Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Лучистые многообразия Фано малой размерности.

Автор:
Студентка 126 группы
Попова Дарья Александровна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.
Перепечко Александр Юрьевич

Москва 2025

Аннотация

Вееры лучистых торических многообразий имеют выделенный набор лучей, обладающий некоторым свойством, и называются билатеральными. С помощью языка программирования polymake изучена билатеральность вееров, соответствующих гладким торическим многообразиям Фано размерностей 3–6. Кроме того, в ходе работы получена классификация гладких многогранников Фано, некоторая специальная грань которых порождается выделенным набором лучей билатерального веера граней этого многогранника.

Содержание

1 Введение

Многообразия Фано — это проективные алгебраические многообразия с обильным антиканоническим классом. Они играют важную роль в классификации всех проективных алгебраических многообразий. В малых размерностях известна классификация таких многообразий (см. [1]). Любое 1-мерное многообразие Фано изоморфно проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Многообразия Фано размерности 2 называются поверхностями дель Пеццо. Они бывают 10-и видов: $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или раздутие проективного пространства $\mathbb{P}^2$ в k точках общего положения, где $k = 1, ..., 8$. Согласно классификации существует ровно 105 классов изоморфности гладких трёхмерных многообразий Фано. В этой работе рассматриваются только те гладкие многообразия Фано, которые являются торическими многообразиями.

Пусть M и N решётки характеров и однопараметрических подгрупп алгебраического тора T соответственно. Имея нормальный веер Σ некоторого целочисленного многогранника в $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, получают соответствующее проективное торическое многообразие, которое обозначают X_Σ. Между торическими многообразиями с тором T и веерами в $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ существует взаимно однозначное соответствие (см. [2]).

Известно, что для проективного торического многообразия X с действием тора T группа алгебраических автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ является аффинной алгебраической группой, содержащей T в качестве максимального тора. Полное торическое многообразие X с действием тора T называется *лучистым*, если максимальная унипотентная подгруппа группы автоморфизмов многообразия X действует на X с открытой орбитой (лучистое многообразие определено в [3]). Лучистые торические многообразия обладают важными отличительными чертами, которые описаны в статье [3].

Аддитивное действие на неприводимое алгебраическое многообразие X размерности n — это регулярное действие группы G_a^n, где $G_a = (\mathbb{K}, +)$ на X с открытой орбитой. В статье [4] доказано, что нормализуемое тором аддитивное действие на лучистом торическом многообразии единственно с точностью до изоморфизма.

Для луча ρ обозначим минимальный порождающий целочисленный вектор p_ρ. Обозначим $\sigma(1)$ множество лучей конуса σ. Тогда для луча $\rho \in \sigma(1)$ определим множество

$$\mathfrak{R}_\rho := \{e \in M | (p_\rho, e) = -1, (p_{\rho'}, e) \geq 0 \forall \rho' \in \sigma(1), \rho' \neq \rho\}.$$

Элементы множества $\mathfrak{R} := \bigsqcup_{\rho \in \sigma(1)} \mathfrak{R}_\rho$ называются корнями Демазюра конуса σ.

В случае веера лучистого многообразия, множество корней Демазюра обладает хорошими свойствами, благодаря которым было дано описание максимальной унипотентной подгруппы группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ лучистого торического многообразия X как полупрямого произведения некоторых явно описываемых унипотентных групп. (см. [3]).

Цель этой работы — исследовать связь гладких торических многообразий Фано и лучистых торических многообразий, рассматривая свойства соответствующих вееров. Гладкие торические многообразия Фано с точностью до изоморфизма определяются гладкими многогранниками Фано в пространстве $N_\mathbb{R}$, вееры этих многообразий можно получить, взяв конус над каждой гранью этого многогранника. Лучистые многообразия имеют в пространстве $N_\mathbb{R}$ вееры, которые называются билатеральными.

2 Предварительные сведения

Напомним терминологию и предварительные сведения по многогранникам и веерам из книг [5, 2, 6] и по торическим многообразиям из книг [2, 7].

2.1 Многогранники

Многогранником в $\mathbb{R}^d$ называется выпуклая оболочка некоторого конечного подмножества в $\mathbb{R}^d$. Эквивалентным определением многогранника является ограниченное пересечение конечного набора замкнутых полупространств. Размерность многогранника — минимальная размерность аффинного подпространства в $\mathbb{R}^d$, содержащего этот многогранник. Гиперплоскость, пересечение которой с многогранником непусто и которая содержит этот многогранник в одном из замкнутых полупространств, на которые она делит пространство называется *опорной гиперплоскостью. Грань* многогранника — его пересечение с некоторой его опорной гиперплоскостью. Грань тоже является многогранником. Гиперграни — $(d-1)$-мерные грани многогранника. Вершины — нульмерные грани, то есть они являются точками, но также под вершинами будем понимать их радиус-векторы. Если многогранник Q есть выпуклая оболочка точек $a_1, ..., a_k$, то множество вершин этого многогранника — это те a_i, что множество $\mathrm{conv}(a_1, ..., a_k)$ $\setminus \mathrm{conv}(a_1, ..., a_{i-1},\ a_{i+1}, ..., a_k)$ непусто. Отсюда следует, что любая грань многогранника равна выпуклой оболочке вершин, лежащих в ней.

Целочисленный многогранник — это многогранник, вершины которого находятся в узлах решётки $\mathbb{Z}^d$. Следующее определение взято из статьи [8].

Определение 1. Два целочисленных многогранника P_1, P_2 в $\mathbb{R}^d$ называются *изоморфными*, если существует такое невырожденное линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, переводящее $\mathbb{Z}^d$ в $\mathbb{Z}^d$, что $\varphi(P_1) = P_2$.

Если линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ переводит $\mathbb{Z}^d$ в $\mathbb{Z}^d$, то φ всегда переводит целочисленный многогранник P в целочисленный многогранник, причём k-мерная грань переходит в k-мерную грань, а грань, являющаяся выпуклой оболочкой вершин $p_1, ..., p_k$ переходит в грань, являющуюся выпуклой оболочкой вершин $Ap_1, ..., Ap_k$.

Пусть полноразмерный многогранник P в $\mathbb{R}^d$ содержит начало координат в своей внутренности, тогда *двойственным* многогранником называется

$$P^* = \{\lambda \in (\mathbb{R}^d)^* | \lambda(x) \geq -1 \forall x \in P\}.$$

Он действительно является многогранником в сопряжённом пространстве $(\mathbb{R}^d)^*$. Его опорными плоскостями, задающими гиперграни, являются множества вида

$$\{\lambda \in (\mathbb{R}^d)^* | \lambda(v) = -1\}$$

для каждой вершины v многогранника P. Также для любого полноразмерного многогранника P, содержащего начало координат выполняется $P^{**} = P$. Целочисленный полноразмерный многогранник называется *рефлексивным*, если его двойственный многогранник тоже целочисленный. Рефлексивные многогранники и двойственные к ним имеют только одну целочисленную точку во внутренности — начало координат. В каждой размерности существует конечное число рефлексивных многогранников с точностью до изоморфизма.

2.2 Конусы и вееры

Полиэдральным конусом, порождённым векторами $p_1 ... p_m$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ называется множество $\mathrm{Cone}(p_1, ..., p_m) := \sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{\geq 0} p_i$. *Двойственный* конус к конусу σ — это конус в двойственном пространстве к $\mathbb{R}^d$:

$$\sigma^\vee := \{\lambda \in (\mathbb{R}^d)^* | \lambda(x) \geq 0 \forall x \in \sigma\}.$$

Пусть $\lambda \in \sigma^{\vee}$, тогда множество $\tau = \{x \in \sigma | \lambda(x) = 0\}$ называется *гранью* конуса σ (обозначается $\tau \prec \sigma$). Равносильно можно определить грань конуса, как пересечение с опорной гиперплоскостью. Размерностью грани называется минимальная размерность содержащего её подпространства в $\mathbb{R}^d$. Одномерные грани называются *лучами*.

Конус называется *рациональным*, если среди целочисленных векторов можно выбрать конечный набор порождающих этот конус. *Примитивными* порождающими рационального конуса называется минимальный по размеру набор целочисленных порождающих векторов этого конуса, каждый из которых минимальный ненулевой на своём луче. Конус называется *острым*, если он не содержит подпространств размерности больше 0. Конус называется *симплициальным*, если он порожден частью базиса пространства $\mathbb{R}^n$, и *регулярным*, если он порожден частью базиса решетки $\mathbb{Z}^n$.

Веером Σ называется конечный набор острых рациональных полиэдральных конусов в $\mathbb{R}^d$, такой что

- $M(Q)$ — матрица размера $d \times n$, в столбцах которой записаны координаты вершин многогранника Q;

- $\sigma_1 \in \Sigma$, $\sigma_2 \in \Sigma \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \prec \sigma_1$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 \prec \sigma_2$.

Пусть P – многогранник в $\mathbb{R}^d$. Если многогранник целочисленный и содержит начало координат в своей внутренности, то набор конусов над гранями этого многогранника образует веер. Он называется *веером граней* многогранника P. Теперь определим для многогранника P нормальный веер. Пусть $v_1, ..., v_m$ — вершины многогранника P, тогда определим *нормальный конус* в пространстве $(\mathbb{R}^d)^*$, соответствующий вершине v_i:

$$\sigma_{v_i} = \mathrm{Cone}((P \cup \mathbb{Z}^d) - v_i)^{\vee}.$$

Таким образом, если опорная гиперплоскость гиперграни F многогранника P имеет вид $\{x \in \mathbb{R}^d | \lambda_F(x) = -1\}$, то $\sigma_{v_i} = \mathrm{Cone}(\{\lambda_F | v_i \in F\})$. Теперь для каждой грани Q многогранника P определим конус

$$\sigma_Q = \mathrm{Cone}(\{\lambda_F | Q \subset F\}).$$

Если многогранник P целочисленный, то $\Sigma_P = \{\sigma_Q | Q \text{ — грань в } P\} \cup \{0\}$ является полным веером и называется *нормальным веером* многогранника P. Если целочисленный многогранник содержит начало координат во внутренности, то веер Σ_P может быть описан как веер граней двойственного многогранника P^*.

Веер в $\mathbb{R}^d$ называется *полным*, если объединение его конусов есть всё $\mathbb{R}^d$ и *гладким*, если каждый его конус регулярный.

2.3 Торические многобразия и многообразия Фано

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, $T = (\mathbb{K}^*)^d$ — алгебраический тор размерности d.

Характер тора T — полиномиальное отображение $T \to \mathbb{C}^*$, являющееся групповым гомоморфизмом T и $\mathbb{C}^*$, если рассматривать их как группы по умножению. Все характеры имеют вид

$$\chi^a(t_1, ..., t_d) = t_1^{a_1} \cdot ... \cdot t_d^{a_d},$$

где $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{Z}^d$ — любой целочисленный вектор. Решётка характеров d-мерного тора обозначается $M \cong \mathbb{Z}^d$. Сложению векторов в решётке соответствует произведение характеров.

Однопараметрическая подгруппа тора T — полиномиальное отображение $\mathbb{C}^* \to T$, являющееся групповым гомоморфизмом $\mathbb{C}^*$ и T. Все однопараметрические подгруппы имеют вид

$$\lambda^a(t) = (t^{a_1}, ..., t^{a_d}),$$

где $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{Z}^d$ — любой целочисленный вектор. Решётка однопараметрических подгрупп d-мерного тора обозначается $N \cong \mathbb{Z}^d$. Тор с решёткой однопараметрических подгрупп N обозначается T_N.

Модуль $M_\mathbb{R}$ ($N_\mathbb{R}$) определяются как тензорное произведение решётки M (N соответственно) и $\mathbb{R}$ как модулей над кольцом $\mathbb{Z}$. $M_\mathbb{R} \cong N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^d$.

Аффинное торическое многообразие — это неприводимое аффинное многообразие, содержащее тор $T_N \cong (\mathbb{K}^*)^d$ как открытое в топологии Зарисского подмножество, такое что действие тора T_N на себя продолжается до действия тора T_N на всё многообразие.

Пусть $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ — рациональный полиэдральный конус, тогда лемма Гордана утверждает, что $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ — конечнопорождённая полугруппа. Обозначим её порождающие m_1, ..., m_s. Каждый из этих векторов — характер тора T_N, значит мы имеем отображение $T_N \to (\mathbb{K}^*)^s \subset \mathbb{K}^s$. Замыкание в топологии Зарисского образа этого отображения даёт аффинное торическое многообразие X_σ, а тор этого многообразия определяется решёткой характеров $\mathbb{Z}S_\sigma$, а само многообразие равно максимальному спектру кольца $\mathbb{K}[S_\sigma]$, причём все аффинные торические многообразия возникают таким образом (см. [2, Теорема 1.1.16]).

Проективное пространство $\mathbb{P}^d$ является аффинным торическим многообразием в $\mathbb{K}^{d+1}$ с тором $T_{\mathbb{P}^d} = \{(x_0 : ... : x_d) \in \mathbb{P}^d | a_0 \cdot ... \cdot a_d \neq 0\} \cong (\mathbb{K}^*)^d$. Аналогично аффинному торическому многообразию можно получить проективное торическое многообразие $X_\mathscr{A}$, имея конечный набор $\mathscr{A} = (m_1, ..., m_s)$ векторов в M. Проективным торическим многообразием $X_\mathscr{A}$ называется замыкание в топологии Зарисского образа отображения $T_N \to (\mathbb{K}^*)^s \to T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. Покрывая проективное пространство $\mathbb{P}^{s-1}$ аффинными картами

$$U_i = \{(x_1 : ... : x_s) \in \mathbb{P}^{s-1} | x_i \neq 0\},$$

получаем аффинные торические многообразия $X_\mathscr{A} \cap U_i$, каждое из которых равно максимальному спектру кольца $\mathbb{K}[S_i]$, где $S_i = \mathbb{N}\{m_j - m_i | j \neq i\}$ (см. [2, Предложение 2.1.8].

Целочисленный многогранник $P \subset M_\mathbb{R}$ называется очень обильным, если для каждой его вершины m полугруппа

$$S_{P,m} = \mathbb{N}\{m' - m | m' \in P \cap M\}$$

насыщенная, то есть вместе с каждой точой kp, $k \in \mathbb{N}$, $p \in M$ содержит и точку p. Если $P \subset M_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^d$ — очень обильный полноразмерный многогранник, то для любой вершины v_i многогранника P аффинное торическое многообразие $X_{P\cap M} \cap U_i$ равно максимальному спектру кольца $\mathbb{K}[\sigma_i^\vee \cap M]$, где σ_i — нормальный конус вершины v_i и решётка характеров тора многообразия $X_{P\cap M}$ есть M (см. [2, Теорема 2.3.1]). Далее для произвольного целочисленного многогранника $P \subset M_\mathbb{R}$ определяется соответствующее торическое многообразие X_P как $X_{kP\cap M}$ для такого $k \in \mathbb{N}$, что многогранник kP очень обильный.

Пусть $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$ — веер, тогда объединение аффинных карт X_σ, $\sigma \in \Sigma$ даёт торическое многообразие X_Σ, где каждые две карты X_{σ_1} and X_{σ_2} склеиваются по их открытому подмножеству $X_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$. Если Σ — нормальный веер многогранника $P \subset M_\mathbb{R}$, то получившееся мнообразие и есть X_P.

Торическое многообразие X_Σ *полное* тогда и только тогда, когда веер Σ — полный. Веера граней рефлексивных многогранников соответствуют торическим многообразиям Фано. Рефлексивным многогранникам и соответствующим торическим многообразиям посвящены статьи [9, 10].

Определение 2. Гладкий d-многогранник Фано — выпуклый многогранник размерности d в $N_{\mathbb{R}}$ с вершинами в узлах решётки N, содержащий начало координат, такой что набор вершин каждой его грани образует базис решётки N.

Гладкий d-многогранник Фано рефлексивен. Веер граней такого многогранника является нормальным веером целочисленного многогранника P в $M_{\mathbb{R}}$, которому соответствует *гладкое торическое многообразие Фано* X_P, причём классы изоморфности гладких торических многообразий Фано взаимно однозначно соответствуют классам изоморфности гладких d-многогранников Фано как целочисленных многогранников (см. [2]). Для классификации гладких d-многогранников Фано важную роль сыграло понятие специальной грани (см. [8]).

Определение 3. Грань F гладкого d-многогранника Фано $P \subset \mathbb{R}^d$ называется *специальной*, если

$$\sum_{v \in V(P)} v \in \operatorname{Cone}(F)$$

Пусть P, Q — изоморфные гладкие d-многогранники Фано, тогда Q называется *специальным вложением* для P, если $\operatorname{conv}(e_1, ..., e_n)$ является специальной гранью для Q.

2.4 Лучистые многообразия и билатеральные вееры

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — лучи веера $\Sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, тогда веер Σ называется *билатеральным*, если существует базис $p_1, \ldots, p_n$ решётки N, такой что лучи $\rho_1, \ldots, \rho_n$ порождаются векторами $p_1, \ldots, p_n$ соответственно и остальные лучи $\rho_{n+1}, \ldots, \rho_m$ лежат в отрицательном ортанте относительно этого базиса.

Замечание 4. Если веер Σ — билатеральный, то он содержит конус σ, порождённый базисом $p_1, \ldots, p_n$. Действительно, если какой-то конус веера не содержит один из базисных векторов, то он не пересекает внутренность конуса σ.

Таким образом, можно говорить о билатеральности веера относительно некоторого своего конуса, подразумевая, что выделенные лучи порождаются векторами, порождающими этот конус.

Следующая теорема доказана в [4, Теорема 4.1 и Следствие 1].

Теорема A. *Пусть X — полное торическое многообразие, тогда следующие условия эквивалентны:*

a. Многообразие X лучистое;

b. Веер Σ_X билатеральный.

3 Исследование и построение решения задачи

Пусть Q — многогранник в $\mathbb{R}^d$. В этом разделе примем следующие обозначения.

- $M(Q)$ — матрица размера $d \times n$, в столбцах которой записаны координаты вершин многогранника Q;
- $V(Q)$ — множество вершин многогранника Q;
- $F(Q)$ — множество граней многогранника Q;

- $F(q)$ — множество граней многогранника Q, содержащих вершину $q \in V(Q)$;
- $(e_1, ..., e_d)$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^d$;
- F — стандартный $(d-1)$-мерный симплекс в $\mathbb{R}^d$, то же, что $\operatorname{conv}(e_1, ..., e_d)$.

Так как вершины могут быть перенумерованы без изменения самого многогранника, будем считать матрицей $M(Q)$ любую подходящую, но если в контексте задана конкретная нумерация вершин, будем считать, что столбцы идут именно в этом порядке.

3.1 Связь билатеральности вееров и специальных граней соответствующих многогранников

Легко понять, что у любого гладкого d-многогранника Фано есть специальное вложение, так как сумма его вершин попадёт хотя бы в один конус над гранью этого многогранника, а любая его грань приводится автоморфизмом пространства $\mathbb{R}^d$ к стандартному $(d-1)$-мерному симплексу.

Определение 5. Назовём многогранник в $\mathbb{R}^d$ *центральным*, если сумма его вершин равна нулю.

Заметим, что гладкий d-многогранник Фано является центральным тогда и только тогда, когда все его грани специальные.

Определение 6. Пусть X — гипергрань d-мерного многогранника Q, содержащего начало координат, тогда многогранник Q называется *X-билатеральным*, если веер граней многогранника Q билатерален относительно конуса $\operatorname{Cone}(X)$.

Будем называть многогранник *билатеральным* (без указания грани), если существует такая его гипергрань X, что многогранник X-билатерален.

Покажем, что изоморфизм целочисленных многогранников сохраняет специальную грань и билатеральность относительно грани.

Лемма 7. *Пусть A — линейное отображение $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, переводящее решётку $\mathbb{Z}^d$ в $\mathbb{Z}^d$, X — грань d-мерного целочисленного многогранника Q, тогда*

a. *Многогранник Q является X-билатеральным тогда и только тогда, когда многогранник AQ является AX-билатеральным;*

b. *X — специальная грань многогранника Q тогда и только тогда, когда AX — специальная грань многогранника AQ.*

Доказательство. Обозначим $q_1, ..., q_n$ вершины многогранника Q и пусть $q_1, ..., q_m$ — вершины грани X, тогда $Aq_1, ..., Aq_m$ — вершины грани AX многогранника AQ. Докажем утверждения в прямую сторону, тогда в обратную сторону будет следовать автоматически применением прямых утверждений для A^{-1}.

a. В этом случае $d = m$ и по условию $q_1, ..., q_d$ образуют базис решётки $\mathbb{Z}^d$ и $\forall i \in \{d+1, ..., n\}$ $\exists \alpha_1^i \leq 0, ..., \alpha_d^i \leq 0$ $q_i = \alpha_1^i q_1 + ... + \alpha_d^i q_d$. Значит $Aq_1, ..., Aq_d$ образуют базис решётки, при этом $\forall i \in \{d+1, ..., n\}$ $Aq_i = \alpha_1^i Aq_1 + ... + \alpha_d^i Aq_d$. Таким образом, получаем, что многогранник AQ является AX-билатеральным.

b. По условию $\exists \alpha_1 \geq 0, ..., \alpha_m \geq 0$ $\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i q_i$. Значит $\sum_{i=1}^n Aq_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i Aq_i$. Таким образом, получаем, что AX — специальная грань многогранника AQ.

□

Этот подраздел посвящён доказательству следующей теоремы.

Теорема 8. *Пусть P — гладкий d-многогранник Фано, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a. P — центральный билатеральный многогранник;

b. Существует специальная гипергрань X многогранника P, такая что P является X-билатеральным;

c. Многогранник P является X-билатеральным для любой своей гиперграни X.

Доказательство. Импликации $a \Rightarrow b$ и $c \Rightarrow b$ очевидны. Далее будем доказывать $b \Rightarrow a$ и $b \Rightarrow c$. Из b также очевидно следует билатеральность в a. Используя результат леммы 7, делаем вывод, что достаточно вывести центральность и билатеральность относительно произвольной гиперграни из b в предположении, что грань X в b есть стандартный $(d-1)$-мерный симплекс в $\mathbb{R}^d$, то есть F. Таким образом, утверждения 9 и 13 завершают доказательство. □

Утверждение 9. *Пусть P — специальное вложение гладкого d-многогранника Фано, тогда если P является F-билатеральным, то $\sum_{p \in V(P)} p = 0$.*

Доказательство. Пусть $p_1 = e_1, ..., p_d = e_d$ — вершины грани F, а $p_{d+1}, ..., p_n$ — остальные вершины многогранника P. Запишем определение специальной грани для F:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i p_i, \alpha_i \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=d+1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{d} (\alpha_i - 1) p_i, \alpha_i \geq 0$$

$$\sum_{i=d+1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{d} (\alpha_i - 1) e_i, \alpha_i \geq 0 \tag{2}$$

Обозначим $s = (s_1, ..., s_d)$ вектор, равный правой части равенства 2. По определению вектора s имеем, что $\forall j \in \{1, ..., d\}$ $s_j \geq -1$. Из билатеральности имеем, что каждый вектор p_i, $i \in \{d+1, n\}$ лежит в отрицательном ортанте, тогда 2 даёт, что $\forall j \in \{1, ..., d\}$ $s_j \leq 0$.

Докажем от противного, что $\forall j \in \{1, ..., d\}$ $s_j < 0$. Зафиксируем такое j, что $s_j = 0$, тогда $\forall i \in \{d+1, ..., n\}$ j-ая координата вектора p_i равна 0. Так как $\forall i \in \{1, ..., d\}$ j-ая координата вектора p_i равна 0 или 1, многогранник P лежит в полупространстве $x_j \geq 0$. Так как гладкий многогранник Фано обязан содержать начало координат, оно будет лежать на одной из гиперграней многогранника P. Но в этом случае вершины этой грани не смогут образовать базис решётки $\mathbb{Z}^d$ и мы приходим к противоречию.

Так как P — целочисленный многогранник, левая часть равенства 2 является целочисленным вектором, значит $\forall i \in \{1, ..., d\}$ $s_i = -1$. Правая часть равенства 2 представляет разложение вектора s по базису, значит $\forall i \in \{1, ..., d\}$ $\alpha_i = 0$. Из 1 получаем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$. □

В следующем утверждении приведём простой критерий центрального билатерального гладкого d-многогранника Фано. Для доказательства импликации $b \Rightarrow c$ теоремы 8 он понадобится только в прямую сторону.

Утверждение 10. *Произвольный целочисленный многогранник в* $\mathbb{R}^d$ *является* Y*-билатеральным гладким* d*-многогранником Фано со специальной гипергранью* Y *тогда и только тогда, когда он изоморфен некоторому многограннику* Q *с вершинами* $q_1, ..., q_n$*, удовлетворяющими следующим свойствам:*

1. $\forall i \in \{1, ..., d\}$ $q_i = e_i$;
2. $\forall i \in \{d+1, ..., n\}$ $\forall j \in \{1, ..., d\}$ *j-ая координата вектора q_i равна* 0 *или* -1;
3. $\forall i \in \{d+1, ..., n\}$ $\exists j \in \{1, ..., d\}$ *j-ая координата вектора q_i равна* -1;
4. $\forall j \in \{1, ..., d\}$ $\exists! i \in \{d+1, ..., n\}$ *j-ая координата вектора q_i равна* -1.

Определение 11. Выпуклую оболочку набора точек, удовлетворяющих этим четырём свойствам, будем называть *специальным билатеральным* многогранником Фано.

Пример 12. Рассмотрим пример матрицы $M = M(Q)$ специального билатерального многогранника Фано Q в пространстве $\mathbb{R}^6$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство утверждения 10. Сначала докажем в прямую сторону. Выберем того представителя (его и будем обозначать Q) класса изоморфности данного многогранника, который содержит F в качестве грани, причём она является специальной, а Q является F-билатеральным (такой представитель существует по лемме 7). Тогда, очевидно, можно определить первые d его вершин, как указано в свойстве 1. Остальные вершины в произвольном порядке обозначим $q_{d+1}, ..., q_n$. Обозначим q_i^j координату с номером j для вектора q_i. Далее по определению центральности для этого многогранника запишем:

$$\forall j \in \{1, ..., d\} \sum_{i=d+1}^{n} q_i^j = -1$$

По F-билатеральности имеем

$$\forall i \in \{d+1, ..., n\} \forall j \in \{1, ..., d\} q_i^j \leq 0$$

Из этих двух условий сразу получаем свойства 2 и 4. Свойство 3 следует из свойства 2 и того, что гладкий d-многогранник Фано является выпуклым, а значит его вершина не может равняться сумме остальных его вершин, что означает, что его вершиной не может быть начало координат.

Теперь будем доказывать утвержение в обратную сторону. Так как многогранник Q по условию выпуклый, а также полноразмерный и содержит начало координат, так как сумма его вершин равна 0, то для окончания доказательства достаточно показать, что набор вершин каждой его грани образует базис решётки $\mathbb{Z}^d$. Пусть X — это гипергрань многогранника Q, $M = M(X)$, а $(a_1, ..., a_d) \in \mathbb{Z}^d$ — произвольный целочисленный вектор. Используем результат леммы 14: пусть $b_X : \{1, ..., d\} \to \{1, ..., d\}$ — биекция между множеством строк и множеством столбцов матрицы M, такая что для каждого $k \in \{1, ..., d\}$ элемент $M_{k, b_X(k)}$ является либо единственным элеменом 1 в своей строке, а остальные элементы строки равны 0 или -1, либо единственным элеменом -1 в своей строке, а остальные элементы строки равны 0. Определим вектор $a' = (a'_1, ..., a'_d) \in \mathbb{Z}^d$:

$$a'_{b_X(k)} = \begin{cases} 0, M_{k,b_X(k)} = 1 \\ -a_k, M_{k,b_X(k)} = -1 \end{cases} \quad \forall k \in \{1, ..., d\} \tag{3}$$

Заметим, что по определению биекции b_X вектор Ma' совпадает с вектором a в каждой координате k, такой что в k-ой строке матрицы нет элемента 1. Значит $a - Ma'$ лежит в целочисленной линейной оболочке тех столбцов матрицы M, которые содержат элемент 1 (а значит являются базисными векторами). Получаем, что вектор a лежит в целочисленной линейной оболочке столбцов матрицы M.

Итак вершины грани X целочисленно порождают $\mathbb{Z}^d$, но так как по следствию 15 вершин грани X не больше d, они будут линейно независимы, а значит образовывать базис решётки $\mathbb{Z}^d$. □

Утверждение 13. *Пусть P — специальное вложение гладкого d-многогранника Фано, многогранник P является F-билатеральным, X — гипергрань многогранника P, тогда P является X-билатеральным.*

Доказательство. Пусть $p_1 = e_1, ..., p_d = e_d$ — вершины грани F, а $p_{d+1}, ..., p_n$ — остальные вершины многогранника P, при этом $p_{k_1}, ..., p_{k_m}$ — вершины грани X.

По критерию 10 он изоморфен специальному билатеральному многограннику Фано. Из доказательства критерия 10 делаем вывод, что подходящим представителем класса изоморфности будет сам многогранник P, так как он F-билатеральный и F — его специальная грань. Далее по лемме 14 ниже имеем $d = m$ и биекцию $b_X : \{1, ..., d\} \to \{1, ..., m\}$ между множеством строк и множеством столбцов матрицы $M = M(X)$.

Разложим произвольную вершину a многогранника P не из грани X по столбцам матрицы M. Рассмотрим два случая.

Первый случай: a — это вектор e_i стандартного базиса. Заметим, что тогда $M_{i,b_X(i)} = -1$, а если для некоторого $k \neq i$ выполняется $M_{k,b_X(i)} = -1$, то $M_{k,b_X(k)} = 1$ и по свойству 4 все остальные элементы k-ой строки кроме $b_X(i)$-ого и $b_X(k)$-ого равны 0. Определим вектор $a' = (a'_1, ..., a'_d) \in \mathbb{Z}^d$:

$$a'_{b_X(k)} = \begin{cases} -1, M_{k,b_X(i)} = -1 \\ 0, M_{k,b_X(i)} \neq -1 \end{cases} \quad \forall k \in \{1, ..., d\} \tag{4}$$

Тогда $a = Ma'$ и все коэффициенты разложения вектора a по столбцам матрицы M неположительны.

Второй случай: $a = (a_1, ..., a_d)$ не является вектором стандартного базиса. Так как он не появляется среди столбцов матрицы M, то для каждого $k \in \{1, ..., d\}$ если $a_k = -1$, то по свойству 4 $M_{k,b_X(k)} = 1$, то есть $b_X(k)$-ый столбец матрицы M равен вектору e_k. Определим вектор $a' = (a'_1, ..., a'_d) \in \mathbb{Z}^d$:

$$a'_{b_X(k)} = \begin{cases} -1, a_k = -1 \\ 0, a_k \neq -1 \end{cases} \quad \forall k \in \{1, ..., d\} \tag{5}$$

Тогда $a = Ma'$ и все коэффициенты разложения вектора a по столбцам матрицы M неположительны.

Итак, в обоих случаях вектор a выражается через столбцы матрицы M с неположительными коэффициентами, то есть все векторы a лежат в отрицательном ортанте относительно вершин грани X. □

Ниже приведём доказательство леммы и следствие из неё, которые использовались в доказательстве утверждений 10 и 13.

Лемма 14. *Пусть Q — специальный билатеральный многогранник Фано, X — его гипергрань, у которой m вершин, тогда существует биекция $b_X : \{1, ..., d\} \to \{1, ..., m\}$, такая что для каждого $k \in \{1, ..., d\}$ в k-ой строке выполнено одно из двух:*

1. *В столбце $b_X(k)$ есть элемент 1, и все остальные элементы этой строки равны 0 или -1;*

2. *В столбце $b_X(k)$ есть элемент -1, и все остальные элементы этой строки равны 0.*

Доказательство. Определим отображение b_X. Если в k-ой строке матрицы $M(X)$ есть элемент 1, то он единственнен, так как каждая координата становится равной 1 лишь в вершине, равной базисному вектору, поэтому номер столбца с элементом 1 определён однозначно, это и будет $b_X(k)$.

Предположим, что в k-ой строке все элементы 0, тогда грань X содержится в $(d-1)$-мерном подпространстве $x_k = 0$. Так как грань X $(d-1)$-мерна по условию, то других гиперплоскостей, содержащих грань X нет, иначе в пересечении двух различных гиперплоскостей получилось бы аффинное подпространство размерности меньше $d-1$, содержащее X. Значит многогранник Q должен лежать в одном из полупространств $x_k \geq 0$ и $x_k \leq 0$, что противоречит с тем, что начало координат лежит во внутренности специального билатерального многогранника Q.

Итак, если в k-ой строке нет элемента 1, то в ней будет элемент -1, причём единственный по свойству 4, поэтому $b_X(k)$ определяется однозначно как номер столбца с элементом -1.

Докажем сюръективность от противного. Рассмотрим столбец под номером j_0, который не лежит в образе отображения b_X. Обозначим индексами $j_1, ..., j_l$ номера тех столбцов, в которых есть 1 в той же строчке, что и для некоторого элемента -1 j_0-ого столбца. Заметим, что так как в столбцах с номерами $j_1, ..., j_l$ записаны векторы стандартного базиса, то других единиц в этих столбцах нет. Составим равную нулю линейную комбинацию столбцов матрицы $M(X)$ с неотрицательными коэффициентами, равными в сумме 1, что снова даст противоречие с фактом, что начало координат лежит во внутренности многогранника Q. При векторе, записанном в столбце под номером j_k, $k \in \{0, ..., l\}$ будет коэффициент $\frac{1}{l+1}$, а при остальных векторах будет коэффициент 0.

Наконец, инъективность следует из того, что столбцов в матрице $M(X)$ не может быть меньше, чем строк, так как грань X $(d-1)$-мерна по условию, а значит имеет не менее d вершин. □

Следствие 15. *В условиях леммы 14 имеем $m = d$ и матрица $M(X)$ квадратная.*

Замечание 16. Важно, что в этой лемме речь идёт о существовании биекции для произвольной матрицы $M(X)$, при этом биекции будут разными для разных матриц.

3.2 Классы изоморфности гладких d-многогранников Фано, билатеральных относительно своих специальных граней

Из утверждения 10 можно сделать вывод, что классы изоморфности многогранников Фано, билатеральных относительно некоторой своей специальной грани, взаимно однозначно соответствуют классам изоморфности специальных билатеральных многогранников Фано.

Пусть Q — специальный билатеральный многогранник Фано с вершинами $q_1, ..., q_n$. Обозначим q_i^j координату с номером j для вектора q_i. Поставим многограннику Q в соответствие целочисленное решение $\varphi(Q) = (x_1, ..., x_d)$ следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 + ... + x_d = d \\ x_1 \geq ... \geq x_d \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

Для каждого $i \in \{d+1, ..., n\}$ определим

$$l_i := |\{j \in \{1, ..., d\} : q_i^j = -1\}|, \tag{7}$$

тогда набором $\varphi(Q)$ будет множество $\{l_i | i \in \{d+1, ..., n\}\}$, дополненное нужным количеством нулей и упорядоченное по невозростанию. Из свойств 3 и 4 специального билетарельного многогранника Фано следует, что $n \leq 2d$ и полученный набор действительно удовлетворяет системе 6.

Теорема 17. *Отображение φ индуцирует биекцию между классами изоморфности гладких d-многогранников Фано, билатеральных относительно некоторой своей специальной грани, и множеством неупорядоченных разбиений числа d в сумму натуральных чисел.*

Доказательство. По утверждению 22 ниже корректно определено следующее отображение из множества классов изоморфности специальных билатеральных многогранников Фано: оно равно $\varphi(Q)$ для произвольного представителя Q класса изоморфности.

Покажем его сюръективность: пусть дано целочисленное решение $(x_1, ..., x_d)$ системы 6. Построим многогранник Q, такой что $\varphi(Q) = (x_1, ..., x_d)$. Его количество вершин n — такое натуральное число, что количество индексов $i \in \{d+1, ..., 2d\}$, таких что $x_{i-d} > 0$, равно $n - d$. Для каждого $i \in \{1, ..., d\}$ $q_i = e_i$, для каждого $i \in \{d+1, ..., n\}$:

$$q_i^j = \begin{cases} -1, j \leq \sum_{k=1}^{i-d} x_k < j + x_{i-d} \\ 0, j > \sum_{k=1}^{i-d} x_k \vee j + x_{i-d} \leq \sum_{k=1}^{i-d} x_k \end{cases} \quad \forall j \in \{1, ..., d\} \tag{8}$$

Тогда $\forall i \in \{d+1, ..., n\}$ $l_i = x_i$.

Теперь покажем инъективность: пусть Q_1 и Q_2 — многогранники, такие что $\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2) = (x_1, ..., x_d)$. Многогранники Q_1 и Q_2 задают разбиения α_1 и α_2 соответственно множества координат $\{1, ..., d\}$ на множества, набор размеров которых в точности $(x_1, ..., x_d)$, тогда существует биекция множества $\{1, ..., d\}$ в себя, такая что элементы одного множества разбиения α_1 переходят в элементы одного множества разбиения α_2 и наоборот. Таким образом, автоморфизм решётки $\mathbb{Z}^d$, представляющий из себя перестановку координат в соответствии с этой биекцией, переводит многогранник Q_1 в многогранник Q_2, значит $Q_1 \cong Q_2$. □

Перед доказательством корректности этого отображения введём обозначения и докажем леммы 18 и 21. Для натурального N и $i \in \{1, ..., N\}$ определим функцию

$$f^{(i)}(x_1, ..., x_N) := (x_1 + 1) \cdot ... \cdot (x_{i-1} + 1) \cdot x_i \cdot (x_{i+1} + 1) \cdot ... \cdot (x_N + 1)$$

и мультимножество $M(x_1, ..., x_N)$, состоящее из дизъюнктного объединения по $i \in \{1, ..., N\}$ мультимножеств из $x_i + 1$ одинаковых чисел $f^i(x_1, ..., x_N)$.

Лемма 18. *Q — специальный билатеральный многогранник Фано с вершинами $q_1, ..., q_n$, $\varphi(Q) = (x_1, ..., x_d)$, тогда:*

$$|F(Q)| = (x_1 + 1) \cdot ... \cdot (x_{n-d} + 1),$$

Доказательство. Существует разбиение множества $V(Q) = \bigsqcup_{i=d+1}^{n} V_i(Q)$, где множество $V_i(Q)$ состоит из l_i+1 вершин многогранника Q и содержит вершину q_i, а остальные l_i вершин являются вершинами стандартного симплекса, единица в которых находится в тех координатах, в которых находится -1 у вершины q_i.

Для каждой вершины q_i, $i \in \{d+1, ..., n\}$ и произвольной грани X многогранника Q образ отображения b_X в каждой ненулевой координате вектора q_i равен номеру столбца матрицы $M(X)$, в котором записан один из векторов множества $V_i(Q)$, поэтому любая грань многогранника Q содержит ровно l_i вершин из $V_i(Q)$ для каждого $i \in \{d+1, ..., n\}$. Покажем обратное: если из $V(Q)$ убрать по одному элементу каждого множества $V_i(Q)$, то оставшиеся вершины образуют грань многогранника Q. Для этого определим вектор $w \in \mathbb{R}^d$, который будет эту грань задавать. Если убирается вершина $q_k \in V_i(Q)$ для $k \le d$, то положим $w_k = -l_i$. Все остальные координаты вектора w положим равными 1. Далее найдём (a, w) для произвольной вершины a многогранника Q.

Первый случай, вершина a убиралась и равна $q_k \in V_i(Q)$ для некоторых $k \in \{1, ..., d\}$, $i \in \{d+1, ..., n\}$, тогда $(a, w) = 1 \cdot w_k = -l_i$.

Второй случай, вершина a не убиралась и равна $q_k \in V_i(Q)$ для некоторых $k \in \{1, ..., d\}$, $i \in \{d+1, ..., n\}$, тогда $(a, w) = 1 \cdot w_k = 1$.

Третий случай, вершина a убиралась и равна q_k для некоторого $k \in \{d+1, ..., n\}$, тогда все остальные вершины множества $V_k(Q)$ не убирались, значит $(a, w) = \sum_{j=1}^{l_k}(-1 \cdot 1) = -l_k$.

Четвёртый случай, вершина a не убиралась и равна q_k для некоторого $k \in \{d+1, ..., n\}$, тогда $(a, w) = \sum_{j=1}^{l_k-1}(-1 \cdot 1) + (-1) \cdot (-l_k) = 1$.

Таким образом, если вершина q многогранника Q убиралась, то $(q, w) < 1$, а иначе $(q, w) = 1$. Значит $|F(Q)| = (l_{d+1} + 1) \cdot ... \cdot (l_n + 1)$ и лемма доказана. □

Следствие 19. *В условиях леммы 18, если вершина $q \in V(Q)$ лежит в $V_i(Q)$, то*

$$|F(q)| = f^{(i)}(l_{d+1}, ..., l_n).$$

Доказательство. Граней без вершины q ровно $\frac{|F(Q)|}{l_i+1}$, так как для $V_i(Q)$ однозначно определена убирающаяся вершина. □

Пример 20. Вернёмся к многограннику Q из примера 12. $l_7 = 2, l_8 = 1, l_9 = 1, l_{10} = 2$, значит $\varphi(Q) = (2, 2, 1, 1, 0, 0)$. По лемме 18 многогранник имеет

$$|F(Q)| = (2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 36$$

гиперграней. Столбцы матрицы M обозначим q_1, ..., q_{10} слева направо, тогда каждая гипергрань имеет вид $\mathrm{conv}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$, где

$$v_1, v_2 \in \{q_1, q_5, q_7\}; v_3 \in \{q_6, q_8\}; v_4 \in \{q_4, q_9\}; v_5, v_6 \in \{q_2, q_3, q_{10}\}$$

и все v_i различны.

Докажем следующее свойство мультимножества $M(x_1, ..., x_N)$.

Лемма 21. *Пусть даны наборы чисел $a_1 \ge ... \ge a_m > 0$ и $b_1 \ge ... \ge b_m > 0$, такие что $M(a_1, ..., a_m) = M(b_1, ..., b_m)$ и*

$$(a_1 + 1) \cdot ... \cdot (a_m + 1) = (b_1 + 1) \cdot ... \cdot (b_m + 1), \tag{9}$$

тогда для любого $i \in \{1, ..., m\}$ $a_i = b_i$.

Доказательство. Проведём индукцию по m.

База, $m = 1$: $a_1 + 1 = b_1 + 1 \Rightarrow a_1 = b_1$.

Переход, $m > 1$: $\forall i < j$ выполняется $a_i \geq a_j$. Домножим неравенство на левую часть равенства 9, поделим на $(a_i+1)(a_j+1)$ и получим $f^i(b_1, ..., b_m) \geq f^j(a_1, ..., a_m)$. Аналогично, $\forall i < j$ выполняется $f^i(b_1, ..., b_m) \geq f^j(b_1, ..., b_m)$. Значит, в множестве $M(a_1, ..., a_m)$ максимальный элемент равен $f^1(a_1, ..., a_m)$, а в множестве $M(b_1, ..., b_m)$ максимальный элемент равен $f^1(b_1, ..., b_m)$, следовательно

$$f^1(a_1, ..., a_m) = f^1(b_1, ..., b_m).$$

Поделим на равенство 9 и получим

$$\frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{b_1}{b_1 + 1}$$

Значит, $a_1 = b_1$. Если убрать из $M(a_1, ..., a_m)$ a_1+1 максимальных элементов, получится мультимножество $M(a_2, ..., a_m)$, а если убрать из $M(b_1, ..., b_m)$ $b_1 + 1$ максимальных элементов, получится мультимножество $M(b_2, ..., b_m)$, они также будут совпадать. Кроме того, так как $a_1 + 1 = b_1 + 1$, будет выполняться равенство

$$(a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1) = (b_2 + 1) \cdot ... \cdot (b_n + 1),$$

значит, по предположению индукции $\forall i \in \{2, ..., n\}$ $a_i = b_i$, откуда следует переход индукции. $\square$

Утверждение 22. *Если два специальных билатеральных многогранника Фано Q_1 и Q_2 изоморфны, то $\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2)$.*

Доказательство. При изоморфизме многогранников вершины переходят в вершины, а грани в грани. Значит $|V(Q_1)| = |V(Q_2)| =: n$, $|F(Q_1)| = |F(Q_2)|$, а также для каждой вершины сохраняется количество граней, в которых она лежит. Пусть $\varphi(Q_1) = (x_1, ..., x_d)$, $\varphi(Q_2) = (y_1, ..., y_d)$. Так как количества вершин многогранников равны, имеем, что оба набора содержат ровно $n - d$ ненулевых элементов.

По лемме 18 количество граней многогранника Q_1, как и количество граней многогранника Q_2, равно

$$(x_1 + 1) \cdot ... \cdot (x_{n-d} + 1) = (y_1 + 1) \cdot ... \cdot (y_{n-d} + 1). \tag{10}$$

Далее по следствию 19 имеем равенство мультимножеств

$$M(x_1, ..., x_{n-d}) = M(y_1, ..., y_{n-d}),$$

так как левая часть равна мультимножеству $\{F(q)|q \in V(Q_1)\}$, а правая равна $\{F(q)|q \in V(Q_2)\}$. Наконец, по лемме 21 получаем, что $\forall i \in \{1, ..., n - d\}$ $x_i = y_i$, следовательно, $\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2)$. $\square$

3.3 Размерность $d = 3$

В размерности $d = 3$ существует всего 3 решения системы 6: $(3, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$. Таким образом, все специальные билатеральные многогранники изоморфны следующим трём: $Q_{17} = \mathrm{conv}(e_1, e_2, e_3, -e_1 - e_2 - e_3)$, $Q_{16} = \mathrm{conv}(e_1, e_2, e_3, -e_1 - e_3, -e_2)$, $Q_{15} = \mathrm{conv}(e_1, e_2, e_3, -e_1, -e_2, -e_3)$. Они изображены на рисунке 1.

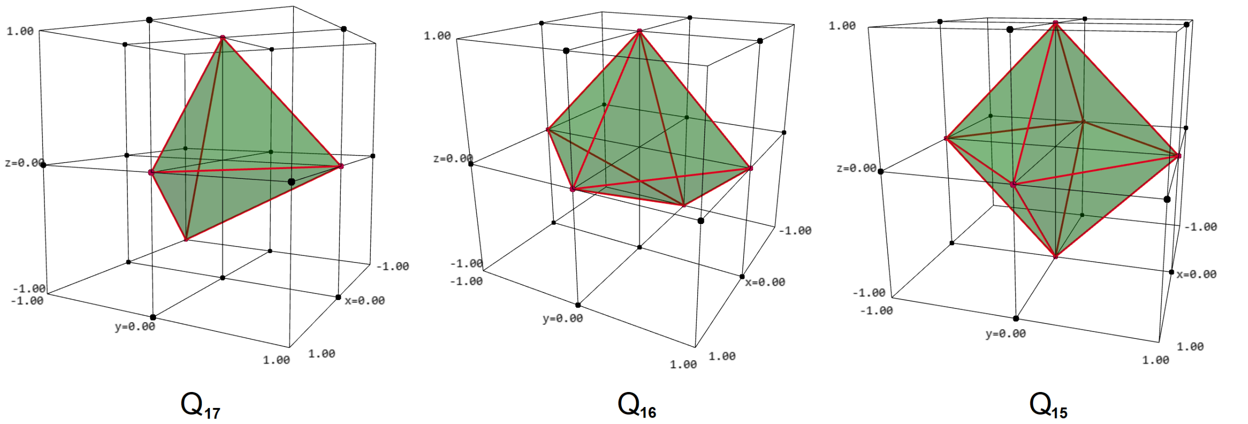

Рисунок 1 — специальные билатеральные многогранники размерности 3.

Для гладкого d-многогранника Фано Q обозначим $S(Q)$ множество специальных граней многогранника Q, $B(Q) := \{X \in F(Q) | Q$ является X-билатеральным$\}$. Что касается остальных гладких 3-многогранников Фано, четыре класса изоморфности имеют $B(Q) = \emptyset$, по два класса имеют $|B(Q)|$ равное 1, 3 и 4 и пять классов имеют $|B(Q)| = 2$ (см. таблицу 1). На рисунке 2 представлены многогранники Q_3, Q_7, Q_9, Q_{12}, веер граней который не является билатеральным.

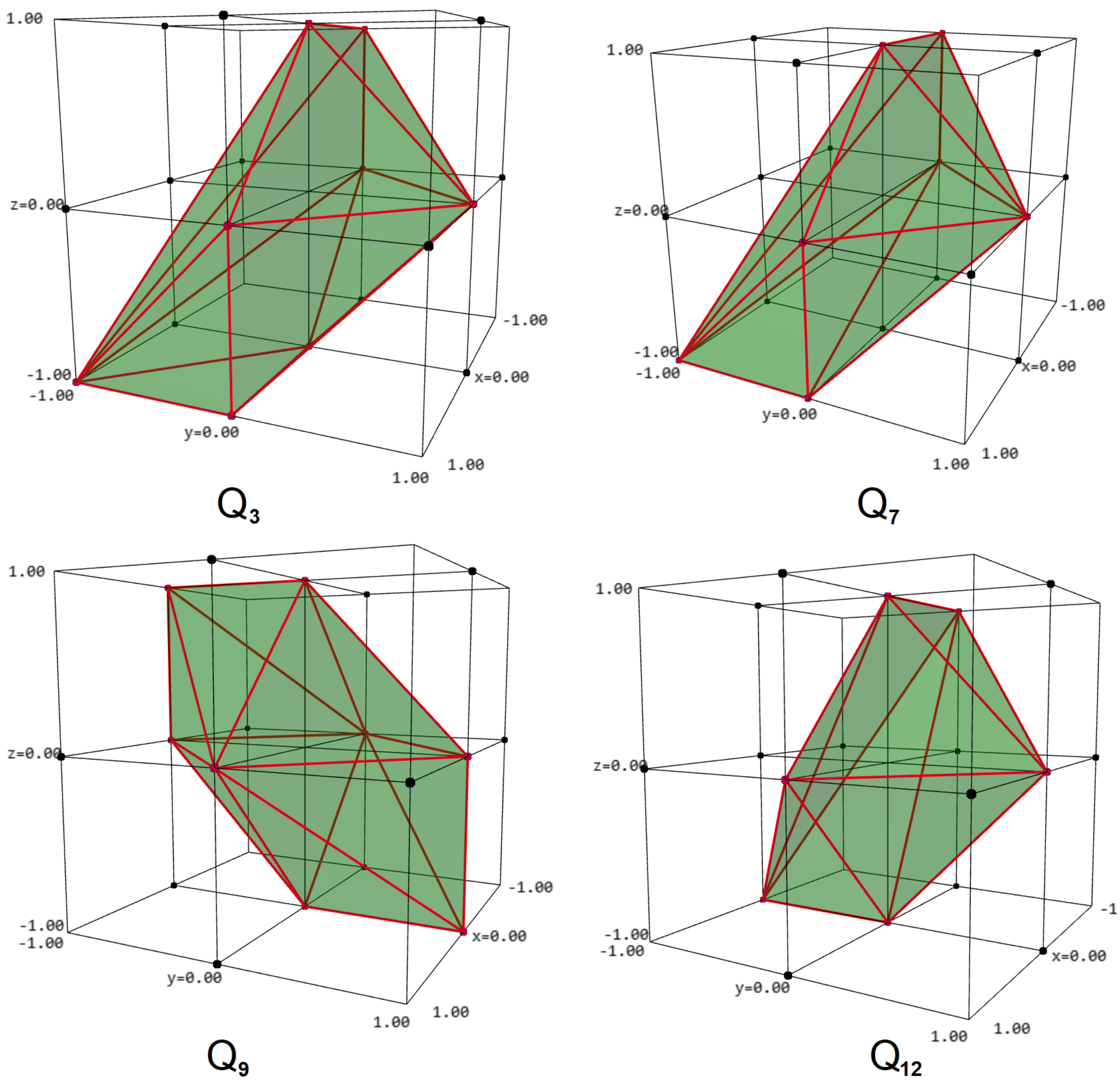

Рисунок 2 — не билатеральные гладкие 3-многогранники Фано.

Многогранники Q_3 и Q_7 имеют по 4 специальных грани, тогда как Q_9 и Q_{12} являются центральными, а Q_9 ещё и центрально симметричен. На основании таблицы 1 имеем следующее следствие.

Следствие 23 (Следствие теоремы 2.4)**.** *Q — гладкий 3-многогранник Фано, его веер граней Σ_Z соответствует гладкому торическому многообразию Фано Z, тогда многообразие Z лучистое тогда и только тогда, когда многогранник Q не изоморфен ни одному из Q_3, Q_7, Q_9, Q_{12}.*

4 Описание практической части

Программное обеспечение polymake имеет дело с выпуклыми многогранниками и связанными с ними объектами из геометрической комбинаторики, в частности, веерами. Более того, имеется приложение fulton, названное в честь книги [7], позволяющее работать с торическими многообразиями на языке polymake. Для целочисленного многогранника также доступна функция SPECIAL_FACETS, выдающая список его специальных граней.

В статье [8] автор привёл свой алгоритм для вычисления списков всех d-мерных гладких d-многогранников Фано. С помощью этого алгоритма были вычислены списки, которые содержат все гладкие d-многогранники для d в диапазоне от 3 до 9 с точностью до изоморфизма [1]. В ходе данной работы был написан код на языке polymake, определяющий для каждой гиперграни X гладкого многогранника Фано размерности 3, 4, 5, 6 является ли она специальной гранью своего многогранника, и является ли многогранник X-билатеральным.

Следующая процедура Bilateral принимает на вход целочисленную матрицу (в коде обозначается _[0]) размера $\$rows \times \$cols$, в строках которой записаны примитивные порождающие векторы лучей полного веера в пространстве $\mathbb{R}^d$, где $d = \$cols$ (то есть ненулевые векторы, которые минимальные на своих лучах). Возвращает эта процедура индикатор того, что этот веер билатерален относительно положительных полуосей пространства $\mathbb{R}^d$.

```
sub Bilateral {
    $rows = $_[0]->rows();
    $cols = $_[0]->cols();
    $b = 0;

    for (my $row = 0; $row < $rows; $row += 1) {
        $neg_orth = 1;
        $basis = 1;
        $summa = 0;
        for (my $col = 0; $col < $cols; $col += 1) {
            $elem = $_[0]->elem($row, $col);
            $summa += $elem;
            if ($elem < 0 or $elem > 1 or $summa > 1) {$basis = 0;}
            if ($elem > 0)  {$neg_orth = 0;}
        }
        if ($basis == 1 and $summa == 0) {$basis = 0;}
        if (not ($basis == 1 or $neg_orth == 1)) {return 0;}
        $b = $b + $basis;
```

[1] Данные о многогранниках в формате polymake взяты со страницы `https://polymake.org/polytopes/paffenholz/www/fano.html`

```
        }
        if ($b != $cols) {return 0;}
        return 1;
    }
```

Другая процедура SpecialFacet принимает на вход целочисленную матрицу (в коде обозначается _[0]) размера $\$rows \times \$cols$, в строках которой записаны координаты вершин гладкого d-многогранника Фано, где $d = \$cols$. Она возвращает индикатор того, что стандартный $(d-1)$-мерный симплекс является специальной гранью этого многогранника.

```
    sub SpecialFacet {
        $rows = $_[0]->rows();
        $cols = $_[0]->cols();
        $b = 0;

        for (my $row = 0; $row < $rows; $row += 1) {
            $basis = 1;
            $summa = 0;
            for (my $col = 0; $col < $cols; $col += 1) {
                $elem = $_[0]->elem($row, $col);
                $summa += $elem;
                if ($elem < 0 or $elem > 1 or $summa > 1) {$basis = 0;}
            }
            if ($basis == 1 and $summa == 0) {$basis = 0;}
            if ($summa > 1) {return 0;}
            if ((not $basis) and $summa == 1) {return 0;}
            $b = $b + $basis;
        }
        if ($b != $cols) {return 0;}

        for (my $col = 0; $col < $cols; $col += 1) {
            $summa = 0;
            for (my $row = 0; $row < $rows; $row += 1) {
                $elem = $_[0]->elem($row, $col);
                $summa += $elem;
            }
            if ($summa < 0) {return 0;}
        }
        return 1;
    }
```

Теперь чтобы проверить, является ли гипергрань X специальной гранью гладкого d-многогранника Фано P, и является ли этот многогранник X-билатеральным, нужно применить к многограннику линейное отображение $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, переводящее грань X в стандартный $(d-1)$-мерный симплекс. Для этого найдём матрицу $\$matrix$, в строках которой записаны координаты вершин грани X. По определнию гладкого d-многогранника Фано получаем, что матрица $\$matrix$ — квадратная обратимая матрица, причём её обратная матрица тоже целочисленная. Значит эта обратная матрица и будет задавать искомое отображение f.

```
$p = polarize(load("fano-v3d/F.3D.0000.poly"));
$nfacets = $p->N_FACETS;
$nvertices = $p->N_VERTICES;
$vertices = $p->VERTICES;
$facets = $p->VERTICES_IN_FACETS;
$incidence_matrix = dense($facets);

@special = ();
@bilateral = ();

for (my $facet = 0; $facet < $nfacets; $facet += 1) {
    @f = ();
    for (my $vertex = 0; $vertex < $nvertices; $vertex += 1) {
        if ($incidence_matrix->elem($facet, $vertex)) {
            push(@f, $vertex);
        }
    }
    $facet_set = new Set(@f);

    $matrix = $vertices->minor($facet_set, ~[0]);
    $transformed = $vertices->minor(All, ~[0]) * inv($matrix);

    push(@special, SpecialFacet($transformed));
    push(@bilateral, Bilateral($transformed));
}
print @special, "\n";
print @bilateral, "\n";
```

Получаем вывод

```
11000000
00000001
```

Итак, у этого многогранника две специальные грани и одна грань, относительно которой он билатерален. Применяя функции Bilateral и SpecialFacet ко всем граням 18-ти существующих гладких 3-многогранников Фано, получаем результат, отображённый в таблице 1.

Здесь p — номер гладкого 3-многогранника Фано Q, $V = V(Q)$, $F = F(Q)$, $S = S(Q)$, $B = B(Q)$, $A = S \cap B$, $X = S \triangle B$, $E = F \setminus X$. Аналогичные таблицы получены для размерностей 4, 5 и 6. В них можно увидеть подтверждение теорем 8 и 17. Таблица 2 показывает, сколько гладких d-многогранников Фано билатеральные, и сколько из них специальные билатеральные.

Таблица 1 — Гладкие 3-многогранники Фано

p	|V|	|F|	|S|	|B|	|A|	|X|	|E|
0	6	8	2	1	0	3	5
1	5	6	3	3	0	6	0
2	7	10	4	2	0	6	4
3	8	12	4	0	0	4	8
4	7	10	2	2	0	4	6
5	6	8	4	4	0	8	0
6	6	8	2	2	0	4	4
7	7	10	4	0	0	4	6
8	7	10	4	2	0	6	4
9	8	12	12	0	0	12	0
10	6	8	4	1	0	5	3
11	6	8	4	4	0	8	0
12	6	8	8	0	0	8	0
13	5	6	4	2	0	6	0
14	5	6	3	3	0	6	0
15	6	8	8	8	8	0	8
16	5	6	6	6	6	0	6
17	4	4	4	4	4	0	4

Таблица 2 — Билатеральные гладкие d-многогранники Фано

d	|P|	Bil	Sp-bil
3	18	14	3
4	124	79	5
5	866	470	7
6	7622	3428	11

5 Заключение

Для лучистого гладкого торического многообразия Фано найдена связь между специальной гранью соответствующего гладкого d-многогранника Фано и конусом, относительно которого билатерален его веер граней. Если веер граней гладкого d-многогранника Фано билатерален относительно конуса над его специальной гранью, то такие многогранники имеют определённый вид и принадлежат одному из $K(d)$ классов изоморфности, где $K(d)$ равно количеству неупорядоченных разбиений натурального числа d в сумму натуральных чисел (теоремы 8, 17). Кроме того, с помощью языка программироварования polymake для всех гладких многогранников Фано размерностей 3–6 осуществлена проверка вееров граней на билатеральность, (см. 4). Таблица 2 показывает, что классифицированные в разделе 3 многогранники составляют малую часть от всех билатеральных гладких многогранников Фано. Поэтому возможной задачей для будущих исследований является изучение гладких многогранников Фано, которые не билатеральны относительно ни одной специальной гиперграни. Для этого понадобится более детальное изучение свойств билатеральных вееров и гладких многогранников.

Список литературы

[1] *Belmans, Pieter.* Fanography. — 2025. https://fanography.info.

[2] *Cox, David A.* Toric varieties / David A. Cox, John B. Little, Henry K. Schenck. — United States: American Mathematical Society, 2011. — Vol. 124 of *Graduate Studies in Mathematics*.

[3] *Arzhantsev, Ivan.* Radiant toric varieties and unipotent group actions / Ivan Arzhantsev, Alexander Perepechko, Kirill Shakhmatov // *Bulletin des Sciences Mathématiques*. — 2024. — Vol. 192. — P. 103419. http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2024.103419.

[4] *Arzhantsev, Ivan.* Additive actions on toric varieties / Ivan Arzhantsev, Elena Romaskevich // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 2016. — Vol. 145, no. 5. — P. 1865–1879. http://dx.doi.org/10.1090/proc/13349.

[5] *Ziegler, G.M.* Lectures on Polytopes / G.M. Ziegler. Graduate Texts in Mathematics. — Springer New York, 2012. https://books.google.ru/books?id=WtJXAAAAYAAJ.

[6] *Ewald, G.* Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry / G. Ewald. Graduate Texts in Mathematics. — Springer New York, 1996. https://books.google.ru/books?id=EEiwI7k7Mx8C.

[7] *Fulton, William.* Introduction to Toric Varieties. (AM-131), Volume 131 / William Fulton. — Princeton: Princeton University Press, 1993. https://doi.org/10.1515/9781400882526.

[8] *Øbro, Mikkel.* An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes. — 2007. https://arxiv.org/abs/0704.0049.

[9] *Nill, Benjamin.* Gorenstein toric Fano varieties / Benjamin Nill // *manuscripta mathematica*. — 2005. — Vol. 116, no. 2. — P. 183–210. http://dx.doi.org/10.1007/s00229-004-0532-3.

[10] *Franco, Sebastián.* Fano 3-folds, reflexive polytopes and brane brick models / Sebastián Franco, Rak-Kyeong Seong // *Journal of High Energy Physics*. — 2022. — Vol. 2022, no. 8. http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2022)008.