

**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

## **Cálculo de Programas**

### Trabalho Prático (2025/26)

Lic. em Ciências da Computação  
Lic. em Engenharia Informática

#### **Grupo G05**

a106936 Duarte Escairo  
a106932 Luís Soares  
a106856 Tiago Figueiredo

## Preâmbulo

Em [Cálculo de Programas](#) pretende-se ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em [Haskell](#) (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em [Haskell](#). Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo [A](#) onde encontrarão as instruções relativas ao *software* a instalar, etc.

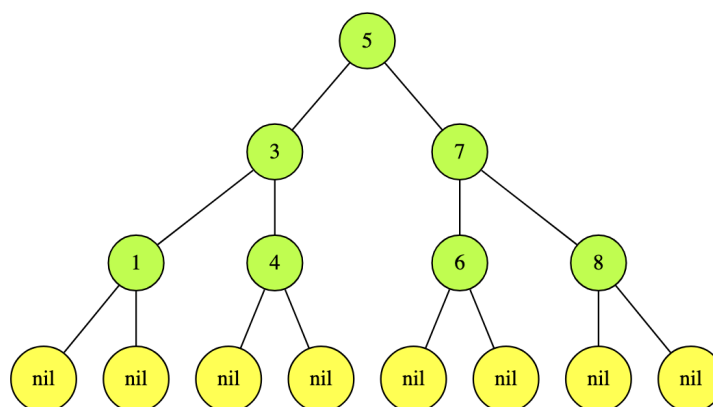
Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

**Avaliação.** Faz parte da avaliação do trabalho a sua defesa por parte dos elementos de cada grupo. Estes devem estar preparados para responder a perguntas sobre *qualquer* dos problemas deste enunciado. A prestação *individual* de cada aluno nessa defesa oral será uma componente importante e diferenciadora da avaliação.

## Problema 1

Uma serialização (ou travessia) de uma árvore é uma sua representação sob a forma de uma lista. Na biblioteca *BTree* encontram-se as funções de serialização *inordt*, *preordt* e *postordt*, que fazem as travessias *in-order*, *pre-order* e *post-order*, respectivamente. Todas essas travessias são catamorfismos que percorrem a árvore argumento em regime *depth-first*.

Pretende-se agora uma função *bforder* que faça a travessia em regime *breadth-first*, isto é, por níveis. Por exemplo, para a árvore  $t_1$  dada em anexo e mostrada na figura a seguir,



a função deverá dar a lista

[5, 3, 7, 1, 4, 6, 8]

em que se vê como os níveis 5, depois 3, 7 e finalmente 1, 4, 6, 8 foram percorridos.

Pretendemos propor duas versões dessa função:

1. Uma delas envolve um catamorfismo de *BTrees*:

$$\begin{aligned} \text{bfsLevels} &:: \text{BTree } a \rightarrow [a] \\ \text{bfsLevels} &= \text{concat} \cdot \text{levels} \end{aligned}$$

Complete a definição desse catamorfismo:

$$\begin{aligned} \text{levels} &:: \text{BTree } a \rightarrow [[a]] \\ \text{levels} &= \llbracket g\text{levels} \rrbracket \end{aligned}$$

2. A segunda proposta,

$$\text{bft} :: \text{BTree } a \rightarrow [a]$$

deverá basear-se num anamorfismo de listas.

**Sugestão:** estudar o artigo [2] cujo PDF está incluído no material deste trabalho. Quando fizer testes ao seu código pode, se desejar, usar funções disponíveis na biblioteca *Exp* para visualizar as árvores em GraphViz (formato .dot).

Justifique devidamente a sua resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos. Como já se disse, valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

## Problema 2

Considere a seguinte função em Haskell:

```
f x = wrapper · worker where
  wrapper = head
  worker 0 = start x
  worker (n + 1) = loop x (worker n)
  loop x [s, h, k, j, m] =
    [h / k + s, x ↑ 2 * h, k * j, j + m, m + 8]
  start x = [x, x ↑ 3, 6, 20, 22]
```

Pode-se provar pela lei de recursividade mútua que  $f\ x\ n$  calcula o seno hiperbólico de  $x$ ,  $\sinh x$ , para  $n$  aproximações da sua série de Taylor. Faça a derivação da função dada a partir da referida série de Taylor, apresentando todos os cálculos justificativos, tal como se faz para outras funções no capítulo respectivo do texto base desta UC [3].

## Problema 3

Quem em Braga observar, ao fim da tarde, o tráfego onde a Avenida Clairmont Fernand se junta à N101, aproximadamente na coordenada [41°33'46.8"N 8°24'32.4"W](#) — ver as setas da figura que se segue — reparará nas sequências imparáveis (infinitas!) de veículos provenientes dessas vias de circulação.

Mas também irá observar um comportamento interessante por parte dos condutores desses veículos: por regra, *cada carro numa via deixa passar, à sua frente, exactamente outro carro da outra via*.



Este comportamento *civilizado* chama-se *fair-merge* (ou *fair-interleaving*) de duas sequências infinitas, também designadas *streams* em ciência da computação. Seja dado o tipo dessas sequências em Haskell,

**data** *Stream* *a* = *Cons* (*a*, *Stream* *a*) **deriving** *Show*

para o qual se define também:

*out* (*Cons* (*x*, *xs*)) = (*x*, *xs*)

O referido comportamento civilizado pode definir-se, em Haskell, da forma seguinte:<sup>1</sup>

```
fair_merge :: (Stream a, Stream a) + (Stream a, Stream a) → Stream a
fair_merge = [h, k] where
  h (Cons (x, xs), y) = Cons (x, k (xs, y))
  k (x, Cons (y, ys)) = Cons (y, h (x, ys))
```

Defina *fair\_merge* como um **anamorfismo** de *Streams*, usando o combinador

$$[[g]] = \text{Cons} \cdot (id \times [[g]]) \cdot g$$

e a seguinte estratégia:

- Derivar a lei **dual** da recursividade mútua,

$$[f, g] = [[h, k]] \equiv \begin{cases} out \cdot f = F[f, g] \cdot h \\ out \cdot g = F[f, g] \cdot k \end{cases} \quad (1)$$

tal como se fez, nas aulas, para a que está no formulário.

- Usar (1) na resolução do problema proposto.

Justificar devidamente a resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos.

## Problema 4

Como se sabe, é possível pensarmos em catamorfismos, anamorfismos etc *probabilísticos*, quer dizer, programas recursivos que dão distribuições como resultados. Por exemplo, podemos pensar num combinador

$$pcataList :: (() + (a, b) \rightarrow \text{Dist } b) \rightarrow [a] \rightarrow \text{Dist } b$$

<sup>1</sup> O facto das sequências serem infinitas não nos deve preocupar, pois em Haskell isso é lidado de forma transparente por [lazy evaluation](#).

que é muito parecido com

$$(\cdot) :: () \rightarrow (a, b) \rightarrow b \rightarrow [a] \rightarrow b$$

da biblioteca [List](#). A principal diferença é que o gene de *pcataList* é uma função probabilística.

Como exemplo de utilização, recorde-se que  $(\text{[zero, add]})$  soma todos os elementos da lista argumento, por exemplo:

$$(\text{[zero, add]}) [20, 10, 5] = 35.$$

Considere-se agora a função *padd* (adição probabilística) que, com probabilidade 90% soma dois números e com probabilidade 10% os subtrai:

$$\text{padd } (a, b) = D [(a + b, 0.9), (a - b, 0.1)]$$

Se se correr

$$d4 = \text{pcataList } [\text{pzero, padd}] [20, 10, 5] \text{ where } \text{pzero} = \text{return} \cdot \text{zero}$$

obter-se-á:

```
35  81.0%
25   9.0%
 5   9.0%
15   1.0%
```

Com base neste exemplo, resolva o seguinte

**Problema:** Uma unidade militar pretende enviar uma mensagem urgente a outra, mas tem o aparelho de telegrafia meio avariado. Por experiência, o telegrafista sabe que a probabilidade de uma palavra se perder (não ser transmitida) é 5%; e que, no final de cada mensagem, o aparelho envia o código "stop", mas (por estar meio avariado), falha 10% das vezes.

Qual a probabilidade de a palavra "atacar" da mensagem

`words "Vamos atacar hoje"`

se perder, isto é, o resultado da transmissão ser ["Vamos", "hoje", "stop"]? E a de seguirem todas as palavras, mas faltar o "stop" no fim? E a da transmissão ser perfeita?

Responda a estas perguntas encontrando *gene* tal que

`transmitir = pcataList gene`

descreve o comportamento do aparelho. Justificar devidamente a resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos.

## Anexos

### A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na internet.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

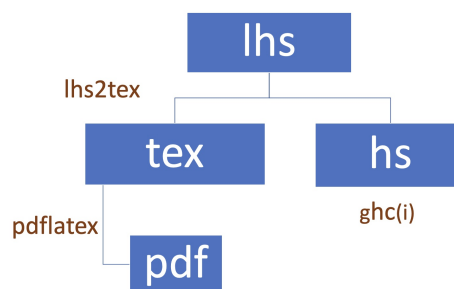
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita “literária” [1], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2526t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp2526t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2526t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código **Haskell** que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do **GHCI**, serão necessários os executáveis **pdflatex** e **lhs2TeX**. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do **Docker** tal como a seguir se descreve.

## B Docker

Recomenda-se o uso do **container** cuja imagem é gerada pelo **Docker** a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2526t.zip`. Este **container** deverá ser usado na execução do **GHCI** e dos comandos relativos ao **LaTeX**. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

Após **instalar o Docker** e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2526t .  
$ docker run -v ${PWD}:/cp2526t -it cp2526t
```

**NB:** O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o **GHCI** e os comandos relativos ao **LaTeX**. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2526t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2526t` no **container** sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no **container**, executando:

---

<sup>1</sup> O sufixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

```
$ lhs2TeX cp2526t.lhs > cp2526t.tex
$ pdflatex cp2526t
```

[lhs2TeX](#) é o pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#) e que faz parte já do [container](#). Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2526t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em [Haskell](#), para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2526t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2526t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo [GHCi](#) para ser executado.

## C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo [G](#) com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com [BibT<sub>E</sub>X](#)) e o índice remissivo (com [makeindex](#)),

```
$ bibtex cp2526t.aux
$ makeindex cp2526t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no [container](#).)

No anexo [F](#) disponibiliza-se algum código [Haskell](#) relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da [programação literária](#) para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo [D](#) que se segue.

## D Como exprimir cálculos e diagramas em L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte ([lhs](#)) do que está a ler<sup>1</sup> onde se obtém o efeito seguinte:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} id &= \langle f, g \rangle \\ \equiv \quad &\{ \text{universal property} \} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Procure e.g. por “`sec:diagramas`”.

<sup>2</sup> Exemplos tirados de [\[3\]](#).

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{cases} \\
& \equiv \quad \{ \text{identity} \} \\
& \begin{cases} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{cases} \\
& \square
\end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* [xymatrix](#), por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
\downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
B & \xleftarrow{g} & 1 + B
\end{array}$$

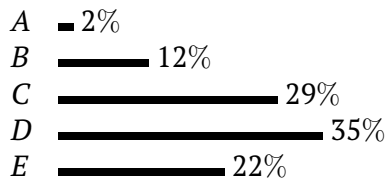
## E O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são funtores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca [Probability](#) oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\text{newtype Dist } a = D \{ unD :: [(a, ProbRep)] \} \quad (2)$$

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par  $(a, p)$  numa distribuição  $d :: \text{Dist } a$  indica que a probabilidade de  $a$  é  $p$ , devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de  $d$  somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de  $A$  a  $E$ ,



será representada pela distribuição

$$\begin{aligned}
d1 &:: \text{Dist Char} \\
d1 &= D [ ('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22) ]
\end{aligned}$$

que o [GHCi](#) mostrará assim:

```

'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%

```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = \text{uniform } (\text{words "Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```

"Uma"    20.0%
"cinco"  20.0%
"de"     20.0%
"frase"  20.0%
"palavras" 20.0%

```

distribuição *normais*, eg.

```
d3 = normal [10..20]
```

etc.<sup>1</sup> Dist forma um **mónade** cuja unidade é  $\text{return } a = D [(a, 1)]$  e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g a, (y, q) \leftarrow f x]$$

em que  $g : A \rightarrow \text{Dist } B$  e  $f : B \rightarrow \text{Dist } C$  são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

## F Código fornecido

### Problema 1

Árvores exemplo:

```

t1 :: BTree Int
t1 = Node (5, (Node (3, (Node (1, (Empty, Empty)), Node (4, (Empty, Empty)))),
  Node (7, (Node (6, (Empty, Empty)), Node (8, (Empty, Empty)))))
t2 :: BTree Int
t2 =
  node 1
    (node 2 (node 4 Empty Empty) (node 5 Empty Empty))
    (node 3 (node 6 Empty Empty) (node 7 Empty Empty))
t3 :: BTree Char
t3 =
  node 'A'
    (node 'B' (node 'C' (node 'D' Empty Empty) Empty) Empty)
    (node 'E' Empty Empty)
t4 :: BTree Char
t4 =
  node 'A'
    (node 'B' (node 'C' (node 'D' Empty Empty) Empty) Empty)
    Empty
t5 :: BTree Int
t5 =
  node 1

```

<sup>1</sup> Para mais detalhes ver o código fonte de [Probability](#), que é uma adaptação da biblioteca [PFP](#) ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

$(\text{node } 2 (\text{node } 4 \text{ Empty Empty}) \text{ Empty})$   
 $(\text{node } 3 \text{ Empty } (\text{node } 5 (\text{node } 6 \text{ Empty Empty}) \text{ Empty}))$   
 $\text{node } a \ b \ c = \text{Node } (a, (b, c))$

## G Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

**Importante:** Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

### Problema 1

#### Catamorfismo

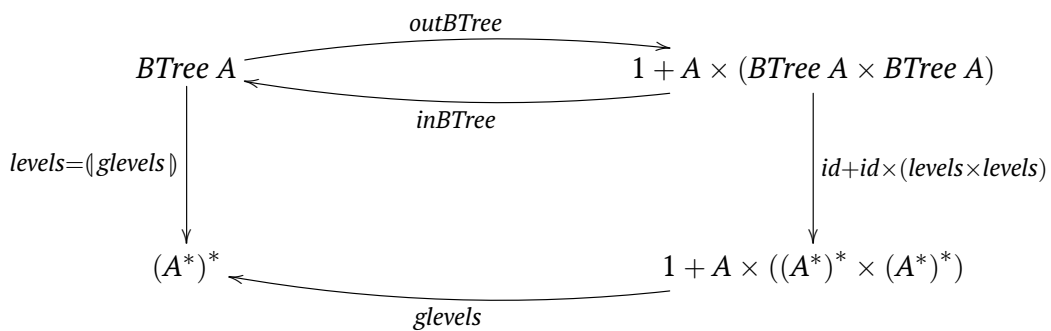
Na primeira versão proposta para a resolução do **Problema 1**, pretende-se usar um catamorfismo de *BTrees* para se fazer a travessia *in-order* em regime *breadth-first*.

Se repararmos, o resultado de aplicarmos a função *levels* a uma *BTree* é uma lista de listas, onde cada uma dessas listas internas corresponde aos valores dos nós de um nível da árvore. Ou seja, a aplicação de *levels* à árvore  $t_1$ , por exemplo, resulta na lista de listas:

$[[5], [3, 7], [1, 4, 6, 8]]$

Para depois obter a travessia *bford*, basta concatenar todas as listas internas, o que é feito na função *bfsLevels* com recurso à função *concat*.

O desafio aqui está em encontrar o gene (*glevels*) do catamorfismo *levels*. Para começar, podemos representar esse catamorfismo através do seguinte diagrama:



A partir deste diagrama, percebemos que o gene do catamorfismo deverá, para obter a tal lista de listas, colocar o valor da raiz no início da lista final, seguido das listas dos níveis das subárvores esquerda e direita. Contudo essas listas dos níveis das subárvores estão também organizadas por níveis, ou seja, a primeira lista corresponde ao nível 1, a segunda ao nível 2, etc. No caso da árvore  $t_1$ , por exemplo, a aplicação de *levels* às subárvores esquerda e direita de  $t_1$  resulta, respectivamente, nas listas de listas:

$[[3], [1, 4]]$  e  $[[7], [6, 8]]$

Neste caso o passo final seria juntar as listas dos níveis das subárvores esquerda e direita, e colocar o valor da raiz 5 ([5]) no início da lista final. Para juntar as listas dos níveis das subárvores esquerda e direita, podemos definir a seguinte função auxiliar:

```

juntaListas :: ([[a]], [[a]]) → [[a]]
juntaListas (l, []) = l
juntaListas ([], r) = r
juntaListas ((a : as), (b : bs)) = (a ++ b) : juntaListas (as, bs)

```

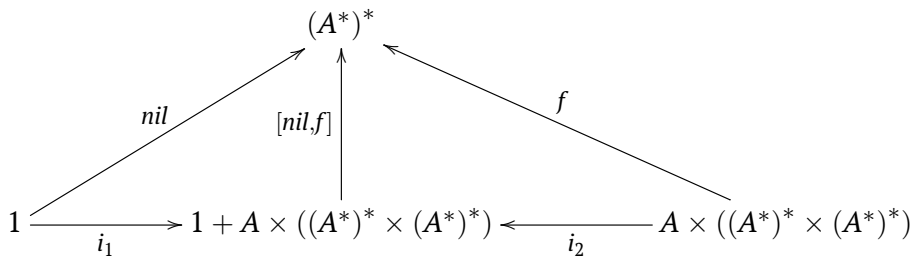
Para o exemplo da árvore  $t_1$ , a aplicação de *juntaListas* às listas de listas

$[[3], [1, 4]]$  e  $[[7], [6, 8]]$

resulta na lista de listas:

$[[3, 7], [1, 4, 6, 8]]$

Assim sendo, o comportamento do gene *glevels* pode ser representado por este diagrama:



E o código que define o gene *glevels* é o seguinte:

```

glevels :: () + (a, ([[a]], [[a]])) → [[a]]
glevels = [nil, f]
where f (a, (l, r)) = [a] : juntaListas (l, r)

```

Tal como descrito anteriormente, *f* coloca o valor da raiz à cabeça da lista, seguido da concatenação das listas dos níveis das subárvores esquerda e direita, com a função *juntaListas*.

Se quisermos definir *glevels* numa versão completamente *pointfree*, podemos esquematizar o lado direito da solução desta forma:

$$\begin{array}{c}
A \times ((A^*)^* \times (A^*)^*) \\
\downarrow \text{singl} \times \text{juntaListas} \\
A^* \times (A^*)^* \\
\downarrow \text{cons} \\
(A^*)^*
\end{array}$$

Logo a definição *pointfree* de *glevels* é a seguinte:

$\text{glevels}' = [\text{nil}, \text{cons} \cdot (\text{singl} \times \text{juntaListas})]$

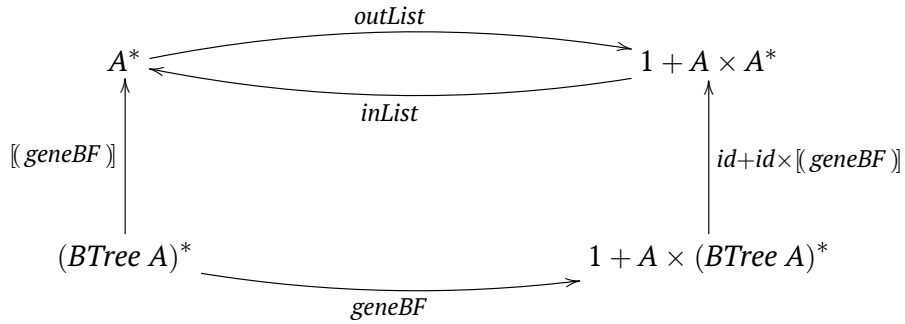
## Anamorfismo

Na segunda versão proposta para a resolução do **Problema 1**, pretende-se usar um anamorfismo de listas para se fazer a travessia *in-order* em regime *breadth-first*.

Com o estudo do artigo [2], percebemos que é possível fazer a travessia *breadth-first* em *BTrees* usando uma floresta para representar os nós a visitar (neste caso uma floresta é uma lista de *BTrees*).

A ideia do algoritmo é visitar os nós da floresta, retirando o valor do nó da frente da lista, adicionando o seu valor à lista resultado (caso não seja *Empty*) e adicionando à floresta os filhos esquerdo e direito do nó visitado (caso não seja *Empty*), mas colocando-os no final da lista. Este processo repete-se até que a floresta esteja vazia.

Para representar este algoritmo como um anamorfismo, começamos por desenhar o seguinte diagrama:



Contudo, como referido anteriormente, o algoritmo usa uma floresta (lista de *BTrees*), e não um *BTree*, que é o input da função *bft*. Desta forma é necessário garantir que a *BTree* argumento seja convertida numa floresta, para poder ser usada no anamorfismo. Para isso, usamos a função *singl*, que transforma uma *BTree* numa floresta com apenas essa *BTree* (lista com apenas um elemento).

$$BTree\ A \xrightarrow{singl} (BTree\ A)^*$$

Assim sendo, a função *bft* é definida como a composição do anamorfismo  $\llbracket geneBF \rrbracket$  com a função *singl*, como se mostra a seguir:

$$bft = \llbracket geneBF \rrbracket \cdot singl$$

Para o gene do anamorfismo, o comportamento é o já anteriormente descrito, ou seja, visitar os nós da floresta, retirando o valor do nó da frente da lista, e devolvendo um par com o valor do nó e a floresta a visitar. Na floresta a visitar, já estarão adicionados os filhos esquerdo e direito do nó visitado (caso não seja *Empty*), colocados no final da lista. O anamorfismo repete este processo até que a floresta esteja vazia.

$$\begin{aligned} geneBF &:: [BTree\ a] \rightarrow () + (a, [BTree\ a]) \\ geneBF\ [] &= i_1\ () \\ geneBF\ (Empty : t) &= geneBF\ t \\ geneBF\ (Node\ (a, (l, r)) : t) &= i_2\ (a, t ++ [l, r]) \end{aligned}$$

## Problema 2

No **Problema 2**, o objetivo é derivarmos a função  $f$ , que calcula o seno hiperbólico de  $x$ ,  $\sinh x$ , para  $n$  aproximações da sua série de Taylor, a partir da série de Taylor de  $\sinh x$  que é dada por:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

No nosso caso, iremos utilizar uma aproximação com  $n$  termos da série de Taylor, ou seja:

$$\sinh x \ n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

A derivação para a função  $f$  é necessária pois no caso de definirmos  $\sinh x \ n$  diretamente de forma recursiva

$$\sinh x \ 0 = x$$

$$\sinh x \ (n+1) = (x \uparrow (2 * (n+1) + 1)) / (2 * (n+1) + 1)! + \sinh x \ n$$

e fazendo os cálculos temos

$$\sinh x \ 0 = x$$

$$\sinh x \ (n+1) = (x \uparrow (2 * n + 3)) / (2 * n + 3)! + \sinh x \ n$$

verificamos que esta definição não é eficiente, já que em cada passo recursivo é necessário calcular  $x \uparrow (2 * n + 3)$  e  $(2 * n + 3)!$ , o que não se verifica em  $f$ , pois com o *loop*, os valores do vetor inicial  $start \ x = [x, x \uparrow 3, 6, 20, 22]$  são atualizados em cada iteração de forma linear, evitando cálculos desnecessários.

Com o estudo da secção da Lei da Recursividade Mútua no livro do professor J.N.Oliveira [3], entendemos que devíamos partir o problema em duas funções recursivas, uma referente ao numerador da fração de  $\sinh x \ n$  e outra referente ao denominador, de forma a podermos aplicar a lei da recursividade mútua. Assim sendo, poderíamos definir  $\sinh x \ n$  como uma soma da seguinte forma:

$$soma \ x \ 0 = x$$

$$soma \ x \ (n+1) = num \ x \ (n+1) / den \ x \ (n+1) + soma \ x \ n$$

onde  $num \ x \ n$  calcula o numerador  $x \uparrow (2 * n + 1)$  e  $den \ x \ n$  calcula o denominador  $(2 * n + 1)!$ .

Para o numerador, podemos descobrir qual é a diferença entre dois termos consecutivos fazendo a seguinte análise:

$$\frac{num_{n+1}}{num_n} = \frac{x^{2(n+1)+3}}{x^{2n+3}} = \frac{x^{2n+5}}{x^{2n+3}} = x^2$$

ou seja, o próximo termo do numerador é obtido multiplicando o termo atual por  $x^2$ . Podemos concluir que o numerador pode ser definido recursivamente da seguinte forma:

$$num \ x \ 1 = x \uparrow 3$$

$$num \ x \ (n+1) = x \uparrow 2 * num \ x \ n$$

Para o denominador, podemos descobrir qual é a diferença entre dois termos consecutivos fazendo a seguinte análise:

$$\frac{den_{n+1}}{den_n} = \frac{(2(n+1)+3)!}{(2n+3)!} = \frac{(2n+5)!}{(2n+3)!} = (2n+5)(2n+4)$$

ou seja, o próximo termo do denominador é obtido multiplicando o termo atual por  $(2n+5)(2n+4)$ . Podemos concluir que o denominador pode ser definido recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} den\ x\ 1 &= 3! = 6 \\ den\ x\ (n+1) &= (2n+5)(2n+4) * den\ x\ n \end{aligned}$$

Contudo, esta definição recursiva do denominador ainda depende de  $n$ , o que não é desejável, por isso, é necessário a simplificar, até não dependa de  $n$ . Para isso, faça-se

$$j\ x\ n = (2n+5) * (2n+4)$$

tal como é feito no livro do professor.

Para descobrirmos a diferença entre dois termos consecutivos, fazemos a seguinte análise:

$$j_{n+1} - j_n = (2(n+1)+5)(2(n+1)+4) - (2n+5)(2n+4) = 8n+22$$

ou seja, o próximo termo de  $j$  é obtido somando ao termo atual  $8n+22$ . Podemos concluir que  $j$  pode ser definida recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} j\ x\ 0 &= 20 \\ j\ x\ (n+1) &= (8 * n + 22) + j\ x\ n \end{aligned}$$

Mais uma vez, esta definição recursiva de  $j$  ainda depende de  $n$ , o que não é desejável, por isso, voltamos a repetir o processo até não depender de  $n$ . Para isso, faça-se

$$m\ x\ n = 8 * n + 22$$

Para descobrirmos a diferença entre dois termos consecutivos, fazemos a seguinte análise:

$$m_{n+1} - m_n = 8(n+1) + 22 - (8n+22) = 8$$

ou seja, o próximo termo de  $m$  é obtido somando ao termo atual 8. Podemos concluir que  $m$  pode ser definida recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m\ x\ 0 &= 22 \\ m\ x\ (n+1) &= 8 + m\ x\ n \end{aligned}$$

Agora que  $m$  tem uma definição recursiva que não depende de  $n$ , podemos aplicar a lei da recursividade mútua, de forma a obter a definição de  $f$ .

Recapitulando todas as funções que foram definidas nesta derivação temos:

$$\begin{aligned} soma\ x\ 0 &= x \\ soma\ x\ (n+1) &= num\ x\ (n+1) / den\ x\ (n+1) + soma\ x\ n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} num\ x\ 1 &= x \uparrow 3 \\ num\ x\ (n+1) &= x \uparrow 2 * num\ x\ n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} den\ x\ 1 &= 3! = 6 \\ den\ x\ (n+1) &= (2n+5)(2n+4) * den\ x\ n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j\ x\ 0 &= 20 \\ j\ x\ (n+1) &= (8 * n + 22) + j\ x\ n \end{aligned}$$

$$m \times 0 = 22$$

$$m \times (n + 1) = 8 + m \times n$$

E com estas funções, podemos reconstruir *soma* da seguinte forma:

$$m \times 0 = 22$$

$$m \times (n + 1) = 8 + m \times n$$

$$j' \times 0 = 20$$

$$j' \times (n + 1) = m \times n + j' \times n$$

$$den' \times 1 = 3! = 6$$

$$den' \times (n + 1) = j' \times n * den' \times n$$

$$soma' \times 0 = x$$

$$soma' \times (n + 1) = num \times (n + 1) / den' \times (n + 1) + soma' \times n$$

E pela lei da recursividade mútua, podemos escrever *soma* como:

$$soma'' \times n = s \text{ where}$$

$$(s, -, -, -, -) = aux \times 0$$

$$aux \times 0 = (x, x \uparrow 3, 6, 20, 22)$$

$$aux \times (n + 1) = \text{let } (s, num, den, j', m) = aux \times n \text{ in } (s + num / den, x \uparrow 2 * num, den * j', j' + m, m + 8)$$

Tal como é dito no livro, *aux* é um *loop*, onde *aux* 0 corresponde ao valor inicial e *aux* (*n* + 1) corresponde à atualização dos valores em cada iteração do *loop*.

Desta forma, adaptando a notação usada no livro do professor, conseguimos definir *start* *x* e *loop* *x* como:

$$start \ x = [x, x \uparrow 3, 6, 20, 22]$$

$$loop \ x \ [s, num, den, j', m] = [s + num / den, x \uparrow 2 * num, den * j', j' + m, m + 8]$$

Trocando o nome de algumas funções, temos o *loop* como:

$$loop \ x \ [s, h, k, j', m] = [s + h / k, x \uparrow 2 * h, k * j, j + m, m + 8]$$

Na variável *s* está o valor acumulado da soma, ou seja, o cálculo de *sinh* *x* *n*, pelo que basta fazer *head* do resultado do *loop* após *n* iterações, para obter o valor final de *sinh* *x* *n*.

Fica assim derivada a função *f* como pedido no enunciado.

### Problema 3

No **Problema 3**, pretende-se definir a função *fair\_merge* como um anamorfismo de *Streams*. Esta estratégia de *merging* permite que os elementos das duas *Streams* sejam intercalados de forma justa, ou seja, cada elemento de uma *Stream* é seguido por um elemento da outra *Stream*.

Tal como pedido no enunciado, vamos começar por derivar a lei dual da recursividade mútua.

$$\begin{aligned}
& [f, g] = \llbracket [h, k] \rrbracket \\
\equiv & \{ \text{Universal-ana} \} \\
& \text{out} \cdot [f, g] = F [f, g] \cdot [h, k] \\
\equiv & \{ \text{Fusão-} + (2x) \} \\
& [\text{out} \cdot f, \text{out} \cdot g] = [F [f, g] \cdot h, F [f, g] \cdot k] \\
\equiv & \{ \text{Eq-} + \} \\
& \begin{cases} \text{out} \cdot f = F [f, g] \cdot h \\ \text{out} \cdot g = F [f, g] \cdot k \end{cases} \\
& \square
\end{aligned}$$

Fica então demonstrada a lei dual da recursividade mútua.

A partir da definição do tipo *Stream* e da função *out*, é possível deduzir que o functor *F* associado a *Stream* é o seguinte,

$$\begin{aligned}
F X &= A \times X \\
F g &= id \times g
\end{aligned}$$

já que uma *Stream A* é decomposta num par com o primeiro elemento de um tipo qualquer *A* e o resto da *Stream A*.

Tendo isto em conta, e sabendo que a função *fair\_merge'* que queremos definir como um anamorfismo de *Streams* é do tipo

$$fair\_merge' :: (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a) \rightarrow Stream\ a$$

podemos representar o anamorfismo *fair\_merge'* através do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
Stream\ A & \xrightarrow{\text{out}} & A \times Stream\ A \\
\uparrow \llbracket geneFM \rrbracket & & \uparrow F \llbracket geneFM \rrbracket = id \times \llbracket geneFM \rrbracket \\
(Stream\ A \times Stream\ A) + (Stream\ A \times Stream\ A) & \xrightarrow{A \times ((Stream\ A \times Stream\ A) + (Stream\ A \times Stream\ A))} & A \times ((Stream\ A \times Stream\ A) + (Stream\ A \times Stream\ A)) \\
& & \text{geneFM}
\end{array}$$

Com a análise deste diagrama, e do comportamento da função *fair\_merge* definida de forma mutuamente recursiva na formulação do problema neste enunciado

$$\begin{aligned}
& fair\_merge :: (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a) \rightarrow Stream\ a \\
& fair\_merge = [h, k] \textbf{ where} \\
& \quad h (Cons\ (x, xs), y) = Cons\ (x, k\ (xs, y)) \\
& \quad k (x, Cons\ (y, ys)) = Cons\ (y, h\ (x, ys))
\end{aligned}$$

conseguimos definir  $fair\_merge'$  como um anamorfismo de *Streams*

$$fair\_merge' = \llbracket geneFM \rrbracket$$

onde o gene  $geneFM$  é definido como:

$$\begin{aligned} geneFM &:: (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a) \rightarrow (a, (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a)) \\ geneFM\ (i_1\ (Cons\ (x, xs), y)) &= (x, i_2\ (xs, y)) \\ geneFM\ (i_2\ (x, Cons\ (y, ys))) &= (y, i_1\ (x, ys)) \end{aligned}$$

Para comprovar este resultado, podemos utilizar a lei dual da recursividade mútua que foi demonstrada anteriormente. Seja  $fair\_merge$  dada por:

$$fair\_merge = [h, k]$$

E querendo demonstrar que  $fair\_merge = \llbracket geneFM \rrbracket$ , onde  $geneFM$  pode ser decomposto em:

$$geneFM = [g1, g2]$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} [h, k] &= \llbracket geneFM \rrbracket \\ \equiv &\quad \{ \text{Lei dual da recursividade mútua} \} \\ &\quad \begin{cases} out \cdot h = (id \times [h, k]) \cdot g1 \\ out \cdot k = (id \times [h, k]) \cdot g2 \end{cases} \\ &\quad \square \end{aligned}$$

Para que estas equações sejam verdadeiras, é necessário encontrar  $g1$  e  $g2$  tais que as igualdades se verifiquem.

Vamos definir  $g1$  e  $g2$  como:

$$\begin{aligned} g1\ (Cons\ (x, xs), y) &= (x, i_2\ (xs, y)) \\ g2\ (x, Cons\ (y, ys)) &= (y, i_1\ (x, ys)) \end{aligned}$$

Para a primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} &\equiv \quad \{ \text{Igualdade extensional} \} \\ &\quad out \cdot h\ (Cons\ (x, xs), y) \\ &\equiv \quad \{ \text{Def-comp} \} \\ &\quad out\ (h\ (Cons\ (x, xs), y)) \\ &\equiv \quad \{ \text{Def-h} \} \\ &\quad out\ (Cons\ (x, k\ (xs, y))) \\ &\equiv \quad \{ \text{Def-out} \} \\ &\quad (x, k\ (xs, y)) \\ &\equiv \quad \{ \text{Def-x, Cancelamento-+} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (id \times [h, k]) (x, i_2 (xs, y)) \\
\equiv & \{ \text{Def-g1} \} \\
& (id \times [h, k]) \cdot g1 (Cons (x, xs), y) \\
& \square
\end{aligned}$$

O mesmo aplica-se para a segunda equação:

$$\begin{aligned}
& \equiv \{ \text{Igualdade extensional} \} \\
& out \cdot k (x, Cons (y, ys)) \\
\equiv & \{ \text{Def-comp} \} \\
& out (k (x, Cons (y, ys))) \\
\equiv & \{ \text{Def-k} \} \\
& out (Cons (y, h (x, ys))) \\
\equiv & \{ \text{Def-out} \} \\
& (y, h (x, ys)) \\
\equiv & \{ \text{Def-x, Cancelamento-+} \} \\
& (id \times [h, k]) (y, i_1 (x, ys)) \\
\equiv & \{ \text{Def-g2} \} \\
& (id \times [h, k]) \cdot g2 (x, Cons (y, ys)) \\
& \square
\end{aligned}$$

Com isto fica demonstrado que *fair\_merge* se pode definir como um anamorfismo de *Streams*, ou seja,  $fair\_merge = \llbracket geneFM \rrbracket$ , para o gene *geneFM* definido como  $[g1, g2]$ .

Para testar a função *fair\_merge'*, definimos a seguinte função auxiliar *takeStream* que permite extrair os primeiros *n* elementos de uma *Stream* e devolvê-los como uma lista.

```

takeStream :: Int → Stream a → [a]
takeStream 0 _ = []
takeStream n (Cons (x, xs)) = x : takeStream (n - 1) xs

```

Definimos também as seguintes *Streams* de exemplo:

```

s1 :: Stream Int
s1 = Cons (1, Cons (3, Cons (5, Cons (7, Cons (9, s1)))))
s2 :: Stream Int
s2 = Cons (2, Cons (4, Cons (6, Cons (8, Cons (10, s2)))))

```

A aplicação de *takeStream* 10 (*fair\_merge'* (*i*<sub>1</sub> (*s*<sub>1</sub>, *s*<sub>2</sub>))) resulta na lista:

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

refletindo a intercalação justa dos elementos das duas *Streams*, começando pela primeira.

A aplicação de *takeStream* 10 (*fair\_merge'* (*i*<sub>2</sub> (*s*<sub>1</sub>, *s*<sub>2</sub>))) resulta na lista:

```
[2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9]
```

refletindo a intercalação justa dos elementos das duas *Streams*, começando pela segunda.

## Problema 4

### Introdução

De uma forma simples, o objetivo deste problema é desenhar uma função *transmitir* que descreve o comportamento de um aparelho de telegrafia avariado. Esse aparelho tenta transmitir uma mensagem palavra a palavra, mas pode falhar de forma aleatória: cada palavra pode perder-se durante a transmissão e, no final da mensagem, o envio do código "stop" também pode falhar.

Pretende-se que a função *transmitir* modele corretamente estas falhas, produzindo todas as mensagens possíveis, cada uma associada à respetiva probabilidade. Para tal, recorre-se a um catamorfismo probabilístico sobre listas, *pcataList*, cujo resultado é uma distribuição de probabilidades, representada pelo mónade *Dist*.

O comportamento local do aparelho é descrito por um *gene*, que define as decisões probabilísticas a tomar em cada passo da transmissão. A função *transmitir = pcataList gene* separa, assim, o mecanismo genérico de percorrer a lista, do comportamento específico do aparelho.

Antes de apresentar a solução completa, achamos útil analisar cada componente que será usado para que, de seguida, a definição do gene seja mais intuitiva de deduzir e possa ser aplicada para verificar a solução para o problema proposto.

### Uso de *Dist*

Para este problema, é necessário modelar a transmissão de mensagens, em que cada palavra pode falhar de forma aleatória. Para isso, precisamos de uma forma de representar todas as mensagens possíveis e associar a cada uma a sua probabilidade de ocorrência.

O mónade *Dist* faz exatamente isso:

$$\text{newtype } \text{Dist } a = D \{ \text{unD} :: [(a, \text{ProbRep})] \}$$

- Cada *a* é um possível valor (no caso, uma mensagem ou palavra transmitida).
- Cada *ProbRep* é a probabilidade desse valor ocorrer (um número real entre 0 e 1, sendo a soma total das probabilidades 1).

*Dist* forma um mónade porque:

- Tem uma operação return:  $\text{return } a = D [(a, 1)]$ , que gera uma distribuição determinística com probabilidade 1.
- Tem uma composição de Kleisli (bind  $\gg$ ):

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g a, (y, q) \leftarrow f x],$$

onde

$$g :: A \rightarrow \text{Dist } B$$

e

$$f :: B \rightarrow \text{Dist } C$$

são funções que representam computações probabilísticas.

Esta definição permite combinar automaticamente as probabilidades de múltiplas etapas de cálculo. Por exemplo, ao percorrer uma lista de palavras, o mónade *Dist* calcula todas as combinações possíveis de palavras transmitidas e perdidas, multiplicando as probabilidades associadas a cada passo, sem necessidade de ciclos explícitos ou cálculos manuais.

Desta forma, alterações no comportamento do *gene* propagam-se corretamente por toda a lista, sendo suficiente ajustar apenas as probabilidades associadas a cada decisão.

### Uso de *gene*

O *gene* deverá descrever o comportamento local do aparelho de telegrafia. Para cada palavra, define quais são os resultados que podem ocorrer e com que probabilidades. Neste caso, deverá calcular o caso da perda de uma palavra ou o caso da perda da palavra final "stop".

Pode-se afirmar que o tipo do *gene* é:

$$gene :: () + (String, [String]) \rightarrow Dist [String]$$

Já que o uso do  $\cdot + \cdot$  permite separar de forma natural os dois casos distintos que surgem ao percorrer uma lista:

- **Lista vazia:** representada por  $i_1 ()$ . Este caso corresponde ao fim da lista, permitindo decidir probabilisticamente se a transmissão termina corretamente ou se ocorre a falha de envio de "stop".
- **Lista não vazia:** representada por  $i_2 (x, y)$ , onde  $x$  é a cabeça da lista (palavra atual) e  $y$  é o resultado já processado da cauda. Este caso permite combinar a palavra atual com todos os resultados possíveis da cauda, aplicando as regras probabilísticas definidas.

Desta forma, o *gene* consegue tratar de forma modular e uniforme tanto o caso base da lista, quanto a transmissão de cada palavra individual, sem que a função de percorrer a lista (*pcataList*) precise de conhecer detalhes do comportamento probabilístico como: as probabilidades definidas ou possíveis decisões probabilísticas complexas (por exemplo, múltiplas opções para cada palavra ou eventos condicionais).

### Uso de *pcataList*

O catamorfismo *pcataList* percorre a lista de palavras de forma recursiva, aplicando a função *gene* a cada passo. Esta abordagem permite separar a lógica de percorrer a lista, da lógica de transmissão probabilística, tornando o comportamento do aparelho mais fácil de modelar. Sabendo a declaração de *pcataList* (dada no enunciado):

$$pcataList :: (() + (a, b) \rightarrow Dist b) \rightarrow [a] \rightarrow Dist b$$

E que em listas, os catamorfismos devem ter em conta os casos de lista vazia e não vazia, é possível deduzir a definição de *pcataList* como sendo:

$$\begin{aligned} pcataList\ gene\ [] &= gene\ (i_1\ ()) \\ pcataList\ gene\ (x : xs) &= \mathbf{do} \\ &\quad y \leftarrow pcataList\ gene\ xs \\ &\quad gene\ (i_2\ (x, y)) \end{aligned}$$

Nesta definição:

- No caso da lista ser vazia, *gene* recebe  $i_1 ()$ , permitindo decidir probabilisticamente se o processo termina.
- No caso da lista não ser vazia, a cauda da lista é processada primeiro recursivamente, produzindo  $y$ , que é então combinado com a cabeça  $x$  através de  $gene\ (i_2\ (x, y))$ .

Para ilustrar o seu funcionamento, considere a mensagem:

["hi","hi again","bye"]

A aplicação de *pcataList gene* a esta lista é definida recursivamente, seguindo a estrutura do catamorfismo sobre listas. Os passos da execução, são:

- **Passo 1: lista completa ["hi","hi again","bye"]**

$$\begin{aligned} pcataList\ gene\ ["hi", "hi\ again", "bye"] &= \mathbf{do} \\ y &\leftarrow pcataList\ gene\ ["hi\ again", "bye"]; \\ gene\ (i_2\ ("hi", y)) \end{aligned}$$

O valor  $y$  representa uma distribuição de todos os resultados possíveis da cauda ["hi again","bye"].

- **Passo 2: cauda ["hi again","bye"]**

$$\begin{aligned} pcataList\ gene\ ["hi\ again", "bye"] &= \mathbf{do} \\ y_1 &\leftarrow pcataList\ gene\ ["bye"]; \\ gene\ (i_2\ ("hi\ again", y_1)) \end{aligned}$$

Cada resultado  $y_1$  da chamada à cauda anterior é combinado com "hi again" através do *gene*, propagando todas as combinações possíveis com as probabilidades corretas.

- **Passo 3: cauda ["bye"]**

$$\begin{aligned} pcataList\ gene\ ["bye"] &= \mathbf{do} \\ y_2 &\leftarrow pcataList\ gene\ []; \\ gene\ (i_2\ ("bye", y_2)) \end{aligned}$$

Cada resultado  $y_2$  do caso base é combinado com "bye" através do *gene*, multiplicando as probabilidades de cada etapa.

- **Passo 4: caso base []**

$$pcataList\ gene\ [] = gene\ (i_1\ ())$$

Produz a distribuição inicial que representa as possíveis terminações da mensagem, de acordo com o comportamento probabilístico do *gene*.

A partir deste caso base, o catamorfismo combina sucessivamente cada palavra com todos os resultados possíveis da sua cauda, multiplicando as probabilidades locais. Deste modo, o valor

$$pcataList\ gene\ ["hi", "hi\ again", "bye"]$$

corresponde a uma única distribuição final que contém todas as mensagens possíveis resultantes da transmissão, já com as probabilidades corretamente combinadas.

### Definição de *gene*

Depois de analisados os três componentes principais desta solução – o mónade *Dist*, o comportamento encapsulado pelo *gene* e o catamorfismo *pcataList* –, a definição do *gene* torna-se natural.

- Para o caso da lista ser vazia ( $i_1\ ()$ ), que corresponde ao fim da transmissão, podemos definir uma probabilidade de 90% de enviar corretamente a palavra final "stop" e de 10% de falhar.
- Para o caso da lista não ser vazia ( $i_2\ (x, y)$ ), cada palavra  $x$  tem uma probabilidade de 95% de ser transmitida, enquanto que os restantes 5% representam a perda da palavra.

Assim, fica-se com:

$$\begin{aligned}
gene &:: () \rightarrow (String, [String]) \rightarrow \text{Dist } [String] \\
gene \ (i_1 \ ()) &= D \ [(["stop"], 0.9), ([], 0.1)] \\
gene \ (i_2 \ (x, ys)) &= D \ [(x : ys, 0.95), (ys, 0.05)]
\end{aligned}$$

### Cálculo das soluções

Tendo *gene* definido, basta correr no interpretador *transmitir* ["Vamos", "atacar", "hoje"] para calcular as probabilidades de todas as possíveis frases transmitidas. Fazendo isso, obtêve-se:

Mensagem transmitida	Probabilidade
["Vamos", "atacar", "hoje", "stop"]	77.2%
["Vamos", "atacar", "hoje"]	8.6%
["Vamos", "atacar", "stop"]	4.1%
["Vamos", "hoje", "stop"]	4.1%
["atacar", "hoje", "stop"]	4.1%
["Vamos", "atacar"]	0.5%
["Vamos", "hoje"]	0.5%
["atacar", "hoje"]	0.5%
["Vamos", "stop"]	0.2%
["atacar", "stop"]	0.2%
["hoje", "stop"]	0.2%
["atacar"]	0.0%
["hoje"]	0.0%
["Vamos"]	0.0%
["stop"]	0.0%
[]	0.0%

Assim, observando os resultados obtidos, é possível responder às questões propostas:

- Qual a probabilidade da palavra "atacar" da mensagem se perder? **É de 4.1%.**
- Qual a probabilidade de seguirem todas as palavras, mas faltar o "stop"? **É de 8.6%.**
- Qual a probabilidade da transmissão ser perfeita? **É de 77.2%.**

# Index

$\LaTeX$ , [5](#), [6](#)

**bibtex**, [6](#)

**lhs2TeX**, [5](#), [6](#)

**makeindex**, [6](#)

**pdflatex**, [5](#)

**xymatrix**, [7](#)

Combinador “pointfree”

*ana*, [3](#)

*cata*

    Naturais, [7](#)

*either*, [3](#), [4](#)

*split*, [6](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [4](#)

  Material Pedagógico, [5](#)

  List.hs, [4](#)

Docker, [5](#)

  container, [5](#), [6](#)

Functor, [3](#), [7](#), [8](#)

Função

$\pi_1$ , [7](#)

$\pi_2$ , [7](#)

Haskell, [1](#), [5](#), [6](#)

  Biblioteca

    PFP, [8](#)

    Probability, [7](#), [8](#)

  interpretador

    GHCi, [5–7](#)

  Lazy evaluation, [3](#)

  Literate Haskell, [5](#)

Números naturais ( $\mathbb{N}$ ), [7](#)

Programação

  literária, [5](#), [6](#)

## References

- [1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [2] Chris Okasaki. Breadth-first numbering: lessons from a small exercise in algorithm design. In Martin Odersky and Philip Wadler, editors, *Proceedings of the Fifth ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP '00), Montreal, Canada, September 18-21, 2000*, pages 131–136. ACM, 2000.
- [3] J.N. Oliveira. Program Design by Calculation, 2024. Draft of textbook in preparation. First version: 1998. Current version: Sep. 2024. Informatics Department, University of Minho ([pdf](#)).