Таблица интегралов

1	$\int du = u + C, \quad \int 0 \cdot du = C,$	**10**	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C$
2	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	**11**	$\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C = -arcctgu + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C, u \neq 0$	**12**	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, a \neq 0$
4	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$	**13**	$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C, a \neq 0$
5	$\int e^u du = e^u + C$	**14**	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C, a \neq 0$
6	$\int \sin u du = -\cos u + C$	**15**	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C, a \neq 0$
7	$\int \cos u du = \sin u + C$	**16**	$\int shudu = chu + C$
8	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$	**17**	$\int chudu = shu + C$
9	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$	**18**	$\int \frac{du}{ch^2u} = thu + C, \quad \int \frac{du}{sh^2u} = -cthu + C,$

Методы интегрирования

№ п/п	**Вид интеграла**	**Метод интегрирования**
1	$\int F[\varphi(x)]\varphi'(x)\, dx$	Подстановка $\varphi(x) = t$
2	$\int f(x)\varphi'(x)\, dx$	Интегрирование по частям $$\int f(x)\varphi'(x)\, dx = f(x)\varphi(x) - \int \varphi(x) f'(x)\, dx$$ Метод интегрирования по частям применяется, например, к интегралам вида: $\int p(x) f(x)\, dx$, где $p(x)$ - многочлен, а $f(x)$- одна из следующих функций: $e^{\alpha x}; \cos \alpha x; \sin \alpha x; \ln x; \operatorname{arctg} x; \arcsin x$ и т.п., а также к интегралам от произведений показательной функции на косинус или синус.
3	$\int f(x)\varphi^{(n)}(x)\, dx$	Сводится к интегрированию произведения $f(x)\varphi^{(n)}(x)$ с помощью формулы кратного интегрирования по частям: $$\int f(x)\varphi^{(n)}(x)\, dx = f(x)\varphi^{(n-1)}(x) - f'(x)\varphi^{(n-2)}(x) + f''(x)\varphi^{(n-3)}(x) - \ldots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x)\varphi(x) + (-1)^n \int f^{(n)}(x)\varphi(x)\, dx$$

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
4	$\int e^{\alpha x} p_n(x)\,dx$, где $p_n(x)$ - многочлен степени n	Применяя формулу кратного интегрирования по частям (см.п.3), получим: $\int e^{\alpha x} p_n(x) = e^{\alpha x}\left[\frac{p_n(x)}{\alpha} - \frac{p'_n(x)}{\alpha^2} + \frac{p''_n(x)}{\alpha^3} - \ldots + (-1)^n \frac{p^{(n)}{}_n(x)}{\alpha^{n+1}}\right] + c$
5	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ $p^2-4q<0$	В знаменателе выделить полный квадрат. Подстановка $x+\frac{p}{2}=t$
6	$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$	Применение рекуррентной формулы $I_n = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$
7	$\int \frac{P(x)}{Q(x)}.dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь, $Q(x)=(x-x_1)^l(x-x_2)^m\ldots$ $\ldots(x^2+px+q)^k\ldots$	Подынтегральную дробь представляют в виде суммы простейших дробей $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-x_1)^l} +$ $+ \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} + \ldots +$ $+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k} + \ldots$
8	$\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s}).dx$, где R - рациональная функция своих аргументов	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $x=t^k$, где k - общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$
9	$\int R.\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right]dx$, где R - рациональная функция своих аргументов.	Сводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$
10	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.dx$	Подстановкой $x+\frac{b}{2a}=t$ интеграл приводится к сумме двух интегралов: $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = M_1\int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}} + N_1\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}.$ Первый интеграл сводится к интегралу от степенной функции, а второй интеграл – табличный.
11	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}).dx$, где R - рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановками Эйлера: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a} \quad (a>0)$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm x\sqrt{c} \quad (a>0)$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) \quad (b^2-4ac\ge 0)$, где x_1 - корень трехчлена ax^2+bx+c. Для вычисления указанного интеграла применяются также тригонометрические подстановки при $a<0, b^2-4ac>0$:

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
		$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin t\\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos t\end{cases}$ $x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec t\\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{cosec} t\end{cases}$ $x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{tg} t\\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{ctg} t\end{cases}$
12	$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n	Записываем равенство $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+k\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $Q_{n-1}(x)$ - многочлен степени $n-1$. Дифференцируя обе части этого равенства и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим тождество $P_n(x)=Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+k$, которое дает систему $n+1$ линейных уравнений для определения коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и множителя k. Интеграл же $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ берется методом, указанным в п. 10 $(M=0; N=1)$.
13	$\int\frac{dx}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Этот интеграл приводится подстановкой $x-x_1=\frac{1}{t}$ к интегралу, рассмотренному выше.
14	$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где m,n,p - рациональные числа (интеграл от биномиального дифференциала).	Интеграл от биномиального дифференциала выражается через элементарные функции только при выполнении одного из следующих условий: 1) если p - целое число, 2) если $\frac{m+1}{n}$ - целое число, 3) если $\frac{m+1}{n}+p$ - целое число, ***1-й случай*** а) если p - целое положительное число, то нужно раскрыть скобки $(a+bx^n)^p$ по биному Ньютона и вычислить интегралы от степеней ; б) если p - целое отрицательное число, то подстановка $x=t^k$, где k - общий знаменатель дробей m и n, приводит к интегралу от рациональной дроби: ***2-й случай*** если $\frac{m+1}{n}$ - целое число, то применяется подстановка $a+bx^n=t^k$ где k - знаменатель дроби p ***3-й случай***

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования
		если $\dfrac{m+1}{n}+p$ - целое число, то применяется подстановка $a+bx^n=x^n t^k$ где k - знаменатель дроби p
15	$\int R(\sin x,\cos x)dx$	Универсальная подстановка $tg\dfrac{x}{2}=t$. Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то подстановка $\cos x=t$. Если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то подстановка $\sin x=t$. Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то подстановка $tgx=t$.
16	$\int R(shx,chx)dx$	Применяется подстановка $\mathrm{th}\dfrac{\mathrm{x}}{2}=\mathrm{t}$. При этом $shx=\dfrac{2t}{1-t^2};chx=\dfrac{1+t^2}{1-t^2};dx=\dfrac{2dt}{1-t^2}$.
17	$\int \sin ax\sin bx\ dx$ $\int \sin ax\cos bx\ dx$ $\int \cos ax\cos bx\ dx$	Необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму или разность, пользуясь одной из следующих формул: $\sin ax\sin bx=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right]$ $\cos ax\cos bx=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x\right]$ $\sin ax\cos bx=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x\right]$
18	$\int \sin^m ax\cos^n bx\ dx$, где m и n - целое число	Если m - нечетное положительное, то подстановка $\cos x=t$. Если n - нечетное положительное, то подстановка $\sin x=t$. Если $m+\ n$ -четное отрицательное, то подстановка $tgx=t$. Если m и „ -четное неотрицательное, то применяют формулы: $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2};\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.
19	$\int \sin^p ax\cos^q bx\ dx$ $(0<x<\dfrac{\pi}{2})$, p и q - рациональные числа.	Подстановкой $\sin x=t$ приводится к интегралу от биноминального дифференциала $\int \sin^p ax\cos^q bx\ dx=\int t^p(1-t^2)^{\frac{q-1}{2}}$ dt (см. п. 14).
20	$\int R(e^{ax})\ dx$	Подстановкой $e^{ax}=t$ преобразуется в интеграл от рациональной функции.