GEMINI + E' MIO AMICO

Gli esercizi assegnati o discussi durante le lezioni del 14 e 15 novembre sono i seguenti, tratti principalmente dal Capitolo 4 del libro di **ROSS**:

### Giovedì 14 Novembre

1. **Distribuzione Ipergeometrica:** Esercizio teorico di **impostazione del calcolo della Varianza** utilizzando la formula completa della varianza della somma di $n$ variabili aleatorie (richiamo teorico con applicazione).
2. **Distribuzione di Poisson** ($\text{Poisson}(\lambda)$)**:** Esercizio di **calcolo del Valore Atteso** ($E(X) = \lambda$) **e della Varianza** ($\text{Var}(X) = \lambda$) utilizzando la somma della serie esponenziale.
3. **Esercizi ROSS:**
   - **Esercizio 52** (Capitolo 4).
   - **Esercizio 53** (Capitolo 4).

SVOLTI NEL PRECEDENTE FOGLIO (15, 18)

---

### Venerdì 15 Novembre

1. **Distribuzione Uniforme:** Esercizio di deduzione del Valore Atteso e della Varianza per una variabile aleatoria $\mathbf{Y}$ Uniforme in $\{0, 1, \ldots, m\}$ a partire dalla variabile $\mathbf{X}$ Uniforme in $\{1, 2, \ldots, m+1\}$ (usando $Y = X - 1$).
2. **Distribuzione Geometrica** ($\text{Geom}(p)$)**:**
   - Esercizio di **calcolo del Valore Atteso** ($E(X) = 1/p$) usando la formula $E(X) = \sum_{k\geq 0} P(X > k)$.
   - **Esercizio 71** (Capitolo 4 di ROSS) - Introduzione della variabile Geometrica.
3. **Distribuzione Binomiale Negativa (Tempi di r-simo Successo):**
   - **Esercizio 74** (Capitolo 4 di ROSS) - Introduzione di $T_r$ (tempo di r-simo successo) e $T_r'$ (numero di insuccessi prima dell'r-simo successo).
   - **Esercizio 75** (Capitolo 4 di ROSS).

**74.** A una intervistatrice viene data una lista di possibili persone da intervistare. Se lei ha bisogno di intervistarne 5 e ognuno (indipendentemente) accetta di essere intervistato con probabilità pari a $\frac{2}{3}$, qual è la probabilità che la sua lista di possibili intervistati sia sufficiente per trovarne 5 se essa contiene:
**(a)** 5 nomi;
**(b)** 8 nomi?
Nel caso ci siano 8 nomi, qual è la probabilità che l'intervistatrice parli con esattamente
**(c)** 6 persone;
**(d)** 7 persone della lista?

**75.** Una moneta equilibrata viene lanciata fino a quando appare per la decima volta testa. Denotiamo con $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di croce che si ottengono. Se ne calcoli la densità discreta.

75)

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^{r-1} \cdot p \cdot (1-p)^k$$
$$= \binom{k+r-1}{r-1} p^{r+k}$$

74) a) 5 NOMI

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot p^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \binom{5}{5} p^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

b) 8 NOMI

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=6) + \mathbb{P}(X=7) + \mathbb{P}(X=8)$$

$$= \binom{8}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^3 +$$

$$\binom{8}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^2 +$$

$$\binom{8}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right) +$$

$$(1)\left(\frac{2}{3}\right)^8$$

e1) $\mathbb{P}(X=6) = \binom{8}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^2$

e2) $\mathbb{P}(X=7) = \binom{8}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)$

**74.** Ogni persona nella lista accetta indipendentemente con probabilità $p = \frac{2}{3}$. Se la lista ha $n$ nomi il numero di accettazioni è $\mathrm{Bin}(n, p)$. Quindi la probabilità che la lista sia **sufficiente** a trovare 5 persone è $\Pr(\text{almeno } 5) = \sum_{k=5}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

(a) $n = 5$. Serve che tutte e 5 accettino:

$$\Pr = \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \approx 0.131687.$$

(b) $n = 8$. Serve che almeno 5 su 8 accettino:

$$\Pr = \sum_{k=5}^{8} \binom{8}{k} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \left(\tfrac{1}{3}\right)^{8-k} = \frac{4864}{6561} \approx 0.741350.$$

(c) Con $n = 8$, la probabilità di parlare **esattamente** con 6 persone è

$$\Pr(X = 6) = \binom{8}{6} \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \frac{1792}{6561} \approx 0.273129.$$

(d) Con $n = 8$, la probabilità di parlare **esattamente** con 7 persone è

$$\Pr(X = 7) = \binom{8}{7} \left(\tfrac{2}{3}\right)^7 \left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{1024}{6561} \approx 0.156074.$$

**75.** Si lancia una moneta equilibrata fino a che appare la decima testa. Indichiamo con $X$ il numero di croci (tails) ottenute **prima** della decima testa. È una distribuzione binomiale negativa (o Pascal) con parametri $r = 10$ successi e probabilità di testa $p = \frac{1}{2}$. La massa di probabilità è, per $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\Pr(X = k) = \binom{k + 10 - 1}{10 - 1} (1 - p)^k p^{10} = \binom{k + 9}{9} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+10}.$$

(Questo è la probabilità di ottenere esattamente $k$ croci quando si ottiene la decima testa.)

SEMBREREBBE TUTTO CORRETTO

**71.** Consideriamo una ruota della roulette consistente di 38 numeri – i numeri dall'1 al 36 più due zeri. Se il signor Bondi scommette sempre che esca un numero compreso tra l'1 e il 12, qual è la probabilità che

**(a)** Bondi perda le prime 5 scommesse;

**(b)** la sua prima vittoria si verifichi alla quarta scommessa?

71)

a) $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad ; \quad \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$

$\mathbb{P}(X > 5) = \boxed{\left(1 - \frac{12}{38}\right)^5}$

b) $\mathbb{P}(X = 4) = \boxed{\left(1 - \frac{12}{38}\right)^3 \cdot \frac{12}{38}}$