Row → satır

(Doğrusal)
Lineer Denklem Sistemleri

∝ Bütün bilinmeyenler 1. derece ve bilinmeyenlerin birbirleriyle çarpılmadığı denklem çeşidi → Lineer
→ Birden fazla ise → Lineer denklem sistemi
∝ Matrisler → Denklem sistemlerini çözmek için ortaya çıktı

Denklem Sistemlerinin Matrisler ile Gösterimi

formatın adı

$$2x-3y=10 \qquad x+4y=8 \Rightarrow \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{x}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}} \qquad A \cdot x = b$$

* Bir bilinmeyen çeşidi denklemlerin birinde olmasaydı katsayılar matrisine sıfır yazılırdı

Genişletilmiş Katsayılar Matrisi (Augmented matrix)

$$\begin{aligned} 3x-2y&=5 \\ x+y&=4 \\ 3x+y&=6 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

bilinmeyenlerin adı hariç tek kutuda birleşmesi

Elementer (temel) Satır İşlemleri

∝ Matrisin üzerinde denklem sistemini çözmek için yapmamızın mümkün olduğu işlemlerdir. 3 tanedir

1. "Genişletilmiş katsayılar matrisinde" istediğimiz satırı, istediğimiz sayı ile çarpmak
   $4S_1 \to S_1$ veya $4R_1 \to R_1$ (sağdaki yeni oluşan) satırı 4 ile çarptık demek
2. "Satırların yerleri değişebilir ($S_1 \leftrightarrow S_2$ veya $R_1 \leftrightarrow R_2$)
3. "Bir satır diğer bir satıra eklenebilir veya çıkarılabilir. Bir satır bir sayı ile çarpıldıktan sonra da diğer bir satıra eklenebilir veya çıkarılabilir
   $R_1 + R_2 \Rightarrow R_2$ (Yeni satır 2)
   Satır biri satır ikiye ekledik.

Satırca Denk ($\equiv$, $\approx$) Matrisler (Row equivalent matrix)

* Elementer satır işlemleri uygulayarak elde ettiğimiz matris ile baştaki matris birbirine satırca denktir

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

2 ana başlıkta toplanır

1. Denklem sayısı = bilinmeyen sayısı ise
   - 1- Gaus yok etme metodu
   - 2- Gaus jordan yok etme metodu
   - 3- Cramer metodu
   - 4- A^{-1} yardımıyla (ters matris) çözme metodu
   - 5- Satırca eşelon forma getirerek
   - 6- Satırca indirgenmiş eşelon forma getirerek

   aynı

2. denklem sayısı $\neq$ bilinmeyen sayısı ise
   - 1- Satırca eşelon forma getirerek
   - 2- Satırca indirgenmiş eşelon forma getirerek

Gauss Yok Etme Metodu

1. adım genişletilmiş katsayılar matrisi (gkm) haline getir

2. adım Elementer satır işlemleri ile gkm'yi üst üçgen matris (upper triangular) yap

★ üst üçgen matris yapmak → katsayıların olduğu bölüme köşegen çekip altta kalanları sıfır yapmak

ÖR:

sıfır olmalı

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_1+S_3\to S_3]{-\frac{1}{2}S_1+S_2\to S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{9}{2}S_2+S_3\to S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right]$$

ilk bunları sıfır yap 1. satırı kullanarak

sonra bunu sıfır yap 2. satırı kullanarak

$z=-3$
$y=1$
$x=5$

Gauss Jordan Yok Etme Metodu

α Gauss metoduna ek olarak köşegendeki (köşegenin) sayıları 1 yapmamızı ve üst tarafta kalanları da sıfır yapmamızı ister.

5 (S_2 kullan)

4 (S_3'ü kullanarak sıfırla)

ÖR)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

★ Adımları takip et

1, 2, 3 (uygun sayılarla çarpıp hepsini 1 yap)

① $-\frac{1}{2}S_1 + S_2 \to S_2$, $-S_1 + S_3 \to S_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{② \ \frac{9}{2}S_2 + S_3 \to S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right]$$

③ $\frac{1}{2}S_1 \to S_1$, $\frac{1}{2}S_2 \to S_2$, $-\frac{1}{9}S_3 \to S_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_3 + S_1 \to S_1]{④ \ S_3 + S_2 \to S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

⑤ $-4S_2 + S_1 \to S_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

$x_3 = -2$

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Durumları

3 seçenek var

- tek çözüm (unique solution) — misal $x=1$ $y=2$ $z=3$
- sonsuz çözüm (infinitely solution) — $x=a+5$ $y=2a-1$ $z=a+3$
- çözüm yok (no solution) — $\emptyset$

α Çözümü olan sistemler → Tutarlı sistem (consistent system)

• tek çözüm olduğunu anlama

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & k & m \end{array}\right]$$

k sıfır haricinde bir sayı ise

m → fark etmez

• sonsuz çözüm olduğunu anlama

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

En alt satır komple sıfır ise

x ve $y \to$ temel değişken
$z \to$ serbest değişken

• **Çözümsüz olduğunu anlama**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$ katsayıların hepsi sıfırken sonuç kısmının sıfır olmaması

* Bu 3 durum matris üst üçgen matris halindeyken değerlendirilir

* Üst üçgen matris halinden sonra köşegen üzerindeki; sıfır değilse → temel değişken sıfırsa → serbest değişken

→ serbest değişkene harf atanır ve diğer bilinmeyenler onun türünden bulunur (sonsuz çözümlüde)

*

→ satırca indirgenmiş forma?

Eşelon Matris (row echolon form)

şartlar:
* Tamamen sıfırdan oluşan satırlar varsa en aşağı satırlara yazılmalı.
* Her satırın ilk elemanı (sıfırdan farklı) 1 olmalı $\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&2&5 \\ 0&1&7 \end{pmatrix}$
* Bunun altında kalan tüm elemanlar sıfır olmalı
* Birler satır atladıkça sağ sütunlara yönelmeli. (Birer birer olmak zorunda değil basamak gibi)

ör/ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to$ eşelon matris değil

ör/ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ matris eşelon haline getir

1 $S_1 \leftrightarrow S_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

2 $-2S_1+S_2 \Rightarrow S_2$ ve $-3S_1+S_3 \Rightarrow S_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -9 \end{bmatrix}$

3 $-\frac{1}{5}S_2 \Rightarrow S_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 6/5 \\ 0 & -5 & 5 & -9 \end{bmatrix}$

4 $5S_2+S_3 \Rightarrow S_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

5 $-\frac{1}{3}S_3 \Rightarrow S_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ eşelon

NOT | serbest degişken varsa sonsuz çözümlüdür

NOT | kontrol etmek için ensen bulduğun değerleri bir denklemde yerine yaz

ÖR) lineer denklem sisteminin çözümü?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -6 & 2 & 4 & 20 \end{array}\right]$$

* denklem ≠ bilinmeyen ise → eşelon mat. / → indirgenmiş eşelon m.

x_1 ve x_3 → temel d.

x_2 ve x_4 → serbest d.

$$\begin{array}{l} -S_1+S_2\to S_2 \\ -2S_2+S_3\to S_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4 \end{array}$$

$x_2 \to k$, $x_4 \to m$ dersek

$x_1 = 12+3k-3m$ $k,m \in \mathbb{R}$

$x_3 = m-2$

İndirgenmiş Eşelon Matrisi

* Eşelon matris kuralları + her pivotun üst tarafı da sıfır yapılmalı
* Pivot → her satırın sıfırdan farklı "ilk" olan elemanı

ÖR) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini satırca indirgenmiş eşelon matris haline getir

① $-2S_1+S_2\to S_2$
$3S_1+S_3\to S_3$
$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

* sıfır sıfır geldiğinden pivot olabilecek 1'e ulaşamayız 2. yan sütuna geç

② $\frac{1}{3}S_2\to S_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ sıfır yapılmalı S_2 kullanılarak

③ $S_2+S_1\to S_1$
$S_2+S_3\to S_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 29/3 \end{bmatrix}$ → sıradaki pivot olacak

④ $\frac{3}{29}S_3\to S_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

⑤ $\frac{1}{3}S_3+S_2\to S_2$
$-\frac{8}{3}S_3+S_1\to S_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matris Nedir

a_{21} → 2. satır 1. sütun ifade eden

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \end{bmatrix}_{m\times n}$

m = satır sayısı (denklem s.)

n = sütun sayısı (bilinmeyen s.)

$m\times n$ → boyut (çarpılmaz, böyle yazılır)

* Matrisler büyük harfler ile isimlendirilir (A, B...)
* Matrisin boyutları bu harflerin sağ alt köşesine yazılab

Matris Çeşitleri

Sıfır matrisi

- matrisin içindeki tüm elemanlar sıfırsa $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kare matris

- Satır sayısı = sütun sayısı ise $A = [3]_{1x1}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$
- sadece kare matrislerin determinantı vardır
- Sadece kare matrislerin tersi alınabilir (A^{-1})

köşegen matris (diagonal matrix)

- bir kare matristir ve sadece kare matrislerde vardır
- Köşegeni dışındaki tüm elemanları sıfır ise $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
- determinantı = köşegenlerindeki elemanların çarpımı

alt üçgen ve üst üçgen matris → kare matristirler

- Köşegenin → üstünde kalanlar sıfırsa → alt üçgen m.
  → altında kalanlar sıfırsa → üst üçgen m.
- köşegenlerindeki elemanların çarpımı = determinant (ikisi için de)

birim matris (identity matrix)

- kare matristirler
- köşegendeki tüm elemanlar 1 olan ve diğer elemanları sıfır olan köşegen matristir
- I ile gösterilir $I_1 = [1]$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Çarpmada etkisizdir. ($A . I = A$)
- matrislerin tersini bulmamızı sağlar ($A . A^{-1} = I$)
  (inverse m.)

simetrik matris

- köşegenin alt ve üst tarafında kalanlar birbiriyle aynı.
- kare matristir $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

ters simetrikte $A^t = -A$

* Yer değiştirme işleminde satırdaki tüm ifadeler yer değişir (ilk halindeki birim fonk. yeri de değişir)
  onunla birlikte

* Bir matrisi bir sayıyla çarpmak → içindeki tüm elemanları o sayıyla çarpmak

Bir Matrisin Devriği (Transpose)

* Matrisin satırları sütun haline getirilir
* A^T veya A^t şeklinde gösterilir
* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2}$

Matrislerde Toplama Çıkarma Çarpma

Toplama ve Çıkarma

* Boyutlar aynı olmalı $(m\times n)$

ÖR) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ $A+B \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 4 & 11 & 2 \end{bmatrix}$

$A-B \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Çarpma

* ilk matrisin sütun sayısı = ikinci matrisin satır sayısı olmalı

$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$ (ikinin satır s. × ikincinin sütun s.)
$m \times k \rightarrow$ yeni boyut

ÖR) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{2\times3} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}}_{3\times2} =$
$1.2-2.1-1.7=-7$
$1.1+2.6-1.2=11$
$3.2-1.1+2.8=33$
$3.1+6.1+4.2=17$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 33 & 17 \end{bmatrix}_{2\times2}$

* 1. matrisin satırları ile 2. matrisin sütunları çarpılır
* Herkes kendi sırasındaki sayıyla çarpılır (o değerler toplanır)
* satırla diğerlerini çarptıktan sonra sırayla satıra yaz
* çarpmanın değişme özelliği yok $(A.B \neq B.A)$
* bir matrisle birim matrisin çarpımı kendisidir $(A.I=A)$
* $(A.B)^T = B^T.A^T$
* $A.A^{-1} = I$

*A'nın boyutuna göre birim matris kullanılır

Matrislerin Tersini Bulma

sadece kare matrislerin tersi var (hepsinin olmak zorunda değil)

$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}]$

A → tersi alınacak matris
I → Birim m.
I → birim matris yapmak
A^{-1} → matrisin tersi

ÖR) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bul

sıfır olmamalı
işlemden önce
kontrol et

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$

burayı birim m. yap
sonucunda burası A^{-1} olur

1 → köşegen çiz ilk sütunun altındakileri 0 yap
2 → köşegendekileri 1 yap
3 → köşegenin üstte kalanı 0 yap

çözümü arkada →

söylenmedikçe bunu pek kullanma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2 \to S_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 3/2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2S_2+S_1 \to S_1} \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & | & \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{bmatrix}$$

$-3S_1+S_2 \to S_2$

Ters Matris Yardımıyla Lineer Denklem Sis. Çözm

∝ denklem sayısı = bilinmeyen sayısı ise kullanılabilir

- 1. adım → denklem sis. $A \cdot x = b$ formatında yazılır
- 2. adım → A^{-1} bulunur
  → A, tersi alınabilir bir matris olmalı. Yoksa ya çözümü yok ya da sonsuz çözümü var
- 3. adım → $A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$ yani $x = A^{-1} \cdot b$ olur

∝ b, denklemin sonucunu ifade ediyor

ÖR) $x - 2y = 10$
$2x + y = 8$ ters matris yoluyla çözünüz

*1. adım) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$

*2. adım) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2S_2+S_1 \to S_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 5 & | & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2S_2+S_1 \to S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & | & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$ (A^{-1})

*3. adım) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26/5 \\ -12/5 \end{bmatrix}$ $x = \frac{26}{5}$ $y = -\frac{12}{5}$

NOT $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $S_1 \leftrightarrow S_2$ olursa $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A_{yeni}$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $S_1 \leftrightarrow S_2$ olursa $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{yeni}$

$I_{yeni} \cdot A = A_{yeni}$

Her pivotun altını sıfırlamak için pivotun bulunduğu satır kullanılmalı

NOT)

∝ İki satır yer değiştirilerek oluşturulan elementer matrisin tersi kendisidir

∝ Bir sayı ile çarpılmış elementer matrisin tersi o satırın o sayıya bölünmüş hali; ($2S_1 \to S_1$ ise o satırı 2'ye böl)

∝ Bir satırın bir sayı ile çarpılıp diğer bir satıra eklenmesiyle oluşan elementer matrisin tersi;

$$-3S_1+S_3 \to S_3 \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Değişenleri eski haline getirilir

Homojen Lineer Denklem Sistemi

∝ $A.x=0$ formatında olan denklem sistemidir

Yani sonuç kısımları sıfır olmalı

∝ Her zaman tutarlıdır (çözümü var) → tek çözüm / → sonsuz çözüm

∝ Doğal bir çözüme sahiptir. Her zaman için sıfır çözümüne (trivial solution). Yani bütün bilinmeyenlere sıfır verirsek denklem sağlar

∝ Denklem tek çözüme sahipse o sıfır çözümdür

∝ Sonsuz çözüme sahipse sıfır çözümü dışındaki (bu çözüm de var içinde) çözümlere non trivial çözüm denir

∝ Bilinmeyen, denklem sayısından fazlaysa → kesinlikle sonsuz ç.
Bilinmeyen = denklem sayısı ise → sonsuz ç. / → tek çözüm
Denklem sayısı > bilinmeyen s. ise → sonsuz ç. / → tek ç.

∝ Çözümü anlamak için denklem sistemi eşelon forma getirilip pivot'lar bulunur

∝ pivot sayısı, gerçek denklem sayısını gösterir

α pivot sayısı ve bilinmeyen sayısı eşitse tek çözüm vardır ve homojen olduğundan sıfır çözümdür

Ör) $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ homojen lineer denklem s.s. çözün
$x_1 + 2x_2 = 0$ Her sütunda pivot olduğu için
$x_2 + x_3 = 0$ tek çözüm var

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2S_1 + S_2 \to S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{3S_2 + S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{1/5\, S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ör) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ homojen lineer d.s.'ni çözün
4 bilinmeyen
2 denklem $\rightarrow$ sonsuz ç.

$$\xrightarrow{1/3 S_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-5S_1 + S_2 \to S_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & -8/3 & -2/3 & -23/3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-3/8\, S_2 \to S_2}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 23/8 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_3 = a$ $\quad x_2 + \frac{a}{4} + \frac{23b}{8} = 0 \quad x_2 = -\frac{a}{4} - \frac{23b}{8}$
$x_4 = b$

$x_1 + \frac{x_2}{3} + \frac{a}{3} + \frac{4b}{3} = 0$ vesaire vesaire...

---

* Ters simetrik ise $A^t = -A$

* $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B.B^{-1}).A^{-1} = A.A^{-1} = I$
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}.B = I$

$\Big\}$ kanıt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

İdempotent Matris

(A^2)

∝ A = kare matris olmak üzere $A.A = A$ ise idempotent matristir

∝ idempotent matrisin rankı iz'e eşittir (trace)

∝ A, $n \times n$ idempotent matris ve $rank(A) = n$ ise A matrisi birim matristir

* rank: eşelon formdaki matristeki pivot sayısı

* iz: Asal köşegen üzerindeki bileşenlerinin toplamı

∝ Birim matrisler idempotent matrislerdir

∝ İdempotent matrislerin özdeğerleri 0 veya 1'den oluşur

* A kare matris olmak üzere;

- $A^3 = A$ ise → tripotent matris
- $A^n = 0$ $n \in N$ olan bir n sayısı varsa → nilpotent m.
  n → bu matrisin indeksi (derecesi)

Reel ve Kompleks Matris

∝ Reel m. → tüm elemanları reel sayı ise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -4 & 3/7 \end{bmatrix}$$

∝ Complex m. → elemanlarından en az biri "i" sanal birimi içeriyorsa

$$B = \begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ \frac{1}{4} & 3i \end{bmatrix}$$

Kompleks Matrisin Eşlenik Devriği

- $A^* = \overline{A^T}$
- Devriğini bulduktan sonra bir de eşleniğini alırız
  - $z = a+bi$ $\quad \bar{z} = a-bi$ (i'li kısım işaret değiştirir)

ÖR) $A = \begin{bmatrix} 3+7i & 0 \\ 2i & 4-i \end{bmatrix}$ ise A^*?

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{3+7i} & \overline{2i} \\ \overline{0} & \overline{4-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-7i & -2i \\ 0 & 4+i \end{bmatrix}$$

- $(A^*)^* = A$
- $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$
- $(k.A)^* = \bar{k}.A^*$
- $(A.B)^* = B^*.A^*$

A ve B kompleks matris ve k bir karmaşık sayı olmak üzere

Hermitian Matris

- Özel tanımlanmış bir "kare" matris
- Bir matrisin eşlenik devriği kendisine eşitse hermisyen matristir ($A^* = A$ ise)
- Reel matrislerde $A = A^T$ ise A simetriktir
  - Simetrik tüm reel matrisler hermisyen matristir
- Reel sayıların eşleniği yine kendisidir

ÖR) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ hermisyen mi? $\quad$ evet

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Kompleks sayılarda hermisyen olduğunu (kısa yoldan) anlama
  - köşegendekiler reel olmalı
  - simetrik olanlar eşlenik olmalı

(kare değilse zaten olamaz)

- $(\bar{A})' = -A$ ise A ters Hermitian matrisi
  - köşegen elemanları ya sıfır ya da sanal sayılar

detA = 0 ise A singular matrix

detA ≠ 0 ise A non singular matrix

Bir Matrisin Tersinin Varolma Şartları

1- Kare matris olmalı

2- Determinantı sıfırdan farklı olmalı (detA ≠ 0)

NOT) Determinant Hesaplama (detA , |A|) → gösterilir

* 1×1 matrisinde kendisine eşittir

* 2×2 matrisinde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ detA = a.d − b.c

* 3×3 matrisinde sarrus yöntemi ile. (ilk iki satır sonuna tekrardan eklenip sağa doğru olan çarpım toplamlarından − sola olanlarınki çıkar)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{det}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

$a.e.k + d.h.c + g.b.f - c.e.g - f.h.a - k.b.d$

* bütün matrislerin determinantını bulmanızı sağlayan yöntem → kofaktörler (eş-çarpan) ile determinant hesaplama

* $A_{21} \to a_{21}$ elemanının kofaktörünü temsil eder
* $A_{mn} = (-1)^{m+n} \cdot |\;\;|$ → m. satır ve n. sütun atıldıktan sonra kalan kısmın determinantı. (a_{mn} elemanın minörü)

ÖR) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ise $A_{31} = ?$

$(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 = 8$

* Kofaktör ile determinant hesaplama:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det $= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

(bir sütun veya satır seçip bu işlemi yaparız)

→ Laplace Açılımı

Determinant özellikleri

1- Bir matriste tamamen sıfırdan oluşan satır veya sütun varsa o matrisin determinantı sıfırdır

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ için det=0 $\quad \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$ için det=0

2- Bir matriste bir satır veya sütun başka bir satır veya sütunun aynısı ise (satır-satır / sütun-sütun ilişkisine bakılır) veya kat. ise determinantı sıfırdır.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 15 \\ 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}$ için det=0 $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ için det=0

3- Bir matriste iki satır veya iki sütun yer değiştirirse determinantın işareti değişir

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ için det=m ise $\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix}$ için det=-m

4- Bir matrisin bir satırı veya bir sütunu bir sayı ile çarpılırsa determinantı da o sayı ile çarpılır

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ için det=m ise $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$ için det=2m

5- Bir "satır" bir başka satıra eklenir veya çıkarılırsa, bir satır bir sayı ile çarpılıp diğer bir satıra eklenir veya çıkarılırsa determinant değişmez

Ör) $\begin{vmatrix} 2010 & 2011 \\ 2012 & 2013 \end{vmatrix} \overset{det}{=} ?$ $\quad \begin{vmatrix} 2010 & 2011 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{det}{=} -2$

ikinci satırdan ilk satırı çıkardık

6- Köşegen matris, Alt üçgen matris, üst üçgen m.
→ determinantları köşegendeki elemanların çarpımına eşit

det hesaplarken matrisi bu hallerden birine getirip de hesaplayabiliriz

$\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$ köşegen matris yaz
determinant değerinin -1 ile çarpılması $\begin{bmatrix} \diagdown \end{bmatrix}$

7 - $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

8 - $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

9 - $\det(A^T) = \det A$

10 - $\det(A^n) = (\det A)^n$

11 - $\det(k \cdot A) = k^{\text{satır sayısı}} \cdot \det A = k^n \cdot \det A$

ÖR) $\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}_{7\times 7}$ matrisinin determinantı?

$R_1 \leftrightarrow R_7$ (-1 ile $\det A$ çarp)
$R_2 \leftrightarrow R_6$ ''
$R_3 \leftrightarrow R_5$ ''

yukarıdaki işlemlerin sonucunda
$(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot \det A = -1$ köşegen matris olur

Satır sayısı tekse köşegenlerindekilerin çarpımının eksilisi determinanta eşit. direkt

ÖR) $A = \begin{bmatrix} a&b&c \\ d&e&f \\ g&h&k \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı -3 ise $\det B = ?$ $B = \begin{bmatrix} a&b&c \\ g+2a & h+2b & k+2c \\ 3d & 3e & 3f \end{bmatrix}$

$S_2 \leftrightarrow S_3$ sonra $3S_3$ sonra S_2'ye $2S_1$ eklenmiş

$-\det A \longrightarrow -3\det A \xrightarrow[\text{değişmez}]{} -3\det A$ $\quad -3\det A = \det B$
$9 = \det B$

α Bir determinantın herhangi bir satır (ya da sütun) elemanları başka bir satırın (ya da sütunun) elemanlarının kofaktörleriyle çarpılarak elde edilen terimlerin toplamı sıfırdır

$\begin{bmatrix} a&b&c \\ d&e&f \\ g&h&k \end{bmatrix}$ için $d \cdot G + e \cdot H + f \cdot K = 0$

adjoint
adj ∝ ek matris : Ek A

Bir kare matrisin elemanlarını yerine o elemanların eş çarpanlarını yaz. Sonra onun transpozesini al

∝ $A^{-1} = \dfrac{\text{Ek} A}{|A|}$

∝ $|A| = 0$ ise A matrisinin tersi yoktur

∝ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

→ Öncekilerin birleştirilmiş hali

∝ regüler matris → terslenebilir matris $(\det A \neq 0)$

∝ $(B)^{-1} = A$ ise $((B)^{-1})^{-1} = (A)^{-1}$ yani $B = A^{-1}$ olur

∝ $\begin{vmatrix} x+y & z+t \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z \\ a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & t \\ a & b \end{vmatrix}$

ÖR) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & m & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin rangı = 2 olması için $m = ?$

(2×2) için $\det \neq 0$ olur

(3×3) için $\det = 0$

m'in içinde bulunduğu 3x3'lük parça alıp $\det = 0$ için buluruz inversi = tersi

NOT

a_{11}, a_{22} → Kare matrisin köşegenleri → Asal köşegen elemanları

izA → kare matrisin izi → Asal köşegen elemanlarının toplamı

→ köşegen matrisin asal köşegen elemanları birbirine eşitse → skaler matris

→ $A=B$ eşit matrisler böyle ifade edilir

→ Bir matris bir skaler ile çarpıldığında her bir eleman o skaler ile çarpılır

→ $\lambda.(A+B) = \lambda A + \lambda B$ λ = skaler sayı

→ $A(BD) = (AB)D$ → $A(B+C) = AB + AC$

→ $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

→ $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B değişmelidir

→ Transpoze A^t ya da A' ile gösterilir

→ $(A+B)^t = A^t + B^t$ → $(A^t)^t = A$

→ $(\lambda A)^t = \lambda . A^t$ → $(A.B)^t = B^t . A^t$

→ $A^t = -A$ ise A = ters simetrik matris (anti-simetrik matris)

→ A kare matrisi için $A^{p+1} = A$ olacak bir pozitif p tamsayısı varsa, A matrisi → periyodik matris
p ise A matrisinin periyodudur

→ $A^2 = I$ ise A kare matrisi → involut matris

→ $\bar{A}$ = Eşlenik matris gösterimi

→ $(\overline{kA}) = \bar{k}\bar{A}$ k=skaler → $(\overline{A+B}) = \bar{A} + \bar{B}$

→ $(\overline{AB}) = \bar{A}\bar{B}$

→ $AB = BA = I_n$ ise B matrisi A matrisinin tersi

→ H_{ij} = satır değişimi → K_{ij} = sütun değişimi

→ $H(\lambda)$ = satırı λ skaleriyle çarpmak → $K(\lambda)$ = sütunu λ skaleri ile çarpmak

→ $H_{ij}(\lambda)$ = j satırını λ ile çarpıp i satırına ekle

→ $K_{ij}(\lambda)$ j sütununu λ ile çarpıp i sütununa ekle

→ $A \sim B$ Satırca (veya sütunca) denk matris gösterimi

→ Hem satırca hem sütunca indirgenmiş eşolan formda ise $[I_k \; 0]$, $\begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, I_k } Bunlardan birine denk

→ Bunlardan herhangi biri şeklinde yazmak → normal forma getirmek

$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

α Ortogonal matris $A^{-1} = A^{T}$

tersi bulma sırası $\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

1- a'yı 1 yap
2- d ve g'yi sıfır yap
3- e'yi bir yap
4- b ve h'yi sıfır yap
5- m'yi bir yap
6- c ve f'yi sıfır yap

α Kofaktör açılımıyla tersini bulmak → Ek matris kullanarak

Cramer Metodu

Bilinmeyen sayısı = denklem sayısı olmalı (çünkü det kullanır)

1 → $Ax = B$ formatında yaz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2 → $x = \frac{|\Delta x|}{|A|}$ $\quad y = \frac{|\Delta y|}{|A|}$

$\Delta x = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ sütuna b ifadesi gelmiş hali

$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

VEKTÖRLER

- $\vec{A}(1,5,7)$ → bitiş noktası
  - konum yer vektörü
  - → başlangıç noktası orjin

- $\vec{AB}$ → $\vec{B} - \vec{A}$
  $A(1,5,7)$ $B(3,1,-2)$
  - B - A yapılırsa konum yer vektörü bulunur

Vektör Uzunluğu (modül)

$|\vec{U}|$ veya $\|\vec{U}\|$ şeklinde gösterilir

$\vec{U} = (x,y,z)$ ise $|\vec{U}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Birim vektör yapma

$\frac{\vec{U}}{|\vec{U}|}$ → kendisi ile aynı yönlü ve doğrultulu birim vektörü bulmamızı sağlar

$-\frac{\vec{U}}{|\vec{U}|}$ → kendisi ile zıt yönlü ama aynı doğrultulu birim vektörü bulmamızı sağlar

Birim baz vektörler

$i = e_1 = (1,0,0)$

$j = e_2 = (0,1,0)$

$k = e_3 = (0,0,1)$

İç çarpım (skaler)

α $\vec{u}\cdot\vec{v}$ veya $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle$ şeklinde gösterilir

α $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ ise $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$

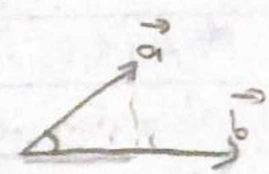
α $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$

paralellik şartı

α $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$

α $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ olmalı

dik izdüşüm vektörünü bulma:



α dik izdüşüm vektörü uzunluğu $=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

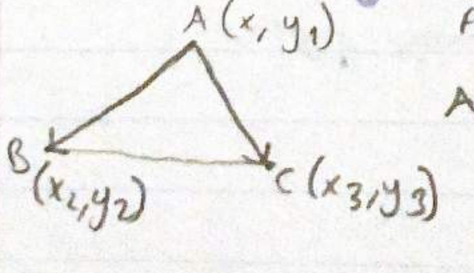
α dik izdüşüm vektörü $=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

ÖR) $\vec{A}=(1,2,-1)$ ve $\vec{B}=(3,1,1)$ ise A vektörünün B vektörü üzerine dik izdüşüm vektörünü bulunuz

$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{3+2+-1}{\sqrt{11}}=\frac{4}{\sqrt{11}}$ $\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{(3,1,1)}{\sqrt{11}}=\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$

$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\left(\frac{12}{11},\frac{4}{11},\frac{4}{11}\right)$

düzlemde üçgen alanı



$\vec{AB}=B-A$ $\vec{AC}=C-A$

$A(ABC)=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\vec{AB}\\ \vec{AC}\end{pmatrix}\right|$

ÖR) $A(1,-3)$, $B(2,1)$ ve $C(4,3)$ olan ABC üçgeninin alanı?

$\vec{AB}=(1,4)$ $\quad \vec{AC}=(3,6)$

$$A(ABC)=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{AC})\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&4\\3&6\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot|6-12|=3$$

vektörel çarpım

$\vec{A}=(x_1,y_1,z_1)$

$\vec{B}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}i&j&k\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

(C) yeni oluşan vektör A ve B'ye diktir → yani $C.A=0$, $C.B=0$ skaler çarpımdan

ÖR) $\vec{A}=(1,2,3)$ $\vec{B}=(2,1,-1)$ ise $\vec{A}\times\vec{B}=?$

$$\begin{vmatrix}i&j&k\\1&2&3\\2&1&-1\end{vmatrix}=(-2i+k+6j)-(4k+3i-j)=-5i+7j-3k$$

$$\begin{matrix}i&j&k\\1&2&3\end{matrix}$$

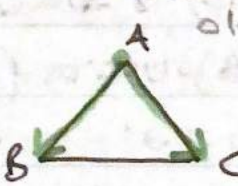
$\vec{A}\times\vec{B}=(-5,7,-3)$

Uzayda üçgen alanı

∝ Vektör yardımıyla buluruz

∝ $A(ABC)=\dfrac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{2}$

köşeleri aynı olan iki vektör seç



ÖR) ABC bir üçgen. $\vec{CA}=(1,2,-1)$ ve $\vec{CB}=(3,4,1)$ ise alan nedir?

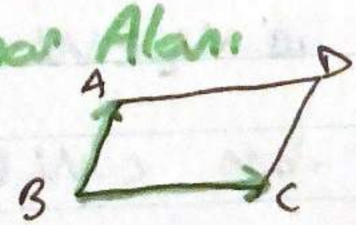
$$\vec{CA}\times\vec{CB}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&2&-1\\3&4&1\end{vmatrix}=(6,-4,-2)$$

$$\begin{matrix}i&j&k\\1&2&-1\end{matrix}$$

$$\text{Alan}=\frac{\|\vec{CA}\times\vec{CB}\|}{2}=\frac{\sqrt{36+16+4}}{2}$$

Uzayda Paralelkenar Alanı

$A(ABCD)=\|\vec{BA}\times\vec{BC}\|$



V = vektör uzayı $\vec{0}$ = sıfır vektörü

Vektör Uzayı

- Vektör uzayı boş olmayan bir kümedir
- İçindeki elemanlar belli şartları yerine getirmeli
- Toplama ve çarpma işlemleriyle ilgili şartlar var

$u, v, w \in V$ herhangi üç eleman

$\alpha, \beta \in R$ sabit skaler sayı

1- $u + v \in V$

2- $u + v = v + u$ toplamada değişme özelliği

3- $(u+v)+w = u+(v+w)$ birleşme özelliği

4- $u + 0 = u$ toplamada etkisiz elemana sahip mi

5- Her elemanın toplamaya göre tersi olmalı $u+(-u)=0$

6- $\alpha \cdot u \in V$

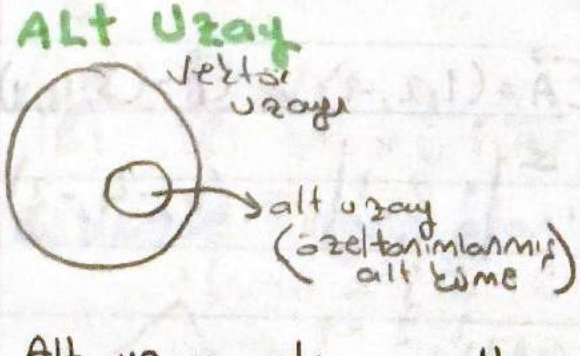
7- $\alpha \cdot (u+v) = \alpha u + \alpha v$

8 $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha u + \beta u$

9 $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

10 $1 \cdot u = u$

Alt Uzay



öylesine simge

Alt uzay olma şartları (W = alt uzay)

1- $W_1 \in W$ ve $W_2 \in W$ iken $W_1 + W_2 \in W$

2 $W_1 \in W$ iken $c \cdot W_1 \in W$
$c \in R$

1 → toplama işlemine kapalı olması
2 → çarpma " " "

ÖR) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 = 0\}$ kümesi R^3'ün bir alt uzayı mıdır?

1. şart) $(\underbrace{0}, x_2, x_3) \in W$ $\quad (\underbrace{0}, x_2+y_2, x_3+y_3) \in W$

$(\underbrace{0}, y_2, y_3) \in W$

şartı sağladı

2. şart) $(\underbrace{0}, x_2, x_3) \in W$

$c \in R$ $\quad c.(0, x_2, x_3)$

$(\underbrace{0}, cx_2, cx_3) \in W$

şartı sağladı

yani W kümesi R^3'ün bir alt uzayıdır

ÖR) $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 + x_2 = 2\}$ kümesi R^3'ün bir alt uzayı mı? değil

1. şart)

$(x_1, x_2, x_3) \in V \quad x_1 + x_2 = 2$

$(y_1, y_2, y_3) \in V \quad y_1 + y_2 = 2$

$(\underbrace{x_1+y_1}_{2}, \underbrace{x_2+y_2}_{2}, x_3+y_3) \notin V \longrightarrow x_1+y_1+x_2+y_2 = 2$ olmalıydı

NOT)

→ $\odot$ → skaler çarpım $\quad \oplus$ → vektörel toplam

→ V vektör uzayındaki elemanların toplamsal inversleri tektir

→

$k \to$ skaler $t \to$ skaler

Vektörler kitap not

∝ $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

∝ $k(t\vec{a}) = t(k\vec{a}) = (k.t)\cdot\vec{a}$

∝ $\vec{a} = x\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ kartezyen baz cinsinden ifade

$\rightarrow$ x, y ve $z \rightarrow$ bileşenler

∝ $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ $\vec{c} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.\cos\theta$

∝ $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ skaler

∝ $k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (k\cdot\vec{a})\vec{b}$ çarpım için

∝ $\vec{a}.\vec{b} = 0$ ise $\vec{a} \perp \vec{b}$

∝ $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ (schwartz eşitliği)

∝ $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (üçgen eşitsizliği

∝ $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ veya $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektörel çarpım gös terimi

$\rightarrow$ $\vec{c} \perp \vec{a}$ ve $\vec{c} \perp \vec{b}$ olur

$\vec{c} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$

∝ $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$ vektörel

∝ $\vec{a} \wedge (\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\wedge\vec{b}) + (\vec{a}\wedge\vec{c})$ çarpım için

∝ $k(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (k\vec{a})\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge(k\vec{b})$

∝ $|\vec{a}\wedge\vec{b}| = \vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenar

∝ iki vektör paralelse $\vec{a}\wedge\vec{b} = 0$

∝ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) \rightarrow$ karma çarpım

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$= \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmi

∝ $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) \rightarrow$ iki kat vektörel çarpım

∝ genelde $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) \neq (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$

∝ $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$