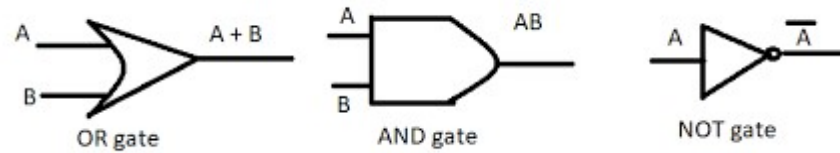
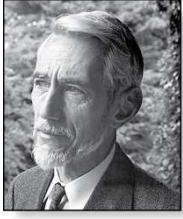


# Bölüm 3

## Boole Cebri





Claude Shannon  
(1916 - 2001)

---

- Boole fonksiyonları
- Boole fonksiyonlarının gösterilimi
- Mantık kapıları
- Karnaugh haritaları

- Boole cebri  $\{0, 1\}$  üzerinden çalışır, işlem operatörleri

- + (Boolean sum)

- . (Boolean product)

- $\sim$  (Complement)

- Bu işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır

- *Boole sum*:  $1 + 1 = 1$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$0 + 0 = 0$$

↳ OR  
kapı

*Boole product:*  $1 \cdot 1 = 1$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0$$

} And  
Kapı 151

*complement:*  $\bar{0} = 1$

$$\bar{1} = 0$$

**Örnek:**  $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$  ?

$$\begin{aligned}\text{Çözüm : } 1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} &= 0 + \bar{1} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

# Boole ifadeler and Boole fonksiyonlar

---

**Tanım:**

$B = \{0, 1\}$  olsun

$B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in B, \text{ her } 1 \leq i \leq n \}$

0 ve 1'lerden oluşan tüm  $n$  bitlik değerlerin kümesi olsun.

Herhangi bir  $x$  değişkeninin değeri  $B$  kümesinden ise alabileceği değerler 0 veya 1 olur.  $x$  değişkenine ***Boolean değişken*** denir.

$B^n$  'den  $B$  'ye olan bir fonksiyona da ***n. dereceden Boole fonksiyon*** denir

□ **Örnek:** Verilen Boole fonksiyonunun değeri nedir ?

$$F(x, y, z) = xy + \bar{z}.$$

**Çözüm:**

TABLE :					
$x$	$y$	$z$	$xy$	$\bar{z}$	$F(x, y, z) = xy + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

**Tanım:**  $F$  gibi bir Boole fonksiyonunun,

$\bar{F}$

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

---

**Tanım:**  $n$  değişkenden oluşan iki Boole fonksiyonu olan  $F$  ve  $G$  eşit kabul edilebilmesi için,  $b_1, b_2, \dots, b_n$   $B$  kümesinin elemanları olduğunda  $F(b_1, b_2, \dots, b_n) = G(b_1, b_2, \dots, b_n)$  eşitliği sağlanmalıdır.

$xy$ ,  $xy + 0$  ve  $xy.1$  bu üç farklı Boole ifadesi birbirine denktir

$F + G$  olan

$$(F + G)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$FG$

$$(FG)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

[illegible]



# Boole cebirindeki özdeşlikler

Boolean Identities.	
Identity	Name
$\overline{\overline{x}} = x$	Law of the double complement
$x + x = x$ $x \cdot x = x$	Idempotent laws
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	Identity laws
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	Domination laws
$x + y = y + x$ $xy = yx$	Commutative laws
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	Associative laws
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	Distributive laws
$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x + y)} = \overline{x} \overline{y}$	De Morgan's laws
$x + xy = x$ $x(x + y) = x$	Absorption laws
$x + \overline{x} = 1$	Unit property
$x\overline{x} = 0$	Zero property

Devre tasarımlarının sadeleştirilmesinde kullanılırlar

**Örnek:**  $x(y + z) = xy + xz$  doğru mudur?

**Çözüm:**

Verifying One of the Distributive Laws.							
$x$	$y$	$z$	$y + z$	$xy$	$xz$	$x(y + z)$	$xy + xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

# Boole cebrinin soyut tanımı

---

**Boole cebri**  $\vee$ ,  $\wedge$  ikili işlemleri ve  $\sim$  tekli işlemi uygulanabilen, 0 ve 1 elemanlarına sahip ve tüm  $x, y, z$  şeklindeki değişkenlerinde bu özelliklerin tamamı uygulanabilen B kümesidir.

$$\begin{aligned}x \vee 0 &= x \\ x \wedge 1 &= x\end{aligned}$$

*Birim (identity) kuralları*

$$\begin{aligned}x \vee \bar{x} &= 1 \\ x \wedge \bar{x} &= 0\end{aligned}$$

*Tümleyen (complement) kuralları*

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee z &= x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z &= x \wedge (y \wedge z)\end{aligned}$$

*Birleşme (associative) kuralları*

$$\begin{aligned}x \vee y &= y \vee x \\ x \wedge y &= y \wedge x\end{aligned}$$

*Değişme (commutative) kuralları*

$$\begin{aligned}x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\end{aligned}$$

*Dağılma (distributive) kuralları*

## Boole fonksiyonlarının gösterilimi

- **Örnek:** Tabloda verilmiş olan  $F(x, y, z)$  and  $G(x, y, z)$  fonksiyonlarını tanımlayan Boole ifadelerini bulunuz.

**Çözüm:**

$F$  fonksiyonu sadece  $x = z = 1$  ve  $y = 0$  olduğunda 1 değerini aldığından  $F(x, y, z) = x\bar{y}z$  dir

TABLE				
$x$	$y$	$z$	$F$	$G$
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

# Çarpımların toplamı açılımı

---

- **Tanım:** Bir değişken veya tümleyenine **öğ**e (*literal*) denir. Boole değişkenleri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  'in  $y_i = x_i$  veya  $y_i = \bar{x}_i$  durumunu sağlayan  $y_1, y_2, \dots, y_n$  çarpımına **minterim** denir. Her değişken bir öğe olarak gösterildiğinde bir miniterim  $n$  tane öğenin çarpımıdır.

■ **Örnek :**  $F(x,y,z) = (x + y)$

$\bar{z}$  fonksiyonu için toplamların çarpımı açılımını bulunuz.

**Çözüm 1:**

Tabloda  $F(x,y,z)$  fonksiyonun 1 olduğu değerler alındığında  $F(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

x	y	z	x + y	$\bar{z}$	$(x + y)\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

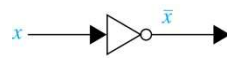
**Çözüm 2:**

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (x + y) \bar{z} \\ &= x\bar{z} + y\bar{z} \quad \text{dağılma kuralı} \\ &= x1\bar{z} + 1y\bar{z} \quad \text{özdeşlik kuralı} \\ &= x(y + \bar{y})\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z} \quad \text{birim özelliği} \\ &= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{z} \quad \text{dağılma kuralı} \\ &= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} \quad \text{değişmezlik kuralı} \end{aligned}$$

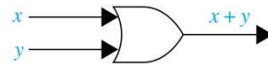
# Mantık kapıları

Devrelerin temel elemanları kapılardır ve kapı türleri farklı bir Boole işlemini gerçekleştirmektedir.

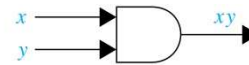
Kullanılan kapılar OR (toplama), AND (çarpma), NOT (tersi)



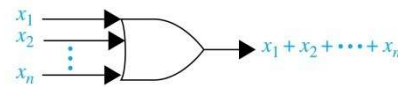
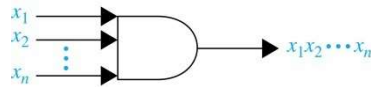
(a) Inverter



(b) OR gate

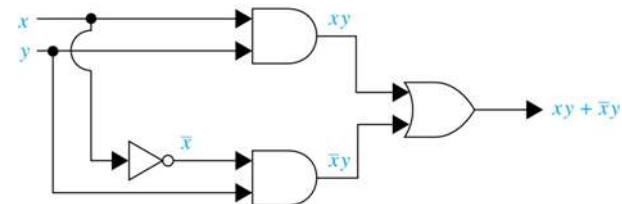
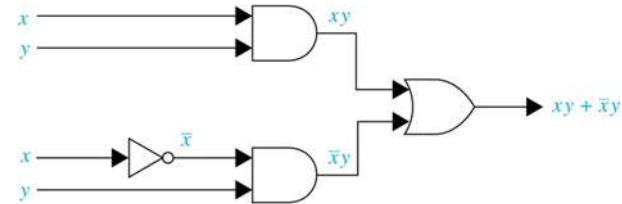


(c) AND gate



$$xy + \bar{x}y$$

ifadesini mantık kapıları ile gösterelim



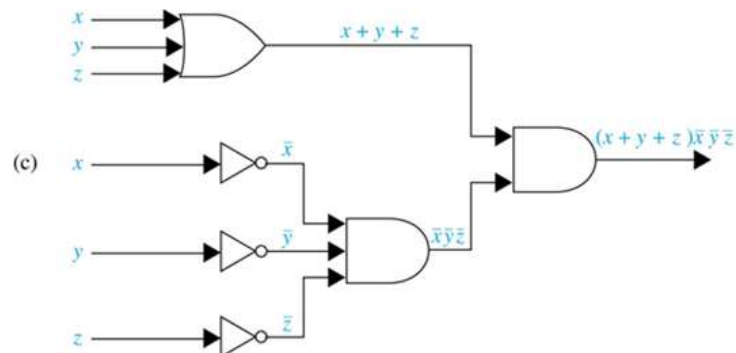
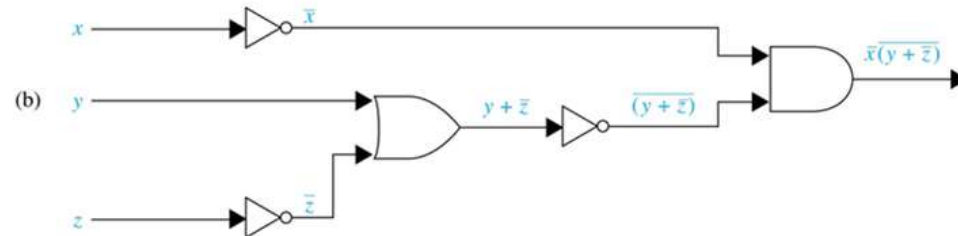
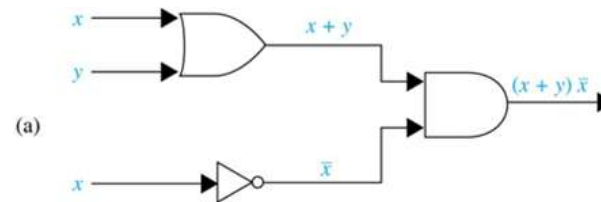
## ■ Örnek

Aşağıdaki ifadeleri mantık kapıları ile tasarlayınız

(a)  $(x + y)\bar{x}$

(b)  $\bar{x}(y + \bar{z})$

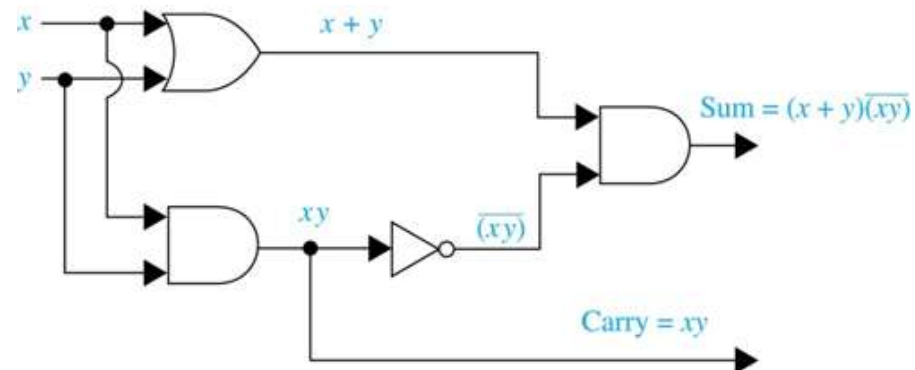
(c)  $(x + y + z)(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$



# Devre örnekleri

- ❑ İki bitlik yarı toplayıcı devresi (half adder)

Input and Output for the Half Adder.			
Input		Output	
<i>x</i>	<i>y</i>	<i>s</i>	<i>c</i>
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0





# Karnaugh diyagramları

---

<https://youtu.be/zFPAuskKETg>

<https://youtu.be/gEFyd7aWHok>

<https://youtu.be/BJIN7fZc2SU>

<https://youtu.be/PSCtOXoFmGY><https://youtu.be/diwmhcsIjJA>

<https://youtu.be/GgazfgKMAZE>