

# ESERCIZI LEZIONE 1

1.1.

monque, rouge, poiz

1.2.

$$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

1.3.

- a)  $\left[ (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \right]$
- b)  $\left[ (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \right]$
- c)  $\left[ (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \right]$
- d)  $\left[ (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \right]$

1.4.

$$\{(A_i, A_j) \mid i = j - 1\}$$

1.5.

$$a) \Omega = \{ (AAA), (AA\bar{B}), (ABA), (\bar{B}AA), (AB\bar{B}), (\bar{B}\bar{B}A), (\bar{B}AB), (\bar{B}\bar{B}\bar{B}) \}$$

$$|\Omega| = 8$$

$$b) \begin{aligned} & \{ \text{Almeno due elementi di tipo B fra i tre estratti} \} \\ &= \{ (\bar{B}BA), (\bar{B}AB), (AB\bar{B}), (\bar{B}\bar{B}\bar{B}) \} \end{aligned}$$

$$\left| \{ \text{Almeno due elementi di tipo B fra i tre estratti} \} \right| = 4$$

$$e) \boxed{\{ \text{almeno due elementi di tipo B} \} \cup \{ \text{l'elemento estratto alla seconda estrazione è di tipo B} \}} =$$

$$\{ (\bar{B}BA), (AB\bar{B}), (\bar{B}\bar{B}\bar{B}) \}$$

$$\left| \boxed{\{ \text{almeno due elementi di tipo B} \} \cup \{ \text{l'elemento estratto alla seconda estrazione è di tipo B} \}} \right| = 3$$

1.6.

$$|\Omega| = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

1.7

a)  $\{(AAA), (ABA), (AAB), (BAA), (BBA), (ABB), (BAB), (BBB)\}$

b) in questo caso non c'è alcuna differenza, poiché non c'è differenza nel caso in cui estraiamo più di 3 palline.

1.8

$$|\Omega| = 4!3!$$

1.9

a)  $\Omega = \{(\tau, e), (\tau, \tau), (e, \tau), (e, e)\}$

$$|\Omega| = 4$$

b)  $|P(\Omega)| = 12$

1.10

a)  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$H_1 = \{1, 5\}$$

$$H_2 = \{2, 3, 4\}$$

$$H_3 = \{3, 6\}$$

a) SI

b) NO

c) NO

## • Sezione 2

PROPRIETÀ DI ADDITIVITÀ (DIMOSTRAZIONE)

DATI 3 eventi disgiunti 2 a 2  $\rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^3 E_i\right) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(E_i)$

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^3 E_i &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 = (E_1 \cup E_2) \cup E_3 = \\ &= [(E_1 \cup E_2) \cup E_3] - [(E_1 \cup E_2) \cap E_3] = \\ &= [E_1 \cup E_2 \cup E_3] - (E_1 \cap E_3) - (E_2 \cap E_3) = \end{aligned}$$

$E_1 \cup E_2 \cup E_3$ , quindi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) = \\ \sum_{i=0}^3 \mathbb{P}(E_i) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^3 E_i\right) \end{aligned}$$

... lo stesso vale per  $n$  elementi.

## CONSEGUENZE ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ Dimostrazioni

a) Ponendo  $P(w_i) = \mathbb{P}(\{w_i\})$   $i = 1, \dots, N$   
per ogni  $E \in \mathcal{P}(\Omega)$  risulta:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\substack{i=1 \\ i: w_i \in E}}^N P(w_i) = \sum_{w \in E} P(w) \quad \text{Dim:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ i: w_i \in E}}^N P(w_i) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i: w_i \in E}}^N \mathbb{P}(\{w_i\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ i: w_i \in E}}^N \{\{w_i\}\}\right) = \mathbb{P}(w_1 \cup \dots \cup w_N) \\ &= \mathbb{P}(E). \end{aligned}$$

prop  
(12)

$\forall A, B$  si ha  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$  Dim:

$$A = A \cup (B \cap \bar{B}) = A = A$$

b)

$$\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) \quad \text{Rim.}$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cap E) \cup \mathbb{P}(\Omega \cap \bar{E}) = 1 \iff \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\bar{E}) = 1$$

c)

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

PER ASSURDO  $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega$$

$$\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega)$$

ma dato che  $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$ ,  $\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset)$  dovrebbe essere  
 $\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) > \mathbb{P}(\Omega)$  ma questo non e' possibile  $\rightarrow$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

d)

$$A \subseteq B$$

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) \cup \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$  perciò dato che  $A \subseteq B$ ,  
l'evento  $(A \cap \bar{B})$  non e' possibile dato che, se si riflette  
 $A$  deve verificarsi anche  $B$ .  $\rightarrow$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$$

OPPURE:

$$\mathbb{P}(B) = \underbrace{\mathbb{P}(B \cap \bar{A})}_{\mathbb{P}(A)} + \mathbb{P}(B \cap A), \quad \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap \bar{A})}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A)$$

e)

IMPORTANTE!

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) \cup (\bar{B} \cap \bar{A}))$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap A) \cup (A \cap B))$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\bar{B} \cup (A \cap \bar{B}))$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B \cup A / (A \cap B)) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

8)  $\boxed{\dots}$

### ESERCIZI

2.1  $\mathbb{P}(\text{Pom}) = \mathbb{P}(\text{Pom}) \cdot 2$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\text{dipom}) + 2\mathbb{P}(\text{dispon})$$

$$1 = 0, \overline{3} + 0, \overline{6}$$

$$\mathbb{P}(\text{Dispon}) = 0, \overline{3} \%$$

$$\mathbb{P}(\text{Pom}) = 0, \overline{6} \%$$

### 2.2.

a)  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$$

? ? ?

b)  $\mathbb{P}\{\text{ALMENO 1}\} = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$

c)  $\mathbb{P}\{\text{ESSATTAMENTE 1}\} = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$

### 2.3

$$\mathbb{P}(E_1 \cap \bar{E}_2) = \mathbb{P}(\bar{E}_1 \cap E_2) \rightarrow \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2)$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) + \mathbb{P}(E_1 \cap \bar{E}_2)$$

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\bar{E}_1 \cap E_2) + \mathbb{P}(\bar{E}_1 \cap E_2) \rightarrow \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2)$$

2.4.

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Dim: {

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})]$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) \quad \square \quad \}$$

Dim:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup B) \cap C \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

## ESEMPI MERCOLEDÌ 2 OTTOBRE.

**Esercizio 3.1.** Le lettere AAMMM vengono ordinate a caso. Qual è la probabilità di ottenere la parola MAMMA?

**Esercizio 3.2.** Si fanno  $n$  lanci di una moneta perfetta. Per  $1 \leq h \leq n$ , qual è la probabilità di ottenere il risultato testa per la prima volta all' $h$ -esimo lancio?

**Esercizio 3.3.** Da un'urna, che contiene 6 oggetti numerati da 1 a 6, si estraggono a caso tre oggetti contemporaneamente. Qual è la probabilità che il minimo numero estratto sia superiore a 2?

3.1.)  $\Omega = \{\text{TUTTI GLI ANAGRAMMI DI AAMMM}\}$

$$|\Omega| = \left( \frac{5!}{2!3!} \right)$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{\cancel{5!}} = \frac{2!3!}{\cancel{2!3!}} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

3.2)  $\Omega = \{\text{DISPOSIZIONI CON REINSERIMENTO}\}$

$$|\Omega| = (2)^n$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{(1^{h-1} \cdot 1 \cdot (2)^{n-h})}{(2)^n}$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2^n}{2^n \cdot 2^h} = \frac{1}{2^h}$$

3.3.

$$|\Omega| = \binom{6}{3}$$

"NON CI INTERESSA L'ORDINE"

$$\bar{E} = \binom{2}{1} \binom{5}{2}$$

$$E = 1 - \left[ \binom{2}{1} \binom{5}{2} \right]$$

$$P(E) = \frac{1 - \left[ \binom{2}{1} \binom{5}{2} \right]}{\binom{6}{3}}$$

ESERCIZI GIOVEDÌ 3 OTTOBRE

### ESERCIZIO

Calcolare il numero degli anagrammi della parola

PATATE con 2 lettere A, 2 lettere T, 1 lettera E 1 lettera P

e scrivere l'espressione del numero degli anagrammi della parola

RABARBARO con 3 lettere A, 3 lettere R, 2 lettere B, 1 lettera O

$$|\text{PATATE } A.| = \frac{6!}{2!}$$

$$|\text{RABARBARO } A.| = \frac{9!}{3!3!2!}$$

Esercizio 3.4. In una mano del gioco della roulette si punta su {pair}, {passe}, {16}. Qual è la probabilità di vincere almeno una di queste puntate?

Esercizio 3.5. Qual è la probabilità che il numero 16 esca almeno una volta su cinque mani del gioco della roulette?

3.4.)

SFRUTTAMO IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE/ESCLUSIONE

$$P(\text{PAIR}) = \frac{1}{2}$$

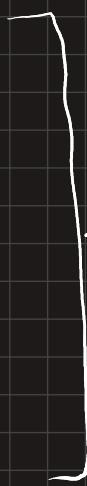
$$P(\text{PASSE}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{SEDI}) = \frac{1}{37}$$

$$P(\text{PAIR} \cap \text{PASSE}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{PAIR} \cap \text{SEDI}) = \frac{1}{37}$$

$$P(\text{SEDI} \cap \text{PASSE}) = \frac{0}{37}$$



$$\begin{aligned} P(\text{ALMENO 1}) &= P(\text{PAIR}) + P(\text{PASSE}) + P(\text{SEDI}) \\ &\quad - [P(\text{PAIR} \cap \text{PASSE}) + P(\text{PAIR} \cap \text{SEDI}) + \\ &\quad P(\text{SEDI} \cap \text{PASSE})] + \\ &\quad P(\text{SEDI} \cap \text{PASSE} \cap \text{PAIR}) = \end{aligned}$$

$$\rightarrow P(\text{ALMENO 1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{37}} - \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{37}} = \frac{3}{4}$$

$$3.5) |\Omega| = (37)^5$$

$$|\bar{E}| = (36)^5$$

$$P(E) = 1 - \left( \frac{36}{37} \right)^5 \approx 0,13$$

Esercizio 3.9) Vengono lanciati contemporaneamente 5 dadi perfetti.

Calcolate la probabilità degli eventi elencati qui di seguito:

- (a) {tutti i dadi danno punteggi diversi fra loro}
- (b) {due dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri tre danno punteggi tutti diversi} ("coppia")
- (c) {tre dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri due danno due punteggi diversi} ("tris")
- (d) {quattro dadi danno punteggi uguali fra loro e uno da un punteggio diverso} ("poker")
- (e) {tutti i dadi danno lo stesso punteggio} ("jazzi")
- (f) {due diverse coppie di punteggi fra loro uguali e un punteggio diverso dagli altri due} ("doppia coppia")
- (g) {tre punteggi uguali fra loro e gli altri due uguali fra loro e diversi dal precedente} ("full").

$$a) |\Omega| = (6)^5$$

$$|E| = 6!$$

$$P(E) = \frac{6!}{6^5}$$

$$b) |\Omega| = 6^5$$

$$|E_1| = \binom{6}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}$$

$$P(E_1) = \left( \frac{\binom{5}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \right)$$

$$c) |\Omega| = 6^5$$

$$|E_2| = \binom{6}{1} \binom{5}{3} \binom{5}{1} \binom{4}{1}$$

$$P(E_2) = \left( \frac{\binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \right)$$

$$d) P(E_3) = \frac{\binom{5}{4} \binom{6}{5}}{6^5}$$

$$e) P(E_4) = \binom{6}{1} / 6^5$$

$$P(\epsilon_5) = \frac{\binom{6}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{4}{1}}{6^5}$$

$$P(\epsilon_6) = \frac{\binom{6}{1} \binom{5}{3} \binom{5}{1} \binom{2}{2}}{6^5}$$