1 Определения и постановка задачи

Полиэдральным **конусом**, порождённым векторами $p_1 ... p_m$ в пространстве R^n называется множество $\sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{\geq 0} p_i$. Полиэдральный конус называется **острым**, если не содержит в себе подпространства, большего, чем $\{0\}$ и **рациональным**, если конечно порождается элементами целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n$. Все конусы в $\mathbb{R}^n$ делятся на пары двойственных друг к другу: **двойственный** конус к σ есть конус $\sigma^\nu := \{x \in \mathbb{R}^n | (x, y) \geq 0 \ \forall y \in \sigma\}$. **Гранью** $\tau \prec \sigma$ конуса σ называется $\{x \in \sigma | (x, y) = 0\}$ для некоторого $y \in \sigma^\nu$. Одномерные грани называются **лучами**. **Веером** Σ называется конечный набор острых рациональных полиэдральных конусов в R^n, такой что
1) $\tau \prec \sigma \in \Sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.
2) $\sigma_1 \in \Sigma$, $\sigma_2 \in \Sigma \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \prec \sigma_1$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 \prec \sigma_2$.
Веер называется **полным**, если объединение его конусов есть всё R^n и **билатеральным**, если существует базис целочисленной решётки, каждый вектор которого порождает некоторый луч этого веера, а остальные лучи этого веера лежат в отрицательном ортанте относительно этого базиса. В этом случае этот базис будет порождать один из конусов веера.
Пусть T — алгебраический тор размерности n с решёткой однопараметрический подгрупп $N \cong \mathbb{Z}^n$ и решёткой характеров $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между торическими многообразиями и веерами в N. .... Более того, существует взаимно однозначное соответствие между полными торическими многообразиями и полными веерами над решёткой однопараметрических подгрупп тора T.
Каждый содержащий начало координат выпуклый многогранник P размерности d в $\mathbb{R}^d$ с вершинами в узлах целочисленной решётки соответствует некоторому вееру $\mathrm{FaceFan}(P)$ в $\mathbb{R}^d$, радиус-векторы его вершин являются порождающими векторами лучей веера. Два многогранника P_1, P_2 с вершинами в узлах решётки $\mathbb{Z}^n$ называются **изоморфными**, если существует невырожденное линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, такое что $\varphi(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$ и $\varphi(P_1) = P_2$.
Гладкий d-многогранник Фано — выпуклый многогранник размерности d в R^d с вершинами в узлах целочисленной решётки, содержащий начало координат, такой что набор радиус-векторов вершин каждой его грани даёт базис целочисленной решётки.
Веера, соответствующие гладким d-многогранникам Фано, соответствуют гладким торическим многообразиям Фано, причём классы изоморфности гладких торических многообразий Фано соответствуют классам изоморфности гладких d-многогранников Фано.
Полное торическое многообразие X с действием тора T называется **лучистым**, если максимальная унипотентная подгруппа группы автоморфизмов многообразия X действует на X с открытой орбитой. Верна следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть X — полное торическое многообразие, тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) Многообразие X является лучистым;
2) Веер Σ_X является билатеральным.

Исследуем лучезарность полных гладких торических многообразий Фано с помощью проверки, являются ли соответствующие веера билатеральными. Полезным будет понятие специального вложения многогранника.
Грань F гладкого d-многогранника Фано $P \subset R^d$ называется **специальной**, если

$$\sum_{v \in V(P)} v = \sum_{v \in V(F)} a_v v, a_v \geq 0$$

Пусть P, Q — изоморфные гладкие d-многогранники Фано, тогда Q называется **специальныи вложением** для P, если $\operatorname{conv}(e_1, ..., e_n)$ является специальной гранью для Q.

2 Связь билатеральности вееров и специальных граней соответствующих многогранников

У любого гладкого d-многогранника Фано есть специальное вложение, так как сумма радиус-векторов его вершин попадёт хотя бы в один конус над гранью этого многогранника, а любая его грань приводится изоморфизмом решётки к стандартному $d-1$-мерному симплексу.
Обозначим $(e_1, ..., e_d)$ — стандартный базис R^d. Рассмотрим в общем виде гладкий d-многогранник Фано P, билатеральный относительно некоторой своей специальной грани. В этом разделе представлено доказательство того, что каждая грань многогранника P является его специальной гранью и что многогранник P билатерален относительно каждой своей грани.

Утверждение 1. *Пусть A — изоморфизм решётки Z^d, Σ — веер в пространстве R^d. Обозначим его лучи ρ_1, ..., ρ_n и их порождающие целочисленные векторы p_1, ..., p_n соответственно. Пусть конус σ веера Σ порождается векторами p_1, ..., p_d. Тогда веер Σ билатерален относительно конуса σ тогда и только тогда, когда веер $A\Sigma$ билатерален относительно конуса $A\sigma$.*

Доказательство. Докажем утверждение слева направо, тогда в обратную сторону будет следовать автоматически применением прямого утверждения для изоморфизма A^{-1}, веера $A\Sigma$ с лучами $A\rho_1$, ..., $A\rho_n$ и порождающими векторами Ap_1, ..., Ap_n и конусом $A\sigma =< Ap_1, ..., Ap_d >$.
Пусть веер Σ билатерален относительно конуса σ, тогда будем считать, что $(p_1$, ..., $p_d)$ есть базис решётки Z^d и $\forall i \in \{d+1, ..., n\}$ $\exists \alpha_1^i \geq 0$, ..., $\alpha_d^i \geq 0$ $p_i = \alpha_1^i p_1 +$ ... $+ \alpha_d^i p_d$.
Тогда $(Ap_1$, ..., $Ap_d)$ есть базис решётки Z^d и $\forall i \in \{d+1, ..., n\}$ $Ap_i = \alpha_1^i (Ap_1) +$ ... $+ \alpha_d^i (Ap_d)$, значит веер веер $A\Sigma$ билатерален относительно конуса $A\sigma$. □

Лемма 1. *Пусть F — специальная грань гладкого d-многогранника Фано P. Обозначим p_1, ..., p_n — радиус-векторы вершин многогранника P, причём концы векторов p_1, ..., p_d — вершины грани F. Пусть веер* FaceFan(P) *билатерален относительно конуса $\sigma = \operatorname{Cone}(p_1, ..., p_d)$. Тогда $\sum_{i=1}^n p_i = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим веер $\Sigma = \mathrm{FaceFan}(P)$ и обозначим его лучи $\rho_1 = \mathrm{conv}(p_1)$, ..., $\rho_n = \mathrm{conv}(p_n)$. Определим квадратную матрицу A, составленную из векторов-столбцов p_1, ..., p_d. Так как P — гладкий d-многогранник Фано, то A задаёт изоморфизм решётки Z^d, значит для него существует обратный изоморфизм целочисленной решётки A^{-1}. По доказанному утверждению веер $A^{-1}\Sigma$ билатерален относительно конуса $A^{-1}\sigma = \sum_{i=1}^d R_{\geq 0}(A^{-1}p_i) = \sum_{i=1}^d R_{\geq 0}e_i$.
Тогда

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^d a_i p_i, a_i \geq 0$$

$$\sum_{i=d+1}^n p_i = \sum_{i=1}^d (a_i - 1) p_i, a_i \geq 0$$

$$s := \sum_{i=d+1}^n A^{-1}p_i = \sum_{i=1}^d (a_i - 1)A^{-1}p_i = \sum_{i=1}^d (a_i - 1)e_i, a_i \geq 0 \tag{1}$$

Из билатеральности имеем, что каждый вектор $A^{-1}p_i$, $i \in \{d+1, n\}$ лежит в отрицательном ортанте, тогда (1) даёт, что $s \in \{-1 \leq x_1 \leq 0\} \cap ... \cap \{-1 \leq x_d \leq 0\}$.
1) $\forall i \in \{1..d\}$ $s_i \neq 0$, потому что иначе для некоторого i $P \subset \{s_i \geq 0\}$ и какая-то грань обязана содержать начало координат, что противоречит тому, что радиус-векторы её вершин образуют базис решётки $\mathbb{Z}^d$.
2) A — изоморфизм решётки $\mathbb{Z}^d$ и координаты вершин многогранника P целочисленные, значит s есть целочисленный вектор.
Таким образом, мы получаем, что $s = (-1, ..., -1)^T$, значит $\forall i \in \{1, \ldots d\}$ $a_i = 0$, то есть $\sum_{i=1}^n p_i = 0$, другими словами, для многогранника P любая его грань является специальной. □

Рассмотрим многогранник $\mathrm{conv}(q_1, \ldots, q_n)$, где $q_i = A^{-1}p_i$. $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$ $q_i = e_i$, а $\forall i \in \{d+1, \ldots, n\}$ q_i имеет неположительные целые координаты и $\sum_{i=d+1}^n q_i = (-1, \ldots, -1)^T$. Итак, этот многогранник обладает следующими свойствами:

- $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$ $q_i = e_i$
- $\forall i \in \{d+1, \ldots, n\}$ $\forall j \in \{1, \ldots, d\}$ j-ая координата вектора q_i равна 0 или -1.
- $\forall i \in \{d+1, \ldots, n\}$ $\exists j \in \{1, \ldots, d\}$ j-ая координата вектора q_i равна -1.
- $\forall j \in \{1, \ldots, d\}$ $\exists! i \in \{d+1, \ldots, n\}$ j-ая координата вектора q_i равна -1.

Пусть теперь произвольный многогранник Q с вершинами $(q_1, \ldots, q_n)$ обладает перечисленными свойствами. Очевидно, что веер, лучи которого соответствуют вершинам этого многогранника, является билатеральным относительно конуса $\mathrm{Cone}(q_1, \ldots, q_d)$. Теперь мы будем доказывать, что Q является гладким d-многогранником Фано. Для начала заметим, что эти свойства гарантируют выпуклость: каждая вершина многогранника лежит в некоторой гиперплоскости, относительно которой все остальные вершины лежат по одну сторону. Далее, из третьего и четвёртого свойств следует, что количество его вершин n не превосходит $2d$, а из первого и четвёртого свойств следует, что сумма всех вершин равна нулевому вектору, откуда следует, что начало координат лежит внутри многогранника Q. Опишем его $d-1$-мерные грани. Пусть вектор w задаёт грань F многогранника Q. Определим число m — количество таких вершин q многогранника Q, что

$$\langle q, w\rangle = \max_i \langle q_i, w\rangle.$$

и множество

$$Q_w := \{i_1 < ... < i_m | \forall k \in \{1, ..., m\}(i_k \in \{1, ..., n\} \wedge \langle q_{i_k}, w\rangle = \max_i \langle q_i, w\rangle)\},$$

тогда $F = \mathrm{conv}(\{q_i | i \in Q_w\})$. Пусть грань F $(d-1)$-мерна, тогда $m \geq d$. Теперь рассмотрим матрицу A, зависящую от w, размера $d \times m$, в j-ом столбце которой записан вектор q_{i_j}.

Утверждение 2. *В каждом столбце, в котором нет элементов* 1 *матрицы* A *есть элемент* -1*, такой что в его строке нет элементов* 1.

Доказательство. Предположим противное. Пусть утверждение не выполняется для j_0-ого столбца, тогда обозначим индексами j_1, ..., j_l номера тех столбцов, в которых есть 1 в той же строчке, что и для некоторого элемента -1 j_0-ого столбца. Заметим, что так как в столбцах с номерами j_1, ..., j_l записаны векторы стандартного базиса, то других единиц в этих столбцах нет. Составим равную нулю линейную комбинацию вершин q_{i_1}, ..., q_{i_m} с неотрицательными коэффициентами, равными в сумме 1, что даст противоречие с фактом, что начало координат лежит внутри многогранника (а значит не лежит на грани). При каждом векторе вида $q_{i_{j_k}}$, $k \in \{0, ..., l\}$ будет коэффициент $\frac{1}{l+1}$, а при остальных векторах будет коэффициент 0. □

Следствие. *В матрице* A *столбцов не больше, чем строк.*

Таким образом, $m = d$ и каждая грань многогранника Q является выпуклой оболочкой ровно d вершин многогранника. Заметим также ещё одно

Следствие. *Для каждого столбца без элементов 1 такой выбор элемента -1 единственнен. Другими словами, все остальные элементы -1 каждого столбца, кроме существующего по предыдущему утверждению, имеют в своих строках элемент 1.*

Это следует из того, что в одной строке не может быть более одного элемента -1. Если среди векторов множества $\{q_i | i \in Q_w\}$ ровно l векторов стандартного базиса, то строк без элементов 1 столько же, сколько оставшихся столбцов матрицы, то есть $m-l$. Таким образом среди векторов множества $\{q_i | i \in Q_w\}$ выполняется свойство: каждая координата либо принимает значение 1, либо принимает значение -1, причём в попарно разных векторах. Обозначим v^k для $k \in \{1, ..., d\}$ вектор из $\{q_i | i \in Q_w\}$, "отвечающий за k-ую координату"в указаном смысле. Для того, чтобы Q был гладким d-многогранником

Фано, осталось показать, что векторы $\{q_i | i \in Q_w\}$ порождают $\mathbb{Z}^d$. Для этого зададим коэффициенты разложения произвольного вектора $a \in \mathbb{Z}^d$ в линейную комбинацию столбцов матрицы A. Если $v^k_k = -1$, положим коэффициент при векторе v^k равным $-a_k$. По последнему следствию уже имеющаяся линейная комбинация будет лежать в $a + \langle\{v^k | v^k_k = 1\}\rangle_{\mathbb{Z}}$, а значит существуют коэффициенты для остальных векторов v^k, такие что получившаяся линейная комбинация всех векторов v_k равна a. Таким образом, доказана

Лемма 2. *Пусть произвольный многогранник Q обладает перечисленными свойствами, тогда Q — гладкий d-многогранник Фано, билатеральный относительно своей специальной грани* $\mathrm{conv}(q_1, ..., q_d)$.

Наконец, проверим билатеральность многогранника Q относительно его произвольной грани F. Пусть вершины грани F записаны в матрицу A, как было описано выше, а a — вершина многогранника Q, не лежащая в грани F. Предположим, a — это вектор e_k стандартного базиса. Тогда $v^k_k = -1$ и коэффициент при векторе v^k равен -1. По второму следствию из утверждения 2 все остальные ненулевые коэффициенты появляются при векторах, являющихся элементами стандартного базиса, причём все так же равны -1. Теперь предположим, что a не является вектором стандартного базиса. Так как он не появляется среди столбцов матрицы A, то по свойству 4 каждая отрицательная координата вектора a неотрицательна в каждом столбце матрицы A, а значит обязательно равна 1 ровно в одном столбце матрицы A. Так как все эти столбцы имеют ровно по одной ненулевой координате, их линейная комбинация со всеми коэффициентами равными -1, даёт вектор a. Итак, в обоих случаях вектор a выражается через столбцы матрицы A с неположительными коэффициентами, то есть все векторы a лежат в отрицательном ортанте относительно вершин грани F.

3 Классы изоморфности гладких d-многогранников Фано, билатеральных относительно своих специальных граней

Из леммы 2 можно сделать вывод, что классы изоморфности многогранников Фано, билатеральных относительно некоторой своей специальной грани, являются в точности классами изоморфности многогранников, обладающих свойствами 1 — 4.
Построим отображение φ из множества многогранников, удовлетворяющих свойствам 1 — 4 в множество целочисленных решений уравнения

$$a_1 + ... + a_d = d, \tag{2}$$

таких что $d \geq a_1 \geq ... \geq a_d \geq 0$. Для каждого $i \in \{d+1, ..., n\}$ положим

$$n_i := |\{j \in \{1, ..., d\} : (q_i)_j = -1\}|,$$

тогда образом некоторого многогранника $Q := \mathrm{conv}(q_1, ..., q_n)$ под действием отображения φ будет набор чисел n_i для $i \in \{d+1, ..., n\}\}$, дополненный нужным количеством нулей и упорядоченный по невозрастанию.
Очевидно, что многогранники, переходящие под действием φ в одно и то же решение уравнения (2), изоморфны: изоморфизм представляет из себя перестановку координат. Кроме того, для любого упорядоченного по невозрастанию целочисленного решения уравнения (2) существует многогранник, переходящий в него под действием φ. Тогда отображение φ индуцирует биекцию между классами изоморфности многогранников со свойствами 1 — 4 и упорядоченными по невозрастанию целочисленными решениями уравнения (2), если верна следующая лемма.

Лемма 3. *Если многогранники Q_1 и Q_2 обладают свойствами 1 — 4 и изоморфны, то* $\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2)$.

Доказательство леммы 3. При изоморфизме многогранников Q_1 и Q_2, удовлетворяющих свойствам 1 — 4, вершины переходят в вершины, а грани в грани. Значит у многогранников совпадают количества вершин и граней, а также для каждой вершины сохраняется количество граней, в которых она лежит. Пусть $\varphi(Q_1) = (a_1 \geq ... \geq a_d)$, $\varphi(Q_2) = (b_1 \geq ... \geq b_d)$. Так как количества вершин многогранников равны, то совпадает и наибольший индекс ненулевого элемента среди $\varphi(Q_1)$ и $\varphi(Q_2)$, пусть он равен k. Из построения отображения φ следует, что существует следующее разбиение множества вершин многогранника Q_1 на k подмножеств: i-ое подмножество состоит из $a_i + 1$ вершин многогранника Q_1 и содержит вершину (обозначим её $q(i)$) с a_i координатами, равными -1, а остальные a_i вершин являются вершинами стандартного симплекса, единица в которых находится в тех координатах, в которых находится -1 у вершины $q(i)$. Количество граней многогранника Q_1, как и количество граней многогранника Q_2, равно

$$(a_1+1) \cdot ... \cdot (a_k+1) = (b_1+1) \cdot ... \cdot (b_k+1), \tag{3}$$

так как в произвольной грани многогранника Q_1 лежит ровно a_i вершин из i-ого подмножества разбиения (аналогичное верно и для Q_2).
Будем обозначать $V(Q)$ множество вершин многогранника Q. Для $q \in V(Q_i)$ $(i \in \{1,2\})$ определим $F_i(q)$ как количество граней многогранника Q_i, содержащих q. Для $i \in \{1,2\}$ определим мультимножество $M_i = \{F_i(q) | q \in V(Q_i)\}$, тогда $M_1 = M_2$. Если вершина $q \in V(Q_1)$ лежит в i-ом подмножестве разбиения, то

$$F_1(q) = f_1(i) := (a_1+1) \cdot ... \cdot (a_{i-1}+1) \cdot a_i \cdot (a_{i+1}+1) \cdot ... \cdot (a_k+1).$$

Аналогично определяется и $f_2(i)$.
Таким образом, M_1 состоит из дизъюнктного объединения по $i \in \{1, ..., k\}$ мультимножеств из $a_i + 1$ одинаковых чисел $f_1(i)$. Аналогично, M_2 состоит из дизъюнктного объединения по $i \in \{1, ..., k\}$ мультимножеств из $b_i + 1$ одинаковых чисел $f_2(i)$. Теперь можно считать, что M_1 и M_2 можно задать, имея исключительно наборы чисел $(a_1 \geq ... \geq a_k)$ и $(b_1 \geq ... \geq b_k)$. Докажем следующее вспомогательное утверждение индукцией по k:

Пусть даны наборы чисел $a_1 \geq ... \geq a_k \geq 1$ и $b_1 \geq ... \geq b_k \geq 1$, для которых выполняется равенство (3) и $M_1 = M_2$, тогда $\forall i \in \{1, ..., k\}$ $a_i = b_i$.
База($k = 1$): $a_1 + 1 = b_1 + 1 \Rightarrow a_1 = b_1$.
Переход($k > 1$): $\forall i < j$ $a_i \geq a_j$. Домножим неравенство на левую часть равенства (3), поделим на $(a_i + 1)(a_j + 1)$ и получим $f_1(i) \geq f_1(j)$. Аналогично, $\forall i < j$ $f_2(i) \geq f_2(j)$. Значит, в множестве M_1 максимальный элемент равен $f_1(1)$, а в множестве M_2 максимальный элемент равен $f_2(1)$, следовательно $f_1(1) = f_2(1)$. Поделим на равенство (3) и получим

$$\frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{b_1}{b_1 + 1}$$

Значит, $a_1 = b_1$. Если убрать из M_1 $a_1 + 1$ максимальных элементов, получится мультимножество M_1', строящееся по набору $(a_2 \geq ... \geq a_k)$, а если убрать из M_2 $b_1 + 1$ максимальных элементов, получится мультимножество M_2', строящееся по набору $(b_2 \geq ... \geq b_k)$, они также будут совпадать. Кроме того, будет выполняться

$$(a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_k + 1) = (b_2 + 1) \cdot ... \cdot (b_k + 1),$$

значит, по предположению индукции $\forall i \in \{2, ..., k\}$ $a_i = b_i$, откуда следует переход индукции. Вспомогательное утверждение доказано.
По вспомогательному утверждению получаем, что $\forall i \in \{1, ..., k\}$ $a_i = b_i$, следовательно, $\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2)$. $\square$
Таким образом, если P — гладкий d-многогранник Фано, билатеральный относительно некоторой своей специальной грани, то P принадлежит одному из $T(d)$ классов изоморфности, где $T(d)$ — количество неотрицательных целых решений уравнения $x_1 + ... + x_d = d$, таких что $d \geq x_1 \geq ... \geq x_d \geq 0$.