{1000}\}$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{974}{1000}$

$\mathbb{P}(X=100) = \left(\frac{20}{1000}\right)$

$\mathbb{P}(X=500) = \left(\frac{4}{1000}\right)$

$\mathbb{P}(X=1000) = \left(\frac{2}{1000}\right)$

e) $Z(\Omega) = \{0, 100, 200, 500, 600, 1000, 1100, 1500, 2000\}$

$$\mathbb{P}(Z=0) = \left(\frac{974}{1000}\right)\left(\frac{973}{999}\right)$$

$$\mathbb{P}(Z=100) = \left(\frac{20}{1000}\right)\left(\frac{973}{999}\right) + \left(\frac{974}{1000}\right)\left(\frac{19}{999}\right)$$

$$\mathbb{P}(Z=500) = \left(\frac{4}{1000}\right)\left(\frac{973}{999}\right) + \left(\frac{974}{1000}\right)\cdot\left(\frac{3}{999}\right)$$

$$\mathbb{P}(Z=1000) = \frac{2}{1000}\left(\frac{973}{999}\right) + \dots$$

$$\mathbb{P}(Z=200) =$$

$$\mathbb{P}(Z=500) =$$

[...]

$$\mathbb{P}(Z=1100) =$$

$$\mathbb{P}(Z=1500) =$$

$$\mathbb{P}(Z=2000) =$$

b) $2X = Y$

$$\mathbb{P}(Y=0) = \left(\frac{974}{1000}\right)$$

$$\mathbb{P}(Y=200) = \left(\frac{20}{1000}\right)$$

$$\mathbb{P}(Y=1000) = \left(\frac{4}{1000}\right)$$

$$\mathbb{P}(Y=2000) = \left(\frac{2}{1000}\right)$$

Esercizio 7.8

Sia S_n una variabile aleatoria binomiale di parametri n e θ.
(a) Verificate che, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\mathbb{P}(S_n = k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \mathbb{P}(S_n = k).$$

(b) Utilizzando la proprietà precedente, verificate che esiste un k_* tale che

$$\mathbb{P}(S_n = k+1) \geq \mathbb{P}(S_n = k) \quad k \leq k_*$$
$$\mathbb{P}(S_n = k+1) \leq \mathbb{P}(S_n = k) \quad k > k_*$$

a) $\mathbb{P}(S_n = k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$

$$\left(\frac{n-k}{k+1}\right) \cdot \theta^{k+1} \cdot (1-\theta)^{n-(k+1)} \binom{n}{k}$$

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \theta^{k+1} (1-\theta)^{n-k+1}$$

$$\frac{n!}{(k+1)!\, n-(k+1)\,!} \theta^{k+1} (1-\theta)^{n-(k+1)}$$

b) DOMANI