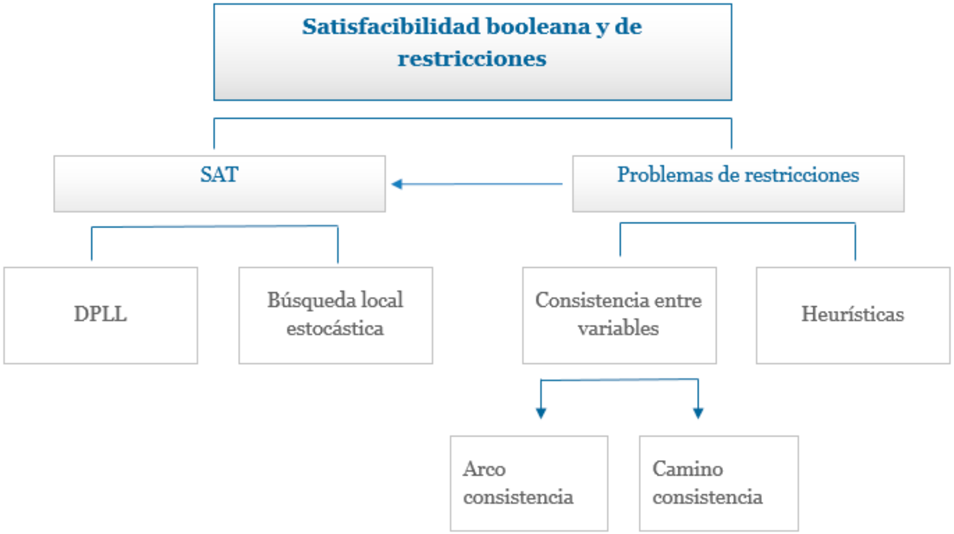
Elena Verdú Pérez

Satisfacibilidad booleana y de restricciones

Objetivos de la clase



- Definir un problema de satisfacibilidad booleana / de restricciones.
- Reconocer cuando un problema se puede resolver mediante satisfacibilidad booleana / de restricciones.
- Representar problemas de satisfacibilidad booleana / de restricciones.
- Resolver un problema sencillo de satisfacibilidad booleana mediante el método DPLL.
- Identificar algoritmos que resuelven problemas de satisfacción de restricciones.

Satisfacibilidad Booleana

El **problema de satisfacibilidad booleana** (SAT) consiste en hallar una asignación a una serie de variables booleanas para satisfacer una fórmula lógica.

SAT: Formalización en lógica proposicional

Operadores permitidos:

- Conjunciones (*AND* lógico, Λ)
- Disyunciones (*OR* lógico, V)
- Negaciones (¬)
- Paréntesis

Satisfacibilidad Booleana

Forma Normal Conjuntiva (CNF):

- ❑ Representar una fórmula lógica como una **conjunción de disyunciones de literales.**
- ❑ Un literal de una variable es bien la variable afirmada o bien negada.
- ❑ Una disyunción de literales se denomina cláusula.

Toda fórmula expresada en lógica proposicional puede pasarse a CNF usando transformaciones booleanas convencionales.

Problema muy estructurado al que pueden reducirse otros problemas
→ Un único resolutor SAT puede resolver diferentes problemas

Satisfacibilidad Booleana

EJEMPLO I: *¿Es satisfacible la siguiente expresión booleana?* $p \wedge (q \vee \neg p)$

A cada asignación de variables que aparecen en la fórmula se le denomina modelo → el objetivo es encontrar un modelo M que satisfaga la fórmula: M $\models$ F

p	q	$p \wedge (q \vee \neg p)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

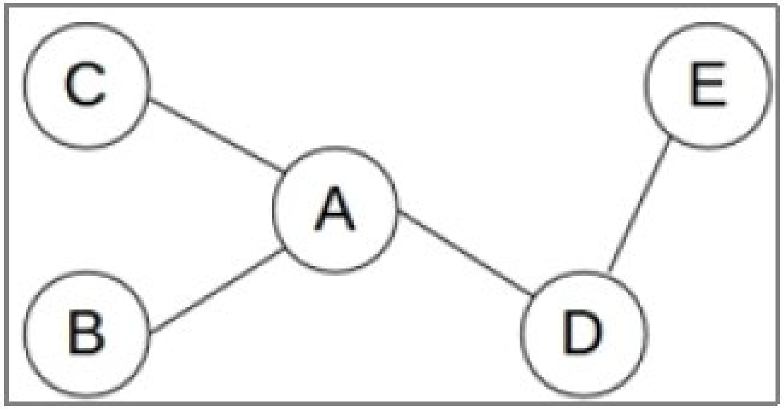
Satisfacibilidad Booleana

EJEMPLO 2: *¿Es satisfacible la siguiente expresión booleana?*

$$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg \mathrm{q}$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg \mathrm{q}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0

Satisfacibilidad Booleana

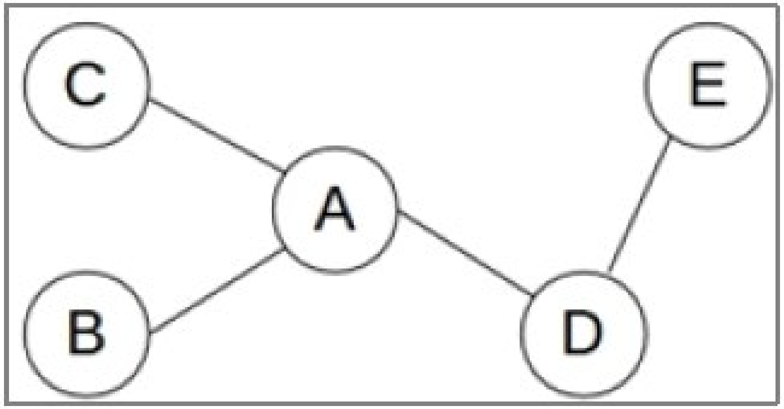


- Las zonas **A-B-C-D-E** tienen que estar vigiladas por guardias
- Una zona está vigilada si un guardia está en dicha zona o en una adyacente

$$F = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (d \vee e)$$

¿Cuál es la solución si sólo hay dos guardias?

Satisfacibilidad Booleana



- Las zonas **A-B-C-D-E** tienen que estar vigiladas por guardias
- Una zona está vigilada si un guardia está en dicha zona o en una adyacente

$$F = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (d \vee e)$$

¿Cuál es la solución si sólo hay dos guardias? Se añaden a F cláusulas tal **que se evite que 3, 4 ó 5 zonas tengan asignadas guardias de seguridad a la vez**.

$$(\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d \vee \neg e)$$

Modela que al menos 1 zona no está vigilada de las 5 (no hay cinco guardias)

$$(\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg d \vee \neg e) \wedge$$
$$(\neg a \vee \neg c \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg d \vee \neg e)$$

Modela que no haya cuatro guardias asignados a cuatro zonas

Satisfacibilidad Booleana: DPLL

DPLL es un algoritmo para resolver el problema de SAT con una búsqueda en profundidad.

Características del problema SAT:

- ❑ No es relevante que la solución sea óptima
- ❑ Construir la solución asignando valores incrementalmente es beneficioso porque si una cláusula contiene:
  - el literal elegido, se puede eliminar la cláusula porque ya está satisfecha.
  - la negación de un literal, se puede eliminar dicho literal pues la satisfacibilidad de la cláusula depende del resto de literales.
- ❑ Se tiene un límite en la profundidad de la solución

Satisfacibilidad Booleana: DPLL

Dado que es beneficioso resolver el problema SAT asignando valores incrementalmente…la solución puede verse como una secuencia de asignaciones de valores

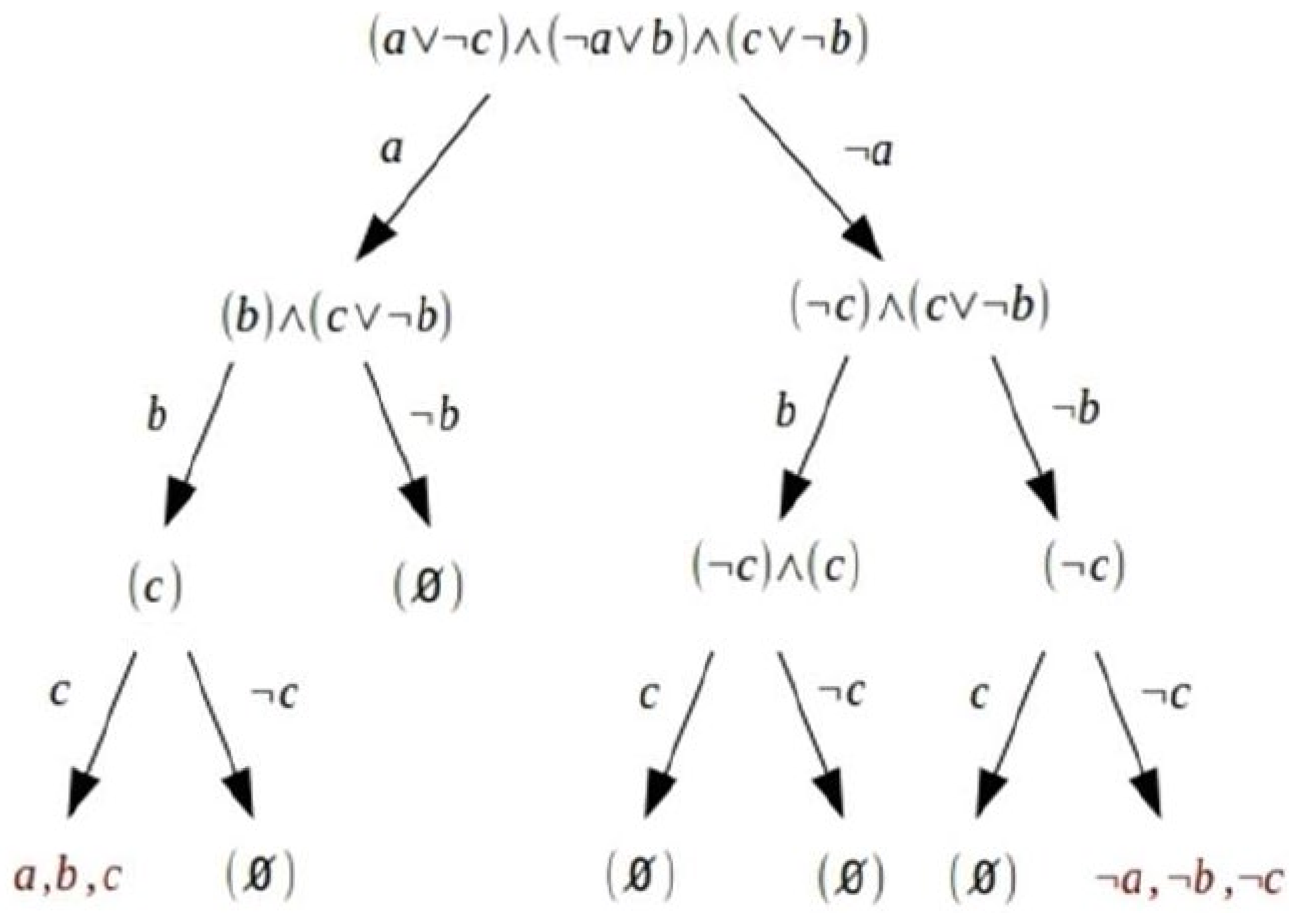
$$F = (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$$

$$\Big\downarrow \; a=1$$

$$F = (b \vee c)$$

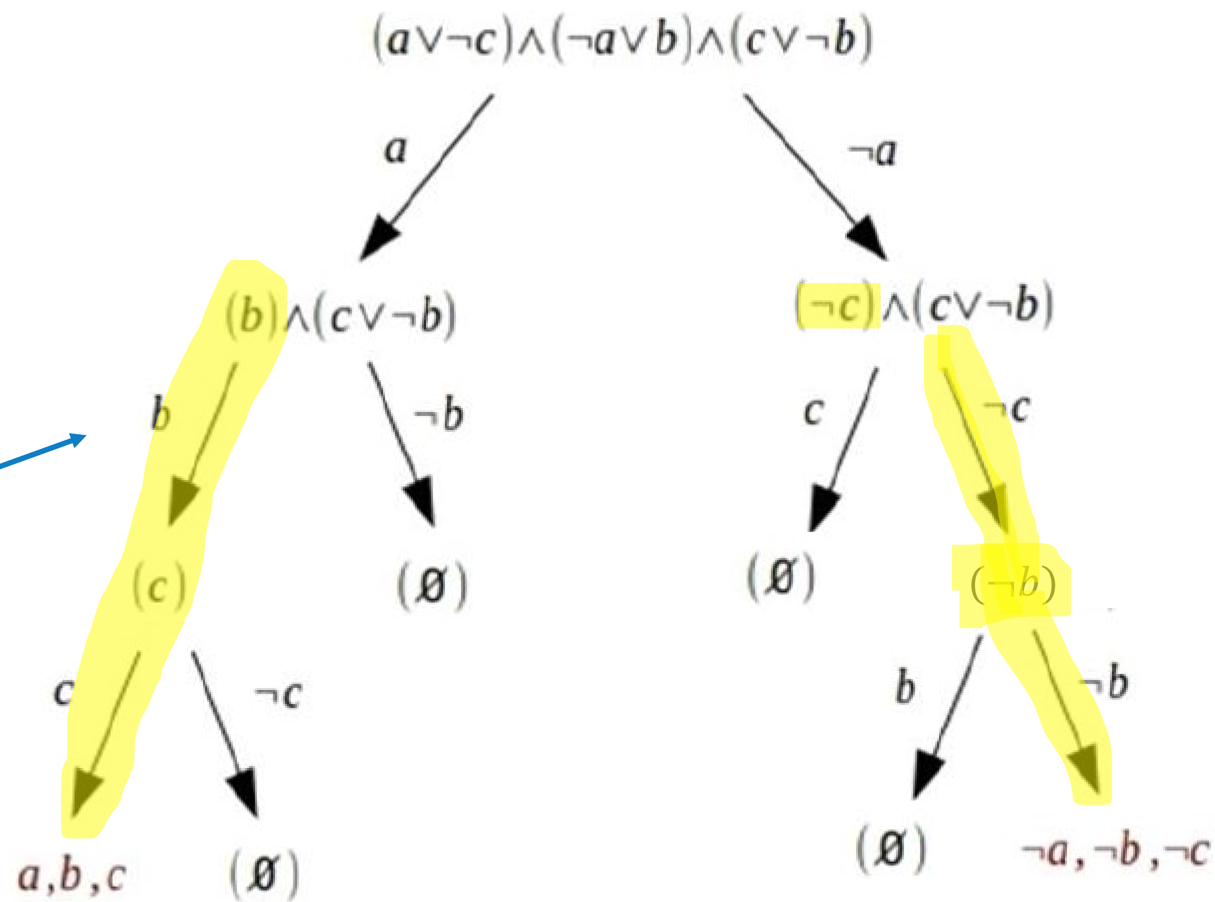
Satisfacibilidad Booleana: DPLL

$$F = (a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (c \vee \neg b)$$



Satisfacibilidad Booleana: DPLL

$$F = (a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (c \vee \neg b)$$



Resolución unitaria: si en un nodo hay una o más cláusulas unitarias, se eligen directamente los literales que los componen.

Satisfacibilidad Booleana: DPLL

En cada nodo del árbol se decide:
- ❑ Qué variable asignar
- ❑ Qué valor dar a la variable

¡Estas decisiones tienen un impacto significativo en el número de ramas que hay que explorar!

Podemos utilizar heurísticas para estimar qué nodo es el que lleva a una solución con mayor probabilidad:
- ❑ Elegir la variable y el literal que más simplifiquen F
- ❑ Elegir la variable y el literal que satisfaga cláusulas difíciles de resolver

Satisfacibilidad Booleana: búsqueda local estocástica

- La búsqueda local estocástica consiste en ir cambiando la asignación de valores de las variables hasta encontrar una solución, partiendo de un modelo inicial no válido generado aleatoriamente.

- El cambio se realiza entre asignaciones vecinas (a las que se puede llegar con un único cambio).

- La aleatoriedad permite tener cierta probabilidad de escapar de regiones poco prometedoras.

GSAT: Cambia una variable al azar o elige el cambio que minimice el nº de cláusulas sin satisfacer, alternando con una probabilidad.
WalkSAT: Elige una cláusula sin satisfacer al azar y cambia el valor de una de las variables que contiene para satisfacerla (de la variable que permita satisfacer más cláusulas o escogida al azar, alternando).

Problemas de Satisfacción de Restricciones

- CSP – Constraint Satisfaction Problem
- Las variables tienen un número finito de valores
- Las restricciones no se limitan a disyunciones lógicas
- Se representan con tuplas *<X,D,C>*
  - X: variables del problema
  - D: dominio (valores posibles de las variables)
  - C: restricciones del problema

Problemas de satisfacción de restricciones

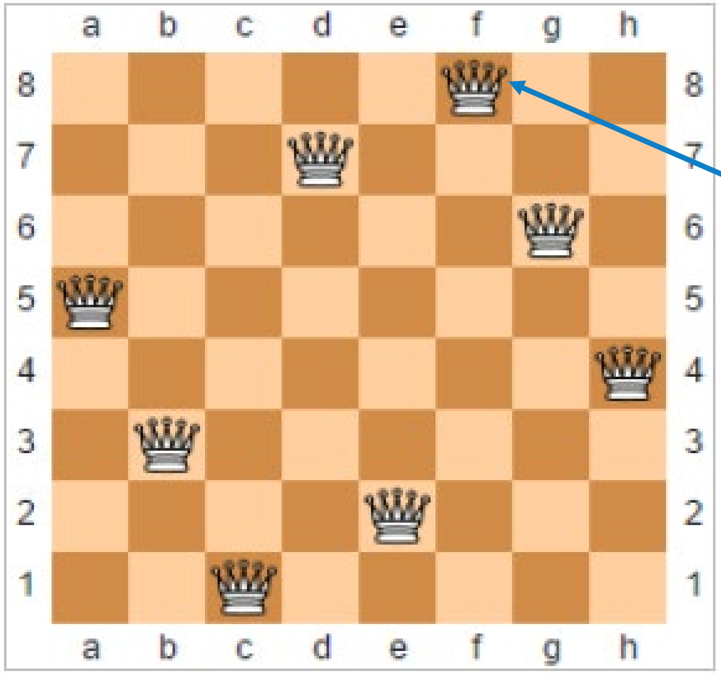
Para que una asignación sea solución debe ser consistente y completa

Consistente ⇒ No viola ninguna restricción de C

Completa ⇒ Todas las variables tienen un valor asignado

Problemas de satisfacción de restricciones

Ejemplo: *Juego de las 8-Reinas* → Hay que colocar 8 reinas en un tablero de ajedrez de tal forma que ninguna reina amenace a otra reina.



- Dos variables por reina con dominio {1..8}, representando fila y columna de la posición de la reina

X_{1f}=8 y X_{1c}=6

- Restricciones:
  - La primera y la segunda reina no pueden estar en la misma columna:
    - R_{c12}= {(1,2), (1,3),..., (1,8), (2,1), (2,3),..., (8,7)} (*explícita*)
    - $R_{1c} \neq R_{2c}$
  - Dos reinas no pueden estar en la misma diagonal:
    $| X_{1f} – X_{2f} | \neq | X_{1c} – X_{2c} |$

Problema de satisfacción de restricciones

Ejemplo: *Sudoku*→ Hay que rellenar cuadrícula con 9x9 casillas con números de 1 a 9, partiendo de algunos números ya dispuestos tal que no se repitan los números en una misma fila, columna o subcuadrícula.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	3			7				
B	6			1	9	5			
C		9	8					6	
D	8				6				3
E	4			8		3			1
F	7				2				6
G		6					2	8	
H				4	1	9			5
I					8			7	9

Fuente:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sudoku-by-L2G-20050714.gif

- 81 variables (A1, A2….I9)
- Dominio {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
- Los números ya dispuestos tienen un único valor de dominio, el inicial.
- Utilizamos 27 restricciones *AllDiff* (fuerzan a que las variables afectadas sean diferentes):
  - AllDiff(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9)
  - AllDiff(A1,A2,A3, B1,B2, B3, C1,C2, C3)
  - Etc..

Problemas de satisfacción de restricciones

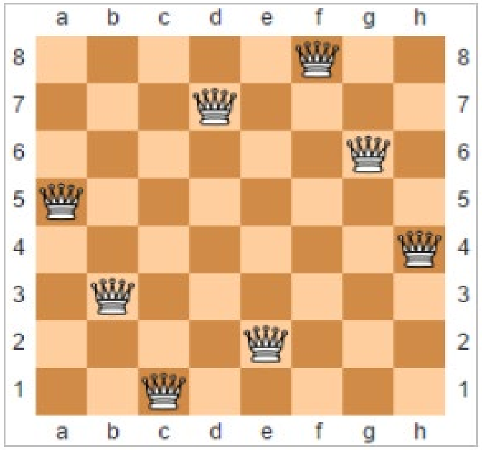
ALGORITMOS

Búsqueda GLOBAL

- ❑ Algoritmo de búsqueda en profundidad
- ❑ Profundidad acotada por el número de variables

Búsqueda LOCAL

- ❑ Similar a SAT: asignaciones al azar



Problemas de satisfacción de restricciones

HEURÍSTICAS

- ❑ Simplificar el problema
- ❑ Satisfacer las restricciones más difíciles
- ❑ Algunas populares:
  - Variable más restrictiva
  - Valores restantes mínimos
  - Valor menos restrictivo

¿Dudas?

¡Muchas gracias por vuestra atención!

¡Feliz y provechosa semana!

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET