

Группы и алгебры Ли

Весенний семестр 2024 г.

1 Предварительные сведения

Под K мы понимаем \mathbb{R} или \mathbb{C} .

Определение. Гладкое многообразие размерности n над K —

Определение. Прямое произведение гладких многообразий X и Y —

Определение. Гладкое отображение между гладкими многообразиями X и Y —

Утверждение. Корректность определения (гладкость отображения не зависит от выбора атласов).

Доказательство. ♦

Утверждение. Композиция гладких отображений гладкая.

Доказательство. ♦

Определение. k -подмногообразие Y многообразия X —

Определение. Касательное пространство $T_x X$ к n -мерному многообразию X в точке x —

Теорема 1. Корректность определения (независимость от карты). Касательное пространство в точке для фиксированной карты изоморфно \mathbb{R}^n . Пространства, определяемые с помощью разных карт, получаются друг из друга невырожденным линейным оператором \mathbb{R}^n .

Доказательство. ♦

Определение. k -подмногообразие Y гладкого многообразия X —

Определение. Дифференциал гладкого отображения между гладкими многообразиями X и Y в точке $x \in X$ —

Теорема 2. Корректность определения и линейность.

Доказательство. ♦

Утверждение. Дифференциал композиции есть композиция дифференциалов.

Доказательство. ♦

Определение. Ранг гладкого отображения между гладкими многообразиями в точке — ранг его дифференциала в точке.

1.1 подраздел

...

подраздел еще

...

2 Группы и погруппы Ли

Определение. *Группа Ли над K размерности n — гладкое многообразие G над K размерности n со структурой группы, такое что являются гладкими отображения:*

1. $\mu : G \times G \rightarrow G$, μ — групповая операция
2. $r : G \rightarrow G$, r — операция взятия обратного

Примеры. *Примеры групп Ли:*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

Определение. *Подгруппа Ли $H \subset G$ — подгруппа G , являющаяся подмногообразием G .*

Лемма. *G — группа Ли, $H \leq G$, тогда H — k -мерная подгруппа Ли тогда и только тогда, когда H — k -мерное подмногообразие локально в точке e .*