Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Parametrikus görbék és felületek pontos offsetelése

Szakdolgozat

Készítette
Sandle Nátán

Konzulens
Salvi Péter

2025-04-29

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**
1.1. CAD/CAM . . . 1
1.2. Racionális görbék/felületek . . . 1
1.3. Kontrollpont-alapú reprezentáció . . . 1
1.4. Parametrikus sebesség . . . 1

2. PH Görbék **2**
2.1. PH síkgörbék . . . 2
2.1.1. Alapok . . . 2
2.1.2. Reprezentáció komplex számokkal . . . 2
2.1.3. Interpoláció . . . 2
2.2. PH térgörbék . . . 2
2.2.1. Alapok . . . 2
2.2.2. Reprezentáció kvaterniókkal . . . 2
2.2.3. Interpoláció . . . 2

3. PN felületek **3**

4. PN interpoláció C^1 folytonossággal **4**
4.1. Feladat . . . 4
4.2. Duális reprezentáció . . . 4
4.3. Izotróp tér . . . 5
4.4. Coons-patch . . . 6
4.5. Folyamat . . . 6

5. Implementációs részletek **7**
5.1. Polinom osztály . . . 7
5.2. Megjelenítés . . . 7

6. Eredmények **8**

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott *Sandle Nátán*, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy autentikált felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Budapest, 2025-04-29

Sandle Nátán
hallgató

1. Fejezet

Bevezetés

1.1. CAD/CAM

1.2. Racionális görbék/felületek

1.3. Kontrollpont-alapú reprezentáció

1.4. Parametrikus sebesség

2. Fejezet

PH Görbék

2.1. PH síkgörbék

2.1.1. Alapok

2.1.2. Reprezentáció komplex számokkal

2.1.3. Interpoláció

2.2. PH térgörbék

2.2.1. Alapok

2.2.2. Reprezentáció kvaterniókkal

2.2.3. Interpoláció

3. Fejezet

PN felületek

4. Fejezet

PN interpoláció C^1 folytonossággal

4.1. Feladat

4.2. Duális reprezentáció

Egy olyan $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ racionális felületet keresünk, melynek egységhosszúságú normálvektorait leíró $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ függvény szintén racionális. Kézenfekvő lehet „fordítva gondolkozni": először konstruálni egy garantáltan racionális $\mathbf{n}(\mathbf{s})$-t, majd ebből meghatározni $\mathbf{x}(\mathbf{s})$-t. Felületünket a szokásos (x, y, z) koordináták helyett reprezentálhatjuk az úgynevezett „duális térben", $\left(n_x, n_y, n_z, h\right)$ koordinátákkal. Ezek a koordináták a felület egy pontja helyett a felület egy érintősíkját írják le.

Ha $\mathbf{x}$ a felület egy pontja, $\mathbf{n}$ pedig a felület normálvektora ebben a pontban, az ennek megfelelő pont a duális térben $(\mathbf{n}, h)$, ahol:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = h$$

Ha feltételezzük, hogy $\mathbf{n}$ egység hosszúságú, akkor h nem más, mint az érintősík távolsága az origótól. A $h(\mathbf{s})$ függvényt a felület support függvényének hívjuk.

Ezzel a képlettel már át tudjuk transzformálni az interpolálandó adatpontokat a duális térbe. Ahhoz, hogy a végeredményt leírhassuk a „primális" térben, szükségünk lesz az inverzre is, tehát $\mathbf{n}$-ből és h-ból ki szeretnénk számolni $\mathbf{x}$-et. Ehhez először fel kell írnunk néhány azonosságot.

$\mathbf{x}(\mathbf{s})$ parciális deriváltjai párhuzamosak az érintősíkkal

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{s}}^T \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Így $h(\mathbf{s})$ deriváltja

$$\frac{dh}{d\mathbf{s}} = \frac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{x}^T\mathbf{n} = \mathbf{x}^T\frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}$$

Mivel $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ egységhossúságú, egy gömbfelületet ír le. Parciális deriváltjai merőlegesek rá

$$\frac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 2\,\mathbf{n}^T\frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}} = \frac{d}{d\mathbf{s}}1 = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}^T\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$h\mathbf{n}$ egy pont az érintősíkon, $\frac{d\mathbf{n}}{du}$ és $\frac{d\mathbf{n}}{dv}$ pedig az érintősíkkal párhuzamos vektorok. Így $\mathbf{x}$-et ki tudjuk fejezni az alábbi módon

$$\mathbf{x} = h\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}\cdot\mathbf{r}$$

Szorozva $\frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}^T$-al

$$\frac{dh}{d\mathbf{s}}^T = \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}^T\frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}\cdot\mathbf{r}$$
$$\mathbf{r} = \left(\frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}^T\frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}\right)^{-1}\frac{dh}{d\mathbf{s}}^T$$

Tehát

$$\mathbf{x} = h\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}\left(\frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}^T\frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}}\right)^{-1}\frac{dh}{d\mathbf{s}}^T$$

4.3. Izotróp tér

Az egységhosszúságú normálvektor előírásával $\mathbb{R}^4$-et leszűkítettük $\mathcal{B}$-re, az úgynevezett Blaschke hengerre. Az interpoláció közben szeretnénk biztosítani, hogy a hengeren maradunk. Ennek érdekében bevezetünk egy új reprezentációt, az izotróp térben. Ezt a reprezentációt úgy állítjuk elő, hogy a $\mathbf{w} = (0,0,1,0)$ pontból az $n_z = 0$ hipersíkba vetítünk

$$\mathbf{y}(\mathbf{b}) = \frac{1}{1-n_z}\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ h \end{pmatrix}$$

Ennek az inverze

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \frac{1}{1+y_x^2+y_y^2}\begin{pmatrix} 2y_x \\ 2y_y \\ -1+y_x^2+y_y^2 \\ 2y_z \end{pmatrix}$$

Az izotróp térben szabadon interpolálhatunk a transzformált adatpontok között, majd a felületet visszavetítjük a Blaschke hengerre.

Bárhogy is interpoláljuk az adatpontjainkat az izotróp térben, a visszatranszformált felület érintősíkjai meg fognak egyezni az előírtakkal. Ahhoz viszont, hogy a konkrét térbeli pozíció is megegyezzen, korlátoznunk kell a felület lehetséges deriváltjait az interpolációs pontokban

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}} &= \frac{dh}{d\mathbf{s}} \\
\mathbf{x}^T \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{s}} &= \frac{dh}{d\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{s}} \\
\underbrace{\left(\mathbf{x}^T \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{y}} - \frac{dh}{d\mathbf{y}}\right)}_{\mathbf{v}} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{s}} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Ahol

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{y}} \\ \frac{dh}{d\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{y}} = \frac{2}{\left(1 + y_x^2 + y_y^2\right)^2} \begin{pmatrix} 1 - y_x^2 + y_y^2 & -2y_x y_y & 0 \\ -2y_x y_y & 1 + y_x^2 - y_y^2 & 0 \\ 2y_x & 2y_y & 0 \\ -2y_x y_z & -2y_y y_z & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát az izotróp térben kiválasztott kezdeti/végponti irányvektoroknak illeszkedniük kell a $\mathbf{v}$ normálvektorú, origót tartalmazó síkra.

4.4. Coons-patch

Ha az adatpontjainkat áttranszformáltuk az izotróp térbe, és rendeltünk hozzájuk megfelelő irányvektorokat (erre a következő pontban adunk egy heurisztikát), akkor végre konstruálhatunk egy felületet.

4.5. Folyamat

5. Fejezet

Implementációs részletek

5.1. Polinom osztály

5.2. Megjelenítés

6. Fejezet

Eredmények