GEMINI + E' MIO AMICO

Gli esercizi assegnati o discussi durante le lezioni del 14 e 15 novembre sono i seguenti, tratti principalmente dal Capitolo 4 del libro di **ROSS**:

Giovedì 14 Novembre

1. **Distribuzione Ipergeometrica:** Esercizio teorico di **impostazione del calcolo della Varianza** utilizzando la formula completa della varianza della somma di n variabili aleatorie (richiamo teorico con applicazione).
2. **Distribuzione di Poisson** ($\text{Poisson}(\lambda)$)**:** Esercizio di **calcolo del Valore Atteso** ($E(X) = \lambda$) **e della Varianza** ($\text{Var}(X) = \lambda$) utilizzando la somma della serie esponenziale.
3. **Esercizi ROSS:**
   - **Esercizio 52** (Capitolo 4).
   - **Esercizio 53** (Capitolo 4).

SVOLTI NEL PRECEDENTE FOGLIO (15, 18)

Venerdì 15 Novembre

1. **Distribuzione Uniforme:** Esercizio di deduzione del Valore Atteso e della Varianza per una variabile aleatoria $\mathbf{Y}$ Uniforme in $\{0, 1, \ldots, m\}$ a partire dalla variabile $\mathbf{X}$ Uniforme in $\{1, 2, \ldots, m+1\}$ (usando $Y = X - 1$).
2. **Distribuzione Geometrica** ($\text{Geom}(p)$)**:**
   - Esercizio di **calcolo del Valore Atteso** ($E(X) = 1/p$) usando la formula $E(X) = \sum_{k \geq 0} P(X > k)$.
   - **Esercizio 71** (Capitolo 4 di ROSS) - Introduzione della variabile Geometrica.
3. **Distribuzione Binomiale Negativa (Tempi di r-simo Successo):**
   - **Esercizio 74** (Capitolo 4 di ROSS) - Introduzione di T_r (tempo di r-simo successo) e T_r' (numero di insuccessi prima dell'r-simo successo).
   - **Esercizio 75** (Capitolo 4 di ROSS).

74. A una intervistatrice viene data una lista di possibili persone da intervistare. Se lei ha bisogno di intervistarne 5 e ognuno (indipendentemente) accetta di essere intervistato con probabilità pari a $\frac{2}{3}$, qual è la probabilità che la sua lista di possibili intervistati sia sufficiente per trovarne 5 se essa contiene:
(a) 5 nomi;
(b) 8 nomi?
Nel caso ci siano 8 nomi, qual è la probabilità che l'intervistatrice parli con esattamente
(c) 6 persone;
(d) 7 persone della lista?

75. Una moneta equilibrata viene lanciata fino a quando appare per la decima volta testa. Denotiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di croce che si ottengono. Se ne calcoli la densità discreta.

75)

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^{r-1} \cdot p \cdot (1-p)^k$$
$$= \binom{k+r-1}{r-1} p^{r+k}$$

74) a) 5 NOMI

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot p^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \binom{5}{5} p^5 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^5$$

b) 8 NOMI

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=6) + \mathbb{P}(X=7) + \mathbb{P}(X=8)$$

$$= \binom{8}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^3 +$$
$$\binom{8}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^2 +$$
$$\binom{8}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right) +$$
$$(1)\left(\frac{2}{3}\right)^8$$

e1) $\mathbb{P}(X=6) = \binom{8}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^2$

e2) $\mathbb{P}(X=7) = \binom{8}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)$

74. Ogni persona nella lista accetta indipendentemente con probabilità $p = \frac{2}{3}$. Se la lista ha n nomi il numero di accettazioni è $\mathrm{Bin}(n, p)$. Quindi la probabilità che la lista sia **sufficiente** a trovare 5 persone è $\Pr(\text{almeno } 5) = \sum_{k=5}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

(a) $n = 5$. Serve che tutte e 5 accettino:

$$\Pr = \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \approx 0.131687.$$

(b) $n = 8$. Serve che almeno 5 su 8 accettino:

$$\Pr = \sum_{k=5}^{8} \binom{8}{k} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \left(\tfrac{1}{3}\right)^{8-k} = \frac{4864}{6561} \approx 0.741350.$$

(c) Con $n = 8$, la probabilità di parlare **esattamente** con 6 persone è

$$\Pr(X=6) = \binom{8}{6} \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \frac{1792}{6561} \approx 0.273129.$$

(d) Con $n = 8$, la probabilità di parlare **esattamente** con 7 persone è

$$\Pr(X=7) = \binom{8}{7} \left(\tfrac{2}{3}\right)^7 \left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{1024}{6561} \approx 0.156074.$$

75. Si lancia una moneta equilibrata fino a che appare la decima testa. Indichiamo con X il numero di croci (tails) ottenute **prima** della decima testa. È una distribuzione binomiale negativa (o Pascal) con parametri $r = 10$ successi e probabilità di testa $p = \frac{1}{2}$. La massa di probabilità è, per $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\Pr(X = k) = \binom{k + 10 - 1}{10 - 1} (1 - p)^k p^{10} = \binom{k + 9}{9} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+10}.$$

(Questo è la probabilità di ottenere esattamente k croci quando si ottiene la decima testa.)

SEMBREREBBE TUTTO CORRETTO