

**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

## **Cálculo de Programas**

### Trabalho Prático (2025/26)

Lic. em Ciências da Computação  
Lic. em Engenharia Informática

#### **Grupo G05**

a106936 Duarte Escairo  
a106932 Luís Soares  
a106856 Tiago Figueiredo

## Preâmbulo

Em [Cálculo de Programas](#) pretende-se ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em [Haskell](#) (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em [Haskell](#). Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo [A](#) onde encontrarão as instruções relativas ao *software* a instalar, etc.

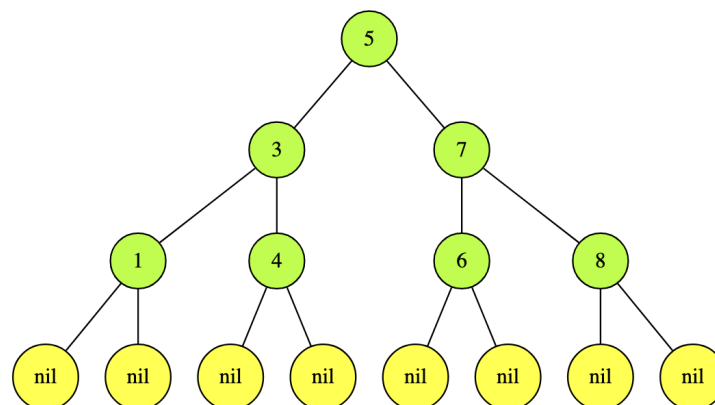
Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

**Avaliação.** Faz parte da avaliação do trabalho a sua defesa por parte dos elementos de cada grupo. Estes devem estar preparados para responder a perguntas sobre *qualquer* dos problemas deste enunciado. A prestação *individual* de cada aluno nessa defesa oral será uma componente importante e diferenciadora da avaliação.

## Problema 1

Uma serialização (ou travessia) de uma árvore é uma sua representação sob a forma de uma lista. Na biblioteca *BTree* encontram-se as funções de serialização *inordt*, *preordt* e *postordt*, que fazem as travessias *in-order*, *pre-order* e *post-order*, respectivamente. Todas essas travessias são catamorfismos que percorrem a árvore argumento em regime *depth-first*.

Pretende-se agora uma função *bfordr* que faça a travessia em regime *breadth-first*, isto é, por níveis. Por exemplo, para a árvore  $t_1$  dada em anexo e mostrada na figura a seguir,



a função deverá dar a lista

[5, 3, 7, 1, 4, 6, 8]

em que se vê como os níveis 5, depois 3, 7 e finalmente 1, 4, 6, 8 foram percorridos.

Pretendemos propor duas versões dessa função:

1. Uma delas envolve um catamorfismo de *BTrees*:

$$\begin{aligned} \text{bfsLevels} &:: \text{BTree } a \rightarrow [a] \\ \text{bfsLevels} &= \text{concat} \cdot \text{levels} \end{aligned}$$

Complete a definição desse catamorfismo:

$$\begin{aligned} \text{levels} &:: \text{BTree } a \rightarrow [[a]] \\ \text{levels} &= \llbracket \text{glevels} \rrbracket \end{aligned}$$

2. A segunda proposta,

$$\text{bft} :: \text{BTree } a \rightarrow [a]$$

deverá basear-se num anamorfismo de listas.

**Sugestão:** estudar o artigo [2] cujo PDF está incluído no material deste trabalho. Quando fizer testes ao seu código pode, se desejar, usar funções disponíveis na biblioteca *Exp* para visualizar as árvores em GraphViz (formato .dot).

Justifique devidamente a sua resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos. Como já se disse, valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

## Problema 2

Considere a seguinte função em Haskell:

```
f x = wrapper · worker where
  wrapper = head
  worker 0 = start x
  worker (n + 1) = loop x (worker n)
  loop x [s, h, k, j, m] =
    [h / k + s, x ↑ 2 * h, k * j, j + m, m + 8]
  start x = [x, x ↑ 3, 6, 20, 22]
```

Pode-se provar pela lei de recursividade mútua que  $f\ x\ n$  calcula o seno hiperbólico de  $x$ ,  $\sinh x$ , para  $n$  aproximações da sua série de Taylor. Faça a derivação da função dada a partir da referida série de Taylor, apresentando todos os cálculos justificativos, tal como se faz para outras funções no capítulo respectivo do texto base desta UC [3].

## Problema 3

Quem em Braga observar, ao fim da tarde, o tráfego onde a Avenida Clairmont Fernand se junta à N101, aproximadamente na coordenada [41°33'46.8"N 8°24'32.4"W](#) — ver as setas da figura que se segue — reparará nas sequências imparáveis (infinitas!) de veículos provenientes dessas vias de circulação.

Mas também irá observar um comportamento interessante por parte dos condutores desses veículos: por regra, *cada carro numa via deixa passar, à sua frente, exactamente outro carro da outra via*.



Este comportamento *civilizado* chama-se *fair-merge* (ou *fair-interleaving*) de duas sequências infinitas, também designadas *streams* em ciência da computação. Seja dado o tipo dessas sequências em Haskell,

**data** *Stream* *a* = *Cons* (*a*, *Stream* *a*) **deriving** *Show*

para o qual se define também:

*out* (*Cons* (*x*, *xs*)) = (*x*, *xs*)

O referido comportamento civilizado pode definir-se, em Haskell, da forma seguinte:<sup>1</sup>

```
fair_merge :: (Stream a, Stream a) + (Stream a, Stream a) → Stream a
fair_merge = [h, k] where
  h (Cons (x, xs), y) = Cons (x, k (xs, y))
  k (x, Cons (y, ys)) = Cons (y, h (x, ys))
```

Defina *fair\_merge* como um **anamorfismo** de *Streams*, usando o combinador

$\llbracket g \rrbracket = \text{Cons} \cdot (\text{id} \times \llbracket g \rrbracket) \cdot g$

e a seguinte estratégia:

- Derivar a lei **dual** da recursividade mútua,

$$[f, g] = \llbracket [h, k] \rrbracket \equiv \begin{cases} \text{out} \cdot f = F [f, g] \cdot h \\ \text{out} \cdot g = F [f, g] \cdot k \end{cases} \quad (1)$$

tal como se fez, nas aulas, para a que está no formulário.

- Usar (1) na resolução do problema proposto.

Justificar devidamente a resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos.

## Problema 4

Como se sabe, é possível pensarmos em catamorfismos, anamorfismos etc *probabilísticos*, quer dizer, programas recursivos que dão distribuições como resultados. Por exemplo, podemos pensar num combinador

*pcataList* :: (( ) + (*a*, *b*) → *Dist* *b*) → [*a*] → *Dist* *b*

<sup>1</sup> O facto das sequências serem infinitas não nos deve preocupar, pois em Haskell isso é lidado de forma transparente por [lazy evaluation](#).

que é muito parecido com

$$(\cdot) :: () \rightarrow (a, b) \rightarrow b \rightarrow [a] \rightarrow b$$

da biblioteca [List](#). A principal diferença é que o gene de *pcataList* é uma função probabilística.

Como exemplo de utilização, recorde-se que  $(\text{[zero, add]})$  soma todos os elementos da lista argumento, por exemplo:

$$(\text{[zero, add]}) [20, 10, 5] = 35.$$

Considere-se agora a função *padd* (adição probabilística) que, com probabilidade 90% soma dois números e com probabilidade 10% os subtrai:

$$\text{padd } (a, b) = D [(a + b, 0.9), (a - b, 0.1)]$$

Se se correr

$$d4 = \text{pcataList } [\text{pzero, padd}] [20, 10, 5] \text{ where } \text{pzero} = \text{return} \cdot \text{zero}$$

obter-se-á:

```
35  81.0%
25   9.0%
 5   9.0%
15   1.0%
```

Com base neste exemplo, resolva o seguinte

**Problema:** Uma unidade militar pretende enviar uma mensagem urgente a outra, mas tem o aparelho de telegrafia meio avariado. Por experiência, o telegrafista sabe que a probabilidade de uma palavra se perder (não ser transmitida) é 5%; e que, no final de cada mensagem, o aparelho envia o código "stop", mas (por estar meio avariado), falha 10% das vezes.

Qual a probabilidade de a palavra "atacar" da mensagem

`words "Vamos atacar hoje"`

se perder, isto é, o resultado da transmissão ser ["Vamos", "hoje", "stop"]? E a de seguirem todas as palavras, mas faltar o "stop" no fim? E a da transmissão ser perfeita?

Responda a estas perguntas encontrando *gene* tal que

`transmitir = pcataList gene`

descreve o comportamento do aparelho. Justificar devidamente a resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos.

## Anexos

### A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na internet.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

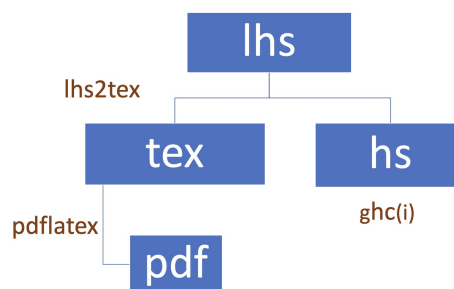
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita “literária” [1], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2526t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp2526t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2526t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código **Haskell** que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do **GHCI**, serão necessários os executáveis **pdflatex** e **lhs2TeX**. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do **Docker** tal como a seguir se descreve.

## B Docker

Recomenda-se o uso do **container** cuja imagem é gerada pelo **Docker** a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2526t.zip`. Este **container** deverá ser usado na execução do **GHCI** e dos comandos relativos ao **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

Após **instalar o Docker** e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2526t .  
$ docker run -v ${PWD}:/cp2526t -it cp2526t
```

**NB:** O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o **GHCI** e os comandos relativos ao **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2526t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2526t` no **container** sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no **container**, executando:

---

<sup>1</sup> O sufixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

```
$ lhs2TeX cp2526t.lhs > cp2526t.tex
$ pdflatex cp2526t
```

[lhs2TeX](#) é o pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#) e que faz parte já do [container](#). Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2526t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em [Haskell](#), para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2526t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2526t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo [GHCi](#) para ser executado.

## C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo [G](#) com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com [BibT<sub>E</sub>X](#)) e o índice remissivo (com [makeindex](#)),

```
$ bibtex cp2526t.aux
$ makeindex cp2526t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no [container](#).)

No anexo [F](#) disponibiliza-se algum código [Haskell](#) relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da [programação literária](#) para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo [D](#) que se segue.

## D Como exprimir cálculos e diagramas em L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte ([lhs](#)) do que está a ler<sup>1</sup> onde se obtém o efeito seguinte:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} id &= \langle f, g \rangle \\ \equiv \quad &\{ \text{universal property} \} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Procure e.g. por "sec:diagramas".

<sup>2</sup> Exemplos tirados de [\[3\]](#).

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{identity} \} \\
& \begin{cases} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{cases} \\
& \square
\end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* [xymatrix](#), por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
\downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
B & \xleftarrow{g} & 1 + B
\end{array}$$

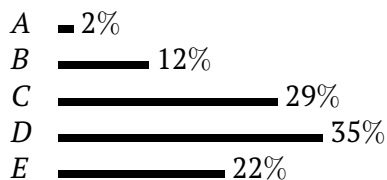
## E O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são funtores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca [Probability](#) oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\text{newtype Dist } a = D \{ unD :: [(a, ProbRep)] \} \quad (2)$$

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par  $(a, p)$  numa distribuição  $d :: \text{Dist } a$  indica que a probabilidade de  $a$  é  $p$ , devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de  $d$  somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de  $A$  a  $E$ ,



será representada pela distribuição

$$\begin{aligned}
d1 &:: \text{Dist Char} \\
d1 &= D [ ('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22) ]
\end{aligned}$$

que o [GHCi](#) mostrará assim:

```

'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%

```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = \text{uniform} (\text{words "Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é



```

"Uma"    20.0%
"cinco"  20.0%
"de"     20.0%
"frase"  20.0%
"palavras" 20.0%

```

distribuição *normais*, eg.

```
d3 = normal [10..20]
```

etc.<sup>1</sup> Dist forma um **mónade** cuja unidade é  $\text{return } a = D [(a, 1)]$  e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g a, (y, q) \leftarrow f x]$$

em que  $g : A \rightarrow \text{Dist } B$  e  $f : B \rightarrow \text{Dist } C$  são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

## F Código fornecido

### Problema 1

Árvores exemplo:

```

t1 :: BTree Int
t1 = Node (5, (Node (3, (Node (1, (Empty, Empty)), Node (4, (Empty, Empty)))),
  Node (7, (Node (6, (Empty, Empty)), Node (8, (Empty, Empty)))))
t2 :: BTree Int
t2 =
  node 1
    (node 2 (node 4 Empty Empty) (node 5 Empty Empty))
    (node 3 (node 6 Empty Empty) (node 7 Empty Empty))
t3 :: BTree Char
t3 =
  node 'A'
    (node 'B' (node 'C' (node 'D' Empty Empty) Empty) Empty)
    (node 'E' Empty Empty)
t4 :: BTree Char
t4 =
  node 'A'
    (node 'B' (node 'C' (node 'D' Empty Empty) Empty) Empty)
    Empty
t5 :: BTree Int
t5 =
  node 1

```

<sup>1</sup> Para mais detalhes ver o código fonte de [Probability](#), que é uma adaptação da biblioteca [PFP](#) ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

$(node\ 2\ (node\ 4\ Empty\ Empty)\ Empty)$   
 $(node\ 3\ Empty\ (node\ 5\ (node\ 6\ Empty\ Empty)\ Empty))$   
 $node\ a\ b\ c = Node\ (a,\ (b,\ c))$

## G Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

**Importante:** Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

### Problema 1

#### Catamorfismo

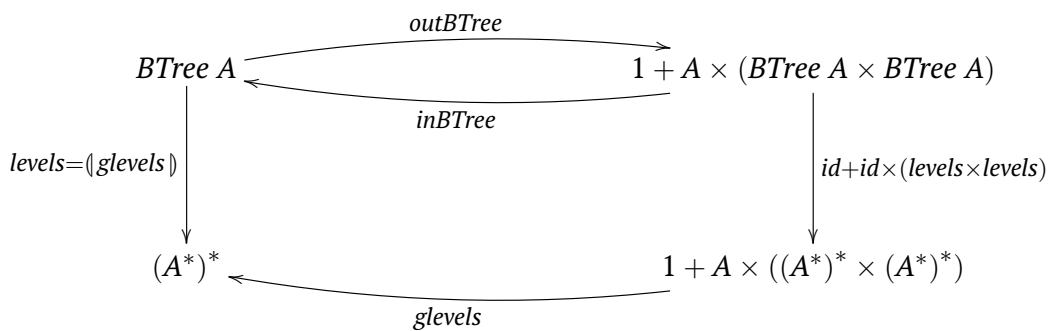
Na primeira versão proposta para a resolução do **Problema 1**, pretende-se usar um catamorfismo de *BTrees* para se fazer a travessia *in-order* em regime *breadth-first*.

Se repararmos, o resultado de aplicarmos a função *levels* a uma *BTree* é uma lista de listas, onde cada uma dessas listas internas corresponde aos valores dos nós de um nível da árvore. Ou seja, a aplicação de *levels* à árvore  $t_1$ , por exemplo, resulta na lista de listas:

$[[5], [3, 7], [1, 4, 6, 8]]$

Para depois obter a travessia *bford*, basta concatenar todas as listas internas, o que é feito na função *bfsLevels* com recurso à função *concat*.

O desafio aqui está em encontrar o gene (*glevels*) do catamorfismo *levels*. Para começar, podemos representar esse catamorfismo através do seguinte diagrama:



A partir deste diagrama, percebemos que o gene do catamorfismo deverá, para obter a tal lista de listas, colocar o valor da raiz no início da lista final, seguido das listas dos níveis das subárvores esquerda e direita. Contudo essas listas dos níveis das subárvores estão também organizadas por níveis, ou seja, a primeira lista corresponde ao nível 1, a segunda ao nível 2, etc. No caso da árvore  $t_1$ , por exemplo, a aplicação de *levels* às subárvores esquerda e direita de  $t_1$  resulta, respectivamente, nas listas de listas:

$[[3], [1, 4]]$  e  $[[7], [6, 8]]$

Neste caso o passo final seria juntar as listas dos níveis das subárvores esquerda e direita, e colocar o valor da raiz 5 ([5]) no início da lista final. Para juntar as listas dos níveis das subárvores esquerda e direita, podemos definir a seguinte função auxiliar:

```

juntaListas :: ([[a]], [[a]]) → [[a]]
juntaListas (l, []) = l
juntaListas ([], r) = r
juntaListas ((a : as), (b : bs)) = (a ++ b) : juntaListas (as, bs)

```

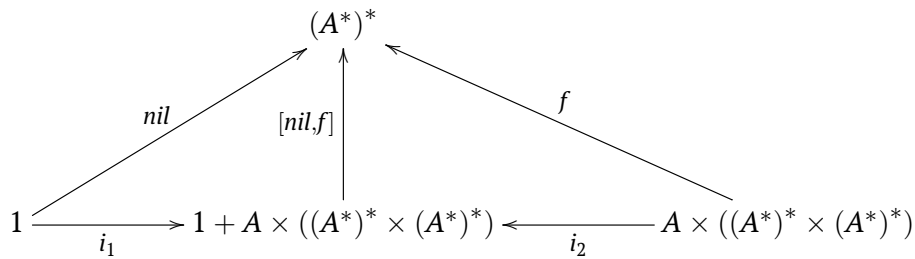
Para o exemplo da árvore  $t_1$ , a aplicação de *juntaListas* às listas de listas

$[[3], [1, 4]]$  e  $[[7], [6, 8]]$

resulta na lista de listas:

$[[3, 7], [1, 4, 6, 8]]$

Assim sendo, o comportamento do gene *glevels* pode ser representado por este diagrama:



E o código que define o gene *glevels* é o seguinte:

```

glevels :: () + (a, ([[a]], [[a]])) → [[a]]
glevels = [nil, f]
where f (a, (l, r)) = [a] : juntaListas (l, r)

```

Tal como descrito anteriormente, *f* coloca o valor da raiz à cabeça da lista, seguido da concatenação das listas dos níveis das subárvores esquerda e direita, com a função *juntaListas*.

Se quisermos definir *glevels* numa versão completamente *pointfree*, podemos esquematizar o lado direito da solução desta forma:

$$\begin{array}{c}
A \times ((A^*)^* \times (A^*)^*) \\
\downarrow \text{singl} \times \text{juntaListas} \\
A^* \times (A^*)^* \\
\downarrow \text{cons} \\
(A^*)^*
\end{array}$$

Logo a definição *pointfree* de *glevels* é a seguinte:

$\text{glevels}' = [\text{nil}, \text{cons} \cdot (\text{singl} \times \text{juntaListas})]$

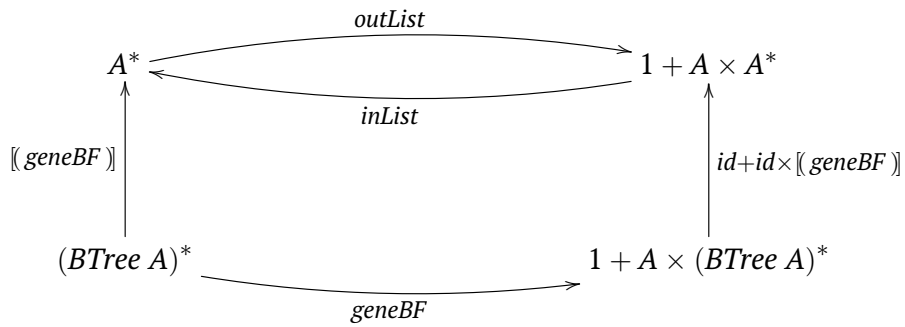
## Anamorfismo

Na segunda versão proposta para a resolução do **Problema 1**, pretende-se usar um anamorfismo de listas para se fazer a travessia *in-order* em regime *breadth-first*.

Com o estudo do artigo [2], percebemos que é possível fazer a travessia *breadth-first* em *BTrees* usando uma floresta para representar os nós a visitar (neste caso uma floresta é uma lista de *BTrees*).

A ideia do algoritmo é visitar os nós da floresta, retirando o valor do nó da frente da lista, adicionando o seu valor à lista resultado (caso não seja *Empty*) e adicionando à floresta os filhos esquerdo e direito do nó visitado (caso não seja *Empty*), mas colocando-os no final da lista. Este processo repete-se até que a floresta esteja vazia.

Para representar este algoritmo como um anamorfismo, começamos por desenhar o seguinte diagrama:



Contudo, como referido anteriormente, o algoritmo usa uma floresta (lista de *BTrees*), e não um *BTree*, que é o input da função *bft*. Desta forma é necessário garantir que a *BTree* argumento seja convertida numa floresta, para poder ser usada no anamorfismo. Para isso, usamos a função *singl*, que transforma uma *BTree* numa floresta com apenas essa *BTree* (lista com apenas um elemento).

$$BTree\ A \xrightarrow{singl} (BTree\ A)^*$$

Assim sendo, a função *bft* é definida como a composição do anamorfismo  $[[geneBF]]$  com a função *singl*, como se mostra a seguir:

$$bft = [[geneBF]] \cdot singl$$

Para o gene do anamorfismo, o comportamento é o já anteriormente descrito, ou seja, visitar os nós da floresta, retirando o valor do nó da frente da lista, e devolvendo um par com o valor do nó e a floresta a visitar. Na floresta a visitar, já estarão adicionados os filhos esquerdo e direito do nó visitado (caso não seja *Empty*), colocados no final da lista. O anamorfismo repete este processo até que a floresta esteja vazia.

$$\begin{aligned} geneBF &:: [BTree\ a] \rightarrow () + (a, [BTree\ a]) \\ geneBF\ [] &= i_1\ () \\ geneBF\ (Empty : t) &= geneBF\ t \\ geneBF\ (Node\ (a, (l, r)) : t) &= i_2\ (a, t ++ [l, r]) \end{aligned}$$

## Problema 2

No **Problema 2**,

### Problema 3

No **Problema 3**, pretende-se definir a função *fair\_merge* como um anamorfismo de *Streams*. Esta estratégia de *merging* permite que os elementos das duas *Streams* sejam intercalados de forma justa, ou seja, cada elemento de uma *Stream* é seguido por um elemento da outra *Stream*.

Tal como pedido no enunciado, vamos começar por derivar a lei dual da recursividade mútua.

$$\begin{aligned}
 [f, g] &= \llbracket [h, k] \rrbracket \\
 &\equiv \{ \text{Universal-ana} \} \\
 \text{out} \cdot [f, g] &= F [f, g] \cdot [h, k] \\
 &\equiv \{ \text{Fusão-} + (2x) \} \\
 [\text{out} \cdot f, \text{out} \cdot g] &= [F [f, g] \cdot h, F [f, g] \cdot k] \\
 &\equiv \{ \text{Eq-} + \} \\
 &\quad \begin{cases} \text{out} \cdot f = F [f, g] \cdot h \\ \text{out} \cdot g = F [f, g] \cdot k \end{cases} \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Fica então demonstrada a lei dual da recursividade mútua.

A partir da definição do tipo *Stream* e da função *out*, é possível deduzir que o functor *F* associado a *Stream* é o seguinte,

$$\begin{aligned}
 F X &= A \times X \\
 F g &= \text{id} \times g
 \end{aligned}$$

já que uma *Stream A* é decomposta num par com o primeiro elemento de um tipo qualquer *A* e o resto da *Stream A*.

Tendo isto em conta, e sabendo que a função *fair\_merge'* que queremos definir como um anamorfismo de *Streams* é do tipo

$$\text{fair\_merge}' :: (\text{Stream } a, \text{Stream } a) + (\text{Stream } a, \text{Stream } a) \rightarrow \text{Stream } a$$

podemos representar o anamorfismo *fair\_merge'* através do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Stream } A & \xrightarrow{\text{out}} & A \times \text{Stream } A \\
 \uparrow \llbracket \text{geneFM} \rrbracket & & \uparrow F \llbracket \text{geneFM} \rrbracket = \text{id} \times \llbracket \text{geneFM} \rrbracket \\
 (\text{Stream } A \times \text{Stream } A) + (\text{Stream } A \times \text{Stream } A) & \xrightarrow{\text{geneFM}} & A \times ((\text{Stream } A \times \text{Stream } A) + (\text{Stream } A \times \text{Stream } A))
 \end{array}$$

Com a análise deste diagrama, e do comportamento da função *fair\_merge* definida de forma mutuamente recursiva na formulação do problema neste enunciado

$fair\_merge :: (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a) \rightarrow Stream\ a$   
 $fair\_merge = [h, k]$  **where**  
 $h\ (Cons\ (x, xs), y) = Cons\ (x, k\ (xs, y))$   
 $k\ (x, Cons\ (y, ys)) = Cons\ (y, h\ (x, ys))$

conseguimos definir  $fair\_merge'$  como um anamorfismo de *Streams*

$$fair\_merge' = \llbracket geneFM \rrbracket$$

onde o gene  $geneFM$  é definido como:

$geneFM :: (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a) \rightarrow (a, (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a))$   
 $geneFM\ (i_1\ (Cons\ (x, xs), y)) = (x, i_2\ (xs, y))$   
 $geneFM\ (i_2\ (x, Cons\ (y, ys))) = (y, i_1\ (x, ys))$

Para comprovar este resultado, podemos utilizar a lei dual da recursividade mútua que foi demonstrada anteriormente. Seja  $fair\_merge$  dada por:

$$fair\_merge = [h, k]$$

E querendo demonstrar que  $fair\_merge = \llbracket geneFM \rrbracket$ , onde  $geneFM$  pode ser decomposto em:

$$geneFM = [g1, g2]$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
& [h, k] = \llbracket geneFM \rrbracket \\
& \equiv \quad \{ \text{Lei dual da recursividade mútua} \} \\
& \quad \left\{ \begin{array}{l} out \cdot h = (id \times [h, k]) \cdot g1 \\ out \cdot k = (id \times [h, k]) \cdot g2 \end{array} \right. \\
& \square
\end{aligned}$$

Para que estas equações sejam verdadeiras, é necessário encontrar  $g1$  e  $g2$  tais que as igualdades se verifiquem.

Vamos definir  $g1$  e  $g2$  como:

$g1\ (Cons\ (x, xs), y) = (x, i_2\ (xs, y))$   
 $g2\ (x, Cons\ (y, ys)) = (y, i_1\ (x, ys))$

Para a primeira equação, temos:

$$\begin{aligned}
& \equiv \quad \{ \text{Igualdade extensional} \} \\
& \quad out \cdot h\ (Cons\ (x, xs), y) \\
& \equiv \quad \{ \text{Def-comp} \} \\
& \quad out\ (h\ (Cons\ (x, xs), y)) \\
& \equiv \quad \{ \text{Def-h} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{out } (\text{Cons } (x, k \ (xs, y))) \\
\equiv & \quad \{ \text{Def-out} \} \\
& (x, k \ (xs, y)) \\
\equiv & \quad \{ \text{Def-x, Cancelamento-+} \} \\
& (id \times [h, k]) \ (x, i_2 \ (xs, y)) \\
\equiv & \quad \{ \text{Def-g1} \} \\
& (id \times [h, k]) \cdot g1 \ (\text{Cons } (x, xs), y) \\
& \square
\end{aligned}$$

O mesmo aplica-se para a segunda equação:

$$\begin{aligned}
& \equiv \quad \{ \text{Igualdade extensional} \} \\
& \text{out} \cdot k \ (x, \text{Cons } (y, ys)) \\
\equiv & \quad \{ \text{Def-comp} \} \\
& \text{out } (k \ (x, \text{Cons } (y, ys))) \\
\equiv & \quad \{ \text{Def-k} \} \\
& \text{out } (\text{Cons } (y, h \ (x, ys))) \\
\equiv & \quad \{ \text{Def-out} \} \\
& (y, h \ (x, ys)) \\
\equiv & \quad \{ \text{Def-x, Cancelamento-+} \} \\
& (id \times [h, k]) \ (y, i_1 \ (x, ys)) \\
\equiv & \quad \{ \text{Def-g2} \} \\
& (id \times [h, k]) \cdot g2 \ (x, \text{Cons } (y, ys)) \\
& \square
\end{aligned}$$

Com isto fica demonstrado que *fair\_merge* se pode definir como um anamorfismo de *Streams*, ou seja,  $\text{fair\_merge} = \llbracket \text{geneFM} \rrbracket$ , para o *geneFM* definido como  $[g1, g2]$ .

Para testar a função *fair\_merge'*, definimos a seguinte função auxiliar *takeStream* que permite extrair os primeiros *n* elementos de uma *Stream* e devolvê-los como uma lista.

```

takeStream :: Int → Stream a → [a]
takeStream 0 _ = []
takeStream n (Cons (x, xs)) = x : takeStream (n - 1) xs

```

Definimos também as seguintes *Streams* de exemplo:

```

s1 :: Stream Int
s1 = Cons (1, Cons (3, Cons (5, Cons (7, Cons (9, s1)))))
s2 :: Stream Int
s2 = Cons (2, Cons (4, Cons (6, Cons (8, Cons (10, s2)))))

```

A aplicação de *takeStream* 10 (*fair\_merge'* (*i*<sub>1</sub> (*s1*, *s2*))) resulta na lista:

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

refletindo a intercalação justa dos elementos das duas *Streams*, começando pela primeira.

A aplicação de *takeStream 10 (fair\_merge' (i2 (s1, s2)))* resulta na lista:

[2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9]

refletindo a intercalação justa dos elementos das duas *Streams*, começando pela segunda.

## Problema 4

### Introdução

De uma forma simples, o objetivo deste problema é desenhar uma função *transmitir* que descreve o comportamento de um aparelho de telegrafia avariado. Esse aparelho tenta transmitir uma mensagem palavra a palavra, mas pode falhar de forma aleatória: cada palavra pode perder-se durante a transmissão e, no final da mensagem, o envio do código "stop" também pode falhar.

Pretende-se que a função *transmitir* modele corretamente estas falhas, produzindo todas as mensagens possíveis, cada uma associada à respetiva probabilidade. Para tal, recorre-se a um catamorfismo probabilístico sobre listas, *pcataList*, cujo resultado é uma distribuição de probabilidades, representada pelo mónade *Dist*.

O comportamento local do aparelho é descrito por um *gene*, que define as decisões probabilísticas a tomar em cada passo da transmissão. A função *transmitir = pcataList gene* separa, assim, o mecanismo genérico de percorrer a lista, do comportamento específico do aparelho.

Antes de apresentar a solução completa, achamos útil analisar cada componente que será usado para que, de seguida, a solução para o problema proposto seja mais fácil de perceber.

### Uso de *Dist*

Para este problema, é necessário modelar a transmissão de mensagens, em que cada palavra pode falhar de forma aleatória. Para isso, precisamos de uma forma de representar todas as mensagens possíveis e associar a cada uma a sua probabilidade de ocorrência.

O mónade *Dist* faz exatamente isso:

**newtype** *Dist a* = *D* { *unD* :: [(*a*, *ProbRep*)] }

- Cada *a* é um possível valor (no caso, uma mensagem ou palavra transmitida).
- Cada *ProbRep* é a probabilidade desse valor ocorrer (um número real entre 0 e 1, sendo a soma total das probabilidades 1).

*Dist* forma um mónade porque:

- Tem uma operação *return*: *return a = D [(a, 1)]*, que gera uma distribuição determinística com probabilidade 1.
- Tem uma composição de Kleisli (*bind* «=»):  $(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g a, (y, q) \leftarrow f x]$ , onde

$g :: A \rightarrow \text{Dist } B$

e

$f :: B \rightarrow \text{Dist } C$

são funções que representam computações probabilísticas.



Esta definição permite combinar automaticamente as probabilidades de múltiplas etapas de cálculo. Por exemplo, ao percorrer uma lista de palavras, o mónade *Dist* calcula todas as combinações possíveis de palavras transmitidas e perdidas, multiplicando as probabilidades associadas a cada passo, sem necessidade de ciclos explícitos ou cálculos manuais.

Desta forma, alterações no comportamento do *gene* propagam-se corretamente por toda a lista, sendo suficiente ajustar apenas as probabilidades associadas a cada decisão.

### Uso de *gene*

O *gene* deverá descrever o comportamento local do aparelho de telegrafia. Para cada palavra, define quais são os resultados que podem ocorrer e com que probabilidades. Neste caso, deverá calcular o caso da perda de uma palavra ou o caso da perda da palavra final "stop".

Pode-se afirmar que o tipo do *gene* é:

$$gene :: () + (String, [String]) \rightarrow Dist [String]$$

já que o uso do  $\cdot + \cdot$  permite separar de forma natural os dois casos distintos que surgem ao percorrer uma lista:

- **Lista vazia:** representada por  $i_1 ()$ . Este caso corresponde ao fim da lista, permitindo decidir probabilisticamente se a transmissão termina corretamente ou se ocorre a falha de envio de "stop".
- **Lista não vazia:** representada por  $i_2 (x, y)$ , onde  $x$  é a cabeça da lista (palavra atual) e  $y$  é o resultado já processado da cauda. Este caso permite combinar a palavra atual com todos os resultados possíveis da cauda, aplicando as regras probabilísticas definidas.

Desta forma, o *gene* consegue tratar de forma modular e uniforme tanto o caso base da lista, quanto a transmissão de cada palavra individual, sem que a função de percorrer a lista (*pcataList*) precise de conhecer detalhes do comportamento probabilístico como: as probabilidades definidas ou possíveis decisões probabilísticas complexas (por exemplo, múltiplas opções para cada palavra ou eventos condicionais).

### Uso de *pcataList*

O catamorfismo *pcataList* percorre a lista de palavras de forma recursiva, aplicando a função *gene* a cada passo. Esta abordagem permite separar a lógica de percorrer a lista, da lógica de transmissão probabilística, tornando o comportamento do aparelho mais fácil de modelar. Sabendo a declaração de *pcataList* (dada no enunciado):

$$pcataList :: (() + (a, b) \rightarrow Dist b) \rightarrow [a] \rightarrow Dist b$$

E embora a sua definição de não seja dada explicitamente, o seu comportamento pode ser compreendido observando a analogia direta com o catamorfismo determinístico  $\llbracket \cdot \rrbracket$ .

Como:

$$\llbracket g \rrbracket = g \cdot recList \llbracket g \rrbracket \cdot outList$$

*outList* desconstrói a lista (vazia ou cabeça+cauda) e *recList* aplica recursivamente o catamorfismo à cauda. No caso determinístico, cada passo devolve apenas um valor, que é então combinado por  $g$ .

No caso probabilístico, *pcataList* funciona de forma análoga, mas cada chamada recursiva produz uma distribuição de resultados, em vez de um único valor. Assim:

- Caso base: a lista é vazia, não há valores intermédios a combinar, e o resultado é obtido aplicando diretamente o *gene* a `Left ()`.
- Caso recursivo: a chamada *pcataList gene xs* devolve uma distribuição de resultados da cauda. Cada valor desta distribuição deve ser processado pelo *gene* novamente, combinando as probabilidades corretamente.

Esta combinação de resultados intermédios segue exatamente o padrão de composição monádica, pelo que é necessário usar a operação  $\gg=$  do mónade `Dist`. O *bind* permite propagar automaticamente as probabilidades de cada passo, replicando o comportamento de  $(\cdot)$  num contexto probabilístico. Aplicando este raciocínio ao caso base e ao caso recursivo, obtemos a definição de *pcataList*:

```
pcataList gene [] = gene (i1 ())
pcataList gene (x : xs) = do
  y ← pcataList gene xs
  gene (i2 (x, y))
```

Que pode ser expandida removendo a notação 'do' e usando o operador *bind* diretamente:

```
pcataList gene [] = gene (i1 ())
pcataList gene (x : xs) =
  pcataList gene xs >>= \y →
  gene (i2 (x, y))
```

Em ambas as definições:

- No caso da lista ser vazia, *gene* recebe *i<sub>1</sub> ()*, permitindo decidir probabilisticamente se o processo termina.
- No caso da lista não ser vazia, a cauda da lista é processada primeiro de forma recursiva, produzindo *y*, que representa todas as distribuições intermédias da cauda. Cada um desses resultados é então combinado com a cabeça *x* através de *gene (i<sub>2</sub> (x, y))*, propagando corretamente as probabilidades de cada passo.

Para ilustrar o seu funcionamento, considere a mensagem:

```
["hi","hi again","bye"]
```

A aplicação de *pcataList gene* a esta lista é definida recursivamente, seguindo a estrutura do catamorfismo sobre listas. Os passos da execução, são:

- **Passo 1: lista completa ["hi","hi again","bye"]**

```
pcataList gene ["hi", "hi again", "bye"] = do
  y ← pcataList gene ["hi again", "bye"];
  gene (i2 ("hi", y))
```

O valor *y* representa uma distribuição de todos os resultados possíveis da cauda ["hi again","bye"].

- **Passo 2: cauda ["hi again","bye"]**

```
pcataList gene ["hi again", "bye"] = do
  y1 ← pcataList gene ["bye"];
  gene (i2 ("hi again", y1))
```

Cada resultado *y<sub>1</sub>* da chamada à cauda anterior é combinado com "hi again" através do *gene*, propagando todas as combinações possíveis com as probabilidades corretas.

- **Passo 3: cauda ["bye"]**

```
pcataList gene ["bye"] = do
  y2 ← pcataList gene [];
  gene (i2 ("bye", y2))
```

Cada resultado  $y_2$  do caso base é combinado com "bye" através do *gene*, multiplicando as probabilidades de cada etapa.

- **Passo 4: caso base []**

```
pcataList gene [] = gene (i1 ())
```

Produz a distribuição inicial que representa as possíveis terminações da mensagem, de acordo com o comportamento probabilístico do *gene*.

A partir deste caso base, o catamorfismo combina sucessivamente cada palavra com todos os resultados possíveis da sua cauda, multiplicando as probabilidades locais. Deste modo, o valor

```
pcataList gene ["hi", "hi again", "bye"]
```

corresponde a uma única distribuição final que contém todas as mensagens possíveis resultantes da transmissão, já com as probabilidades corretamente combinadas.

### Definição de gene

Depois de analisados os três componentes principais desta solução — o mónade *Dist*, o comportamento encapsulado pelo *gene* e o catamorfismo *pcataList* —, a definição do *gene* torna-se natural.

- Para o caso da lista ser vazia ( $i_1 ()$ ), que corresponde ao fim da transmissão, podemos definir uma probabilidade de 90% de enviar corretamente a palavra final "stop" e de 10% de falhar.
- Para o caso da lista não ser vazia ( $i_2 (x, y)$ ), cada palavra  $x$  tem uma probabilidade de 95% de ser transmitida, enquanto que os restantes 5% representam a perda da palavra.

Assim, fica-se com:

```
gene :: () + (String, [String]) → Dist [String]
gene (i1 ()) = D [("stop", 0.9), ([], 0.1)]
gene (i2 (x, ys)) = D [(x : ys, 0.95), (ys, 0.05)]
```

### Cálculo das soluções

Tendo *gene* definido, basta correr no interpretador *transmitir* ["Vamos", "atacar", "hoje"] para calcular as probabilidades de todas as possíveis frases transmitidas. Fazendo isso, obtêve-se:

Mensagem transmitida	Probabilidade
["Vamos", "atacar", "hoje", "stop"]	77.2%
["Vamos", "atacar", "hoje"]	8.6%
["Vamos", "atacar", "stop"]	4.1%
["Vamos", "hoje", "stop"]	4.1%
["atacar", "hoje", "stop"]	4.1%
["Vamos", "atacar"]	0.5%
["Vamos", "hoje"]	0.5%
["atacar", "hoje"]	0.5%
["Vamos", "stop"]	0.2%
["atacar", "stop"]	0.2%
["hoje", "stop"]	0.2%
["atacar"]	0.0%
["hoje"]	0.0%
["Vamos"]	0.0%
["stop"]	0.0%
[]	0.0%

Assim, observando os resultados obtidos, é possível responder às questões propostas:

- Qual a probabilidade da palavra "atacar" da mensagem se perder? **É de 4.1%.**
- Qual a probabilidade de seguirem todas as palavras, mas faltar o "stop"? **É de 8.6%.**
- Qual a probabilidade da transmissão ser perfeita? **É de 77.2%.**

#### Verificação das soluções

Tal como feito em alguns dos problemas anteriores, decidimos que seria interessante testar os resultados a que chegamos neste problema também. Para isto, aplicando conhecimento de Elementos de Probabilidades adquiridos ao longo do curso, fizemos:

Tendo em conta as probabilidades dadas no enunciado do problema:

- Seja  $P(w)$  a probabilidade da palavra  $w$  ser transmitida, com  $P(w) = 0.95$ .
- Seja  $P(\text{não transmitir "stop"})$  a probabilidade de não transmitir "stop" no fim da mensagem, com  $P(\text{não transmitir "stop"}) = 0.1$

E sabendo que:

- A probabilidade  $P(m)$  é a probabilidade da mensagem transmitida ser  $m$ .

Pode-se calcular as probabilidades dos casos pedidos:

- **1-** Qual a probabilidade da palavra "atacar" da mensagem se perder?

Sabendo que a mensagem transmitida neste caso seria:

$m1 = ["Vamos", "hoje", "stop"]$

$$\begin{aligned}
 P(m1) &= P(\text{"Vamos"}) \times (1 - P(\text{"atacar"})) \times P(\text{"hoje"}) \times (1 - P(\text{não transmitir "stop"})) \\
 &= 0.95 \times 0.05 \times 0.95 \times 0.9 \\
 &= 0.0406125 \approx 0.041 = 4.1\%
 \end{aligned}$$

- **2-** Qual a probabilidade de seguirem todas as palavras, mas faltar o "stop"?

Sendo a mensagem transmitida:

$m2 = ["Vamos", "atacar", "hoje"]$

$$\begin{aligned} P(m2) &= P("Vamos") \times P("atacar") \times P("hoje") \times P(\text{n\~ao transmitir "stop"}) \\ &= 0.95 \times 0.95 \times 0.95 \times 0.1 \\ &= 0.0857375 \approx 0.086 = 8.6\% \end{aligned}$$

- **3-** Qual a probabilidade da transmiss\~ao ser perfeita?

Neste caso, a mensagem transmitida seria:

$m3 = ["Vamos", "atacar", "hoje", "stop"]$

$$\begin{aligned} P(m3) &= P("Vamos") \times P("atacar") \times P("hoje") \times (1 - P(\text{n\~ao transmitir "stop"})) \\ &= 0.95 \times 0.95 \times 0.95 \times 0.9 \\ &= 0.7716375 \approx 0.772 = 77.2\% \end{aligned}$$

Logo, por compara\~ao dos resultados obtidos a partir do interpretador e das solu\~oes calculadas, pode-se concluir que as fun\~oes usadas funcionam de acordo com o desejado.

# Index

$\LaTeX$ , [5](#), [6](#)

**bibtex**, [6](#)

**lhs2TeX**, [5](#), [6](#)

**makeindex**, [6](#)

**pdflatex**, [5](#)

**xymatrix**, [7](#)

Combinador “pointfree”

*ana*, [3](#)

*cata*

    Naturais, [7](#)

*either*, [3](#), [4](#)

*split*, [6](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [4](#)

  Material Pedagógico, [5](#)

  List.hs, [4](#)

Docker, [5](#)

  container, [5](#), [6](#)

Functor, [3](#), [7](#), [8](#)

Função

$\pi_1$ , [7](#)

$\pi_2$ , [7](#)

Haskell, [1](#), [5](#), [6](#)

  Biblioteca

    PFP, [8](#)

    Probability, [7](#), [8](#)

  interpretador

    GHCi, [5–7](#)

  Lazy evaluation, [3](#)

  Literate Haskell, [5](#)

Números naturais ( $\mathbb{N}$ ), [7](#)

Programação

  literária, [5](#), [6](#)

## References

- [1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [2] Chris Okasaki. Breadth-first numbering: lessons from a small exercise in algorithm design. In Martin Odersky and Philip Wadler, editors, *Proceedings of the Fifth ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP '00), Montreal, Canada, September 18-21, 2000*, pages 131–136. ACM, 2000.
- [3] J.N. Oliveira. Program Design by Calculation, 2024. Draft of textbook in preparation. First version: 1998. Current version: Sep. 2024. Informatics Department, University of Minho ([pdf](#)).