

# **Метод снижения ошибки определения траектории сверхзвукового объекта с помощью рекуррентной нейронной сети, использующей фильтр Калмана**

Научный руководитель: Грицык Павел Александрович

к-т физ.-мат. наук, заместитель начальника СКБ

Студент: Хромов Алексей Андреевич

4 курс МФТИ, 715 группа



**23 июня 2021 года**

# План

- Цель и задачи
- Общие сведения о Фильтре Калмана
- Общие сведения о Нейронных сетях
- Описание метода фильтрации нейронной сетью
- Сравнение результатов фильтраций нейронной сетью и фильтром Калмана
- .

## Цель и задачи

Целью работы является разработка метода и, реализующего его, алгоритма фильтрации, базирующегося на рекуррентной нейронной сети, с более высокой точностью, чем фильтр Калмана.

# Цель и задачи

## Задачи:

- Проанализировать оценочные значения и потери фильтрации Калмана
- Проанализировать, предложенный в ВКР, метод и алгоритм нейронной сети
- Разработать по методу, предложенному в ВКР, математическую модель фильтрации
- Сравнить результаты фильтраций гиперзвуковых траекторий нейронной сетью и фильтром Калмана

# Фильтр Калмана

Этап экстраполяции :

- $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u};$
- $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q};$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Фильтр Калмана

Этап коррекции:

- $y = z - H\bar{x};$
- $K = \bar{P}H^T(H\bar{P}H^T + R)^{-1};$
- $x = \bar{x} + Ky;$
- $P = (I - KH)\bar{P};$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}; \quad F_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Фильтр Калмана

- Классический рекурсивный фильтр Калмана применяется для линеаризованных данных
- В алгоритме Калмана решается задача по минимизации среднеквадратичного отклонения между оцененным и истинным значениями
- Существует аналитическое решение из задачи по минимизации среднеквадратичного отклонения по поиску весовых коэффициентов в матрице  $K$
- Высокое приближение фильтрованных данных к истинным

# Нейронная сеть

## Линейная модель

$$f_\omega(X) = X\omega$$

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n L(y^i, f_\omega(x^i)) \rightarrow \min$$

$$\omega^* = (X^T X)^{-1} X^T Y;$$

$$L(y_t, y_p) = (y_t - y_p)^2.$$

# Нейронная сеть

## Линейная модель

$$f_\omega(X) = X\omega$$

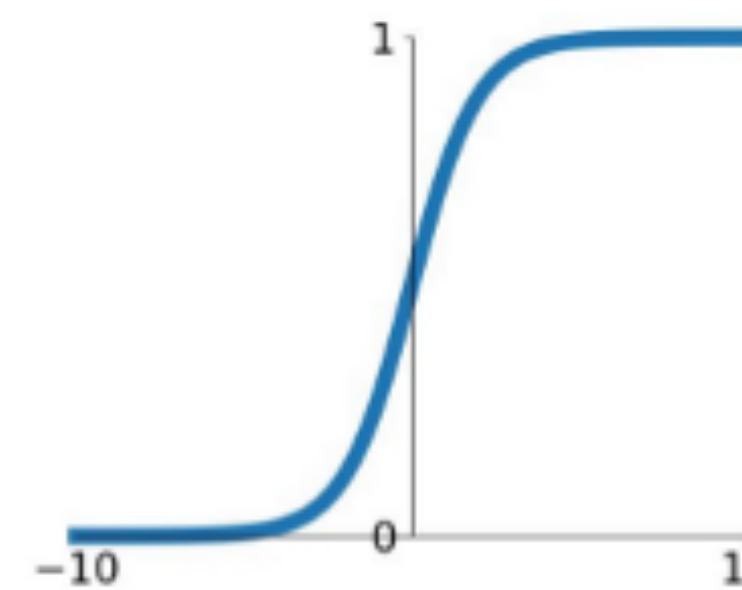
$$Q(X) = \sum_{i=1}^n L(y^i, f_\omega(x^i)) \rightarrow \min$$

$$\mathbf{w}^{(t+1)} = \mathbf{w}^{(t)} - \eta_t \nabla Q(\mathbf{w}^{(t)})$$

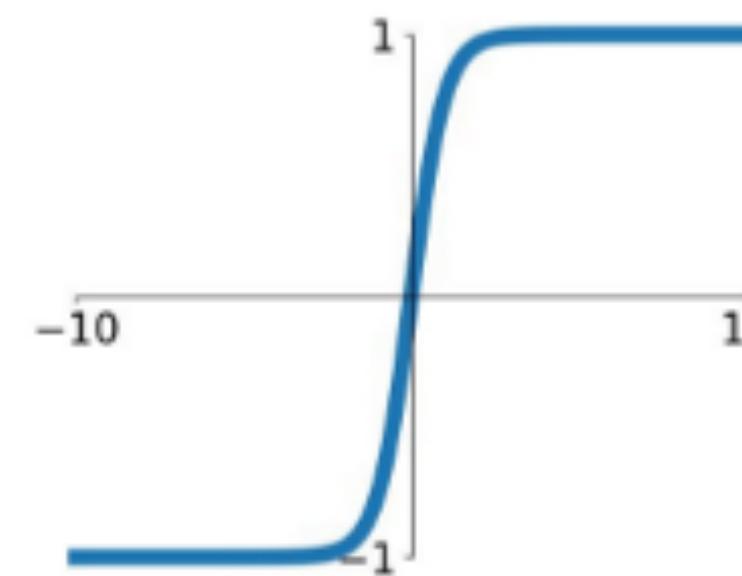
$$L(y_t, y_p) = (y_t - y_p)^2.$$

# Функции активации нейрона

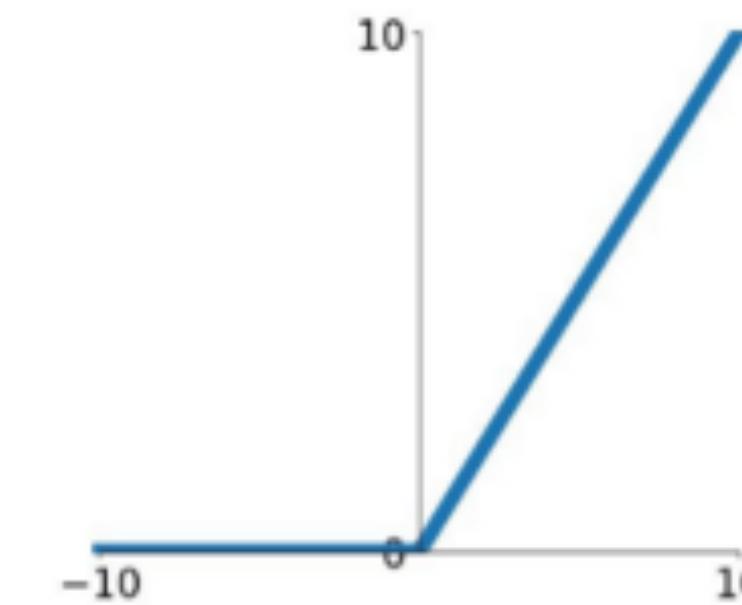
$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$



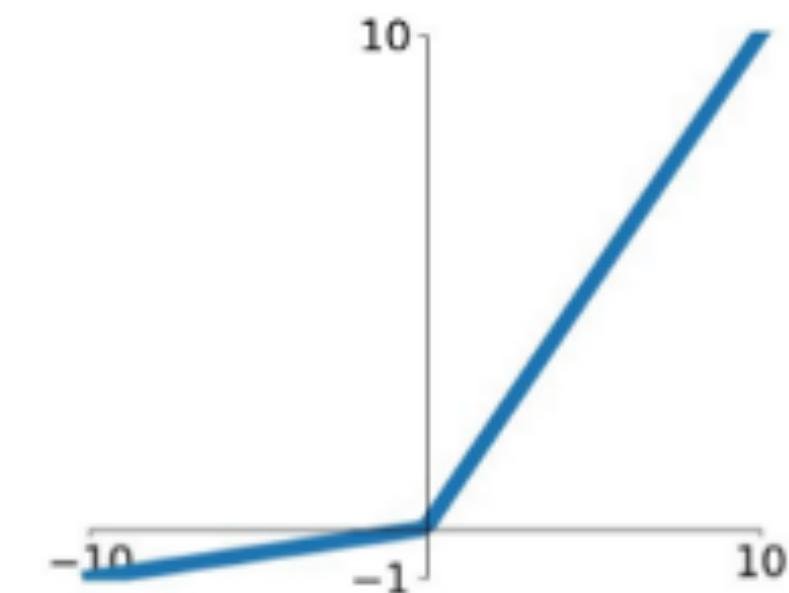
$$\tanh(x)$$



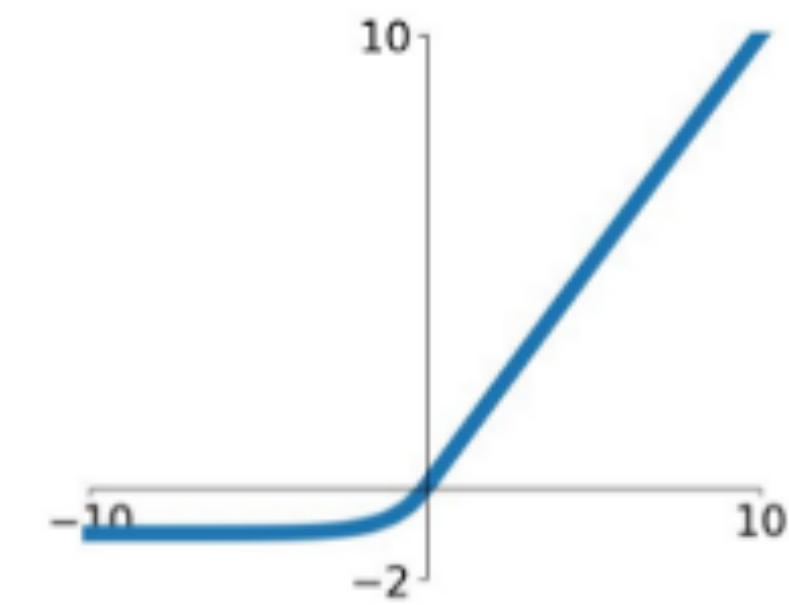
$$\max(0, x)$$



$$\max(0.1x, x)$$



$$\begin{cases} x & x \geq 0 \\ \alpha(e^x - 1) & x < 0 \end{cases}$$



<https://www.machinelearningmastery.ru/img/0-399867-614444.png>

# Отрицательная обратная связь в обучении нейронной сети

- Входные данные  $X_0$
- $X_1 = W_1X_0 + b_1$
- $X_2 = \sigma(X_1)$
- $X_3 = W_2X_2 + b_2$
- $L = (X_3 - X)^2$
- Вывод  $X_3$

# Отрицательная обратная связь в обучении нейронной сети

- Входные данные  $X_0$
- $X_1 = W_1 X_0 + b_1$
- $X_2 = \sigma(X_1)$
- $X_3 = W_2 X_2 + b_2$
- $L = (X_3 - X)^2$
- Вывод  $X_3$

$$W_{1_{n+1}} = W_{1_n} - \eta \nabla L$$

$$b_{1_{n+1}} = b_{1_n} - \eta \nabla L$$

...

# Отрицательная обратная связь в обучении нейронной сети

- Входные данные  $X_0$
- $X_1 = W_1 X_0 + b_1$
- $X_2 = \sigma(X_1)$
- $X_3 = W_2 X_2 + b_2$
- $L = (X_3 - X)^2$
- Вывод  $X_3$

$$W_{1_{n+1}} = W_{1_n} - \eta \nabla L$$

$$b_{1_{n+1}} = b_{1_n} - \eta \nabla L$$

...

$$\frac{\partial L}{\partial W_2} = \frac{\partial L}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial W_2} = 2(X_3 - X) \cdot X_2$$

# Отрицательная обратная связь в обучении нейронной сети

- Входные данные  $X_0$
- $X_1 = W_1 X_0 + b_1$
- $X_2 = \sigma(X_1)$
- $X_3 = W_2 X_2 + b_2$
- $L = (X_3 - X)^2$
- Вывод  $X_3$

$$W_{1_{n+1}} = W_{1_n} - \eta \nabla L$$

$$b_{1_{n+1}} = b_{1_n} - \eta \nabla L$$

...

$$\frac{\partial L}{\partial W_2} = \frac{\partial L}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial W_2} = 2(X_3 - X) \cdot X_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_1} = \frac{\partial L}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial W_1} = \frac{\partial L}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial W_1} =$$

# Отрицательная обратная связь в обучении нейронной сети

- Входные данные  $X_0$

$$W_{1_{n+1}} = W_{1_n} - \eta \nabla L$$

- $X_1 = W_1 X_0 + b_1$

$$b_{1_{n+1}} = b_{1_n} - \eta \nabla L$$

...

- $X_2 = \sigma(X_1)$

$$\frac{\partial L}{\partial W_2} = \frac{\partial L}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial W_2} = 2(X_3 - X) \cdot X_2$$

- $X_3 = W_2 X_2 + b_2$

$$\frac{\partial L}{\partial W_1} = \frac{\partial L}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial W_1} = \frac{\partial L}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial W_1} =$$

- Вывод  $X_3$

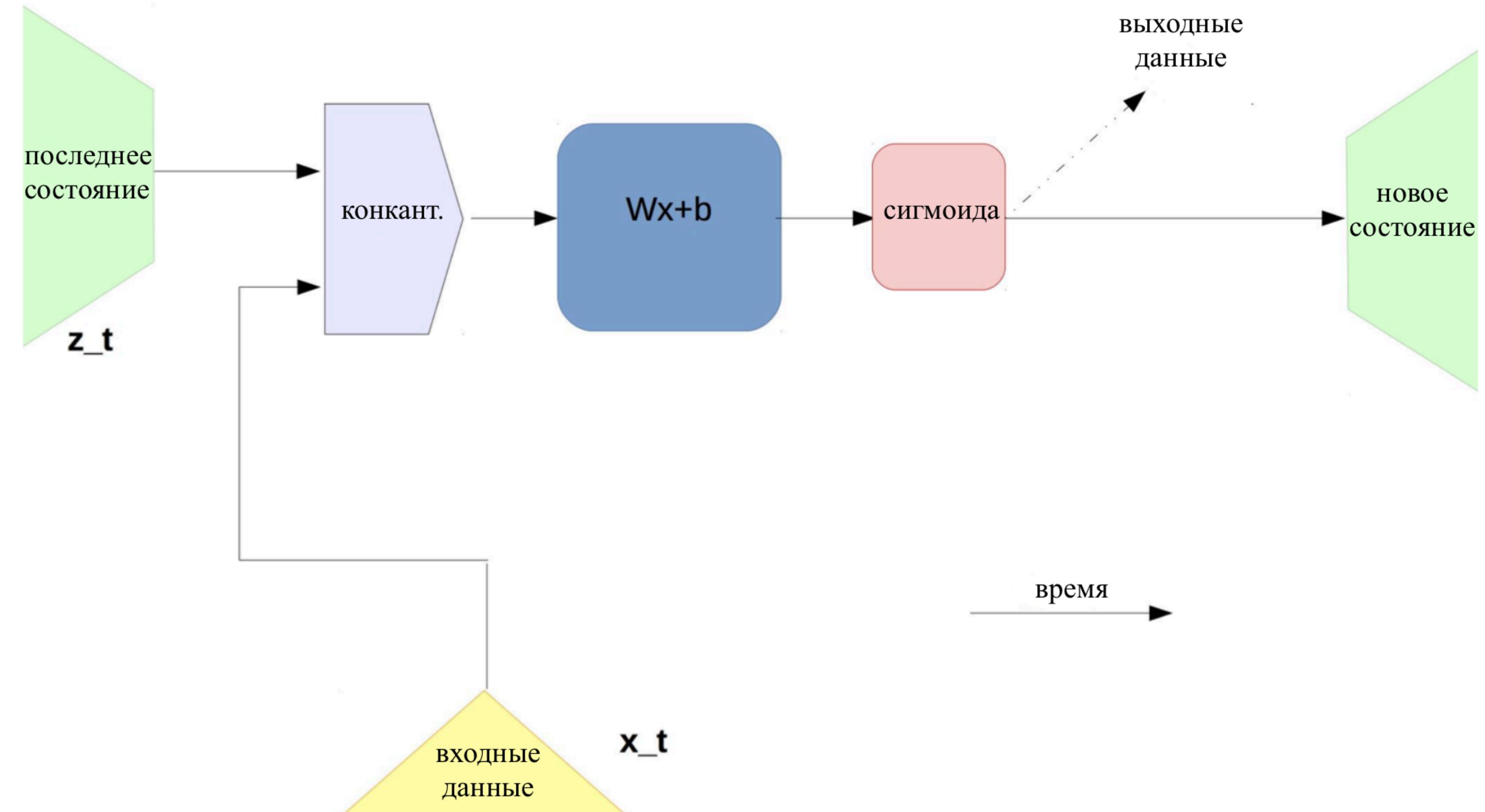
$$= 2(X_3 - X) \cdot W_2 \cdot \sigma(X_1)(1 - \sigma(X_1)) \cdot X_0$$

# Рекуррентная нейронная сеть

$$[C, i]$$

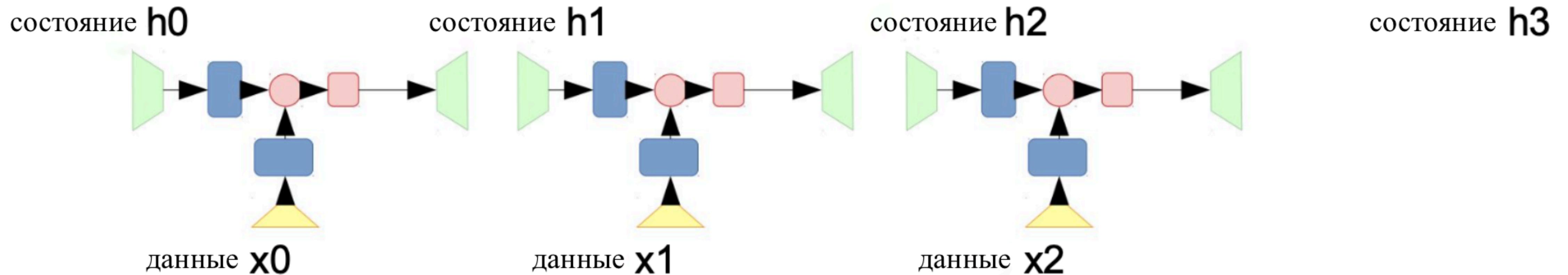
$$W \cdot [C, i] + b$$

$$\sigma(W \cdot [C, i] + b)$$



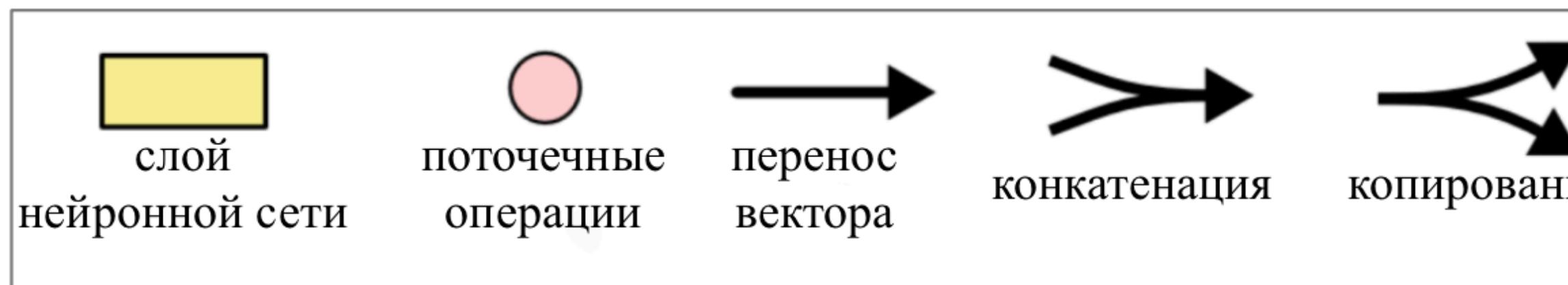
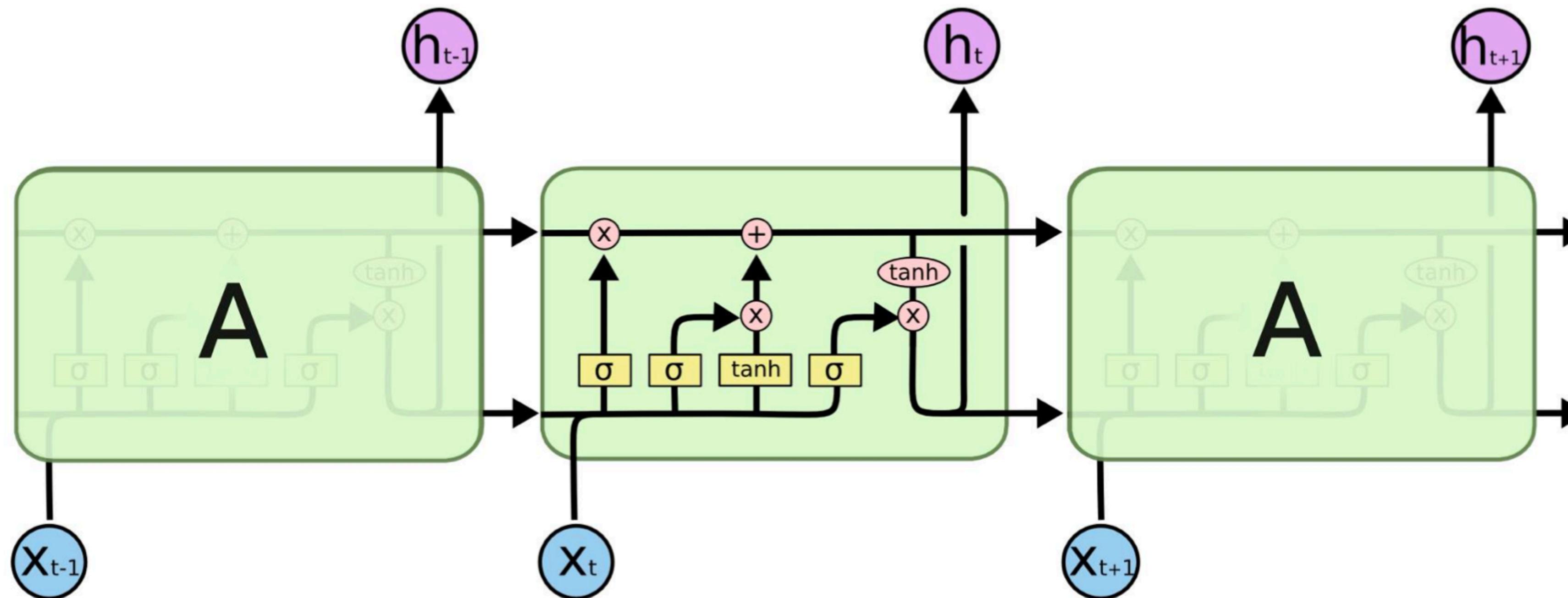
<https://github.com/girafe-ai/ml-mipt>

# Рекуррентная нейронная сеть



<https://github.com/girafe-ai/ml-mipt>

# Рекуррентная нейронная сеть с кратковременной и долговременной памятью

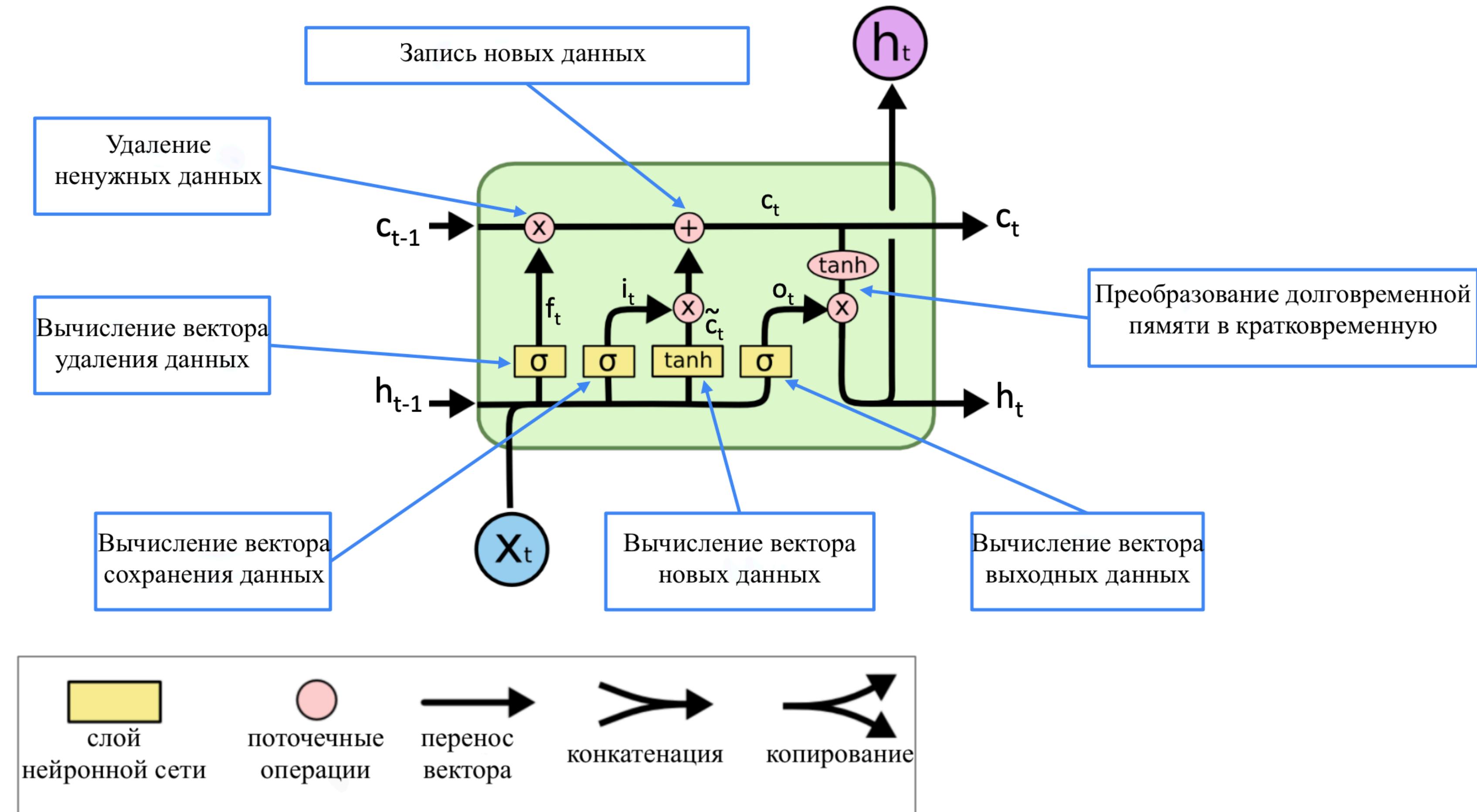


# Рекуррентная нейронная сеть с кратковременной и долговременной памятью

$$\tilde{x}_t = F x_{t-1};$$

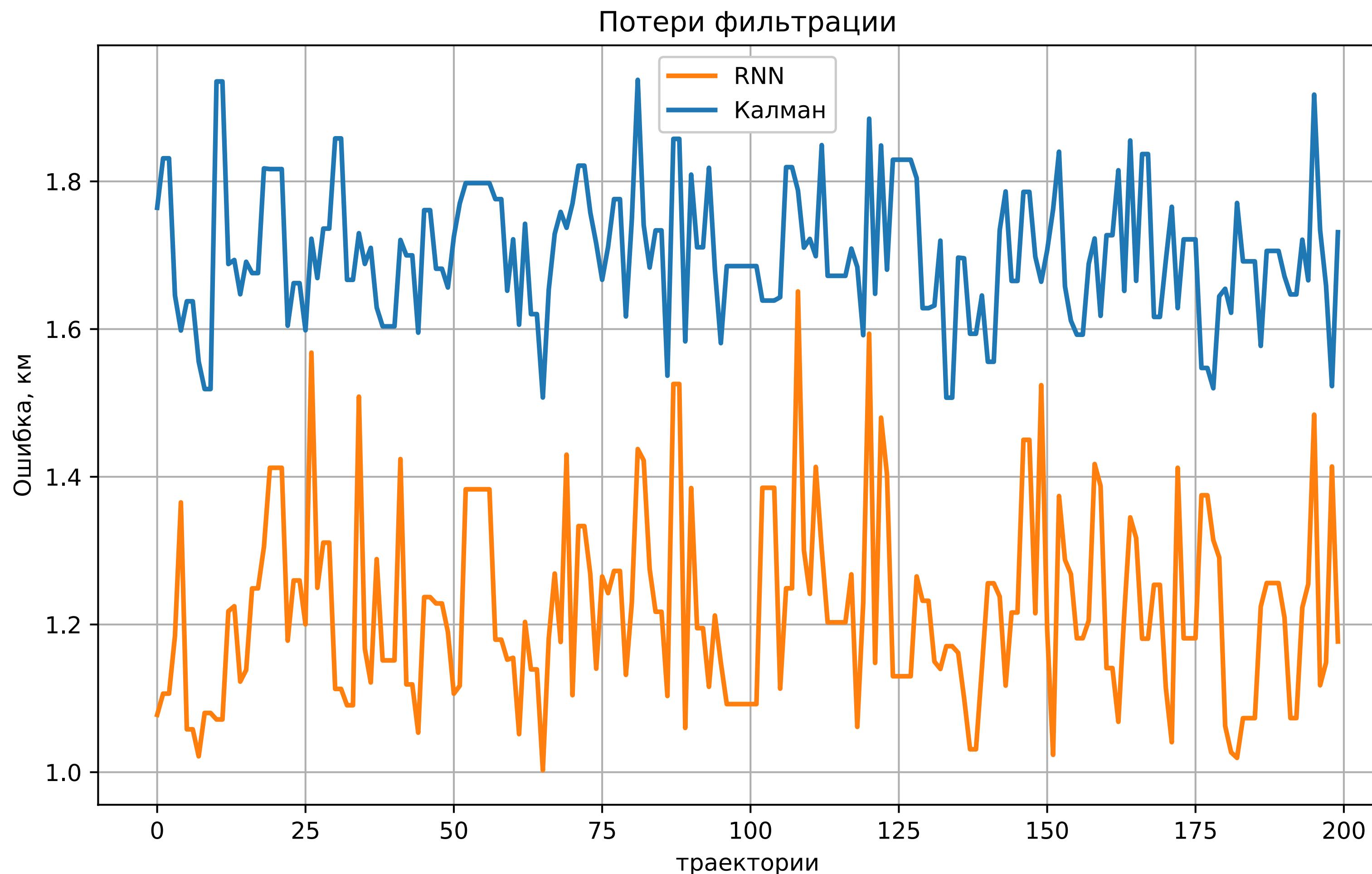
$$x_t = W_K \cdot [\tilde{x}_t, h_t] + b_k.$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



<https://web.stanford.edu/class/cs224n/slides/cs224n-2019-lecture07-fancy-rnn.pdf>

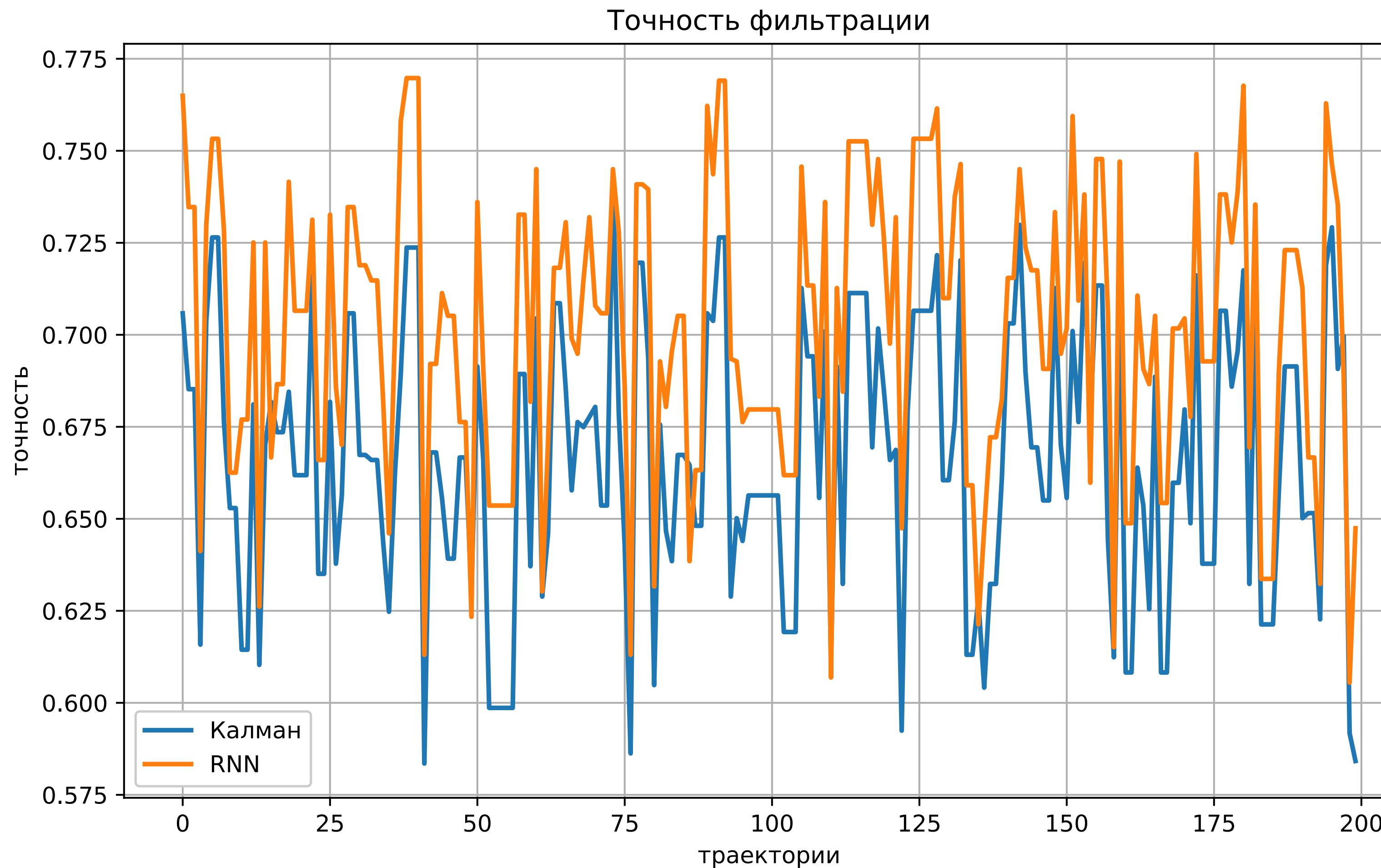
# Сравнение результатов фильтраций нейронной сетью и фильтром Калмана



$$loss = \sqrt{\frac{1}{S} \sum (\hat{x} - x_{\text{real}})^2},$$

Средние по траекториям гиперзвуковых объектов потери RNN составляют 1,2 км, у классического рекурсивного фильтра ошибка равна 1,7 км;

# Сравнение результатов фильтраций нейронной сетью и фильтром Калмана

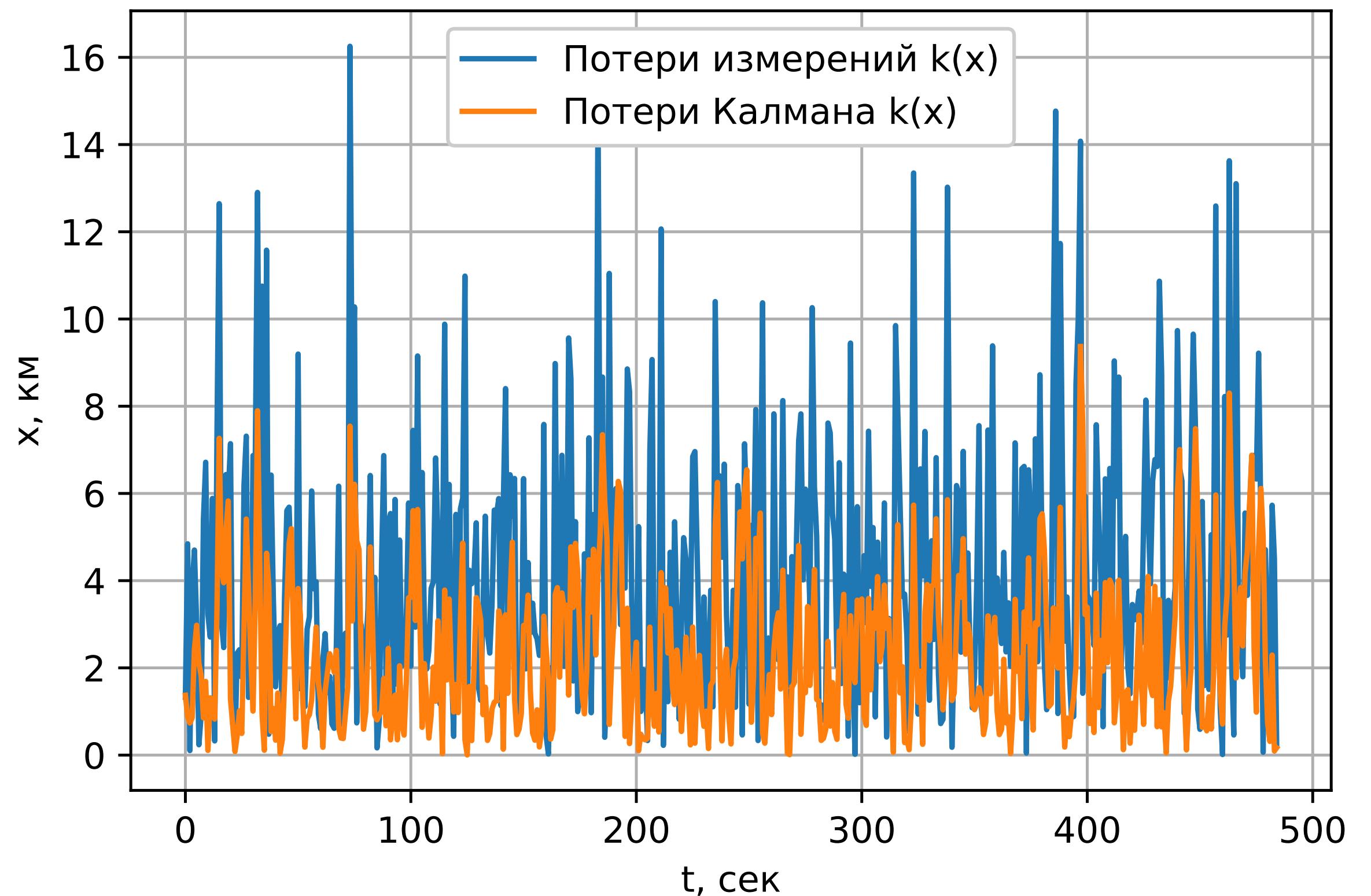


$$accuracy = \frac{1}{S} \sum \left( \frac{|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{\text{real}}|}{\mathbf{x}_{\text{real}}} \leq D \right)$$

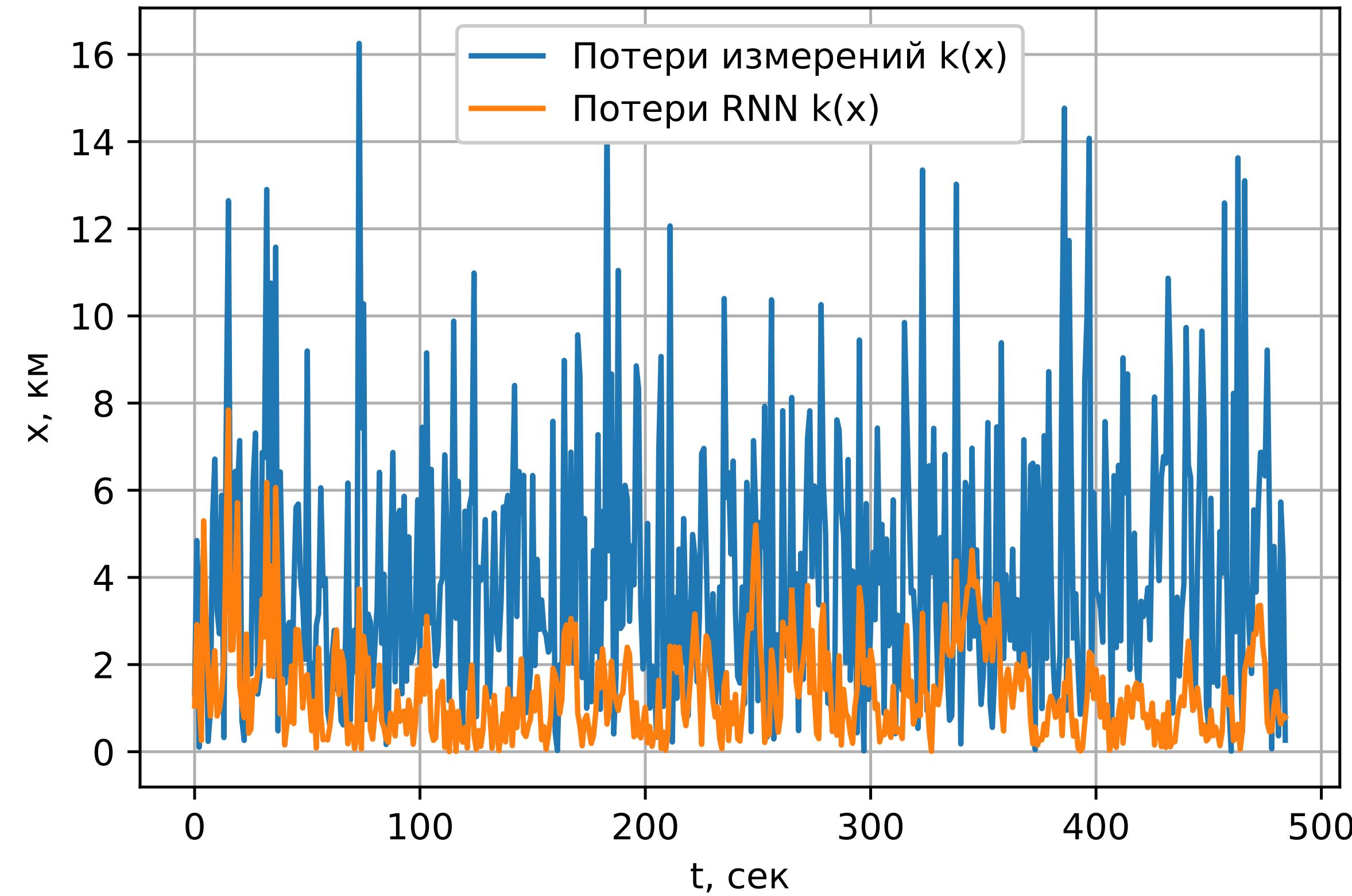
В 5%-ую ошибку в среднем по траектории гиперзвуковых объектов попадают 72% результатов фильтрации RNN, и 66% для фильтра Калмана;

# Сравнение результатов фильтрации нейронной сетью и фильтром Калмана

Фильтр Калмана



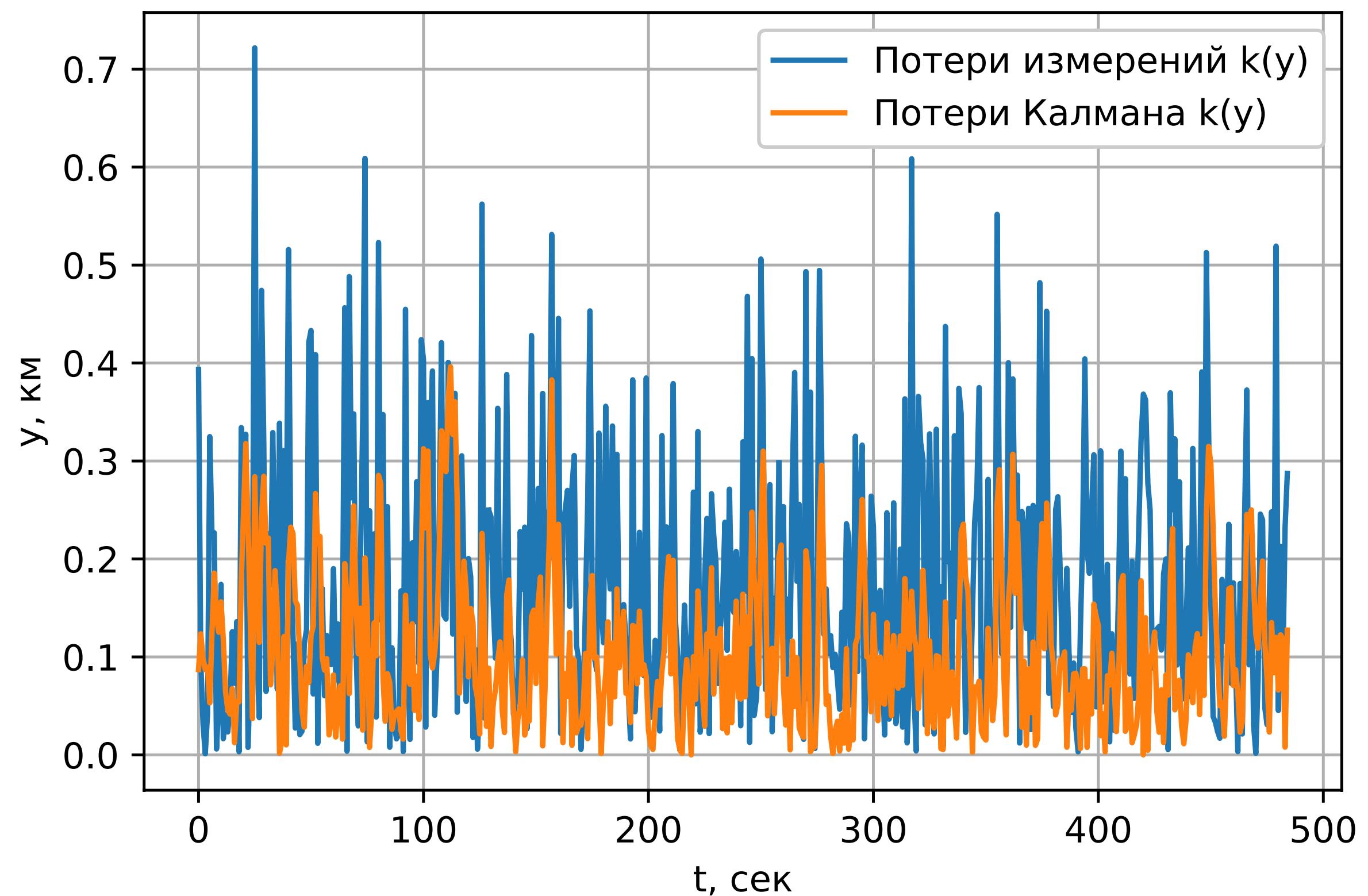
Нейронная сеть



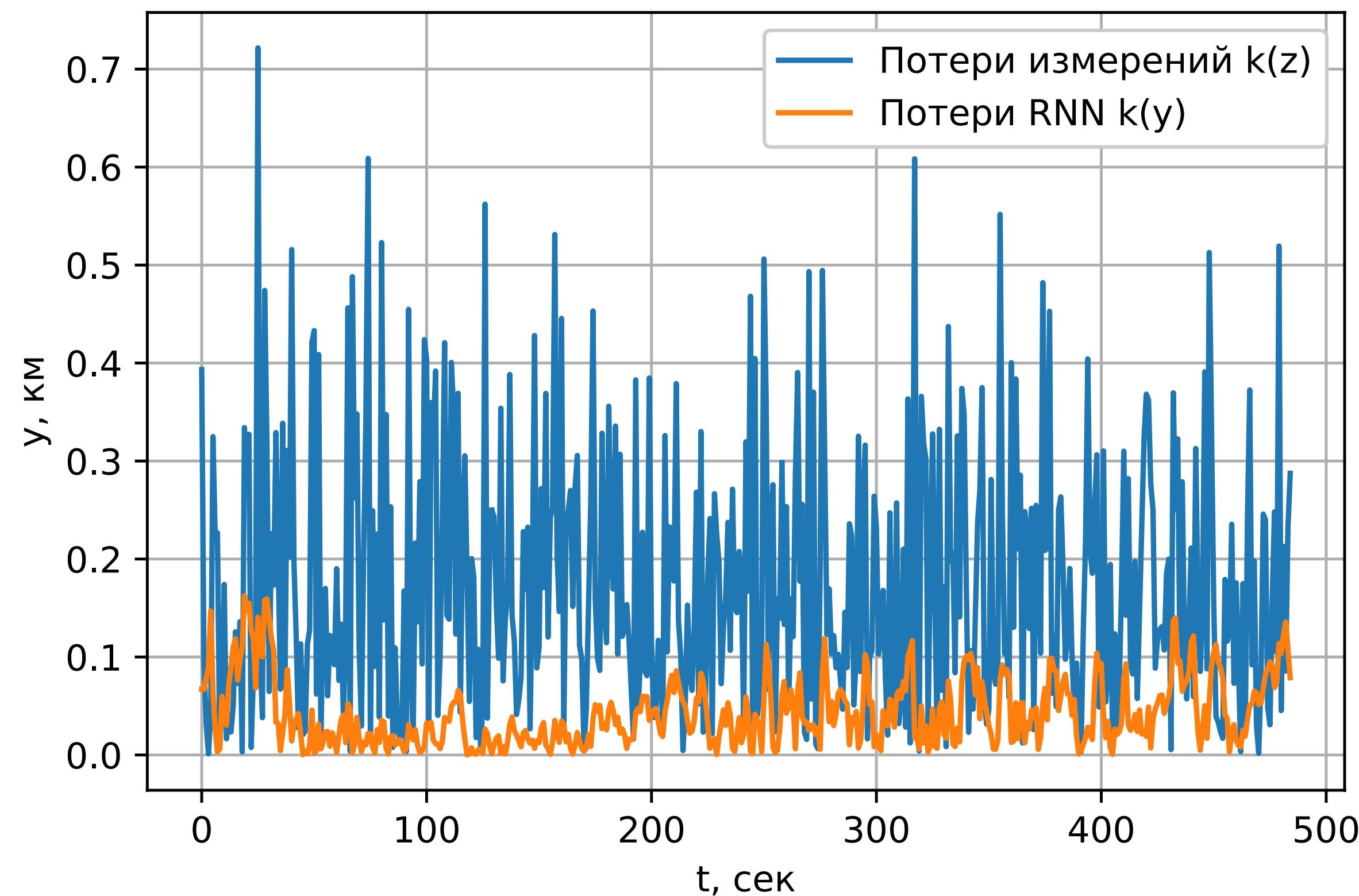
Графики ошибки по оси X для фильтра Калмана и для фильтра с нейронной сетью

# Сравнение результатов фильтрации нейронной сетью и фильтром Калмана

Фильтр Калмана



Нейронная сеть



Графики ошибки по оси Y для фильтра Калмана и для фильтра с нейронной сетью

## **Заключение:**

- Разработан метод снижения ошибки определения траектории и, реализующий его, алгоритм
- Проведён сравнительный анализ фильтраций нейронной сетью и рекурсивным фильтром Калмана
- Средние по траекториям гиперзвуковых объектов потери RNN составляют 1,2 км, у классического рекурсивного фильтра Калмана ошибка равна 1,7 км
- В 5%-ую ошибку в среднем по траектории гиперзвуковых объектов попадают 72% результатов фильтрации RNN, и 66% для фильтра Калмана

**Спасибо за внимание**