ECUACIONES DIFERERNCIALES ORDINARIAS

UNIDAD 4

TRANSFORMADA DE LAPLACE Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Ing. Nancy Velasco E.
Abril2016-Agosto2016

UNIDAD 4

TRANSFORMADA DE LAPLACE Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

4.1 a)Definición
  b) notación
  c) continuidad seccional o a pedazos
  d) funciones de orden exponencial
  e) existencia.

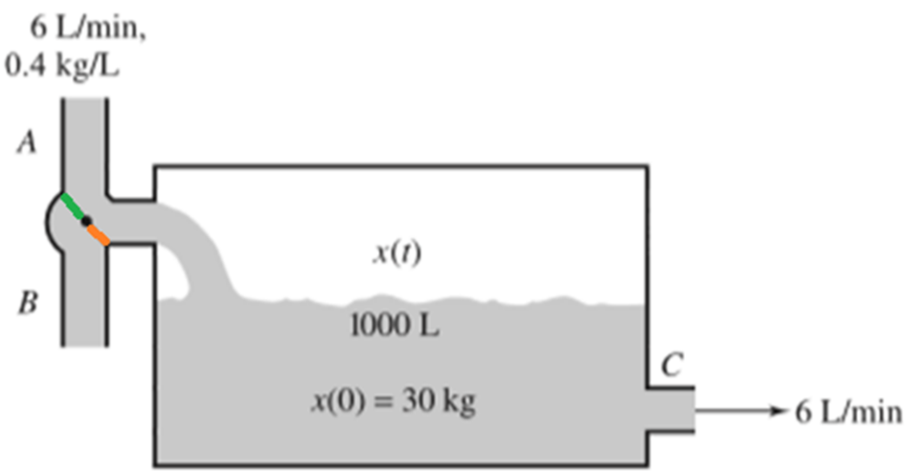
4.2 Transformada de algunas funciones elementales.

ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Transformada de Laplace: Introducción

Sea un problema de mezclas con alimentadores controlados mediante válvulas.

En el instante t=0 se abre la válvula A, para transferir 6 litros/minuto de una solución salina con 0.4 kg de sal por litro.



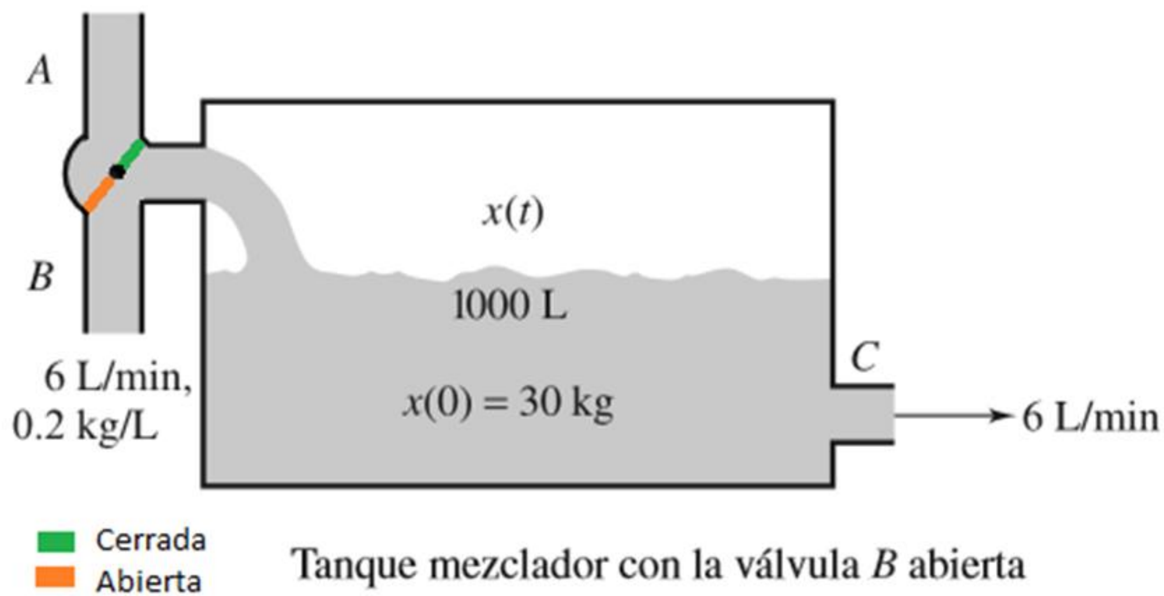
Tanque mezclador con la válvula A abierta

Cerrado
Abierto

Ing. Nancy Velasco E.

Transformada de Laplace: Introducción

Cuando t=10 minutos, la válvula A se cierra y se abre la válvula B y comienzan a pasar 6 litros/minuto de solución salina con una concentración de 0.2 kg/litro.



Tanque mezclador con la válvula *B* abierta

Transformada de Laplace: Introducción

En un principio había 30 kg de sal disueltos en 1000 litros de agua en el tanque.

La válvula de salida C, que vacía al tanque a razón de 6 litros/minuto, mantiene el contenido del tanque a volumen constante.

Si la solución se mantiene bien revuelta, determine la cantidad de sal en el tanque para cada t>0.

Transformada de Laplace: Introducción

x(t) ➡ la cantidad de sal (en kilogramos) en el tanque en el instante t.

$\frac{x(t)}{1000}$ ➡ es la concentración (masa de sal/volumen), en $\frac{Kg}{L}$

$$\frac{dx}{dt} = razón\ de\ entrada - razón\ de\ salida \qquad Ec.1$$

g(t)

$$razón\ de\ salida = razón_{out} * concentración$$

$$= \left(6\frac{L}{min}\right) * \left(\frac{x(t)}{1000}\frac{Kg}{L}\right)$$

$$= 3\,\frac{x(t)}{500}\frac{Kg}{min}$$

Transformada de Laplace: Introducción

$$\frac{dx}{dt} = razón\ de\ entrada - razón\ de\ salida$$

$Válvula\ A$

$$R\ entrada = razón_{in} * concentración$$

$$= \left(6\frac{L}{min}\right) * \left(0{,}4\frac{Kg}{L}\right)$$

$$= 2{,}4\ \frac{Kg}{min}$$

$Válvula\ B$

$$R\ entrada = razón_{in} * concentración$$

$$= \left(6\frac{L}{min}\right) * \left(0{,}2\frac{Kg}{L}\right)$$

$$= 1{,}2\ \frac{Kg}{min}$$

$$razón\ de\ entrada = g(t) = \begin{cases} 2{,}4\ \dfrac{Kg}{min} & 0 < t < 10 \\ 1{,}2\ \dfrac{Kg}{min} & t > 10 \end{cases}$$

Transformada de Laplace: Introducción

$$Reemplazando\ en\ \ Ec. 1$$

$$\frac{dx}{dt} = g(t) - razón\ de\ salida$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t) - 3\ \frac{x(t)}{500}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{500}x = g(t)$$

En un principio había 30 kg de sal disueltos en 1000 litros de agua en el tanque.

$$Cond. inicial$$
$$x(0) = 30$$

Transformada de Laplace: Introducción

Para resolver el problema con valor inicial, usando las técnicas anteriores, tendríamos que descomponer el intervalo de tiempo:

$$(0,\infty) \to (0,10) \quad \text{Válvula A}$$

$$(0,\infty) \to (10,\infty) \quad \text{Válvula B}$$

Válvula A Válvula B

- El término no homogéneo g(t) es constante (2,4 y 1,2)
- Se puede hallar x_p con facilidad en cada subintervalo,
- En cada intervalo la solución tendría una constante arbitraria (en las soluciones homogéneas asociadas).
- La condición inicial fijaría esta constante para 0<t<10, pero entonces se tendría que evaluar x(10) y usarla para establecer la constante en la solución general para t>10.

Transformada de Laplace: Introducción

Ahora se pretende ilustrar un nuevo método usando la transformada de Laplace.

Ofrece ventajas como que es mucho más conveniente para resolver problemas con valores iniciales para ecuaciones lineales con coeficientes constantes cuando el término de forzamiento tiene discontinuidades de salto.

Transformada de Laplace: a) Definición

La transformada de Laplace de una función f(t), definida en [0, ∞) está dada por la integral:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

El dominio de F(s) está formado por todos los valores de s para los que la integral en existe. La transformada de Laplace de f se denota como F o l{f}.

Transformada de Laplace: Comparación

Dominio t → **Dominio s**

Dominio t

ED con coeficientes constantes

- Calcular las derivadas de las soluciones de prueba
- Descomponer intervalos
- Evaluar constantes mediante los datos iniciales

Dominio s

Ec. algebraicas (más sencillas)

- suma,
- resta,
- multiplicación y
- división (por supuesto, usando con juicio la tabla).

Transformada de Laplace: Desventaja

El método de la transformada de Laplace es menos útil con ecuaciones que tienen coeficientes variables o con ecuaciones no lineales (y a veces, la determinación de las transformadas inversas puede ser una tarea demasiado complicada).

Transformada de Laplace: Cálculo

La integral para calcular la T.L. es impropia (uno de sus límites se acerca a un valor específico: infinito.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Entonces:

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)dt}$$

siempre que el límite exista.

Ejemplo:

* Determinar la transformada de Laplace de la función constante f(t)=1, t>0

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)dt$$

$$F(s) = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} (1)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \Bigg|_0^N$$

Ejemplo:

$$= \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{e^{-sN}}{s}+\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{se^{sN}}+\frac{1}{s}\right)$$

$$= -\frac{1}{\cancel{se^{\infty}}^{\,0}}+\frac{1}{s}$$

$$\boxed{F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}} \qquad s>0$$

b) Notación

La transformada de Laplace se puede representar como:

Letras Mayúsculas. Ejm: F

$\mathcal{L}\{f(t)\}$

$\mathcal{L}\{f(t)\}$ significa que el operador $\mathcal{L}$ se aplica a la función *f(t)* para generar una nueva función, llamada *F(s)* .

c) Continuidad seccional o a pedazos

Una función f(t) es continua por partes en un intervalo finito [a, b] si f(t) es continua en cada punto de [a, b] excepto en un número finito de puntos donde f(t) tiene una discontinuidad de salto.

Una función f(t) es continua por partes en $[0, \infty)$ si f(t) es continua por partes en [0, N] para toda N>0.

Discontinuidad de salto

Una función f(t) en [a, b] tiene una discontinuidad de salto en $t_0 \in$ (a,b) si f(t) es discontinua en t_0, pero los límites laterales

$$\lim_{t \to t_0^+} f(t) \qquad \lim_{t \to t_0^-} f(t)$$

derecha — izquierda

existen como números finitos.

Si la discontinuidad ocurre en un extremo $t_0 \in$ a (*o* b), hay una discontinuidad de salto si el límite lateral de f(t) cuando t → a^+(t → b^-) existe como número finito.

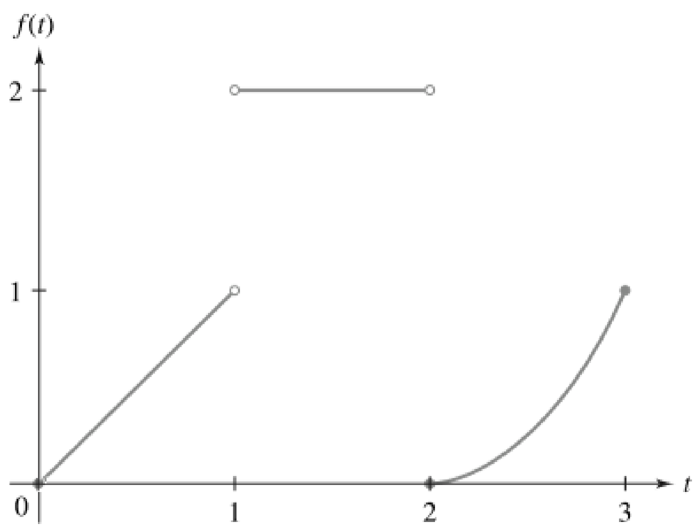
Ejemplo: función f(t) continua por partes en un intervalo finito [a,b]

* Mostrar que f(t) es continua por partes en [0,3].

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \\ (t-2)^2 & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

f(t) debe ser continua en cada punto de [a, b] excepto en las discontinuidades de salto.

Ejemplo: **función f(t) continua por partes en un intervalo finito [a,b]**



Gráfica de $f(t)$

$$f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 2 & 1<t<2 \\ (t-2)^2 & 2\le t\le 3 \end{cases}$$

1. Continua en cada punto de a, b

f(t) es continua en los intervalos

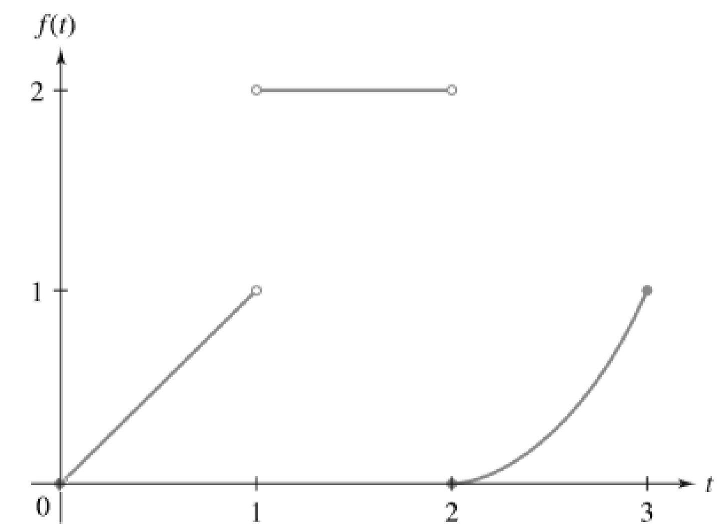
[0, 1), (1, 2) y (2, 3]

abierto cerrado

Línea Línea Parábola

Definición
Notación
Continuidad
F. Exponencial
Existencia
T.L. Elementales
Ejercicios planteados

Ejemplo: función f(t) continua por partes en un intervalo finito [a,b]



Gráfica de $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \\ (t-2)^2 & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

2. Excepto en las discontinuidades de salto

Puntos de discontinuidad:

t=0 t=1 t=2

Límites laterales:

0^+:0 1^+ : 2 2^+ : 0

1^- : 1 2^- : 2

Deben ser números finitos (✓)

Entonces si son discontinuidades de salto

Ejemplo: función f(t) continua por partes en un intervalo finito [a,b]

Entonces como:

Una función f(t) es continua por partes en un intervalo finito [a, b] si f(t) es continua en cada punto de [a, b] excepto en un número finito de puntos donde f(t) tiene una discontinuidad de salto.

f(t) es continua por partes en [0, 3].

Definición
Notación
Continuidad
F. Exponencial
Existencia
T.L. Elementales
Ejercicios planteados

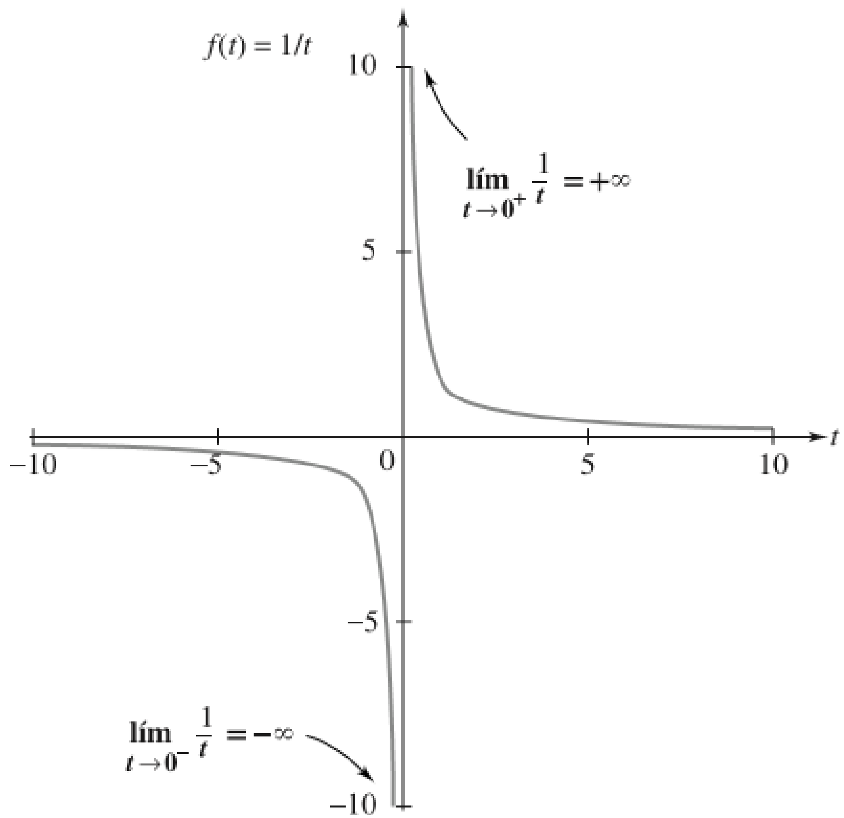
Ejemplo: f(t) es continua por partes en [0, ∞)

* Mostrar que f(t) no es continua por partes en [0, ∞].

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

Una función f(t) es continua por partes en [0, ∞) si f(t) es continua por partes en [0, N] para toda N>0.

Ejemplo: f(t) es continua por partes en [0, ∞)



Salto infinito en el origen

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

1. continua por partes en [0, N]

De la gráfica f(t) no es continua por partes en ningún intervalo que contenga al origen, pues tiene un “salto infinito” en el origen.

d) Función Exponencial

Una f(t) es de orden exponencial α si existen constantes positivas T y M tales que:

$$\boxed{|f(t)| \leq Me^{at} \quad para\ toda\ t \geq T}$$

Significa que f(t) no crece más rápido que una función de la forma Me^{at}

Ejemplo:

* Determine si f(t) es de orden exponencial.

$$f(t) = e^{5t} sen2t$$

$$\propto = 5$$

$$\left| \underbrace{e^{5t} sen2t}_{\textit{Máximo valor 1}} \right| \leq Me^{5t} \qquad t \geq T$$

M=1
(mínimo valor)

Cualquier
constante
positiva

Si existen las constantes M y T

Entonces f(t) es de orden exponencial α=5

Ejemplo:

* Determine si f(t) es de orden exponencial (otra forma).

$$f(t) = e^{t^2}$$

Si f(t) es de orden exponencial, entonces:

$$\boxed{L = \lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0}$$

$$L = \lim_{t\to\infty} e^{-st}\, e^{t^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-st+t^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-(s-t)t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{(s-t)t}}$$

Ejemplo:

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{(s-t)t}}$$

$$= \frac{1}{e^{(s-\infty)\infty}}$$

$$c.\infty = \infty$$
$$\infty.\infty = \infty$$

$$= \frac{1}{e^{\infty - \infty}}$$

Indeterminación $\infty - \infty$

$\boxed{\text{No es de orden exponencial}}$

e) Existencia de la transformada

Hay funciones para las que la integral impropia no converge para cualquier valor de x.

El conjunto de funciones para las que está definida la transformada incluye muchas de las funciones que surgen en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales.

Las propiedades de la transformada de Laplace (en conjunto) garantizan la existencia de la transformada de Laplace.

Condiciones para la existencia de la transformada

Si f(t) es:

continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial

entonces $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s>\alpha$.

Transformada de Laplace de funciones Elementales

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
$e^{at}t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Ejercicios plateados

*Use la definición 1 para determinar la transformada de Laplace de la función dada: $f(t) = t$

Sol: $\frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$

* Use la tabla de transformadas de Laplace y la linealidad de la transformada de Laplace para determinar la siguiente transformada.

$$\mathcal{L}\{t^3 - te^t + e^{4t}\cos t\}$$

Sol: $\frac{6}{s^4} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s-4}{(s-4)^2+1}, \quad s > 4$

* Determine si f(t) es continua, continua por partes, o ninguna de las dos en [0, 10] y bosqueje la gráfica de f(t).

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ (t-2)^2, & 1 < t \le 10, \end{cases}$$

Sol: Continua (y por tanto continua por partes).

¿Preguntas?