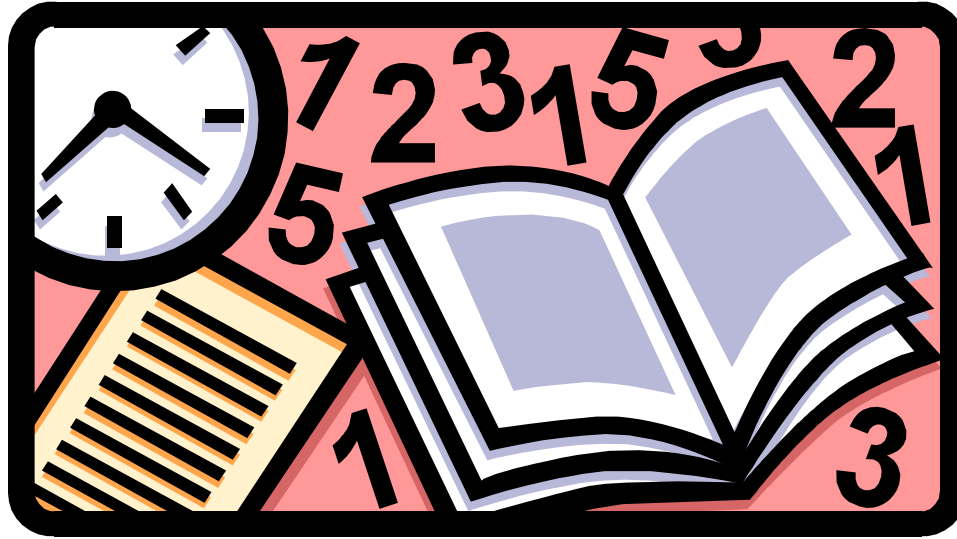


# BÖLÜM 7

## Graf Boyama ve Kromatic Polinomlar (Graph Coloring and Chromatic Polynomial)

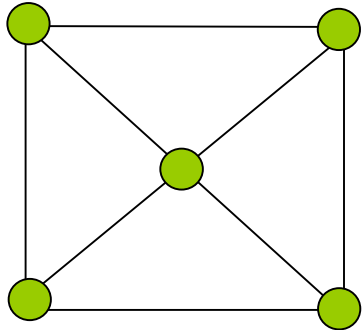


---

## Tanım

- ❖ Bir  $G$  grafinin herhangi iki komşu düğümüne aynı renk atanmayacak şekilde, grafin her bir düğümüne bir renk atanmasına bir grafin **renklendirilmesi** denir.
- ❖ Bir grafin **renk** (kromatik) sayısı, grafin renklendirilmesi için gerekli olan **en az renk** sayısıdır. Bir  $G$  grafinin renk (kromatik) sayısı  $X(G)$  ile gösterilir.

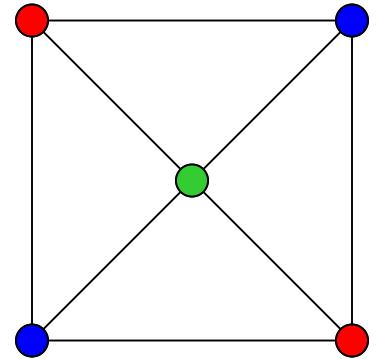
→ Grafin renklendirilmesi için gereken renk sayısına **kromatik sayısı** da



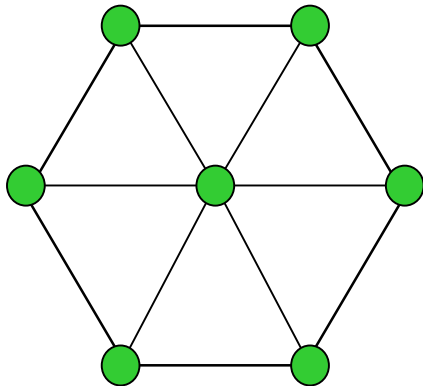
Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?

$X(G) = 3$  renk mi?

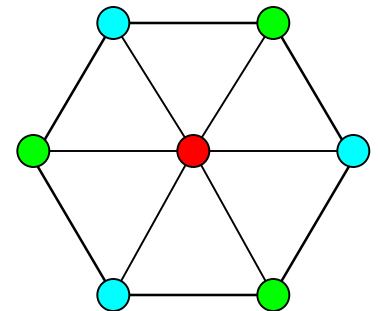
$X(G) = 4$  renk mi?



$X(G) = 3$



Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?



$X(G) = 3$

## Örnek

---

- Bir üniversite içerisinde profesör ünvanlı akademisyenlerden oluşan 10 tane kurul olsun
- Bu kurullar haftada bir kez toplanmaktadır
- Bir akademisyen birden fazla kurulda görev alabilir
- Tüm toplantıların en kısa sürede tamamlanması ve akademisyenlerin katılacağı toplantılarda çakışma olmaması istenmektedir

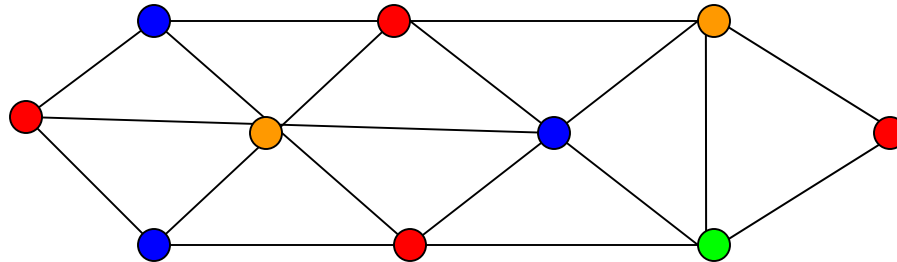
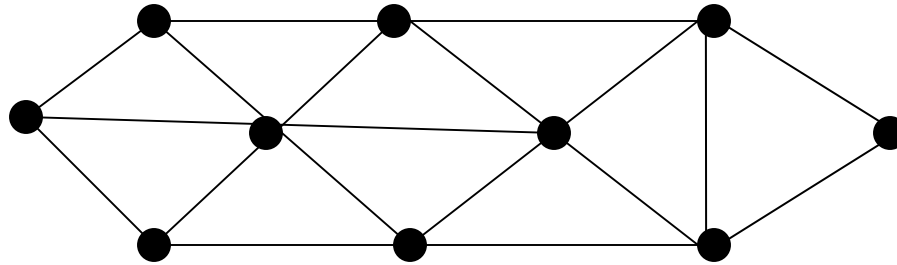
Kaç farklı toplantı oluşturulmalıdır?

Düğümmler = Kurullar

Kenarlar = Çakışan akademisyenler

Renkler = Farklı toplantı zamanları

Grafımız aşağıdaki şekilde olsun.



$$X(G)=4$$

# Kromatik Polinomlar

---

Bir  $G$  grafinin kromatik polinomu  $P(G)$ ,  $G$  grafini minimum  $k$  renkle renklendirmenin kaç farklı şekilde yapılacağını verir.

Deletion Contraction Method

$$P_k(G) = P_k(G - e) - P_k(G \setminus e)$$

kenarı silme

Silinen kenara ait düğümleri  
birleştirme

# Kromatik Polinomu bilinen graflar



Noktasal Graf

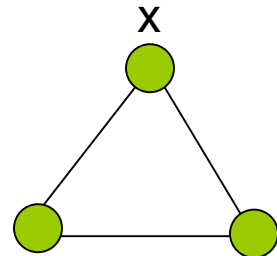


$x-1$

Çizgisel Graf

U grafi  $\longrightarrow$

$$U_n = x(x-1)^{n-1}$$



$x-1$

$x-2$

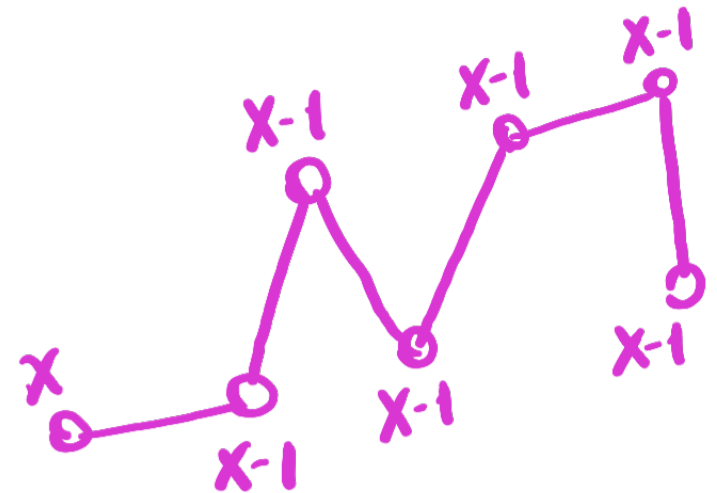
Z Grafi veya K Grafi

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

$$n=2 \quad 2.1^1$$

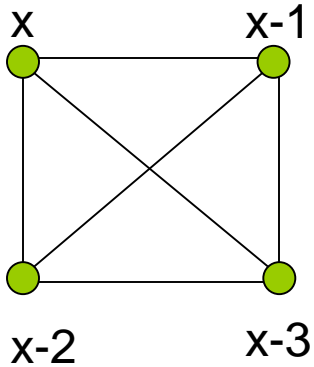
$$x(x-1) = U_2$$

$$x(x-1)(x-2)$$



Örnek  $K_3$

$$\begin{aligned} \chi(\chi-1)^2 &= U_3 \\ \chi(\chi-1)^6 &= U_7 \end{aligned}$$



$K$  grafi olup, bütün düğümler birbiri ile bağlantılıdır.

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (\chi - k)$$

$$\begin{aligned} K_4 &= \chi(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3) \\ &= (\chi^2 - \chi)(\chi^2 - 5\chi + 6) \\ &= 1\chi^4 - 6\chi^3 + 11\chi^2 - 6\chi \end{aligned}$$

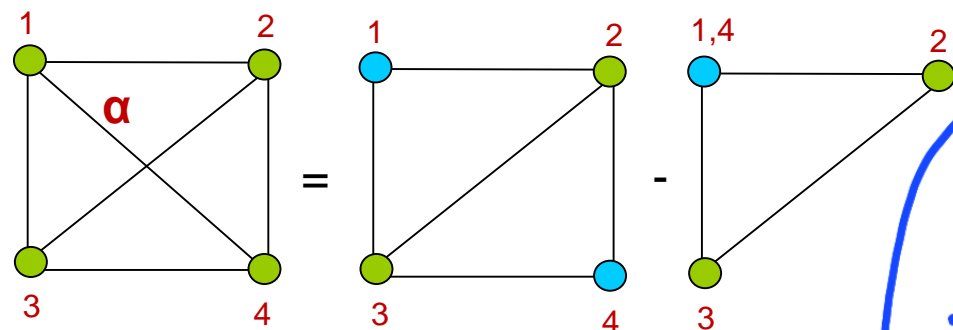
$\chi=1$  için değeri 0  
 $\chi=2$  için değeri 0  
 $\chi=3$  için değeri 0  
 $\chi=4$  için değeri 24

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 6 \\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 5\ 6 \\ 1\ 5\ 6 \\ + \hline 1\ 6\ 11\ 6 \end{array}$$

4 farklı renk ile 24 farklı şekilde boyanır



# Örnek

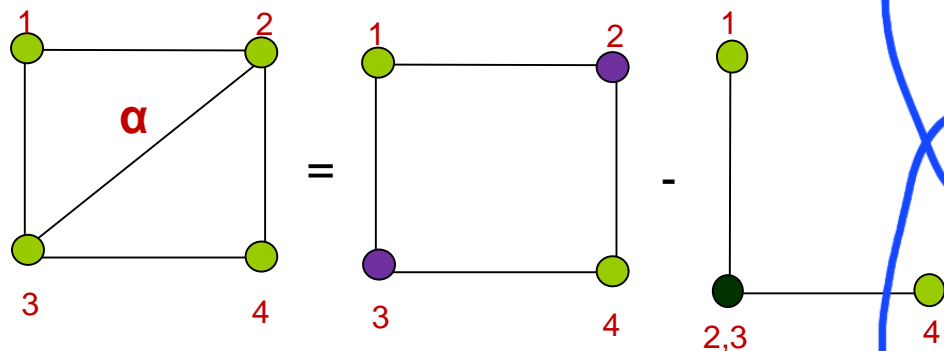


$$= x(x-1)(x^2-4x+4) - x(x-1)(x-2)$$

$$= x(x-1)(x^2-4x+4-x+2)$$

$$= x(x-1)(x^2-5x+6)$$

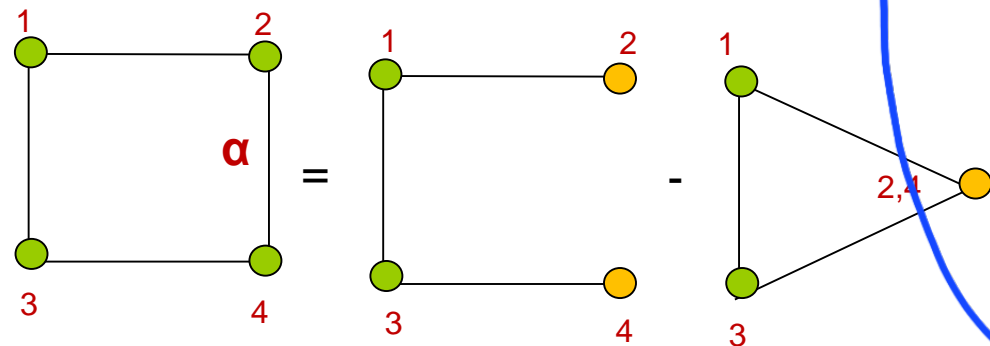
$$= x^4-6x^3+11x^2-6x$$



$$= x(x-1)(x^2-3x+3) - x(x-1)^2$$

$$= x(x-1)(x^2-3x+3-x+1)$$

$$= x(x-1)(x^2-4x+4)$$

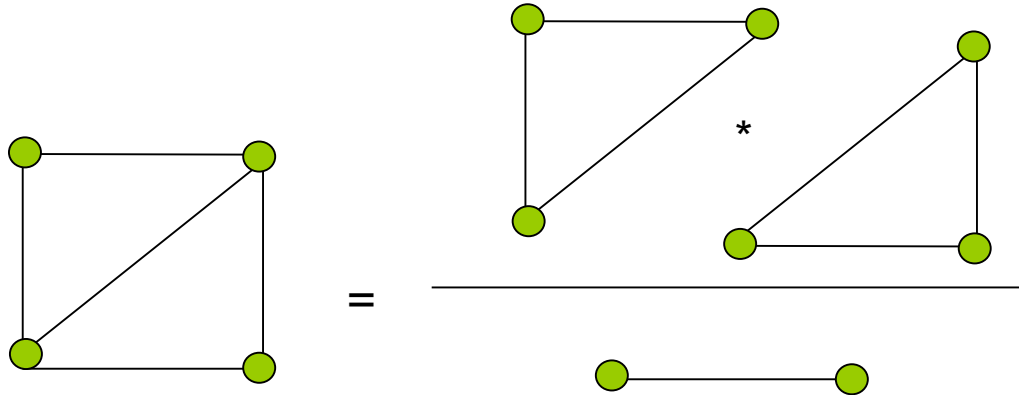


$$= x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2)$$

$$= x(x-1)[(x-1)^2-(x-2)]$$

$$= x(x-1)(x^2-3x+3)$$

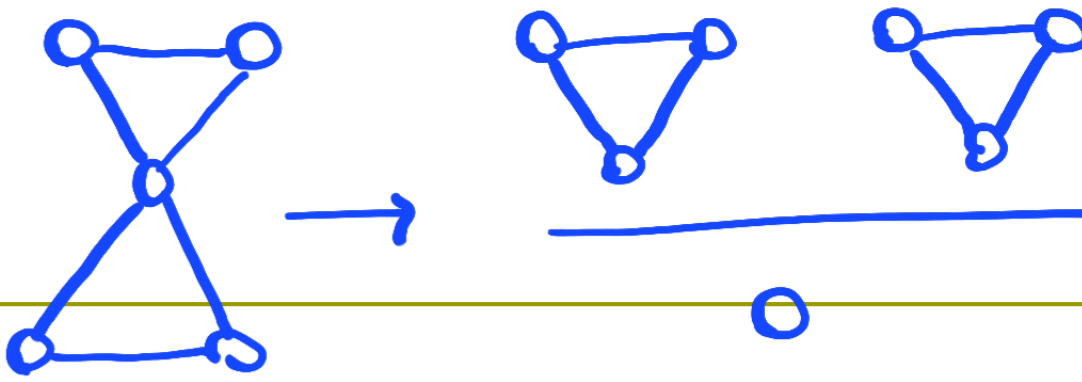
Eğer, iki graf birbirinden **Noktasal** veya **Çizgisel** bir graf ile ayrılıyorsa...



$$\begin{array}{r}
 1\ 4\ 4 \\
 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 4\ 4 \\
 \phantom{1}\ 1\ 4\ 4 \\
 + \phantom{1}\ 1\ 4\ 4 \\
 \hline
 1\ 5\ 8\ 4
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 (x-1)^2 (x-2)^2}{x (x-1)} = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 4) \\
 & = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x
 \end{aligned}$$

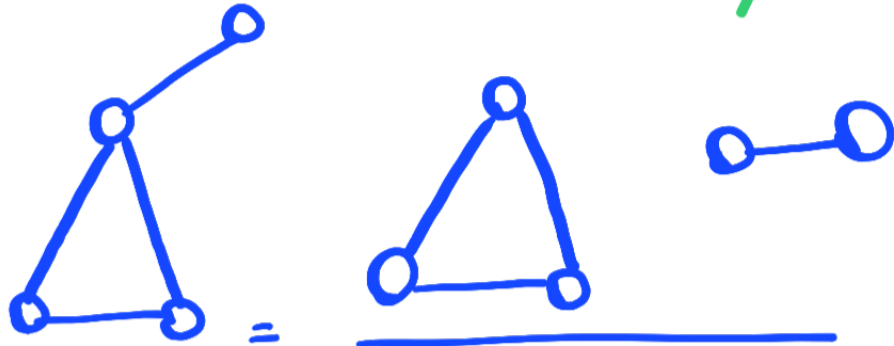
3 renk ile boyanır  
 $3 * 2 * 1 = 6$  değişik şekilde



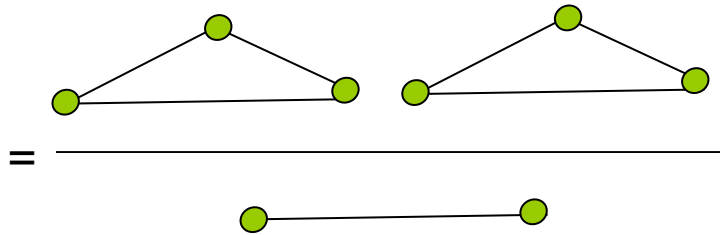
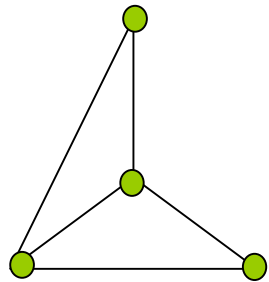
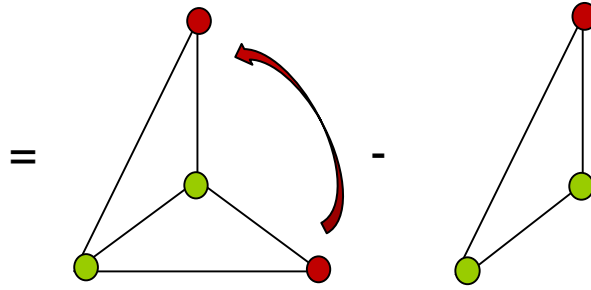
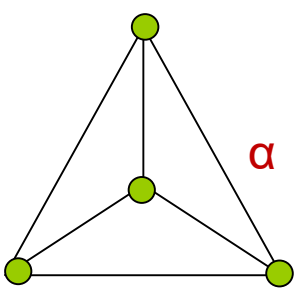
## Kurallar

- 1)  $a_1$  her zaman **1** olmalıdır
- 2) Polinomun derecesi grafın düğüm sayısını verir
- 3) Terimlerin katsayılarının toplamı **0** olur
- 4) Polinomun katsayılarının işaretleri **+**, **-** diye gider
- 5) Polinomda sabit terim olmaz

2.terim  
kenar sayısını



# Örnek



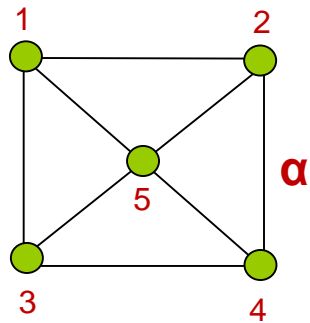
$$= \frac{x^2 (x-1)^2 (x-2)^2}{x (x-1)}$$

$$= x(x-1)(x-2)^2 - x(x-1)(x-2) \\ x(x-1)(x-2)[(x-2) - 1] \\ x(x-1)(x-2)(x-3) \\ (x^2-x)(x^2-5x+6) \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

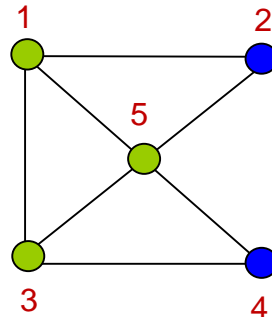
$K_4$  grafi 4 renk ile 24 farklı şekilde boyanır

# Örnek

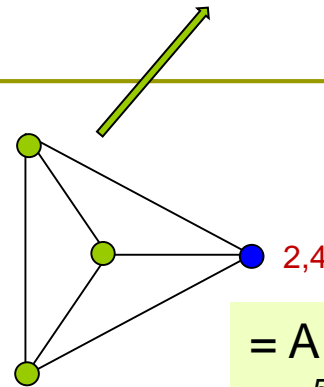
$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$



=

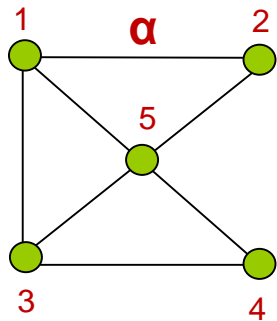


-

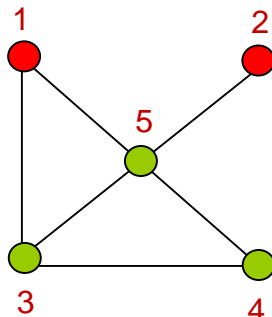


$$= A(x-2) - (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x)$$

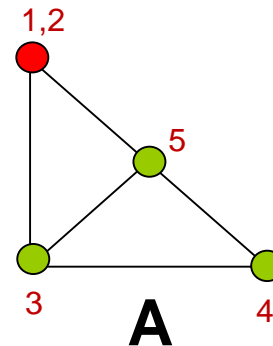
$$x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 31x^2 + 14x$$



=



-

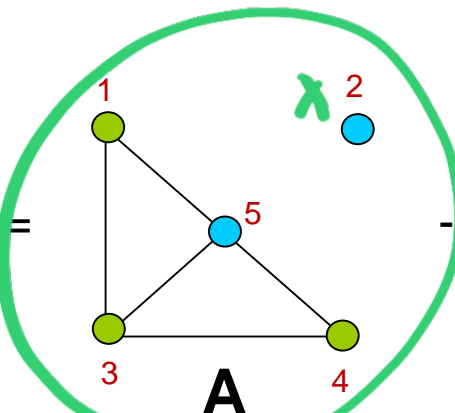
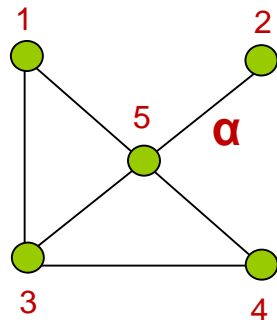


$$= A(x-1) - A$$

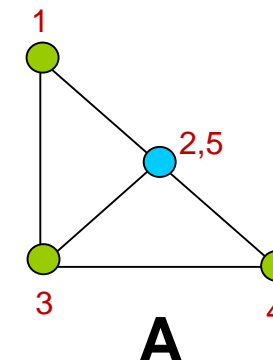
$$Ax - A - A$$

$$Ax - 2A$$

$$A(x-2)$$



-

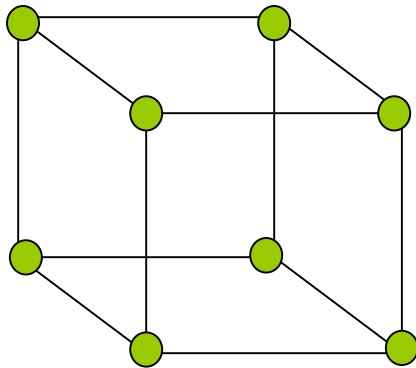


$$= A(x-1)$$

$$\hookrightarrow Ax - A$$

Örnek

$Ax$



Minimum kaç renk ile boyanabilir ?

$$x^8 - 12x^7 + 66x^6 - 208x^5 + 325x^4 - 131x^3 + 90x^2 - 131x$$

