NELLE LEZIONI 15-18 SI PARLA DI VARIABILI ALEATORIE, VALORE ATTESO, VARIANZA E COVARIANZA, SI FA UN ACCENNO ALLA LEGGE DEI GRANDI NUMERI.

Esercizio 1. I pesi di una misura di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sono dati da $p_1 = 1/8$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 3/8$, $p_4 = 1/8$. Determinare il valore di p_5.

$$\sum_{x_i \in X} p_X(x_i) = 1 \implies p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

$$p_5 = 1 - 1/8 - 1/4 - 3/8 - 1/8 = \frac{8-1-2-3-1}{8} = 0$$

Esercizio 2. Sia $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Quanti eventi ci sono su Ω? Si consideri la misura di probabilità su Ω data dai pesi $p_0 = 1/2$, $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/6$. Calcolare $\mathbb{P}(A)$ per ogni evento A su Ω.

a) 3 ? ? ? ?

Esercizio 3. I pesi di una misura di probabilità sullo spazio campionario $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ sono dati da $p_1 = 1/5$, $p_2 = 2/5$, $p_3 = 2\alpha/3$, $p_4 = \alpha/3$. Determinare il valore di α.

$$1 = 1/5 + 2/5 + 2\alpha/3 + \alpha/3$$

$$1 = 3/5 + \alpha \implies \alpha = -3/5$$

Esercizio 4. Determinare quali di queste collezioni di pesi definiscono una misura di probabilità su $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$:

(i) $p_n = 1/n$, ✗ $1 + 1/2 + 1/3 \cdots$
(ii) $p_n = (-1)^n/n^2$, $-1 + 1/4 - 1/9 + 1/16 \cdots$ ✗
(iii) $p_n = 1/2^n$, ✗
(iv) $p_n = 1/3^n$, ✗ $1/3 + 1/9 + 1/\ldots \cdots$
(v) $p_n = \alpha(1/3)^n$ per qualche $\alpha \in (0, +\infty)$, $1/3 + 1/9 + \frac{1}{\ldots}\cdots$ ✗
(vi) $p_n = \dfrac{\alpha(\log 2)^n}{(n-1)!}$ per qualche $\alpha \in (0, +\infty)$. ✗

Esercizio 6. Consideriamo su $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ la distribuzione geometrica di parametro $p = 1/2$. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

(i) $A = \{1, 2, 3\}$,
(ii) $B = \{k : k \geq 10\}$,
(iii) $C = \{k \text{ pari}\}$,
(iv) $D = \{k \text{ dispari}\}$.

✅ ESERCIZI FINO A GIOVEDÌ 14 NOVEMBRE

Dal materiale del corso

- **Esempio 7.1** del testo *[SN]*
- **Esercizio 1** del file *domande-31-ott-2024.pdf*

Dal libro di Ross – Capitolo 4

1. **Esercizio 1**
2. **Esercizio 25**
3. **Esercizio 19**
4. **Esercizio 40**
5. **Esercizio 51**
6. **Esercizio 52**
7. **Esercizio 53**

DAL ROSS

1. Si forma la classifica dei punteggi di un gruppo di 10 studenti – 5 studenti maschi e 5 femmine – dopo un esame. Non vi sono ex aequo, e tutte le 10! possibili classifiche diverse hanno pari probabilità. Sia X la migliore posizione ottenuta da una studentessa (ad esempio $X = 2$ se il primo in classifica è maschio e la seconda è femmina). Calcola, per $i = 1, 2, \ldots, 10$, quanto vale $P(X = i)$.

$$\mathbb{P}(X=1) = 9!/10!$$

$$\mathbb{P}(X=2) = 8!/10!$$

...

$$\mathbb{P}(X=i) = (10-i)!/10!$$

25. Il trasporto di 148 alunni di una scuola presso un campo sportivo viene realizzato tramite 4 autobus, sui quali salgono 40, 33, 25 e 50 ragazzini. Si sceglie un alunno a caso, e si denota con X il numero totale di quelli saliti sul suo stesso autobus. Si sceglie poi, indipendentemente, uno dei quattro autisti e si denota con Y il numero totale di alunni saliti sull'autobus da lui portato.

(a) Quale pensi che sarà il maggiore, tra $E[X]$ ed $E[Y]$? Perché?

(b) Calcola $E[X]$ ed $E[Y]$.

a) NON SAPREI

b) $E[X] = \sum_{x_i \in X} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = 40 \cdot 1/4 + 33 \cdot 1/4 + 25 \cdot 1/4 + 50 \cdot 1/4 = \ldots$

$E[Y] = E[X]$

40. Supponi che X possa assumere i valori 1, 2 e 3 con probabilità p_1, p_2 e p_3, e inoltre che $E[X] = 2$. Quali sono i valori di p_1, p_2 e p_3 che massimizzano e minimizzano $\text{Var}(X)$?

$E(X) = 2$

$E(X) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3$

$Var(X) = E[X - E(X)]^2$

la varianza non dipende dalla densità discreta

51. Nell'Esempio 4.5.6 di pagina 121, calcola $\text{Cov}(X_i, X_j)$ e usa il risultato per dimostrare che $\text{Var}(X) = 1$.

52. Dimostra che se X_1 e X_2 hanno la stessa distribuzione, allora

$$\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0$$

Nota che non è necessario supporre che siano indipendenti.

53. Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità data da

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x > 0$$

Calcola la funzione generatrice dei momenti di X e impiegala per determinare valore atteso e varianza di X. Verifica il risultato ottenuto per la media con un calcolo diretto.

51) a) $Cov(X_i, X_J) =$

$E(X_i) = 1/N = E(X_J)$

$Cov(X_i, X_J) = E[(X_i - E(X_i))(X_J - E(X_J))] = E\left[-\frac{1}{N}(X_i + X_J)\right]$

$= -\frac{1}{N}\left[E(X_i + X_J)\right] = -\frac{1}{N}(E[X_i] + E[X_J]) = -\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right) =$

$-\frac{1}{N^2} - \frac{1}{N^2} = -\frac{2}{N^2}$

b) $Var(X) == 1$?

DIM: $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots + X_n$

$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$

$Var(X_i + X_J) = Var(X_i) + Var(X_J) + 2\,Cov(X_i, X_J) =$

$Var(X_i) + Var(X_J) - 4/N^2$

$Var(X_i) = E(X_i - E(X_i))^2 = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = E(X_i^2) - \frac{1}{N^2} =$

$Var(X_J) = E(X_J^2) - 1/N^2 = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}$

$Var(X_i + X_J) = 1/N - 1/N^2 + 1/N - 1/N^2 - 4/N^2 = \frac{1N - 1 + 1N - 1 - 4}{N^2} =$

$\frac{2N - 6}{N^2}$

ESERCIZI SBAGLIATI...

1. Due palline vengono scelte a caso da un'urna che contiene 8 palline bianche, 4 nere e 2 gialle. Supponiamo che si vincano 2 euro per ogni pallina nera estratta e se ne perda uno per ogni pallina bianca estratta. Denotiamo con X la vincita. Quali sono i possibili valori di X e con quali probabilità vengono ottenuti?

1.

$$X(\Omega) = \{4, 2, 1, 0, -1, -2\}$$

$$\mathbb{P}(X=4) = \frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13} + \frac{3}{14}\cdot\frac{4}{13}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{4}{14}\cdot\frac{2}{13} + \frac{2}{14}\cdot\frac{4}{13}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{4}{14}\cdot\frac{8}{13} + \frac{8}{14}\cdot\frac{4}{13}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{2}{14}\cdot\frac{1}{13}$$

$$\mathbb{P}(X=-1) = \frac{4}{14}\cdot\frac{1}{13} + \frac{1}{14}\cdot\frac{4}{13}$$

$$\mathbb{P}(X=-2) = \frac{4}{14}\cdot\frac{3}{14}$$

19. Supponiamo che la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sia data da

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \le b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \le b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \le b < 3.5 \\ 1 & b \ge 3.5 \end{cases}$$

VALORI ASSUNTI

Si calcoli la densità discreta associata a questa distribuzione.

$$P_{x\le0} = 0$$

$$P_{0\le x<1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{1\le x<2} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P_{2\le x<3} = \frac{4}{5} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

$$P_{3\le x<3,5} = \frac{2}{10}$$

NO

$$P_{x\ge3,5} =$$

25. Dobbiamo lanciare due monete. La prima moneta darà testa con probabilità 0.6, mentre la seconda con probabilità 0.7. Supponiamo che i risultati dei due lanci siano tra loro indipendenti e definiamo X uguale al numero totale di teste ottenute.
(a) Si calcoli $P[X = 1]$.
(b) Si determini $E[X]$.

a) $\mathbb{P}[X=1] = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}46$

b) $E[X] = 1 \cdot 0{,}46 + 0 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 1{,}3$

✅ Risultati finali
- (a) $P(X=1) = 0.46$
- (b) $E[X] = 1.3$

Se vuoi, posso anche calcolare tutta la distribuzione di X (cioè $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$).

PARE GIUSTO...

40. In un esame a risposta multipla con 3 possibili risposte per ognuna delle 5 domande, qual è la probabilità che uno studente risponda a 4 o più domande correttamente tentandole in maniera casuale?

$\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5)$ dove:

$\mathbb{P}(X=4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)$

$\mathbb{P}(X=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0$

52. Il numero medio mensile di incidenti di aerei commerciali in tutto il mondo è pari a 3.5. Qual è la probabilità che ci siano
(a) almeno 2 incidenti il prossimo mese;
(b) al più 1 incidente il prossimo mese?
Si giustifichi la risposta.

53. L'anno scorso si sono celebrati all'incirca 80 000 matrimoni nello stato di New York. Si stimi la probabilità che almeno una di queste coppie abbia i due partner
(a) nati il 30 aprile;
(b) che compiono gli anni nel medesimo giorno.
Si giustifichino le risposte.

54. Supponiamo che il numero atteso di veicoli abbandonati settimanalmente in una certa autostrada sia pari a 2.2. Si approssimi la probabilità che ci siano
(a) nessun veicolo abbandonato la prossima settimana;
(b) almeno 2 veicoli abbandonati la prossima settimana.

52) a) $E[X] = 3{,}5$

X può essere modellata come una variabile aleatoria di poisson

$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ dove $\lambda = E[X]$

calcolo per $k = 0$, $k = 1$

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-3,5}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = e^{-3,5} \cdot 3,5$$

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - e^{-3,5} - (e^{-3,5} \cdot 3,5)$$ allora :

b) $$\mathbb{P}(X < 1) \quad 1 - \left(1 - e^{-3,5} - (e^{-3,5} \cdot 3,5)\right)$$

~~53~~) $E[X] = 80.000$

a) NATI IL 2 APRILE

b) NATI LO STESSO GIORNO

a) $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{80.000}{k} \left(1/365\right)\left(1/365\right)$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\cancel{80.000!}}{0!\,(\cancel{80.000!})} \cdot 1/365 \cdot 1/365 = 1/133225$$

$$\mathbb{P}(X > 0) = 1 - 1/133225$$

b) $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{80.000}{k} \left(1/365\right)$$

$$\mathbb{P}(X > 0) = 1 - 1/365$$

NO

(HO SBAGLIATO A INTERPRETARE IL VALORE 80.000)

54) $E[X] = 2,2$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2,2} \leftarrow \text{a)}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = e^{-2,2} \cdot 2,2$$

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - e^{-2,2} - (e^{-2,2} \cdot 2,2) \leftarrow \text{b)}$$

53)

53. L'anno scorso si sono celebrati all'incirca 80 000 matrimoni nello stato di New York. Si stimi la probabilità che almeno una di queste coppie abbia i due partner
(a) nati il 30 aprile;
(b) che compiono gli anni nel medesimo giorno.
Si giustifichino le risposte.

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \left(\frac{1}{365} \cdot \frac{1}{365}\right)^k$$
$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \left(\frac{1}{365}\right)^k$$

a) $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \left(\frac{1}{365} \cdot \frac{1}{365}\right)^{80.000}$

b) $\mathbb{P}(X_2 = 0) = 1 - \left(\frac{1}{365}\right)^{80.000}$

NO

(NON POSSO SVOLGERLO, MI SERVE L'APPROSSIMAZIONE DI POISSON)

Esercizio 7.1. Indichiamo con $X_1, ..., X_5$ i 5 numeri estratti su una ruota del lotto (si estrae senza reinserimento da un'urna contenente i numeri $\{1,2,..., 90\}$) e sia inoltre X il valore più alto fra $X_1, ..., X_5$. Calcolate $\mathbb{P}(X \leq k)$ e $\mathbb{P}(X = k)$ per $k = 1, 2...., 90$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{1}{1}\binom{k-1}{4} \Big/ \binom{90}{5}$$
$$\mathbb{P}(X \leq k) = \binom{k}{5} \Big/ \binom{90}{5}$$

Esercizio 7.2. Supponiamo che X sia una variabile aleatoria a valori nell'insieme $\{0, 1, ..., n\}$ e che, per una coppia di costanti positive A e ρ, risulti

$$\mathbb{P}(X = k) = A \cdot \frac{\rho^k}{k!\,(n-k)!}, \qquad k = 0, 1, ..., n,$$

Dimostrare che X segue una distribuzione binomiale ed individuarne i parametri.

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 p^n = 1$$

BOH!