10.1.2 向量代数

向量（矢量）$\begin{cases}\text{大小}\\ \text{方向}\end{cases}$

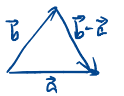
向径（矢径）：起点为原点的向量

自由向量：与起点无关的向量

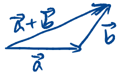
单位向量：$\vec a^\circ = \frac{\vec a}{|\vec a|}$

零向量与任何向量平行

三角不等式：$|\vec a-\vec b| \le |\vec a|+|\vec b|$

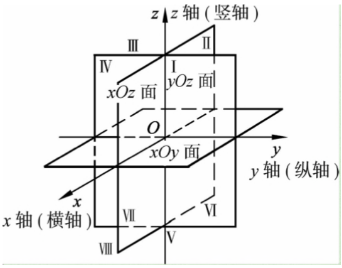


$|\vec a+\vec b| \le |\vec a|+|\vec b|$



空间直角坐标系

$\begin{cases}\text{坐标原点}\\ \text{坐标轴}\\ \text{坐标面}\\ \text{卦限（8个）}\end{cases}$



坐标分解式：$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k = (x, y, z)$

（$\vec i, \vec j, \vec k$ 为 x, y, z 轴上的单位向量）

平行向量对应坐标成比例：

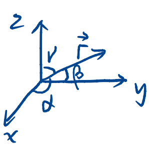
$\vec b // \vec a \Leftrightarrow \vec b = \lambda \vec a \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$

当向量分量出现0时，其平行向量对应分量为0.

$|\vec r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$\vec a, \vec b$ 的夹角 $(\widehat{\vec a, \vec b}) = \varphi$



给定 $\vec r = (x, y, z) \ne \vec 0$

其与三坐标轴夹角 α, β, γ 为方向角

方向角的余弦为方向余弦

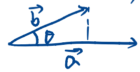
$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec r|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\vec r^\circ = \frac{\vec r}{|\vec r|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

向量的投影

当 $\vec a \ne \vec 0$ 时，$\vec b$ 在 $\vec a$ 上的投影为 $|\vec b|\cos\theta$ 记作 $Prj_{\vec a}\vec b$



- 投影是数值，而非向量
- 〃的值可 +，−，0
- 向量的坐标可用该向量在三个坐标轴上的投影表示

向量的数量积

$\vec a \cdot \vec b = |\vec a||\vec b|\cos\theta$（点积）

$= |\vec b| Prj_{\vec b}\vec a$

性质：

① $\vec a \cdot \vec a = |\vec a|^2$

② $\vec a \cdot \vec b = 0 \rightleftharpoons \vec a \perp \vec b$

数量积的坐标表示：

$\vec a \cdot \vec b = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

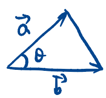
$\cos\theta = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a||\vec b|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

向量积

设 $\vec a, \vec b$ 的夹角为 θ，定义

$\vec c \begin{cases}\text{方向：} \vec c \perp \vec a,\ \vec c \perp \vec b \text{ 且符合右手规则}\\ \text{大小：} |\vec c| = |\vec a||\vec b|\sin\theta\end{cases}$

称 $\vec c$ 为 $\vec a$ 与 $\vec b$ 的向量积，记作 $\vec c = \vec a \times \vec b$（叉积）



$S = \frac{1}{2}|\vec a||\vec b|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}|\vec a \times \vec b|$

性质：

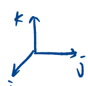
① $\vec a \times \vec a = \vec 0$

② $\vec a \times \vec b = \vec 0 \rightleftharpoons \vec a // \vec b$

运算律：反交换律：$\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a$

$\vec c$ 的方向：沿 $\vec a$ 握向 $\vec b$　　沿 $\vec b$ 握向 $\vec a$

向量积的坐标表示式



设 $\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k$，$\vec b = b_x\vec i + b_y\vec j + b_z\vec k$

$\vec a \times \vec b = (a_yb_z - a_zb_y)\vec i + (a_zb_x - a_xb_z)\vec j + (a_xb_y - a_yb_x)\vec k$

向量积的行列式计算法

$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$

10.3 平面及其方程

曲面方程的概念

定义：若曲面 S 与方程 $F(x,y,z)=0$ 满足

(1) S 上的任意点坐标都满足此方程.

(2) 不在 S 上的点坐标不满足此方程.

则 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 S 的方程

曲面 S 为 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

基本问题：① 已知一曲面作为点的几何轨迹，求方程.

② 已知方程，求几何形状.

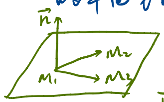
平面的点法式方程

法向量

设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 π 上的点，且垂直于 $\vec{n}=(A,B,C)$

则有 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 点法式方程

例1：求过 $M_1(2,-1,4)$，$M_2(-1,3,-2)$，$M_3(0,2,3)$ 的平面方程



$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$

$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&4&-6\\-2&3&-1\end{vmatrix}=(14,9,-1)$$

平面方程：$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$

$14x+9y-z-15=0$

截距式方程：

当平面与三坐标轴交点为 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$.

平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(a,b,c\neq 0)$

平面的一般方程：

$Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$

其图形为法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 的平面

① $D=0$，则表示通过原点的平面

② $A=0$ $\vec{n}=(0,B,C)\perp x$ 轴，平面 $\parallel x$ 轴

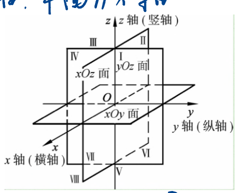
③ $B=0$，平面 $\parallel y$ 轴

④ $C=0$，平面 $\parallel z$ 轴

⑤ $A=B=0$，平面 $\parallel xoy$ 面

⑥ $B=C=0$，平面 $\parallel yoz$ 面

⑦ $A=C=0$，平面 $\parallel zox$ 面



例2：求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程

设方程为：$By+Cz=0$

通过 x 轴 ⇓ 平行 x 轴，经过原点 ⇓ 与 x 无关 ⇓ $D=0$

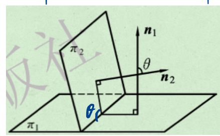
代入 $(4,-3,-1)$

$-3B-C=0$

$C=-3B$

∴平面方程：$y-3z=0$

两平面的夹角（常为锐角）



$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

① $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\perp\vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

② $\pi_1\parallel\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\parallel\vec{n_2} \Leftrightarrow$ 对应坐标成比例

点到平面距离公式：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

例3：某平面通过 $M_1(1,1,1)$，$M_2(0,1,-1)$，且垂直于平面 π：$x+y+z=0$，求其方程.

设平面的法向量为 $\vec{n}$. $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$，$\vec{n}\perp(1,1,1)$

$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times(1,1,1)=(2,-1,-1)$

∴平面方程为 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$

$2x-y-z=0$

空间直线方程

一般式方程：直线可视为两平面交线

（不唯一）

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

点向式方程：已知直线上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$. 设一动点 $M(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}$

（不唯一）

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

☆ 某些分母为0时，其分子也理解为0

参数式方程：设 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$$

例4：用点向式及参数式表示直线

$$\begin{cases}x+y+z+2=0\\2x-y+3z+10=0\end{cases}$$

取 $x=0$ $\begin{cases}y+z+2=0\\-y+3z+10=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\z=-3\end{cases}$ ∴点 $(0,1,-3)$ 在直线上

设直线方向向量为 $\vec{s}$ 则 $\vec{s}\perp\vec{n_1}$，$\vec{s}\perp\vec{n_2}$

$$\therefore \vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=(4,-1,-3)$$

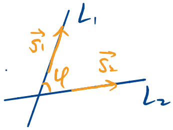
∴点向式：$\frac{x}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{-3}$ 参数式 $\begin{cases}x=4t\\y=1-t\\z=-3-3t\end{cases}$

线面间的位置方程

两直线的夹角（方向向量的夹角，取锐角）

设两直线方向向量分别为

$\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$ $\vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$.



其夹角 φ 满足 $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}$

$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1}\perp\vec{s_2}$

$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} /\!/ \vec{s_2}$

例5：求以下两直线的夹角 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$

$L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$

$\because \vec{s_1}=(1,-4,1)$. $\vec{s_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(2,-2,-1)$

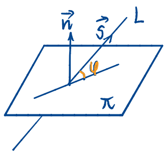
$\therefore \cos\theta=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\dfrac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$

例6：验证L与z轴平行，其中 $L: \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,2)$

$\therefore$ L与z轴平行

直线与平面的夹角



$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}})|$

$=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$

当 $L\perp\pi$ 时，$\varphi=90^\circ$

$L\perp\pi \Leftrightarrow \vec{s} /\!/ \vec{n}$

$L /\!/ \pi \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n}$

例7：求以下直线与平面的交点

$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$，$2x+y+z-6=0$

直线的参数式方程为：$x=t+2$，$y=t+3$，$z=2t+4$

$\therefore 2(2+t)+t+3+2t+4-6=0$

$t=-1$

$\therefore x=1,\ y=2,\ z=2$

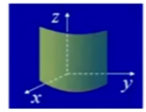
$\therefore$ 交点为 $(1,2,2)$

10.4 曲面与空间曲线

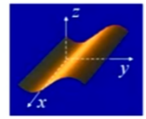
柱面：一条直线沿着一条曲线C平行移动而形成的轨迹。

一般地，在三维空间中，

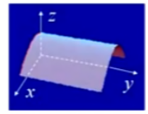
方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面，
其准线为 xoy 面上的曲线 $F(x,y)=0$，
其母线为平行于 z 轴的直线；



方程 $G(y,z)=0$ 表示柱面，
其准线为 yoz 面上的曲线 $G(y,z)=0$，
其母线为平行于 x 轴的直线；



方程 $H(x,z)=0$ 表示柱面，
其准线为 xoz 面上的曲线 $H(x,z)=0$，
其母线为平行于 y 轴的直线。



旋转曲面的方程

例如：yoz 面上，曲线 C 的方程为 $f(y,z)=0$，

曲线 C 绕 z 轴旋转一周所得曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$；

曲线 C 绕 y 轴旋转一周所得曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

二次曲面：$F(x,y,z)=0$

1) 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$

2) 抛物面 $\begin{cases} \text{椭圆抛物面} & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z \quad (a,b>0) \\ \text{双曲抛物面} & \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=z \quad (a,b>0) \end{cases}$

3) 双曲面 $\begin{cases} \text{单叶双曲面} & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0) \\ \text{双叶双曲面} & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c>0) \end{cases}$

空间曲线：两曲面交线

参数式方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

空间曲线在坐标面上的投影

曲线 C 在 xoy 面上的投影曲线为 $\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 投影柱面

曲线 C 在 yoz 面上的投影曲线为 $\begin{cases} G(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$

曲线 C 在 xoz 面上的投影曲线为 $\begin{cases} R(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$

11.1 多元函数的基本概念

定义：设有变量 x, y, z，当 x, y 在一定范围内任取一对值 (x, y) 时，z 按一定的法则 f，总有唯一的值与之对应，则 f 为 x, y 的二元函数。

☆ 二元函数的定义域为 xOy 平面上的点集。

☆ 区域（开区域）：连通的开集

多元函数的极限

例1：$f(x, y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$

求证：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$　　$|a+b| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

$0 \leq \left|x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right| \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2\sin^2\frac{1}{y} + y^2\sin^2\frac{1}{x}}$

$\leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$　≤ 1　≤ 1

$(x, y) \to (0, 0)$ 时，$x^2+y^2 \to 0$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

例2：讨论 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(0, 0)$ 的极限

当 $P(x, y) \xrightarrow{\text{沿x轴（即}y=0\text{）}} (0, 0)$ 时，

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{x\to0} f(x, 0) = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0$

当 $P(x, y) \xrightarrow{\text{沿}y=x} (0, 0)$ 时，

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

$\therefore$ 不存在

若极限存在，则 $P(x, y)$ 沿任意路径 $\to P_0$ 时，极限值都相等。

多元函数的连续性

☆ 一切多元初等函数在定义域内连续

⇓

可用代入法求极限

例3：求极限 ① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$

① $\because (x, y) \to (0, 2)$ 时，$xy \to 0$

$\therefore \dfrac{\sin xy}{xy} \to 1$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \left(\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y\right)$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y = 1\times2 = 2$

② 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

11.2 多元函数微分法

偏导数：设 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x\to0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称为 z 在 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记 $\left.\dfrac{\partial z(f)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.z(f)_x\right|_{(x_0,y_0)}$。

☆ 二元函数 $z = f(x, y)$ 的偏导本质上是一元函数的求导问题。

例1：求 $f(x, y) = x^2+3xy+y^2$ 在 $(1, 2)$ 的偏导数

法一：$f_x = 2x+6$　　$f_y = 3+2y$

$f_x(1, 2) = 8$　　$f_y(1, 2) = 7$

法二：$f_x = 2x+3y$　　$f_y = 3x+2y$

$f_x(1, 2) = 8$　　$f_y(1, 2) = 7$

高阶偏导数：

二阶：

纯偏导

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y)$；　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_{xy}(x, y)$；

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$；　$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f_{yx}(x, y)$.

混合偏导

例2：求 $z = x^3y + 3x^2y^3 - xy + 2$ 的二阶偏导数

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 6xy^3 - y$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 9x^2y^2 - x$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy + 6y^3$　　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 18x^2y$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 3x^2 + 18xy^2 - 1 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 3x^2 + 18y^2x - 1$

☆ 若 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数在 D 内连续，则二者在 D 内相等。

全微分

函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的全增量为 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

若全增量可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 仅与 x, y 有关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 处**可微**，$A\Delta x + B\Delta y$ 称为 $f(x, y)$ 在点 P 处的**全微分**，

记作 $dz = df = A\Delta x + B\Delta y$.

可微的条件：（全微分存在）

必要：

若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则

① $f(x,y)$ 在 P_0 处连续

② 若偏导存在，且 $A=f_x(x_0,y_0)$，$B=f_y(x_0,y_0)$，

全微分 $dz=f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$

$=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$

充分：偏导连续

例3：求 $u=e^{xyz}+xy+z^2$ 的全微分

$\frac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz}+y$，

$\frac{\partial u}{\partial y}=xze^{xyz}+x$，

$\frac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz}+2z$，

$du=\cdots dx+\cdots dy+\cdots dz$

全微分的应用（近似计算）

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$

例4：计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值

$f(x,y)=x^y$，$x_0=1$，$y_0=2$，$\Delta x=0.04$，$\Delta y=0.02$

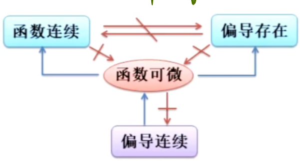
$f_x=yx^{y-1}$，$f_y=x^y\ln x$

$f_x(1,2)=2$，$f_y(1,2)=0$

$\therefore (1.04)^{2.02}\approx f(1,2)+f_x(1,2)\cdot\Delta x+f_y(1,2)\cdot\Delta y$

$=1+2\times0.04+0\times0.02$

$=1.08$



反例:

1\. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在 $(0,0)$ 不存在

在原点处连续，但偏导数不存在、函数不可微.

2\. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$f_x=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$

$f_y=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

在原点处偏导数存在，但函数不连续、不可微.

3\. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$f_x=y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

沿 $y=x\to(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to0}[\underbrace{x\sin\frac{1}{\sqrt{2x^2}}}_{=0}-x^3\cos\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2x^2)^3}}$

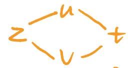
$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{|x^3|}\cos\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{\sqrt{2x^2}}$ 不存在

在原点处可微，但偏导数不连续.

复合函数微分法（链式法则）

① 中间变量为一元函数

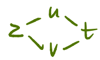
设 $u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$ 在 t 处均可导，$z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 处具有连续偏导数，则 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ 在 t 可导，$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$



连线相乘
分线相加

一元函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ 的导数称为全导数

例1：设 $z=e^{u-2v}$，$u=\sin t$，$v=t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$

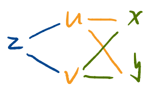


$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$

$=e^{u-2v}\cdot\cos t-2e^{u-2v}\cdot3t^2$

$=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$

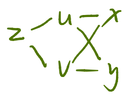
② 中间变量为多元函数



$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

例2：设 $z=e^u\sin v$，$u=xy$，$v=x+y$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$



$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot1$

$=e^{xy}[\sin(x+y)\cdot y+\cos(x+y)]$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

$=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot1$

$=e^{xy}[\sin(x+y)\cdot x+\cos(x+y)]$

例3：$w=e^{x^2+y^2+z^2}$，$z=x^2\sin y$，求 w 的偏导数

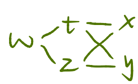
法一：

令 $w=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$

$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$

法二：令 $t=x^2+y^2$，$z=x^2\sin y$，$w=e^{t^2+z^2}$



同例2

法三：$w=e^{x^2+y^2+x^2\sin y}$

多元复合函数的高阶偏导数

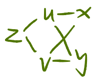
对于二元函数 $z=f(u,v)$，引入记号：

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}=f_1',\quad \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=f_2'.$$

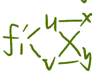
$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2}=f_{11}'',\quad \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}\ f_{12}''$$

例4：设 $z=f(2x+3y,\ xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

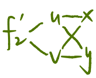
设 $z=f(u,v)$. $u=2x+3y$，$v=xy$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot y$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}''\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+y\left(f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$



$$=2(f_{11}''\cdot 3+f_{12}''\cdot x)+y(f_{21}''\cdot 3+f_{22}''\cdot x)$$

$$=6f_{11}''+2xf_{12}''+3yf_{21}''+xyf_{22}''$$

隐函数的求导公式

定理. 设二元函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则在 P_0 的某邻域内，方程 $F(x,y)=0$ 能唯一确定一个单值连续可导函数 $y=f(x)$，满足

$$y_0=f(x_0),\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

例1：验证 $x^2+y^2-1=0$ 在 $(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个隐函数 $y=f(x)$. 求其一阶导与二阶导.

$\because F(x,y)=x^2+y^2-1$

$\therefore F_x=2x$，$F_y=2y$. $F(0,1)=0$. $F_y(0,1)\neq 0$

$\therefore F(x,y)=0$ 在 $(0,1)$ ……

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-x\cdot y'}{y^2}=-\frac{y+x\cdot\frac{x}{y}}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}$$

定理. 设三元函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则在 P_0 的某邻域内有：

(1) 方程 $F(x,y,z)=0$ 能唯一确定一个单值连续函数 $z=f(x,y)$，满足 $z_0=f(x_0,y_0)$.

(2) 函数 $z=f(x,y)$ 存在连续偏导数，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

例2：二元函数 $z=f(x,y)$ 由 $x^2+y^2+z^2-4z=0$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

$F_x=2x$. $F_z=2z-4$. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2-z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

由方程组所确定的隐函数及其导数

对二元一次方程组 $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$

由克莱姆法则可知：$x=\dfrac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}$

例3：二元函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 由 $\begin{cases}xu-yv=0\\ yu+xv=1\end{cases}$ 确定，计算 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$

方程组两端对 x 求导：$\begin{cases}u+x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ y\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=-u\\ y\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-v\end{cases}$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-u&-y\\-v&x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x&-y\\y&x\end{vmatrix}}=\frac{-ux-vy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}x&-u\\y&-v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x&-y\\y&x\end{vmatrix}}=\frac{-xv+uy}{x^2+y^2}$$

11.3 多元微分学的几何应用

定义：切线：M 沿 C 趋近于 M_0 时，割线 M_0M 的极限位置.

法平面：过 M_0 且与其切线垂直的平面

方向向量 // 法向量

求法：①曲线 C：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，当 $t=t_0$ 时，

$M_0(x_0,y_0,z_0)$，当 $t=t_0+\Delta t$ 时

$M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$

M_0M：$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$

$$\downarrow$$

$$\frac{x-x_0}{\Delta x/\Delta t}=\frac{y-y_0}{\Delta y/\Delta t}=\frac{z-z_0}{\Delta z/\Delta t}$$

$$\downarrow \Delta t\to 0$$

M_0 处切线：$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$

☆ 切向量（切线的方向向量）：$\vec{T}=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))$

M_0 处的法平面方程：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

☆ 若曲线 C 为两柱面的交线，如 C：$\begin{cases}y=f(x)\\z=g(x)\end{cases}$

则可添加 $x=x$

$\vec{T}=(1,\ f'(x_0),\ g'(x_0))$

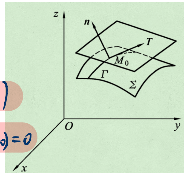
② 曲线 C: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

切向量: $\vec{T}=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}, -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}\right)$

同向量 × 乘

切平面与法线

设曲面 Σ: $F(x,y,z)=0$, Σ在 M_0 处的法向量为:



☆ $\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0))$

切平面方程: $F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$

法线方程: $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y}=\dfrac{z-z_0}{F_z}$

11.4 多元函数的极值与最值

定义: 二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某去心邻域内满足 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ 则称函数在该点取极大值或极小值

极值存在的条件

① 必要: $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 存在偏导且取得极值, 则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

驻点: 偏导=0 的点 (未必是极值点)

② 充分: $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有一阶、二阶连续偏导数, 且 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$,

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则 1) 当 $AC-B^2<0$ 时, 函数在点 (x_0,y_0) 处不取极值;

2) 当 $AC-B^2>0$ 时, 函数在点 (x_0,y_0) 处取得极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值}, \\ A>0 \text{ 时取极小值}; \end{cases}$

3) 当 $AC-B^2=0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

计算步骤

第一步: 求出一阶偏导数 $f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=0$,

并通过解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ 得到函数所有的驻点;

第二步: 求出二阶偏导数 $\underset{A}{f_{xx}(x,y)}=0$, $\underset{B}{f_{xy}(x,y)}=0$, $\underset{C}{f_{yy}(x,y)}=0$,

并对每个驻点求出对应的二阶偏导数的值 A, B, C;

第三步: 对每个驻点, 根据 $AC-B^2$ 的符号判断是否为极值点,

对每个极值点, 根据 A 的符号进一步判断其类型;

第四步: 求出极值点处的函数值, 即为函数的极值.

拉格朗日乘数法 -- 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

第一步: 构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$;

第二步: 求 L 的一阶偏导数, 并建立方程组 $\begin{cases} L_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ L_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ L_\lambda=\varphi(x,y)=0; \end{cases}$

第三步: 由方程组解出 x, y, λ, 则 x, y 是可能的极值点的坐标.