

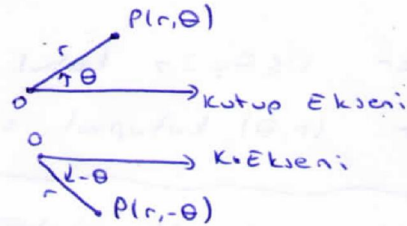
KUTUPSAL KOORDİNATLAR

x ve y dik koordinatları düzlemdaki bir P noktasını bir dikey doğru ile bir yatay doğrunun kesişmesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatlar ise bir P noktasını, bir sem-berle merkezinden çıkan bir ısrının kesişmesi olarak belirtir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

Düzlem üzerinde bir nokta ve bu noktadan çıkan bir ısrın seçelim. Noktaya kutup, ısrına ise kutup eksenı denir.

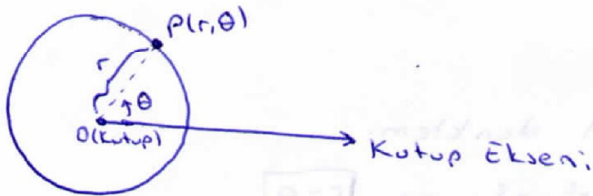
Bu durumda düzlemdaki herhangi bir P noktasını (r, θ) kutupsal koordinat çifti ile gösterebiliriz. Burada r , P 'nin orjine olan yönlü uzaklığı; θ 'da kutup eksenı ile OP arasında ki yönlü açıdır.

Pozitif $\theta \rightarrow$ Saatin tersi yönünde
Negatif $\theta \rightarrow$ Saat yönünde ölçülür.



* (r, θ) kutupsal koordinatına karşılık gelen P noktasını göstermek için aşağıdaki yol izlenir:

(r, θ) : Kutup eksenine θ derece açı ile duran doğru üzerinde, kuttuptan r birim uzaklıkta bulunan noktadır.



r : Kuttuptan P 'ye olan yönlü uzaklık

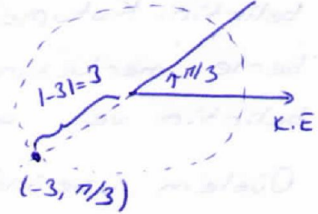
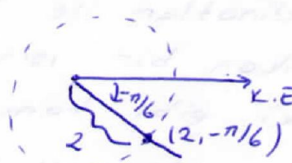
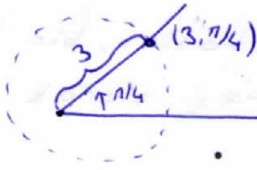
θ : Kutup ekseninden OP 'ye olan yönlü açı

* Bir noktayı temsil eden sonsuz miktarda kutupsal koordinat çifti vardır.

* Eğer $r=0$ ise θ ne olursa olsun P kuttuptur.

* Eğer $r < 0$ ise: P , θ açılı ısrının ters yönündeki $\theta + \pi$ açılı ısrın üzerinde olup kuttuptan $|r|$ birim uzaklıktadır.

②
 * $(3, \frac{\pi}{4}), (2, -\frac{\pi}{6}), (-3, \frac{\pi}{3})$ noktalarını kutupsal koordinat düzleminde gösteriniz.

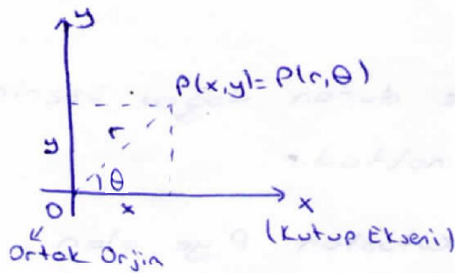


* $(r, \theta) = (-r, \theta + \pi) = (-r, \theta + 3\pi) = \dots = (-r, \theta + (2k+1)\pi)$

* $(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi) = (r, \theta + 4\pi) = \dots = (r, \theta + 2k\pi)$

* Eğer $0 \leq \theta < 2\pi$, $r > 0$ kabul edilirse düzlemin her noktasına tek bir (r, θ) kutupsal çifti karşılık gelir.

Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koor. Arasındaki Bağlantılar



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

* $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin kutupsal denklemi?

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{r = a}$$

* $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 'nin kartezyen denklemi?

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

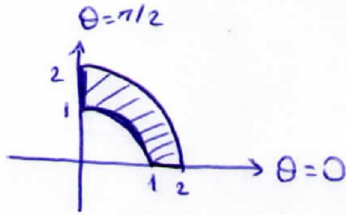
$$r^2 = a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a^2 \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \right) = \frac{a^2}{r^2} (x^2 - y^2)$$

$$(r^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \quad r^2 = x^2 + y^2 \text{ olduğundan}$$

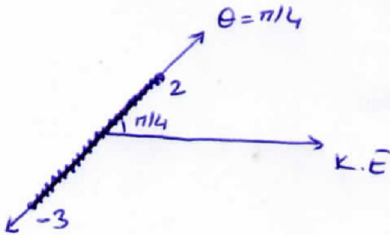
$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)}$$

* Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çiziniz. (4:3)

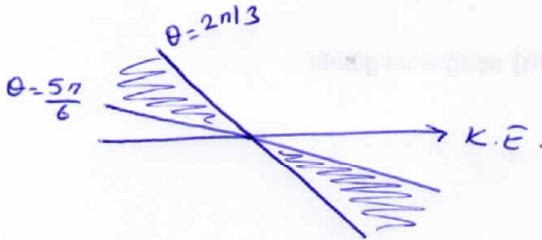
a) $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



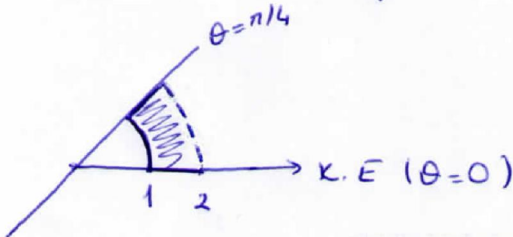
b) $-3 \leq r \leq 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$



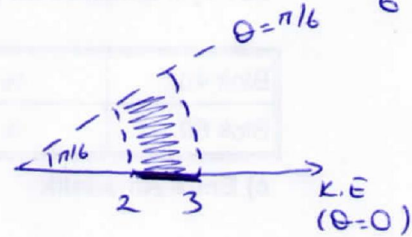
c) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



d) $1 \leq r < 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$



e) $2 < r < 3$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$



④ $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ çemberinin kutupsal denklemi? K. ④

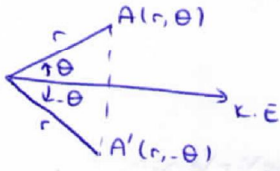
$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2xa + y^2 = 0 \quad \begin{matrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{matrix}$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 2ar \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta = 0$$

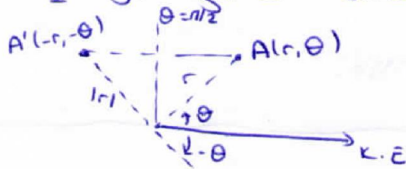
$$r^2 = 2ar \cos \theta \Rightarrow \boxed{r = 2a \cos \theta}$$

Simetri Özellikleri

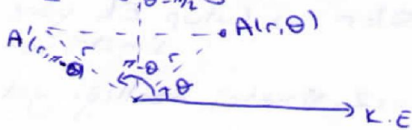
① a) $r = f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazıldığında $f(-\theta) = f(\theta) = r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



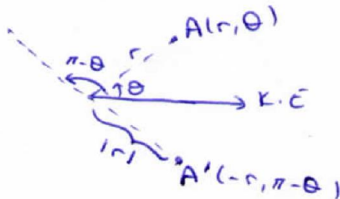
b) $r = f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazılınca $f(-\theta) = -f(\theta) = -r$ oluyor ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



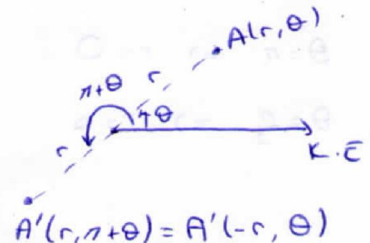
② a) $r = f(\theta)$ da θ yerine $\pi - \theta$ yazılınca $f(\pi - \theta) = f(\theta) = r$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



b) $r = f(\theta)$ da θ yerine $\pi - \theta$ yazılınca $f(\pi - \theta) = -f(\theta) = -r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



③ a) $r = f(\theta)$ da θ yerine $\pi + \theta$ yazılınca $f(\pi + \theta) = f(\theta) = r$ ise (kutupba) orjine göre simetri vardır.
b) (r, θ) eğri üzerinde iken $(-r, \theta)$ da eğri üzerinde ise orjine göre simetri vardır.



Kutupsal Koordinatlarda Eğri Çizimi

$r=f(\theta)$ nin grafiğini çizerken:

- ① Eğri periyodik ise periyodu bulunur.
- ② Simetri durumu incelenip çizim aralığı belirlenir.
- ③ $r=f(\theta)$ nin değişimi türev yardımıyla incelenir.
- ④ Bazı θ 'lar için $(\theta, f(\theta))$ noktaları bulunur.
- ⑤ θ, r, r' içeren tablo yapıp eğri çizilir.

* $r=a(1+\cos\theta)$ ($a>0$) eğrisinin grafiğini çiziniz.

① Periyod: $2\pi \rightarrow [0, 2\pi]$ de çizilir.

② $\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = a(1+\cos(-\theta)) = a(1+\cos\theta) = f(\theta) = r \Rightarrow$ Kutup Ek. göre simetri var

$\theta \rightarrow \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta) = a(1+\cos(\pi-\theta)) = a(1-\cos\theta) \Rightarrow$ 2. simetri özelliği yok

$\theta \rightarrow \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta) = a(1+\cos(\pi+\theta)) = a(1-\cos\theta) \Rightarrow$ 3. " " "

Kutup eksenine göre simetri olduğundan inceleme aralığı: $[0, \pi]$

③ $f'(\theta) = -a \sin\theta < 0$ ($\theta \in (0, \pi)$ için)

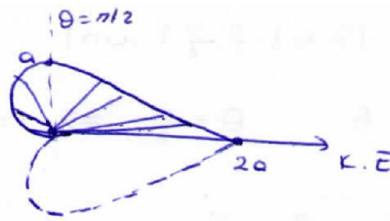
④ $\theta=0 \Rightarrow r=2a$

$\theta=\pi \Rightarrow r=0$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=a$

5

θ	0	$\pi/2$	π
r'	-	-	-
r	$2a \rightarrow a \rightarrow 0$		



K. 6

* $r = a(1 - \sin \theta)$ ($a > 0$) eğrisini çiziniz.

1 Periyot: $2\pi \rightarrow [0, 2\pi]$ de çizelim.

2 $\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = a(1 - \sin(-\theta)) = a(1 + \sin \theta) \neq f(\theta), -f(\theta)$ 1. S. yok

$\theta \rightarrow \pi - \theta \Rightarrow f(\pi - \theta) = a(1 - \sin(\pi - \theta)) = a(1 - \sin \theta) = f(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri var

$\theta \rightarrow \pi + \theta \Rightarrow f(\pi + \theta) = a(1 - \sin(\pi + \theta)) = a(1 + \sin \theta) \neq f(\theta), -f(\theta)$ 3. S. yok

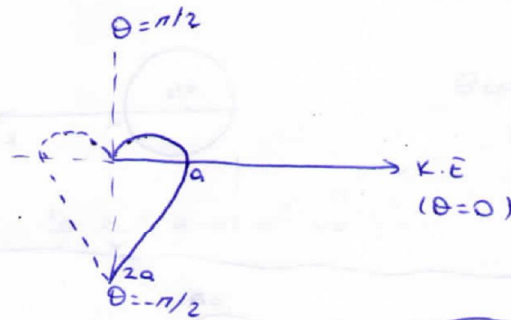
$\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri olduğundan inceleme aralığı: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

3 $f'(\theta) = -a \cos \theta < 0$ ($\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için)

4 $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 0$ $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2a$ $\theta = 0 \Rightarrow r = a$

5

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
r'	-	-	-
r	$2a \rightarrow a \rightarrow 0$		



* $r = 2 - 4 \sin \theta$ eğrisini çiziniz.

$\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = 2 - 4 \sin(-\theta) = 2 + 4 \sin \theta \neq f(\theta), -f(\theta)$ 1. simetri yok

$\theta \rightarrow \pi - \theta \Rightarrow f(\pi - \theta) = 2 - 4 \sin(\pi - \theta) = 2 - 4 \sin \theta = f(\theta)$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre s. var.

$\theta \rightarrow \pi + \theta \Rightarrow f(\pi + \theta) = 2 - 4 \sin(\pi + \theta) = 2 + 4 \sin \theta \neq f(\theta), -f(\theta)$ 3. Sim. yok.

Periyot 2π , $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri var \Rightarrow inceleme aralığı: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$r' = -4 \cos \theta < 0 \quad (\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ için})$$

⑦

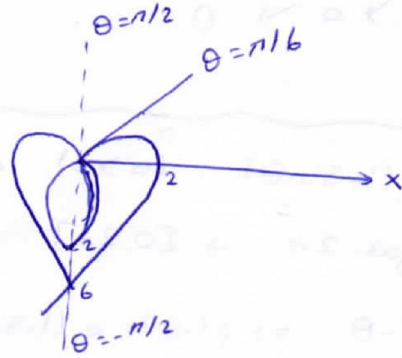
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 6$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -2$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 0$$

$$\theta = 0 \Rightarrow r = 2$$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
r'	-	-	-	-
r	6	2	0	-2



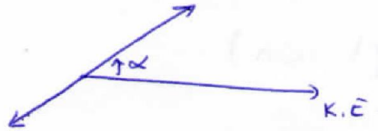
Temel Şekiller

① $r = a \Rightarrow$



Merkezli
yarıçapı a olan çember
($x^2 + y^2 = a^2$)

② $\theta = \alpha \Rightarrow$



Eğimi α olan doğru

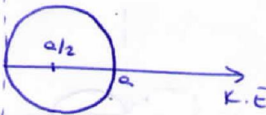
③ $r = a \cos \theta$

$$r^2 = a^2 \cos^2 \theta$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \frac{x^2}{r^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2$$

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$



Kutup ve $(a, 0)$ noktala-
rından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı
çember

$$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \text{ çemberi}$$

④ $r = a \sin \theta$

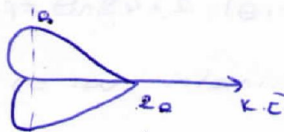


Kutup ve $(0, \frac{\pi}{2})$ nokta-
larından geçen $\frac{a}{2}$
yarıçaplı çember

$$(x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} \text{ çemberi})$$

⑤ $r = a(1 + \cos \theta)$

$$(a > 0)$$



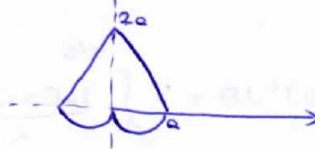
x-ekseni boyunca
uzanan sivri uç
x-ekseninin pozitif
yönünde olan kardiyoid

⑥ $r = a(1 - \cos\theta)$
($a > 0$)



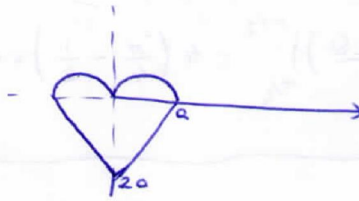
x-ekseni boyunca ^{K. 8} uzanan, sivri ucu x-ekseninin negatif yönünde olan Kardiyoid

⑦ $r = a(1 + \sin\theta)$
($a > 0$)



y-ekseni boyunca uzanan sivri ucu y-ekseninin pozitif yönünde olan Kardiyoid

⑧ $r = a(1 - \sin\theta)$
($a > 0$)



y-ekseni boyunca uzanan sivri ucu y-ekseninin negatif yönünde olan Kardiyoid.

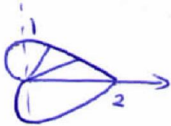
⑨ $r \cos\theta = a \Rightarrow x = a$ doğrusu
 $r \sin\theta = b \Rightarrow y = b$ doğrusu

Kutupsal Koordinatlarda Alan Hesabı

$r = f(\theta)$ denklemiyle verilmiş bir eğrinin $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğruları ile sınırlandığı alan:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta \quad \text{formülü ile hesaplanır.}$$

⑩ $r = 1 + \cos\theta$ eğrisinin alanı?

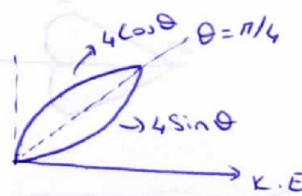
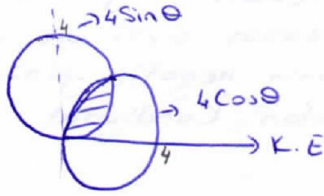


$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\theta + 2\sin\theta + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\pi}{2}}$$

* $r = 4\cos\theta$ ile $r = 4\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak alan? 9



$$\cos\theta = \sin\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (4\cos\theta)^2 d\theta = 8 \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta + 8 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

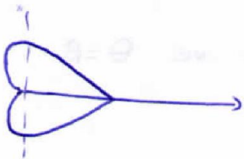
$$= 4 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} + 4 \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + 4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{2\pi - 4}}$$

Yay Uzunluğu

$r = f(\theta)$ denklemleri eğrinin $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ arasındaki yay uzunluğu

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta \quad \text{formülü ile bulunur.}$$

* $r = 1 + \cos\theta$ eğrisinin uzunluğu?



$$r = 1 + \cos\theta \quad r' = -\sin\theta$$

$$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2 + 2\cos\theta$$

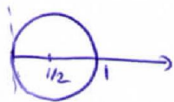
$$= 2 + 2 \left[2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right] = 4\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \left| 2\cos \frac{\theta}{2} \right|$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left| 2\cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = \int_0^{\pi} 2\cos \frac{\theta}{2} d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} (-2\cos \frac{\theta}{2}) d\theta$$

$$= 4\sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} - 4\sin \frac{\theta}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \boxed{8}$$

* $r = \cos \theta$ çemberinin uzunluğu?



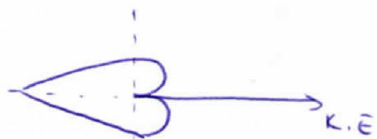
$$r = \cos \theta \quad r' = -\sin \theta$$

$$r^2 + (r')^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = 1$$

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

* $r = 1 - \cos \theta$ kardioidinin uzunluğu?



$$r = 1 - \cos \theta \quad r' = \sin \theta$$

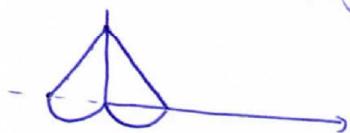
$$r^2 + (r')^2 = 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 - 2\cos \theta$$

$$= 2 - 2\left[1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right] = 4\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \left|2\sin \frac{\theta}{2}\right|$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left|2\sin \frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin \frac{\theta}{2} d\theta = -4\cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8$$

* $r = 1 + \sin \theta$ kardioidinin uzunluğu?



$$r = 1 + \sin \theta \quad r' = \cos \theta$$

$$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 2(1 + \sin \theta)$$

$$= 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) =$$

$$= 2\left(1 + \left(2\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) - 1\right)\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right|$$

$$\frac{S}{2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right| d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) d\theta = \frac{2\sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)}{-\frac{1}{2}} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= -4[0 - 1] = 4 \quad \boxed{S = 8}$$