



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Villamosmérnöki és Informatikai Kar  
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

# Parametrikus görbék és felületek pontos offsetelése

SZAKDOLGOZAT

*Készítette*  
Sandle Nátán

*Konzulens*  
Salvi Péter

2025-04-27

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. CAD/CAM . . . . .	1
1.2. Racionális görbék/felületek . . . . .	1
1.3. Kontrollpont-alapú reprezentáció . . . . .	1
1.4. Parametrikus sebesség . . . . .	1
<b>2. PH Görbék</b>	<b>2</b>
2.1. PH síkgörbék . . . . .	2
2.1.1. Alapok . . . . .	2
2.1.2. Reprezentáció komplex számokkal . . . . .	2
2.1.3. Interpoláció . . . . .	2
2.2. PH térgörbék . . . . .	2
2.2.1. Alapok . . . . .	2
2.2.2. Reprezentáció kvaterniókkal . . . . .	2
2.2.3. Interpoláció . . . . .	2
<b>3. PN felületek</b>	<b>3</b>
<b>4. PN interpoláció <math>C^1</math> folytonossággal</b>	<b>4</b>
4.1. Feladat . . . . .	4
4.2. Duális reprezentáció . . . . .	4
4.3. Izotróp tér . . . . .	5
4.4. Coons-patch . . . . .	5
4.5. Folyamat . . . . .	5
<b>5. Implementációs részletek</b>	<b>6</b>
5.1. Polinom osztály . . . . .	6
5.2. Megjelenítés . . . . .	6
<b>6. Eredmények</b>	<b>7</b>

## HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott *Sandle Nátán*, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy autentikált felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Budapest, 2025-04-27

---

*Sandle Nátán*  
hallgató

# 1. Fejezet

## Bevezetés

### 1.1. CAD/CAM

### 1.2. Racionális görbék/felületek

### 1.3. Kontrollpont-alapú reprezentáció

### 1.4. Parametrikus sebesség

## 2. Fejezet

# PH Görbék

### 2.1. PH síkgörbék

#### 2.1.1. Alapok

#### 2.1.2. Reprezentáció komplex számokkal

#### 2.1.3. Interpoláció

### 2.2. PH térgörbék

#### 2.2.1. Alapok

#### 2.2.2. Reprezentáció kvaterniókkal

#### 2.2.3. Interpoláció

### **3. Fejezet**

## **PN felületek**

## 4. Fejezet

# PN interpoláció $C^1$ folytonossággal

### 4.1. Feladat

### 4.2. Duális reprezentáció

Egy olyan  $\mathbf{x}(\mathbf{s})$  racionális felületet keresünk, melynek egység hosszúságú normálvektorait leíró  $\mathbf{n}(\mathbf{s})$  függvény szintén racionális. Kézenfekvő lehet „fordítva gondolkozni”: először konstruálni egy garantáltan racionális  $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ -t, majd ebből meghatározni  $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ -t. Felületünket a szokásos  $(x, y, z)$  koordináták helyett reprezentálhatjuk az úgynevezett „duális térben”,  $(n_x, n_y, n_z, h)$  koordinátákkal. Ezek a koordináták a felület egy pontja helyett a felület egy érintősíkját írják le.

Legyen  $\mathbf{p}$  a felület egy pontja,  $\mathbf{n}$  pedig a felület normálvektora ebben a pontban. Az ennek megfelelő pont a duális térben  $(\mathbf{n}, h)$ , ahol:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = h$$

Ha feltételezzük, hogy  $\mathbf{n}$  egység hosszúságú, akkor  $h$  nem más, mint az érintősík távolsága az origótól. A  $h(\mathbf{s})$  függvényt a felület support függvényének hívjuk.

A mi módszerünkben  $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ -t és  $h(\mathbf{s})$ -t fogjuk ismerni, ezekből kell kiszámolnunk  $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ -t. Ehhez először fel kell írunk néhány azonosságot.

$\mathbf{x}(\mathbf{s})$  parciális deriváltjai párhuzamosak az érintősíkkal

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Így  $h(\mathbf{s})$  deriváltja

$$\frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x}^T \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}$$

Mivel  $\mathbf{n}(\mathbf{s})$  egység hosszúságú, egy gömbfelületet ír le. Parciális deriváltjai merőlegesek rá

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= 2\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{ds}1 \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

$h\mathbf{n}$  egy pont az érintősíkon,  $\frac{d\mathbf{n}}{du}$  és  $\frac{d\mathbf{n}}{dv}$  pedig az érintősíkkal párhuzamos vektorok. Így  $\mathbf{x}$ -et ki tudjuk fejezni az alábbi módon

$$\mathbf{x} = h\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{r}$$

Szorozva  $\frac{d\mathbf{n}}{ds}^T$ -al

$$\begin{aligned}\frac{dh}{ds}^T &= \frac{d\mathbf{n}}{ds}^T \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{r} &= \left( \frac{d\mathbf{n}}{ds}^T \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right)^{-1} \frac{dh}{ds}^T\end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{x} = h\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{ds} \left( \frac{d\mathbf{n}}{ds}^T \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right)^{-1} \frac{dh}{ds}^T$$

### 4.3. Izotróp tér

Az egység hosszúságú normálvektor előírásával  $\mathbb{R}^4$ -et leszűkítettük  $\mathcal{B}$ -re, az úgynevezett Blaschke hengerre. Ahhoz, hogy

### 4.4. Coons-patch

### 4.5. Folyamat



## 5. Fejezet

# Implementációs részletek

### 5.1. Polinom osztály

### 5.2. Megjelenítés

## **6. Fejezet**

# **Eredmények**