Курсовая работа

Формирование контура управления зенитной ракетой.

Хромов Алексей 715а гр.

Постановка задачи.

Передаточная функция от команды управления к ускорению имеет вид:

$$W_{_{\text{кст}}}(s) = \frac{1}{1 + 2\xi T_{_{\text{кст}}} s + T^2_{_{\text{кст}}} s^2},$$

где $T_{_{\text{кст}}} = 0,1 \cdot N[\text{с}]$; $\xi = 0,7$; $N = 8$(номер в журнале).

Основной критерий: максимальное быстродейтсвее контура управления. Требуется определить:

1. Принципиальную структурную схему замкнутого контура.
2. Передаточные функции разомкнутого и замкнутого контуров управления. Астатизм контура. Характеристические частоты.
3. Коэффициенты ошибок: c_0, c_1, c_2, c_3.
4. Логарифмические частотные характеристики разомкнутоого и замкнутого контуров. Запасы по фазе и амплитутде. Частоту среза. Показатель колебательности.
5. Эффективную полосу пропускания.
6. Переходный процесс и весовую функцию. Характеристики переходного процесса.

Отчёт.

1. Принципиальная структурная схема замкнутого контура.

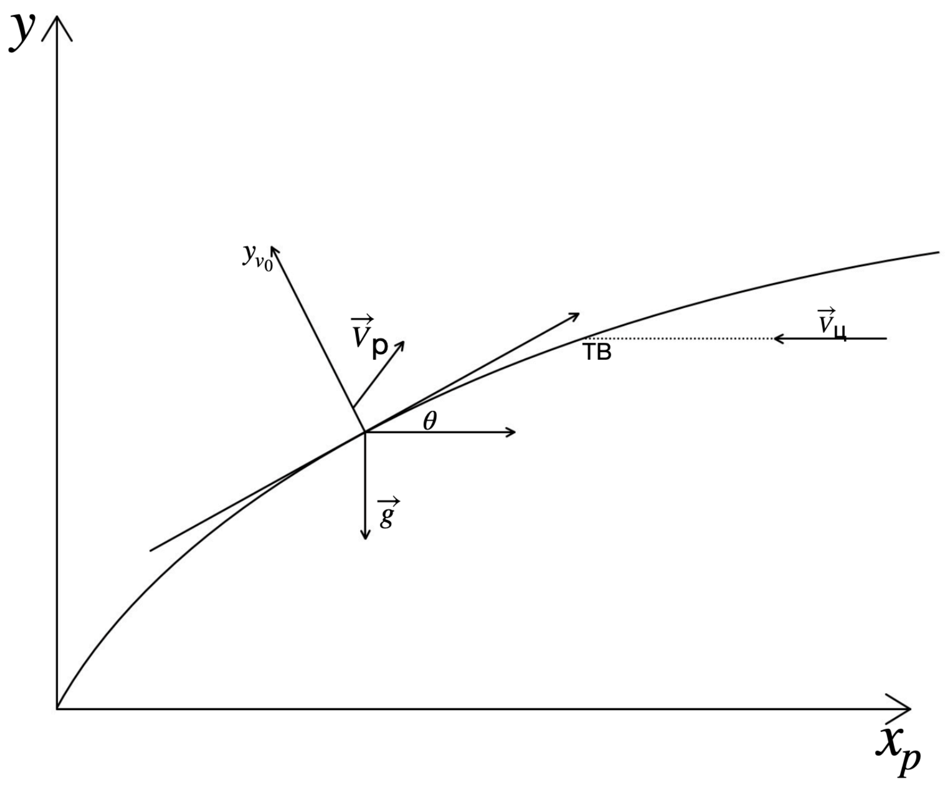


Рис. 1. График траектори полёта ракеты от точки старта до точки встречи.

$\vec{V}_{_{\text{ц}}}$ - скорость цели; $\vec{V}_{_{\text{р}}}$ - скорость ракеты; ТВ - точка встречи.

Для составления принципиальной схемы контура воспользуемся вторым законом Ньютона, регулирующим поведение полёта объекта. На уровне схем в нашей модели будут присутствовать функция управления (Колебательное звено):

$$W_{_{\text{кст}}}(s) = \frac{1}{1 + 2\xi T_{_{\text{кст}}} s + T^2_{_{\text{кст}}} s^2},$$

форсирующее звено:

$$W_{_{\text{фор}}}(s) = k \cdot (1 + Ts),$$

и обратная связь, включающая в себя кинематическое звено:

$$W_{_{\text{кин}}}(s) = \frac{1}{s^2}.$$

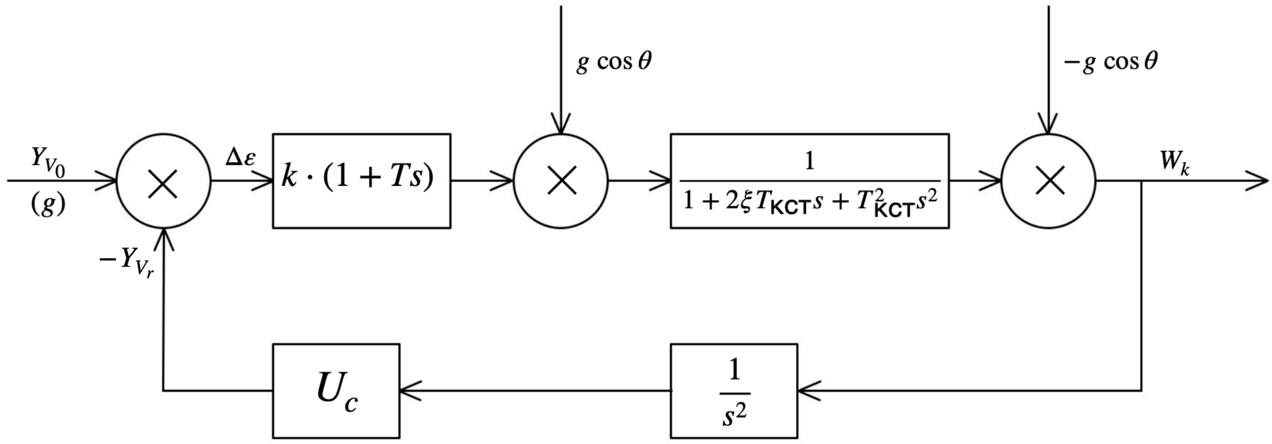


Рис. 2. Принципиальная структурная схема замкнутого контура.

Для дальнейших вычислений напишем модели наших звеньев:

```
# standard imports\n",
import os
import random
import numpy as np
import math

import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

default_dpi = plt.rcParamsDefault['figure.dpi']
plt.rcParams['figure.dpi'] = default_dpi*1.6

PI = math.pi
```

```
xi = 0.7
N = 8
T_osc = 0.1 * N

def W_osc(s): #oscillating element
    return 1/(1+2*xi*T_osc*s+(T_osc**2)*(s**2))

def W_forc(s, k, T): #the forcing element
    return k*(1+T*s)

def W_kin(s): #the kinematic element
    return 1/(s**2)
```

2. Передаточные функции разомкнутого и замкнутого контуров управления. Астатизм контура. Характеристические частоты.

По свойствам передаточных функий наша, для разомкнтуого контура, имеет вид:

$$W(s) = W_{_{\text{кст}}}(s) \cdot W_{_{\text{фор}}}(s) \cdot W_{_{\text{кин}}}(s) = \frac{1}{1 + 2\xi T_{_{\text{кст}}} s + T_{_{\text{кст}}}^2 s^2} \cdot k \cdot (1 + Ts) \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Для замкнутого контура:

$$W_k(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{k(1 + Ts)}{k(1 + Ts) + s^2 + 2\xi T_{_{\text{кст}}} s^3 + T_{_{\text{кст}}}^2 s^4}$$

Из $W_{_{\text{кин}}}(s) \Rightarrow$ **астатизм второго порядка** контура управления.

Характеристическая частота: $\frac{1}{T_{_{\text{кин}}}} = 1,25 \, \frac{1}{_{\text{сек}}}$.

```
print(1/T_osc, '1/sec')
```

```
1.25 1/sec
```

```
def W(s, k, T):
    return W_osc(s)*W_forc(s, k, T)*W_kin(s)

def W_k(s, k, T):
    return W(s, k, T)/(1+W(s, k, T))
```

3. Коэффициенты ошибок: C_0, C_1, C_2, C_3.

$$W_{\Delta\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+W(s)};$$

$$\Delta\varepsilon(t) = \int\limits_0^\infty K_{\Delta\varepsilon}(t) g(t-\tau)\,d\tau; \qquad W_{\Delta\varepsilon}(s) = \int\limits_0^\infty K_{\Delta\varepsilon}(t) e^{-st}\,dt;$$

$$g(t-\tau) = g(t) - \dot{g}(t)\tau + \tfrac{1}{2!}\ddot{g}(t)\tau^2;.$$

$$\Delta\varepsilon(t) = g(t)\int\limits_0^\infty K_{\Delta\varepsilon}(\tau)\,d\tau - \dot{g}(t)\int\limits_0^\infty K_{\Delta\varepsilon}(\tau)\tau\,d\tau + \tfrac{1}{2!}\ddot{g}(t)\int\limits_0^\infty K_{\Delta\varepsilon}(\tau)\tau^2\,d\tau = C_1 g(t) + C_2\dot{g}(t) - \tfrac{C_3}{2!}\ddot{g}(t);$$

$$C_0 = W_{\Delta\varepsilon}(s)\Big|_{s=0} = \tfrac{1}{1+W(s)}\Big|_{s=0} = 0;$$

$$C_1 = \tfrac{dW_{\Delta\varepsilon}(s)}{ds}\Big|_{s=0} = -\tfrac{1}{(1+W(s))^2}\cdot\tfrac{dW_{\Delta\varepsilon}(s)}{ds}\Big|_{s=0} = 0.$$

То что $C_0 = C_1 = 0$ следствие обратной интегральной связи, астатизма второго порядка.

$$C_2 = \tfrac{d^2W_{\Delta\varepsilon}(s)}{ds^2}\Big|_{s=0} = \tfrac{2}{k};$$

$$C_3 = \tfrac{d^3W_{\Delta\varepsilon}(s)}{ds^3}\Big|_{s=0} = \tfrac{2\xi T_{\text{кст}} - 2T}{k}.$$

Из пункта 4, где мы нашли T и k:

$$C_2 = 16\,\tfrac{1}{\text{сек}^2}.$$

```python
'''
Warning: run the code only after finding the required values!!!
'''
print('C_2 = ', 2/k*100//1/100,'1/(sec^2)')
```

```
C_2 =  16.0 1/(sec^2)
```

$$C_3 = -55,05\,\tfrac{1}{\text{сек}^3}.$$

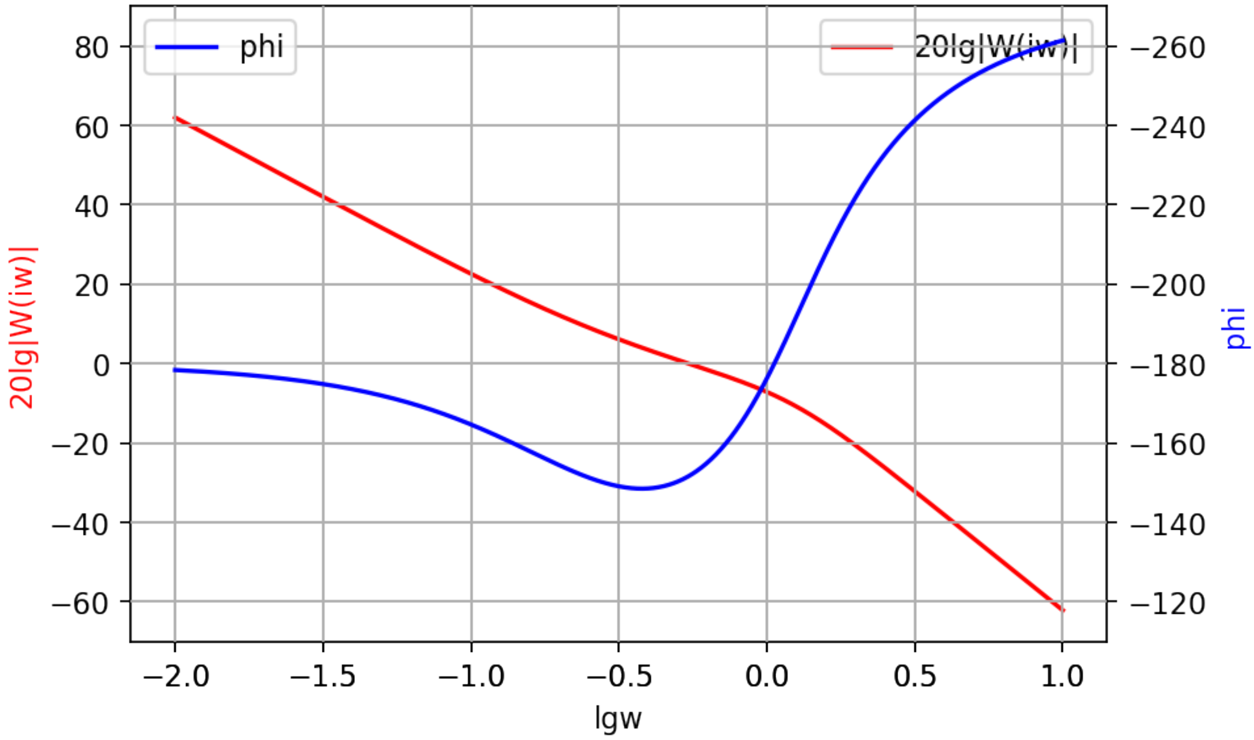
```python
'''
Warning: run the code only after finding the required values!!!
'''
print('C_3 = ', (2*xi*T_osc-2*T)/k*100//1/100,'1/(sec^3)')
```

```
C_3 =  -55.05 1/(sec^3)
```

4. Логарифмические частотные характеристики разомкнутого и замкнутого контуров. Запасы по фазе и амплитутде. Частоту среза. Показатель колебтельности.

Построим логарифмическую частотную характеристику для разомкнутого контура:

```
'''
Warning: run the code only after finding the required values!!!
'''
w =[]
data_W_abs = []
data_W_arg = []
for i in range(100000):
    w.append(math.log10((i+100)/10000))
    data_W = W(complex(0, (i+100)/10000), k, T)
    data_W_abs.append(20*math.log10(abs(data_W)))
    data_W_arg.append(math.atan(data_W.imag/data_W.real)*180/PI-180)



fig=plt.figure()

#fig.title('Logarithmic-frequency characteristics')
ax1=fig.add_subplot(111, label="1")
ax2=fig.add_subplot(111, label="2", frame_on=False)



ax1.plot(w, data_W_abs, label = u'20lg|W(iw)|', color="r")
ax1.set_xlabel("lgw")
ax1.set_ylabel("20lg|W(iw)|", color="r")
ax1.tick_params(axis='x')
ax1.tick_params(axis='y')
ax1.set_ylim(-70,90)
ax1.grid(True)
ax1.legend()

ax2.plot(w, data_W_arg, label = u'phi', color="b")
ax2.yaxis.tick_right()
ax2.set_ylabel('phi', color="b")
ax2.yaxis.set_label_position('right')
ax2.tick_params(axis='y')
ax2.set_ylim(-270,-110)
ax2.invert_yaxis()
ax2.grid(True)
ax2.legend()




plt.show()
```



1. Из повторного интегрирования в кинематическом звене $\Rightarrow -\pi/2 - \pi/2 = -\pi$ - начало графика частот;
2. Далее форсирующее звено вносит вклад $+\pi/2$;
3. В конце колебательное звено даёт $-\pi$ - итог $-3\pi/2$.

Характеристическая частота контура стабилизации:

$w_{\text{кст}} = 1,25\,\frac{1}{\text{сек}}$.

```python
print(1/T_osc, '1/sec')
```

```
1.25 1/sec
```

Частота среза и параметры форсирующего звена:

$w_{\text{ср}} = \frac{1}{2sT_{\text{кст}}} \Rightarrow T = \frac{2}{w_{\text{ ср}}} = 2T_{\text{ср}};$

$\frac{k}{w_{\text{ср}}^2 T w_{\text{ср}}} \approx 1; \qquad k = \frac{w_{\text{ср}}}{T};$

$W(s) = \frac{1}{s^2}k(1+Ts) \;\Rightarrow\; |W(w)| = \frac{1}{w^2}\sqrt{1+w^2T^2};$

$T = 5T_{\text{кст}} = 4$ с; $\qquad k = \frac{1}{12{,}5 * T_{\text{кст}}^2} = 0,125\,\frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}; \qquad w_{\text{ср}} = \frac{2}{T} = 0,5\,\frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$

```
'''
now you can run the code above
'''
T = 5*T_osc
k = 1/(12.5*T_osc**2)
w_cut = 2/T#cutoff frequency
print('T =',T*100//1/100,'sec')
print('k =',k*100//1/100,'rad/sec^2')
print('w_cut =',w_cut*100//1/100,'rad/sec')
```

```
T = 4.0 sec
k = 0.12 rad/sec^2
w_cut = 0.5 rad/sec
```

Найдём запас по фазе. Для этого посчитаем сдвиг форсирующего звена:

$$\Delta\psi_{_{\text{фр}}} = \arctan w_{_{\text{ср}}} T = 63,43^\circ.$$

Для колебательного звена:

$$\Delta\psi_{_{\text{кст}}} = \arctan \frac{2\xi T_{_{\text{кст}}} w_{_{\text{ср}}}}{1-w_{_{\text{ср}}}^2 T_{_{\text{кст}}}^2} = 33,69^\circ.$$

Тогда запас по фазе для контура управления:

$$\Delta\psi_{_{\text{ку}}} = \Delta\psi_{_{\text{фр}}} - \Delta\psi_{_{\text{кст}}} = 29,74^\circ.$$

Мы достигли минимума значения - порога принятого на практике $\Delta\psi_{_{\text{ку}}} \in [30^\circ; 60^\circ]$.

```
psi_forc = math.atan(w_cut*T)*180/PI
psi_osc  = math.atan((2*xi*T_osc*w_cut)/(1-w_cut**2*T_osc**2))*180/PI
psi = psi_forc - psi_osc
print('psi_forc =',psi_forc*100//1/100,'°')
print('psi_osc =' ,psi_osc*100//1/100,'°')
print('psi ='     ,psi*100//1/100,'°')
```

```
psi_forc = 63.43 °
psi_osc = 33.69 °
psi = 29.74 °
```

$$\Delta\psi_{_{\text{фр}}}(w_{_{\text{ср}}}) = -\Delta\psi_{_{\text{кст}}}(w_{_{\text{кр}}}) \qquad \Rightarrow \qquad w_{_{\text{кр}}} = \frac{\sqrt{1-2\xi T_{_{\text{кст}}}/T}}{T} = 0,212\ \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

Запас по амплитуде:

$$\Delta A_{_{\text{з}}} = -20\lg \frac{k}{w_{_{\text{кр}}}^2} \sqrt{\frac{1+w_{_{\text{кр}}}^2 T^2}{(1-w_{_{\text{кр}}}^2 T_{_{\text{кст}}}^2)^2 + (2\xi T_{_{\text{кст}}} w_{_{\text{кр}}})^2}} = -11,24\ \text{дБ}.$$

На практике значение запаса по амплитуде $\Delta A_{_{\text{з}}} \in [6; 20]$ дБ.

```
w_cr = math.sqrt(1-2*xi*T_osc/T)/T#critical frequency
A_amp = -20* math.log10(k/(w_cr**2)*math.sqrt(
    (1+w_cr**2*T**2)/
    ((1-w_cr**2*T_osc**2)**2+(2*xi*T_osc*w_cr)**2)))#amplitude margin
print('w_cr =',w_cr*1000//1/1000,'rad/sec')
print('A_amp = ', A_amp*100//1/100,'dB')
```

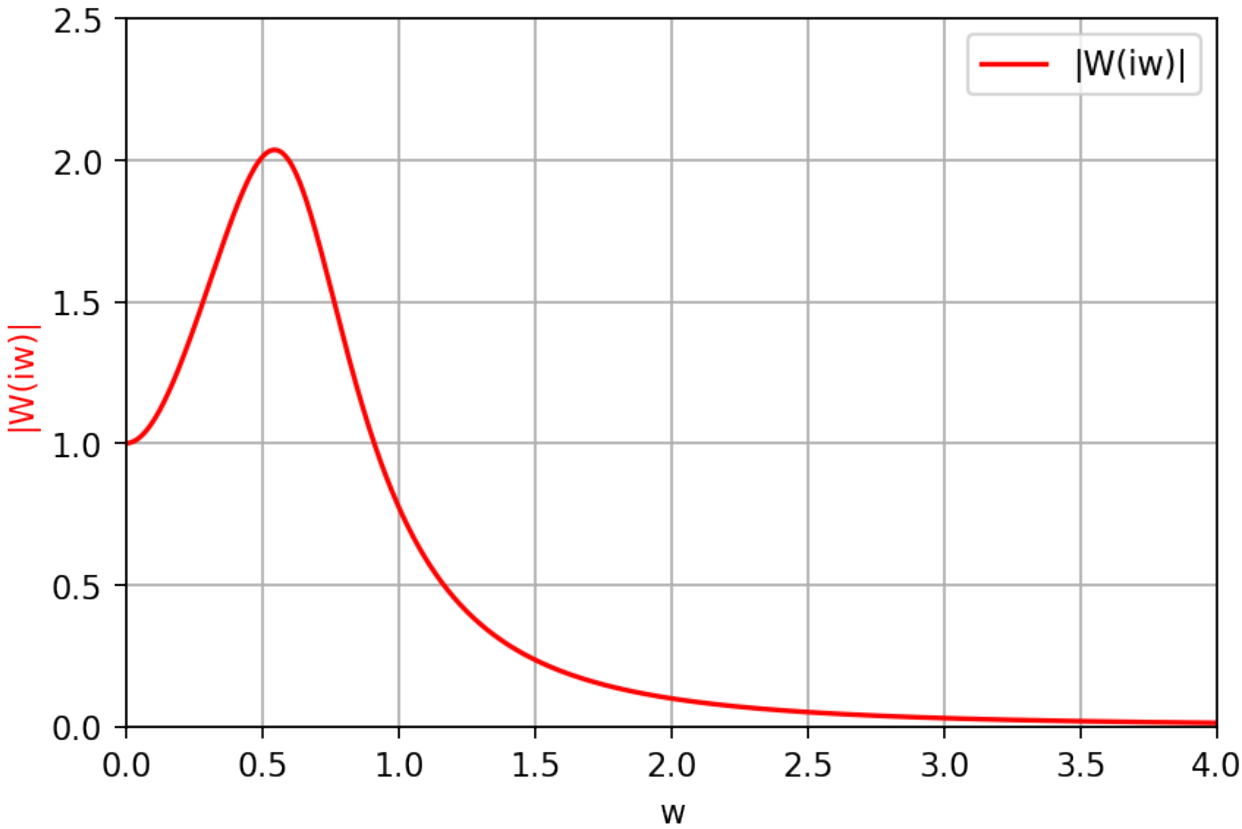
```
w_cr = 0.212 rad/sec
A_amp =  -11.24 dB
```

Посчитаем показатель колебательности для контура управления. Для этого построим АЧХ замкнутого контура управления.

$A(w) = \left|\frac{W(iw)}{1+W(iw)}\right| = |W_k(iw)|.$

```
w =[]
data_W_k_abs = []
max_W_k_abs=0

for i in range(100000):
    w.append((i+1)/10000)
    data_W_k = abs(W_k(complex(0, (i+1)/10000), k, T))
    data_W_k_abs.append(data_W_k)
    if data_W_k>max_W_k_abs:
        max_W_k_abs = data_W_k

print('max A =',max_W_k_abs*100//1/100,'dB')

fig2=plt.figure()

#fig.title('Logarithmic-frequency characteristics')
ax1=fig2.add_subplot(111, label="1")


ax1.plot(w, data_W_k_abs, label = u'|W(iw)|', color="r")
ax1.set_xlabel("w")
ax1.set_ylabel("|W(iw)|", color="r")
ax1.tick_params(axis='x')
ax1.tick_params(axis='y')
ax1.set_xlim(0,4)
ax1.set_ylim(0,2.5)
ax1.grid(True)
ax1.legend()


plt.show()
```

```
max A = 2.03 dB
```



Из графика $A_{\max} \approx 2$. Показатель колебательности:

$M = \frac{A_{\max}}{A(0)} \approx \frac{2}{1} = 2.$

Это намного выше рекомендуемого граничного значения колебательности для контура управления.
Должно быть $M < 1,3 - 1,7.$
Так как технически на практике элементы колебательного звена трудно заменимы, будем регулировать форсирующее звено.
Для любых парметров k и T нашего форсирущего звена верно, что $A(0) = 1$. Так что $M = |A_{\max}|$.

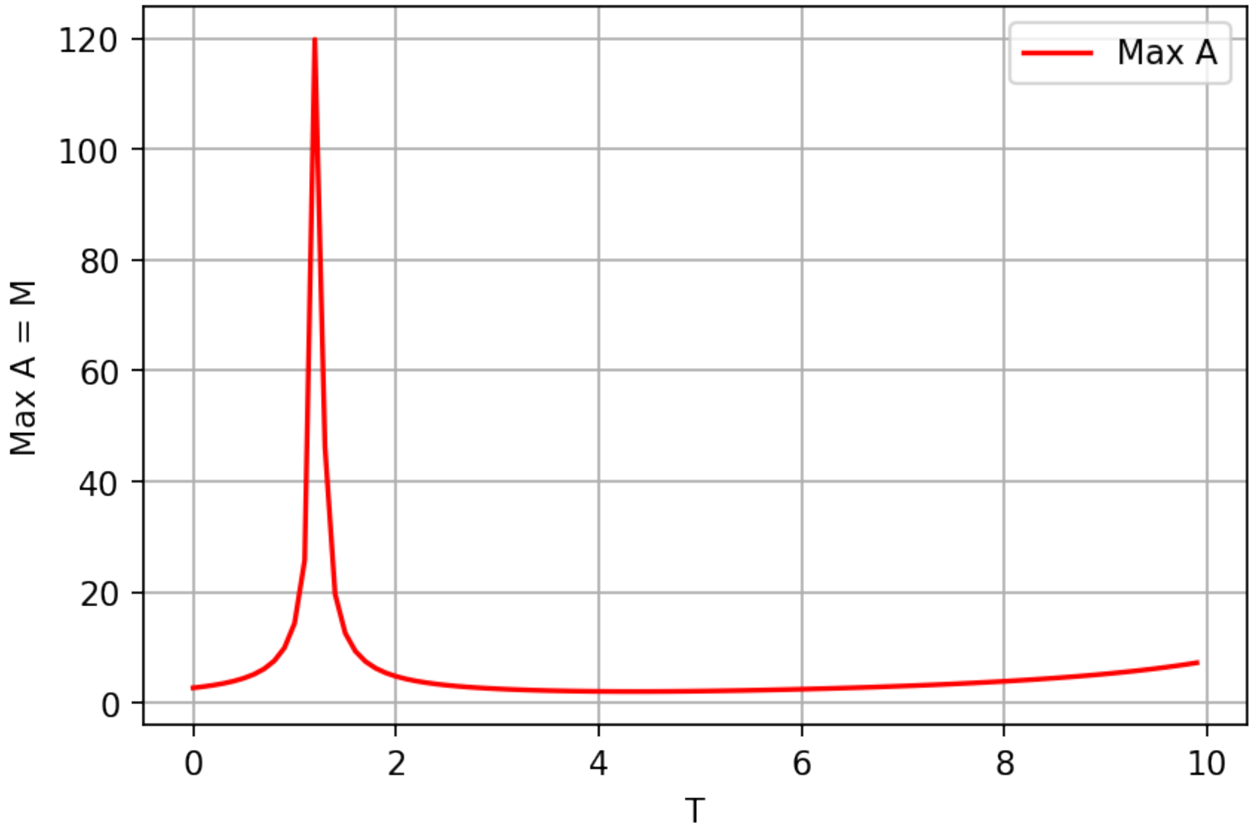
Исследуем зависимость $A_{\max}(T)$ и $A_{\max}(k)$, где T, k - парметры нашего форсирующего звена.

Для начала найдем все максимумы при варьировании T, и построим график $A_{\max}(T)$, чтобы пронаблюдать зависимость. Если мы найдём какие-то T, при которых $A_{\max}(T)$ меньше наших порогов, то выведем эти значения.

```
limit_M1 = 1.7
limit_M2 = 1.3
max_W_k_abs=0
data_max_W_k_abs = []
data_var_T = []
min_max_W_k_abs = 10
T_save = 0

for var_T in range(100):
    max_W_k_abs=0

    for i in range(100000):
```

```python
        data_W_k = abs(W_k(complex(0, (i+1)/10000), k, var_T/10))
        if data_W_k>max_W_k_abs:
            max_W_k_abs = data_W_k

    data_max_W_k_abs.append(max_W_k_abs)
    data_var_T.append(var_T/10)

    if min_max_W_k_abs > max_W_k_abs:
        min_max_W_k_abs = max_W_k_abs
        T_save = var_T/10

    if max_W_k_abs < limit_M2:
        print('M = max_W_k_abs',max_W_k_abs,'var_T = ', var_T/10,'sec')
    else:
        if max_W_k_abs < limit_M1:
            print('M = max_W_k_abs',max_W_k_abs,'var_T = ', var_T/10,'sec')


print('min M = ', min_max_W_k_abs, 'T = ', T_save)
plt.ylabel('Max A = M')
plt.xlabel('T')
plt.plot(data_var_T, data_max_W_k_abs, label = u'Max A', color = 'r')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
min M =  2.0100608088252883 T =  4.3
```



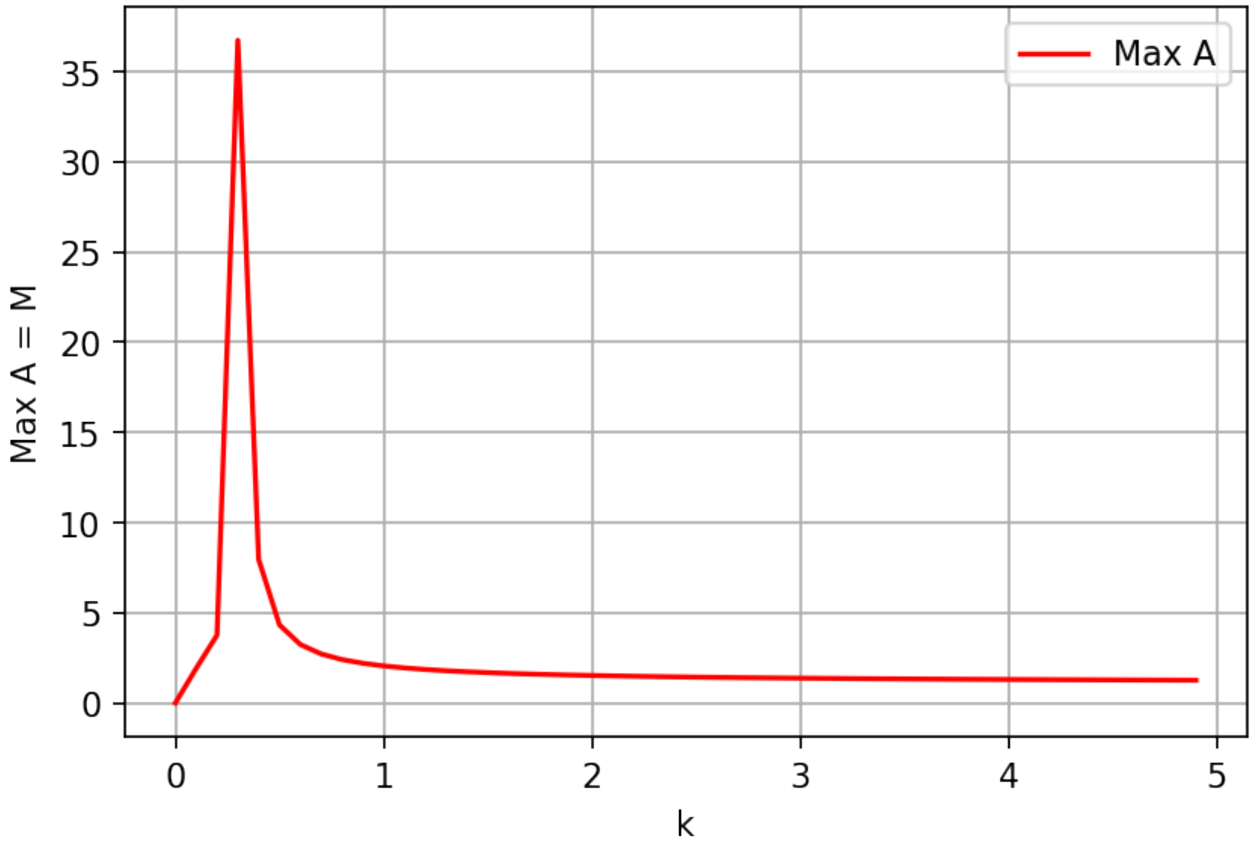
Мы видим, что варьирование параметра T не улучшило ситуации, что минимальное значение показателя колебательности равно $2,01$ при $T = 4,3$ с. Заметим, что наше расчетное значение $T = 4,0$ с, то есть мы можем улучшить значение M изменив наш параметр T до $4,3$ с.

Теперь будем изменять k и построим зависимость $|A_{\max}(k)|$:

```
max_W_k_abs=0
data_max_W_k_abs = []
data_var_k = []

for var_k in range(50):
    max_W_k_abs=0
    for i in range(100000):
        data_W_k = abs(W_k(complex(0, (i+1)/10000), var_k/10, T))
        if data_W_k>max_W_k_abs:
            max_W_k_abs = data_W_k
    data_max_W_k_abs.append(max_W_k_abs)
    data_var_k.append(var_k/10)
    if max_W_k_abs < limit_M2:
        print('M = max_W_k_abs',max_W_k_abs*100//1/100,'var_k = ',
var_k/10,'rad/sec^2')
#     else:
#         if max_W_k_abs < limit_M1:
#             print('M = max_W_k_abs',max_W_k_abs,'var_k = ', var_k/10,'rad/sec^2')

plt.ylabel('Max A = M')
plt.xlabel('k')
plt.plot(data_var_k, data_max_W_k_abs, label = u'Max A', color = 'r')
plt.legend()
```

```
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
M = max_W_k_abs 0.0 var_k =  0.0 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.29 var_k =  4.1 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.29 var_k =  4.2 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.28 var_k =  4.3 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.28 var_k =  4.4 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.27 var_k =  4.5 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.27 var_k =  4.6 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.26 var_k =  4.7 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.26 var_k =  4.8 rad/sec^2
M = max_W_k_abs 1.26 var_k =  4.9 rad/sec^2
```



Моделирование показало нам, что начиная с $k = 4,1\frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}$ значение $M < 1,3$ и продолжает убывать с ростом k. Например:

$M = 1.29; \qquad k = 4,1\frac{\text{рад}}{\text{сек}^2};$

$M = 1.28; \qquad k = 4,3\frac{\text{рад}}{\text{сек}^2};$

$M = 1.27; \qquad k = 4,5\frac{\text{рад}}{\text{сек}^2};$

$\ldots$

5. Эффективная полоса пропускания.

Формула ширины полосы пропускания:

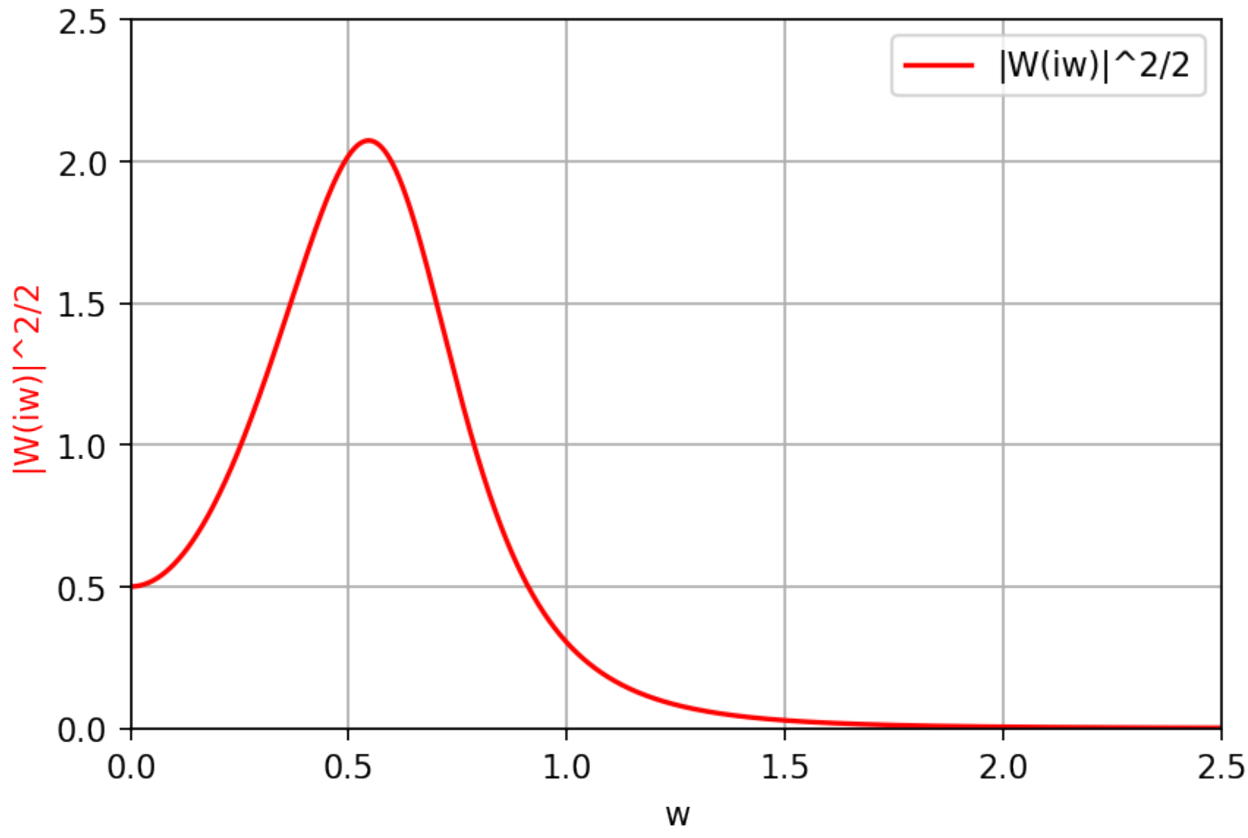
$$w_{эф} = \int\limits_0^\infty \frac{|W(iw)|^2}{W^2(0)}\,dw;$$

В нашем случае $W^2(0) = 1$:

$$w_{эф} = \int\limits_0^\infty |W(iw)|^2\,dw;$$

```
w =[]
data_W_k_abs = []
key = 1
for i in range(100000):
    w.append((i+1)/10000)
    data_W_k = abs(W_k(complex(0, (i+1)/10000), k, T))**2/2
    data_W_k_abs.append(data_W_k)
    if (data_W_k < 0.5)&(key):
        print('w =',(i+1)/10000*1000//1/1000,'rad/sec')
        key = 0


fig2=plt.figure()

#fig.title('Logarithmic-frequency characteristics')
ax1=fig2.add_subplot(111, label="1")


ax1.plot(w, data_W_k_abs, label = u'|W(iw)|^2/2', color="r")
ax1.set_xlabel("w")
ax1.set_ylabel("|W(iw)|^2/2", color="r")
ax1.tick_params(axis='x')
ax1.tick_params(axis='y')
ax1.set_xlim(0,2.5)
ax1.set_ylim(0,2.5)
ax1.grid(True)
ax1.legend()


plt.show()
```

```
w = 0.911 rad/sec
```



Эффективная полоса пропускания определняется по графику $w_{\text{эф}} = 0,911 \, \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$.

6. Переходный процесс и весовая функция. Характеристики переходного процесса.

Для нахождения $K(t)$ - весовой функции, подадим на вход дельта импульс $\delta(t)$.

$$K(t) = \int_0^t K(t)\delta(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iw}^{c+iw} W_k(s)e^{st}\,ds.$$

Смоделируем процесс. Для начала рассмотрим передаточные функции и дифференциальные уравнения, которым они соотвествуют.
Интегрирующее звено обратной связи:

$$W_{\text{кин}}(s) = \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dU_{out}(t)}{dt} = U_{in}(t) \qquad \Rightarrow \qquad U_{out}(t) = \int_0^t U_{int}(\tau)\,d\tau;$$

тогда для

$$W_{\text{кин}}(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2U_{out}(t)}{dt^2} = U_{in}(t) \qquad \Rightarrow \qquad U_{out}(t) = \int_0^t\int_0^{\tau_2} U_{int}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Форсирующее звено:

$$W_{\text{фор}}(s) = k\cdot(1+Ts) \qquad \Rightarrow \qquad U_{out}(t) = kU_{int}(t) + kT\frac{dU_{int}(t)}{dt}$$

Колебательное звено:

$$W_{\text{кст}}(s) = \frac{1}{1+2\xi T_{\text{кст}}s+T_{\text{кст}}^2s^2} \qquad \Rightarrow \qquad U_{in}(t) = U_{out}(t) + 2\xi T_{\text{кст}}\frac{dU_{out}(t)}{dt} + T_{\text{кст}}^2\frac{d^2U_{out}(t)}{dt^2}.$$

Перепишем последнее уравнение в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$U_{out}(t) = y_1(t); \qquad \frac{dU_{out}(t)}{dt} = y_2(t); \qquad \frac{d^2U_{out}(t)}{dt^2} = \frac{dy_2(t)}{dt}.$

Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t); \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} = -\dfrac{1}{T_{\text{кст}}^2} y_1(t) - \dfrac{2\xi}{T_{\text{кст}}} y_2(t) + \dfrac{1}{T_{\text{кст}}^2} U_{in}(t). \end{cases}$$

Или в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{y_1}(t) \\ \dot{y_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \$1/T_{\text{кст}}^2 & -2\xi/T_{\text{кст}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T_{\text{кст}}^2 \end{bmatrix} U_{in}(t).$$

Соответственно:

$\dot{y}(t) = Ay(t) + bU_{in}(t).$

Для решения системы воспользуемся Методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2; \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{1}{T_{\text{кст}}^2} y_1 - \dfrac{2\xi}{T_{\text{кст}}} y_2 + \dfrac{1}{T_{\text{кст}}^2} U_{in}(t) = f(y_1, y_2, U_{in}(t)). \end{cases}$$

Метод эйлера :

$y_{2,i+1} = y_{2,i} + h \cdot f(y_{1,i}, y_{2,i}, U_{in}(t)).$

$y_{1,i+1} = y_{1,i} + h \cdot y_{2,i}.$

$t_{i+1} = t_i + h.$

Напишем соответствующие модели для решения дифференциальных уравнений.

```
def model(t, k, T):
    t_scale = 100

    y_2_prev = 0
    y_2 = 0
    y_1_prev = 0
    y_1 = 0

    sum_U1 = 0
    sum_U2 = 0

    data_out = []
    data_time = []
    data_max_min = []
    Y_sub = 0
```

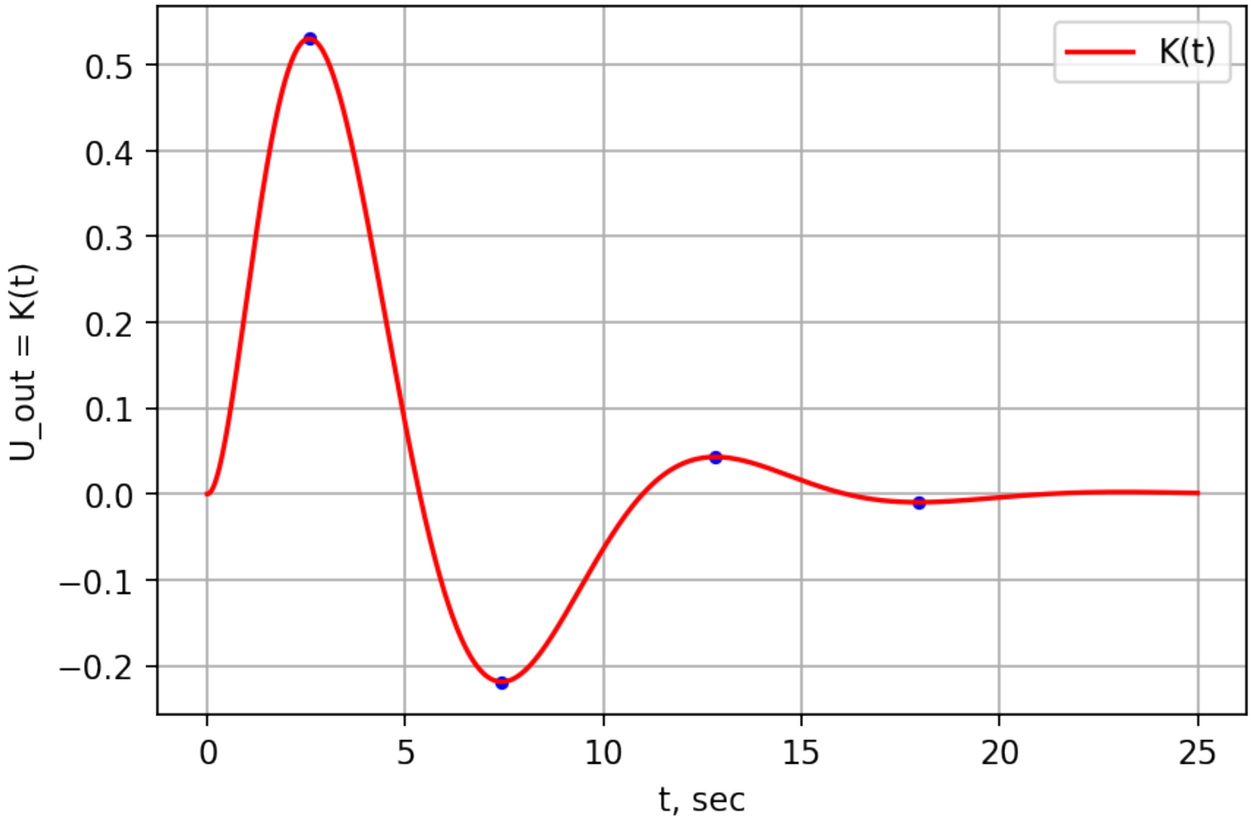
```
    d_epsilon_prev = 0

    for i in range(t*t_scale):
        t_i = i/t_scale
        dt_i = 1/t_scale

        '''
        feedback element
        '''
        d_epsilon = signal(t_i, dt_i) - Y_sub

        '''
        the forcing element
        '''
        U_out = k*d_epsilon + k*T*(d_epsilon - d_epsilon_prev)/dt_i
        d_epsilon_prev = d_epsilon

        '''
        oscillating element
        Euler method
        '''
        y_2 = y_2_prev + dt_i*( -1/(T_osc**2)*y_1_prev -2*xi/T_osc*y_2_prev
+1/(T_osc**2)*U_out )
        y_1 = y_1_prev + dt_i*y_2_prev

        U_out = y_1_prev
        y_2_prev = y_2
        y_1_prev = y_1


        '''
        integrator
        '''
        sum_U1+=U_out*dt_i


        '''
        integrator
        '''
        sum_U2+=sum_U1*dt_i

        Y_sub = sum_U2


        data_out.append(Y_sub)
        data_time.append(t_i)


    x1 = data_out[0]
    x2 = data_out[1]
    for i in range((t - 2)*t_scale):
        j=i+2
```

```
        x3 = data_out[j]

        if (x2>x1)&(x2>x3):
            print('t =', data_time[j-1],'sec; max =', x2*1000//1/1000)
            data_max_min.append([data_time[j-1], x2])
        if (x2<x1)&(x2<x3):
            print('t =', data_time[j-1],'sec; min =', x2*1000//1/1000)
            data_max_min.append([data_time[j-1], x2])

        x1=x2
        x2=x3


    return (data_out, data_time, np.array(data_max_min))
```

Теперь подадим на нашу модель δ импульс и пронаблюдаем выходной сигнал - весовую функцию.

```
def signal(t, dt_i):
    if t == 0:
        sig = 1/dt_i
    else:
        sig = 0
    return sig

t = 25
data_U, data_time, data_max_min = model(t, k, T)



plt.ylabel('U_out = K(t)')
plt.xlabel('t, sec')
plt.plot(data_time, data_U, label = u'K(t)', color = 'r')
plt.scatter(data_max_min[:,0], data_max_min[:,1], color='b', s=10, marker='o')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

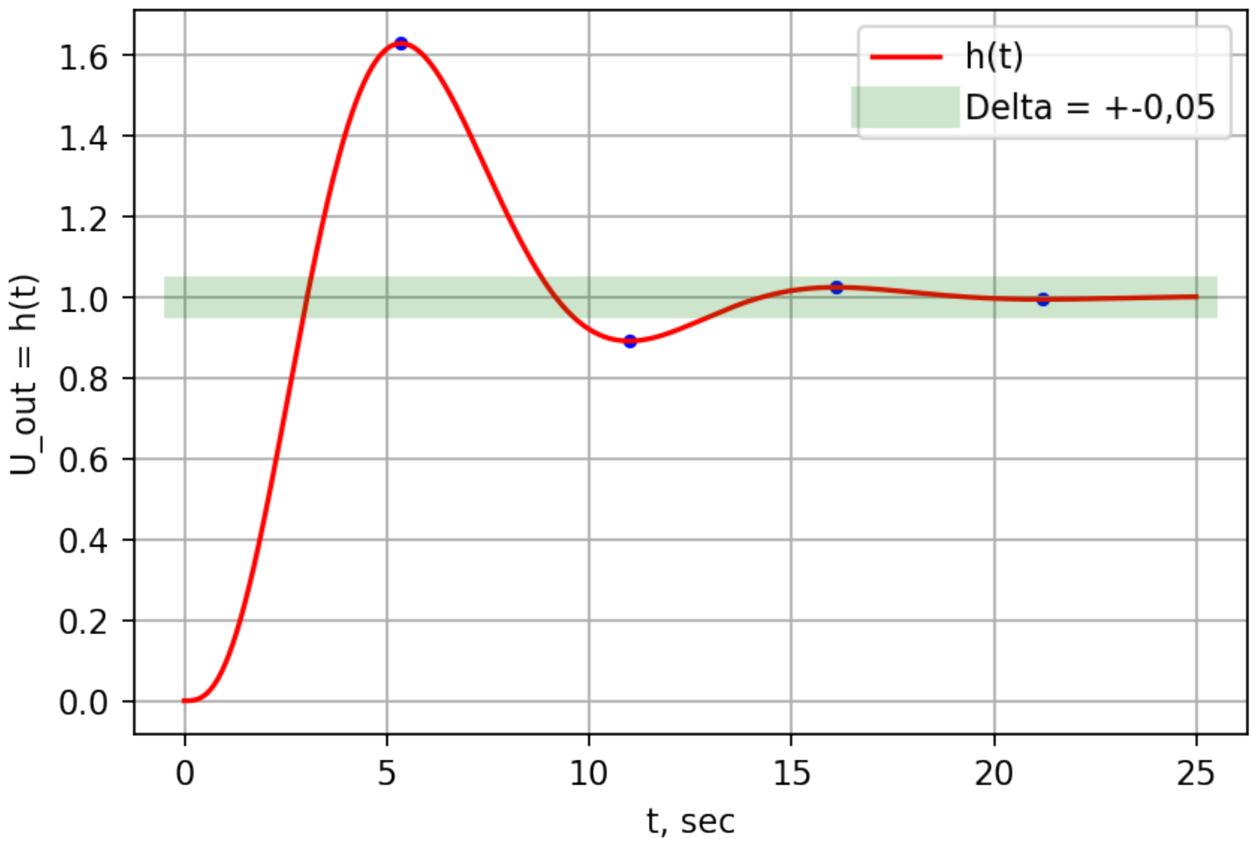
```
t = 2.57 sec; max = 0.53
t = 7.43 sec; min = -0.219
t = 12.82 sec; max = 0.043
t = 17.95 sec; min = -0.01
```



Подадим на вход единичный импульс и отобразим результат на графике - переходный процесс.

```
def signal(t, dt_i):
    sig = 0
    if t >= 0:
        sig = 1
    return sig

t = 25
data_U, data_time, data_max_min = model(t, k, T)

print('\nsigma =',(data_max_min[0][1]-1)*100//1,'%' )



plt.ylabel('U_out = h(t)')
plt.xlabel('t, sec')
plt.scatter(data_max_min[:,0], data_max_min[:,1], color='b', s=10, marker='o')
plt.plot(data_time, data_U, label = u'h(t)', color = 'r')
plt.plot([0,t],[1,1], label = u'Delta = +-0,05', alpha=.2, color = 'g',
linewidth=12.5)
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
t = 5.35 sec; max = 1.628
t = 10.98 sec; min = 0.891
t = 16.1 sec; max = 1.024
t = 21.2 sec; min = 0.994

sigma = 62.0 %
```



По графику переходного процесса определим характеристики переходного процесса:

Время τ_p, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью:

$|h(t) - h_{\text{уст}}| < \Delta = 0,05;$

$\tau_p = 12,98$ сек.

σ перегулирование – максимальное отклонение от установившегося значения, выраженное в относительных единицах или процентах:

$\sigma = \frac{h_{\max} - 1}{1} \cdot 100\% = 62,2\%.$

Обычно требования по перегулированию составляют $\sigma \approx 10 - 30\%$.

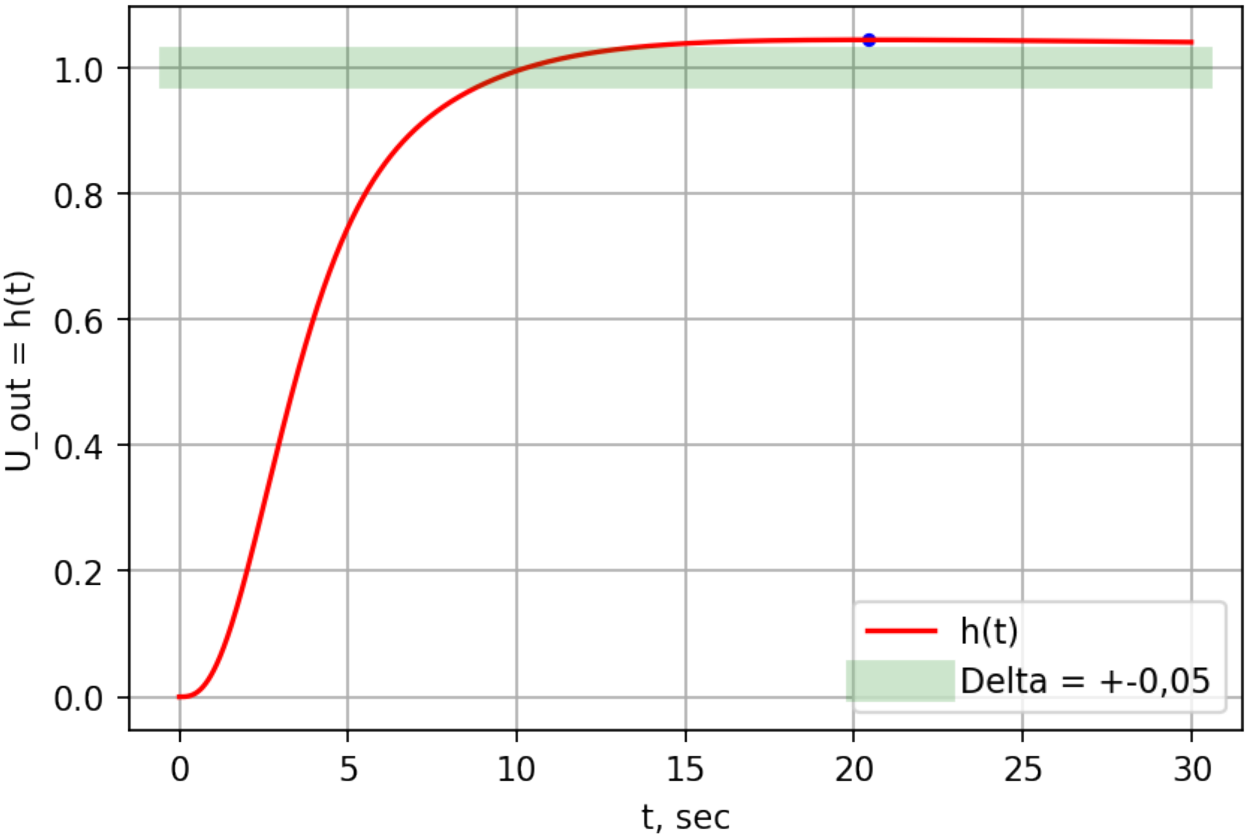
κ - декремент затухания, равный отношению модулей двух смежных перегулирований:

$\kappa = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\min} - h_{\text{уст}}} = 5,868.$

Мы имеем высокое перегулирование. Попробуем подобрать оптимальные параметры форсирующего звена, чтобы уменьшить σ.

```
def signal(t, dt_i):
    sig = 0
    if t >= 0:
        sig = 1
    return sig

t = 30
var_k=0.003
var_T=80
data_U, data_time, data_max_min = model(t, var_k, var_T)

print('\nsigma =',(data_max_min[0][1]-1)*100//1,'%' )




plt.ylabel('U_out = h(t)')
plt.xlabel('t, sec')
plt.scatter(data_max_min[:,0], data_max_min[:,1], color='b', s=10, marker='o')
plt.plot(data_time, data_U, label = u'h(t)', color = 'r')
plt.plot([0,t],[1,1], label = u'Delta = +-0,05', alpha=.2, color = 'g',
linewidth=12.5)
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
t = 20.42 sec; max = 1.044

sigma = 4.0 %
```



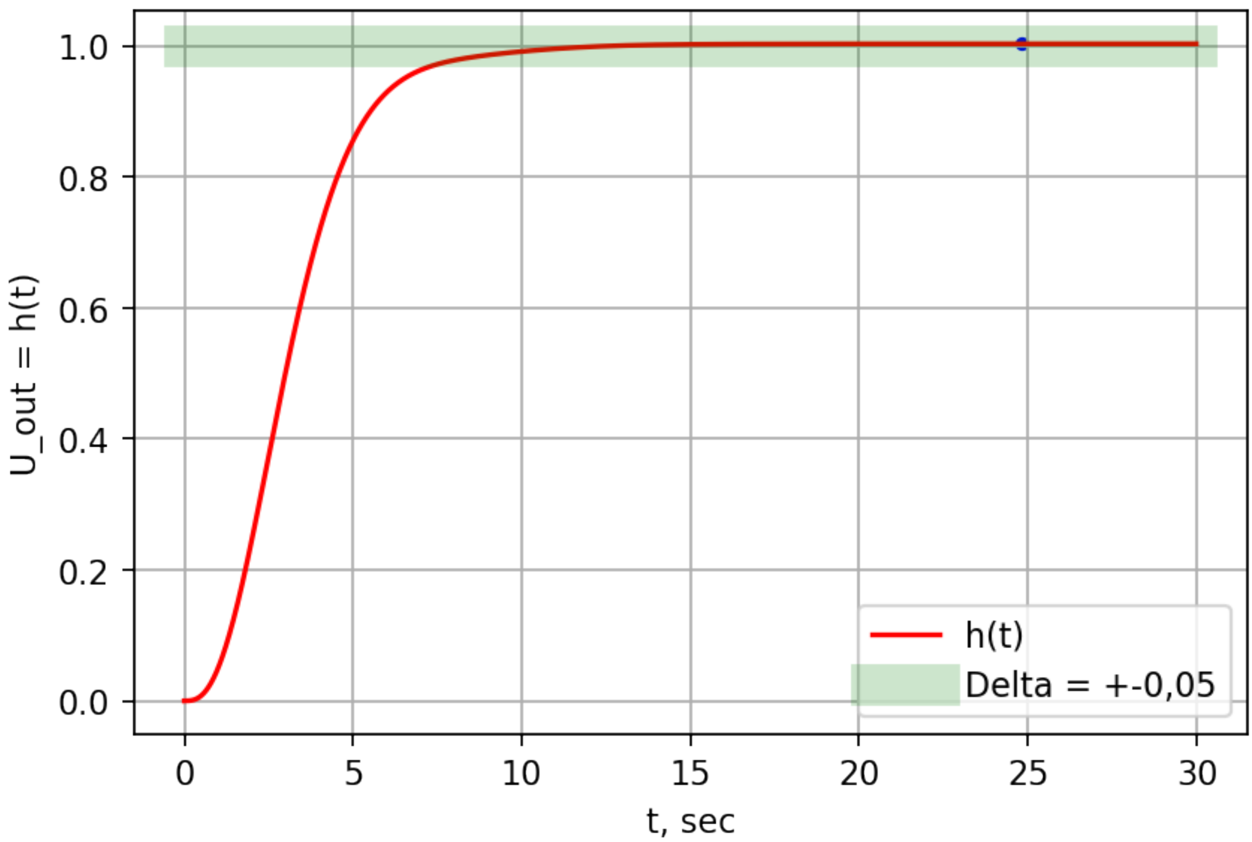
Из моделирования и наблюдения за поведением графиков переходного процесса в зависимости от параметров форсирующего звена получили, что меняя параметры T и k возможно достичь перерегулирования $\sigma = 4\%$

$\sigma = 4\%$ при $T = 80$ сек, $k = 0.003\ \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}$.

```
def signal(t, dt_i):
    sig = 0
    if t >= 0:
        sig = 1
    return sig

t = 30
var_k=0.0003
var_T=1000#9
data_U, data_time, data_max_min = model(t, var_k, var_T)

print('\nsigma =',(data_max_min[0][1]-1)*100//1,'%' )



plt.ylabel('U_out = h(t)')
plt.xlabel('t, sec')
plt.scatter(data_max_min[:,0], data_max_min[:,1], color='b', s=10, marker='o')
plt.plot(data_time, data_U, label = u'h(t)', color = 'r')
plt.plot([0,t],[1,1], label = u'Delta = +-0,05', alpha=.2, color = 'g',
linewidth=12.5)
```

```
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
t = 24.82 sec; max = 1.003

sigma = 0.0 %
```



Также возможно достичь нулевого перерегулирования, выбрав оптимальные параметры для форсирующего звена:

$\sigma = 0\%$ при $T = 1000$ сек$, k = 0.0003 \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}$.

Дополнительно.

Также для аналитического расчёта переходного процесса и весовой функции, существует вторая теорема разложения Хевисайда. Подробнее можно узнать в литературе, например Клюев А.С. "Наладка средств автоматизации и автоматических систем регулирования" стр.35 **формула 1.227**.

$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} H_{kj} t^{m_k - j} e^{p_k t}$,

где

$H_{kj} = \frac{1}{(j-1)!(m_k-j)!} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left[\frac{(p-p_k)^{m_k} U(p)}{V(p)} \right]_{p=p_k}$;

$V(p) = a_0 (p - p_0)^{m_1} (p - p_2)^{m_2} \ldots (p - p_n)^{m_n}$.

Откуда $\Rightarrow$

$$K(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{p_i t}; \qquad W_k(p) = \frac{U(p)}{V(p)};$$

где n - число конрней, p_i - корни уравнения $V(p) = 0$.

Найдём корни:

$$V(s) = k(1 + Ts) + s^2 + 2\xi T_{\text{кст}} s^3 + T^2_{\text{кст}} s^4;$$

$$k(1 + Ts) + s^2 + 2\xi T_{\text{кст}} s^3 + T^2_{\text{кст}} s^4 = 0;$$

$$s_{1,2} = -0,585 \pm 0,295i;$$

$$s_{3,4} = -0,290 \pm 0,609i.$$

Тогда весовая функция будет выглядеть:

$$K = 2(0,402\cos(0,295t) - 1,385\sin(0,295t))e^{-0,585t} - 2(0,402\cos(0,609t) - 1,385\sin(0,609))e^{-0,585t};$$

Изобразим график полученной весовой функции.

```
def KK(t):
    a1 = 2*(0.402*math.cos(0.295*t)-1.385*math.sin(0.295*t))*math.exp(-0.585*t)
    a2 =-2*(0.402*math.cos(0.609*t)-0.865*math.sin(0.609*t))*math.exp(-0.29*t)
    return a1+a2
```

```
data_kk = []
data_time = []

t_scale = 100
t = 25
for i in range(t*t_scale):
    t_i = i/t_scale
    data_kk.append(KK(t_i))
    data_time.append(t_i)

plt.ylabel('U_out = K(t)')
plt.xlabel('t, sec')
plt.plot(data_time, data_kk, label = u'K(t)', color = 'r')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

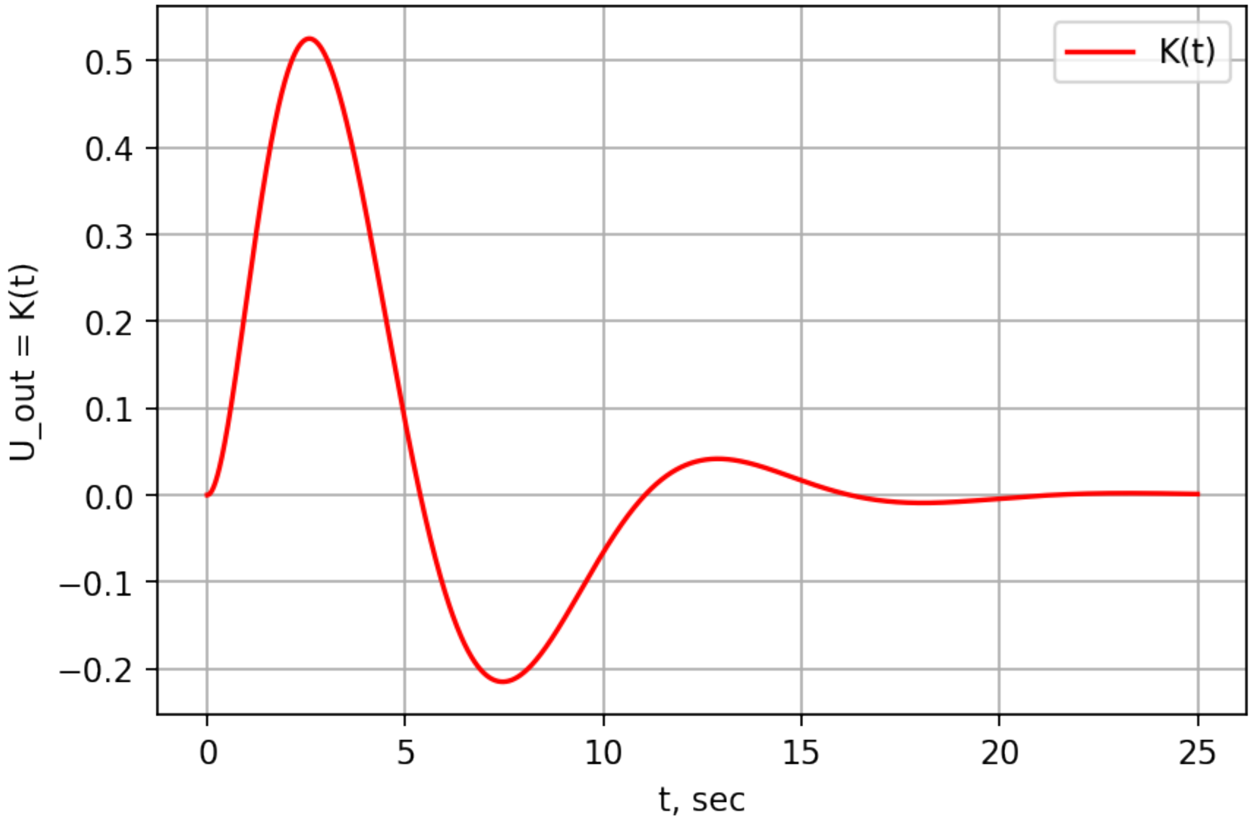


График весовой функции, построенный из аналитических соображений, в точности повторяет нашу модель.

Аналогично получим график для переходного процесса:

$h(t) = \frac{U(0)}{V(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{U(s_i)}{s_i V'(s_i)} e^{s_i t};$

$h(t) = 1 + 2(0,402\cos(0,295t) - 2,164\sin(0,295t))e^{-0,585t} - 2(0,902\cos(0,609t) - 1,089\sin(0,609t))e^{-0,29t}.$

Также изобразим график $h(t)$:

```
def hh(t):
    a1 =  2*(0.402*math.cos(0.295*t)-2.164*math.sin(0.295*t))*math.exp(-0.585*t)
    a2 = -2*(0.902*math.cos(0.609*t)-1.089*math.sin(0.609*t))*math.exp(-0.29*t)
    return 1+a1+a2
```

```
data_hh = []

t_scale = 100
t = 25
for i in range(t*t_scale):
    t_i = i/t_scale
    data_hh.append(hh(t_i))

plt.ylabel('U_out = h(t)')
plt.xlabel('t, sec')
plt.plot(data_time, data_hh, label = u'h(t)', color = 'r')
plt.legend()
plt.grid(True)
```

```
plt.show()
```

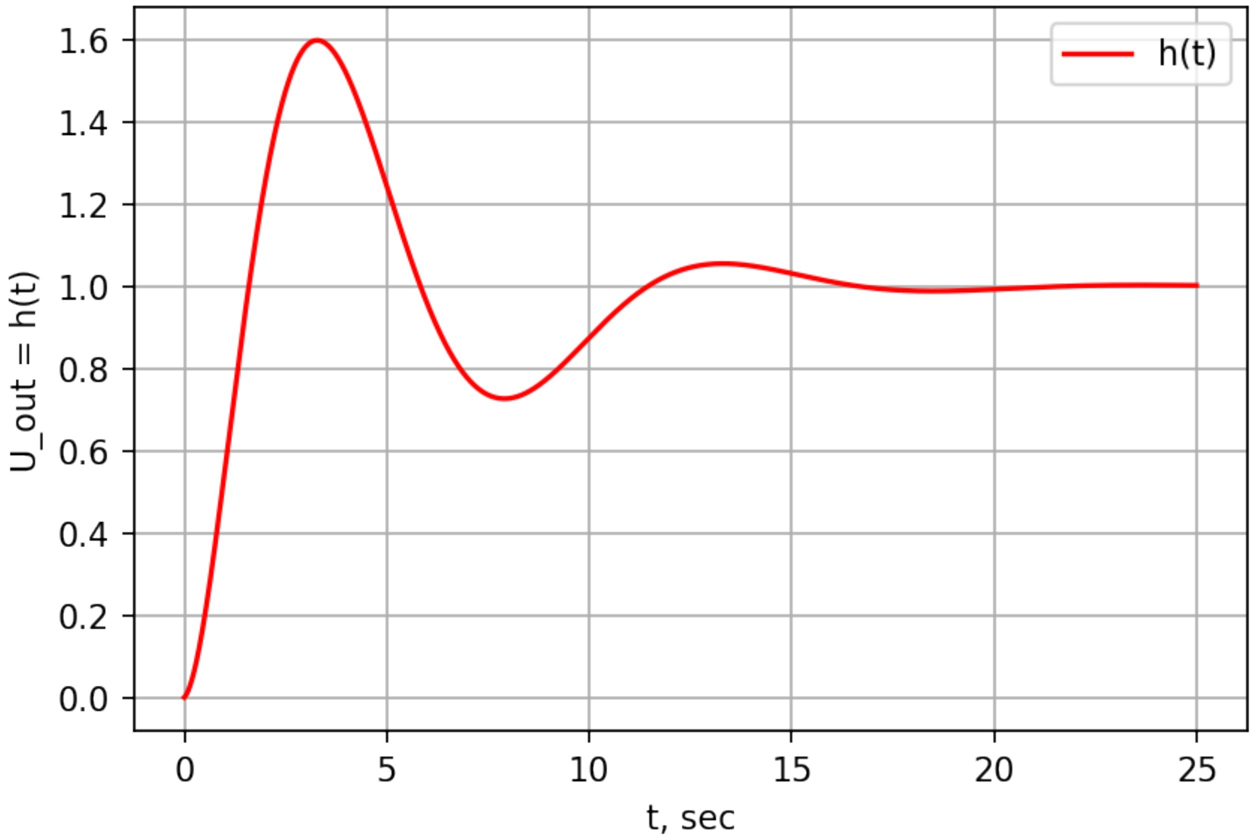


График переходного процесса, построенный из аналитических соображений, в точности повторяет нашу модель.

Вывод.

- Исследовали основные свойства и характеристики контура управления;
- Провели расчёт параметров системы:

  $T = 5T_{\text{кст}} = 4 \text{ с}; \qquad k = 0,125 \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}; \qquad w_{\text{ср}} = 0,5 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$

  $\Delta\psi_{\text{ку}} = 29,74^\circ; \qquad \Delta A_{\text{з}} = -11,2 \text{ дБ}; \qquad w_{\text{эф}} = 0,9112 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$
- Выявили, что для оптимизации Показателя колебательности необходимо увеличивать параметр k форсирующего звен;
- Промоделировали контур управления и на основе модели изучили весовую функцию и переходный процесс. Аналитически подвердили верность полученных данных исследования;
- Проведя анализ моделирования, выявили рекомендуемые, оптимальные параметры форсирующего звена для контура управления с заданной функцией управления:

  $\sigma = 0\% \text{ при } T = 1000 \text{ сек}, k = 0.0003 \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}.$