Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Primer Semestre de 2016

IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación
Tarea 3

1. Usando el teorema de compacidad para la lógica de primer orden (LPO)

Decimos que un conjunto Σ de oraciones sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ es *satisfacible* si existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que para cada fórmula φ de Σ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$. Decimos también que el conjunto Σ es *finitamente satisfacible* si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Teorema (compacidad para LPO). Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario, y Σ un conjunto de oraciones sobre $\mathcal{L}$. Se tiene que Σ es satisfacible si y solo si Σ es finitamente satisfacible.

Vamos a usar el teorema para mostrar que la siguiente propiedad no es definible en lógica de primer orden sobre el vocabulario $\mathcal{L} = \{E, a, b\}$:

$$P = \{\mathfrak{A} \in \texttt{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ es un grafo y existe un camino entre } a^{\mathfrak{A}} \text{ y } b^{\mathfrak{A}}\}.$$

La demostración es por contradicción. Asumamos que esta propiedad es definible por un conjunto Γ finito de oraciones. Vale decir, Γ es tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$ si y solo si $\mathfrak{A} \in P$. Para cada $i > 0$, sea φ_i la oración que me dice que no existe un camino de largo i entre $a^{\mathfrak{A}}$ u $b^{\mathfrak{A}}$. Por ejemplo, $\varphi_1 = \neg E(a, b)$ y $\varphi_3 = \neg(\exists x \exists y E(a, x) \wedge E(x, y) \wedge E(y, z))$. Consideramos el conjunto $\Omega = \{\varphi_i \mid i > 0\}$ de oraciones, y definimos $\Sigma = \Gamma \cup \Omega$. Notar que este conjunto no es satisfacible (¿Por qué?).

Sin embargo, todo subconjunto finito de Σ es satisfacible: para ver esto, sea $C \subseteq \Sigma$ finito, y sea n un número tal que $\varphi_j \notin C$ para cada $j \geq n$ (sabemos que hay tal número por que C tiene una cantidad finita de φ_is). Luego la siguiente estructura satisface a C: $\mathfrak{A} = \langle D, E^{\mathfrak{A}}, a^{\mathfrak{A}}, b^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $D = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ (es decir, $\mathfrak{A}$ es un grafo con $n + 1$ vértices), $E^{\mathfrak{A}} = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i > 0\}$ (es decir, $E^{\mathfrak{A}}$ define un camino entre v_1 y v_n), $a^{\mathfrak{A}} = v_1$ y $b^{\mathfrak{A}} = v_{n+1}$. Como C fue escogido arbitrariamente, concluímos que Σ es finitamente satisfacible. Tenemos una contradicción por el teorema de compacidad.

2. Problemas

Problema 1. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$ un vocabulario con una relación binaria. Muestre que las siguientes propiedades no son definibles en lógica de primer orden.

1. El conjunto de las $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ en donde $E^{\mathfrak{A}}$ es una relación de equivalencia con un número finito de clases de equivalencia
2. El conjunto de las $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ en donde $E^{\mathfrak{A}}$ representa un grafo que es un árbol.
3. El conjunto de todas las $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ en donde $E^{\mathfrak{A}}$ representa un grafo, y todos los vértices en ese grafo son parte de un ciclo finito.

Problema 2. Uno de los teoremas más importantes que vimos en lógica proposicional era la existencia de sistemas deductivos para la lógica proposicional, lo que nos daba otra forma de demostrar cuando un conjunto de formulas no era satisfacible.

Para lógica de primer orden también existen sistemas deductivos, quizás el más conocido es el sistema deductivo de Hilbert:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_system`

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario. En abstracto, dado un conjunto Σ de oraciones sobre $\mathcal{L}$ y una oración φ también sobre $\mathcal{L}$, decimos que $\Sigma \vdash_H \varphi$ si podemos usar el sistema deductivo de Hilbert para deducir φ desde Σ.

Teorema (completitud y correctitud del sistema de Hibert). Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario, Σ un conjunto de oraciones sobre $\mathcal{L}$ y φ una oración también sobre $\mathcal{L}$. Se tiene que $\Sigma \models \varphi$ si y solo si $\Sigma \vdash_H \varphi$.

Use el teorema de completitud y correctitud para demostrar el teorema de compacidad para la lógica de primer orden. Para esto puede usar la siguiente propiedad del sistema deductivo de Hilbert: Si $\Sigma \vdash \varphi$, entonces el largo de la demostración generada por el sistema deductivo es finito.

Problema 3 En este problema trabajaremos con la lógica infinitaria $L_{\infty,\omega}$, que definimos a continuación. Sea $\mathcal{L}$ un vocaboluario. Las fórmulas en $L_{\infty,\omega}$ se definen como:

- Si φ es una fórmula en lógica de primer orden sobre $\mathcal{L}$, entonces φ es una fórmula en $L_{\infty,\omega}$ sobre $\mathcal{L}$.
- Si Σ es un conjunto de fórmulas en lógica de primer orden sobre $\mathcal{L}$, entonces $\bigvee_{\varphi\in\Sigma}$ y $\bigwedge_{\varphi\in\Sigma}$ son fórmulas en $L_{\infty,\omega}$ sobre $\mathcal{L}$.

La semántica se extiende desde la semántica de la lógica de primer orden de forma natural: una asignación y una estructura satisfacen $\bigwedge_{\varphi\in\Sigma}$ si satisfacen a cada fórmula en Σ, y satisfacen a $\bigvee_{\varphi\in\Sigma}$ si satisfacen al menos a una fórmula en Σ.

Las siguientes preguntas tienen que ver con mostrar que $L_{\infty,\omega}$ es demasiado poderosa.

1. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot), < (\cdot,\cdot)\}$ un vocabulario con dos relaciones binarias. Muestre como expresar las siguientes propiedades usando $L_{\infty,\omega}$:
   - $P = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura con dominio finito $\}$
   - $P = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura en donde $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden lineal $\}$
2. Muestre que toda propiedad axiomatizable o co-axiomatizable es definible si usamos $L_{\infty,\omega}$
3. Muestre que el teorema de compacidad no es cierto para $L_{\infty,\omega}$. Es decir, dé un ejemplo de un conjunto de oraciones en $L_{\infty,\omega}$ que sea finitamente satisfacible, pero no satisfacible.
4. Nuevamente tome $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot), < (\cdot,\cdot)\}$, y sea $\texttt{STRUCT}^{\text{fin},<}[\mathcal{L}]$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-estructuras que satisfacen las dos fórmulas del punto 1 arriba (es decir, que tienen dominio y que la interpretación de $<$ es un orden linear). Muestre que para cualquier propiedad $P \subseteq \texttt{STRUCT}^{\text{fin},<}[\mathcal{L}]$ existe una fórmula φ en $L_{\infty,\omega}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y solo si $\mathfrak{A} \in P$.