МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Лабораторная работа №1

по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»
Вариант 23

Студент:
Группа R4135c *Лущенко А.С.*

Преподаватель: *Ракшин Е.А.*

Санкт-Петербург 2025

Содержание

Постановка задачи **2**

Ход работы **3**

1.1 Аналитический метод 3

1.2 Численные методы 5

Вывод **8**

Постановка задачи

В данной лабораторной работе требуется решить однородное дифференциальное уравнение аналитическим способом, после чего сравниить решение с тремя методами: явный метод Эйлера, неявный метод Эйлера, метод Рунге-Кутты.

Однородное дифференциальное уравнение задается видом

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d, \tag{1.1}$$

где a, b, c, d – коэффициенты, заданные по варианту:

$$\begin{aligned} a &= -6.8, \\ b &= 3.43, \\ c &= 6.25, \\ d &= -3.82. \end{aligned}$$

В итоге однородное дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$-6.8\ddot{x} + 3.43\dot{x} + 6.25x = -3.82. \tag{1.2}$$

Ход работы

1.1 Аналитический метод

Для решения однородного дифференциального уравнения требуется:

- вывести характеристическое уравнение дифференциального уравнения;
- найти корни характеристического уравнения;
- получить общее решение дифференциального уравнения;

Однородное дифференциальное уравнение:

$$-6.8\ddot{x} + 3.43\dot{x} + 6.25x = -3.82. \tag{1.3}$$

Для удобства уравнение приводится к стандартной форме:

$$\ddot{x} - \frac{3.43}{6.8}\dot{x} - \frac{6.25}{6.8}\dot{x} = \frac{3.82}{6.8}, \tag{1.4}$$

$$\ddot{x} - 0.5044\dot{x} - 0.9191\dot{x} = 0.5618. \tag{1.5}$$

Характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения:

$$\lambda^2 - 0.5044\lambda - 0.9191 = 0. \tag{1.6}$$

Корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 \approx 1.2435 \tag{1.7}$$

$$\lambda_2 \approx -0.7391 \tag{1.8}$$

Используя корни характеристического уравнения выодится общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{1.9}$$

$$x_h(t) = C_1 e^{1.2435t} + C_2 e^{-0.7391t}, \tag{1.10}$$

где C_1 и C_2 – константы, определяемые начальными условиями.

Частное решение для однородного дифференциального уравнения:

$$x(t) = C_1 e^{1.2435t} + C_2 e^{-0.7391t} + A, \tag{1.11}$$

где A – постоянное для частного решения однородного дифференциального уравнения:

$$\ddot{x} - 0.5044\dot{x} - 0.9191\dot{x} = 0.5618, \tag{1.12}$$

$$0 - 0 - 0.9191A = 0.5618, \tag{1.13}$$

$$A = -\frac{0.5618}{0.9191}, \tag{1.14}$$

$$A \approx -0.6112. \tag{1.15}$$

Итоговое общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$x(t) = C_1 e^{1.2435t} + C_2 e^{-0.7391t} - 0.6112. \tag{1.16}$$

Чтобы определить константы C_1 и C_2 задаются начальные условия:

$$x(0) = 0.1, \tag{1.17}$$

$$\dot{x}(0) = 0. \tag{1.18}$$

Для получения решения с начальными условиями требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0.7112, \\ 1.2435C_1 - 0.7391C_2 = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} C_1 \approx 0.265 \\ C_2 \approx 0.446 \end{cases} \tag{1.20}$$

Общее решение с начальными условиями $x(0)$ и $\dot{x}(0)$:

$$x(t) = 0.265e^{1.2435t} + 0.446e^{-0.7391t} - 0.6112. \tag{1.21}$$

1.2 Численные методы

В данной работе используются 3 численных метода: явный Эйлер, неявный Эйлер, Рунге-Кутты.

Для сравнения Аналитического и численных методов были промедлированы все 4 метода и выведены на графики:

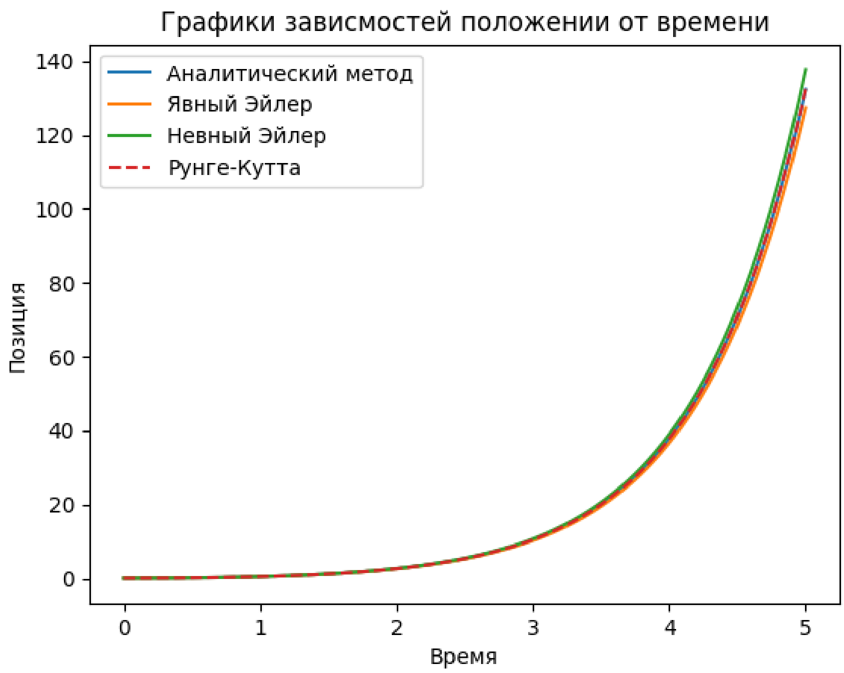

Рис. 1.1: Графики зависимостей положения от времени для аналитического и численных методов.

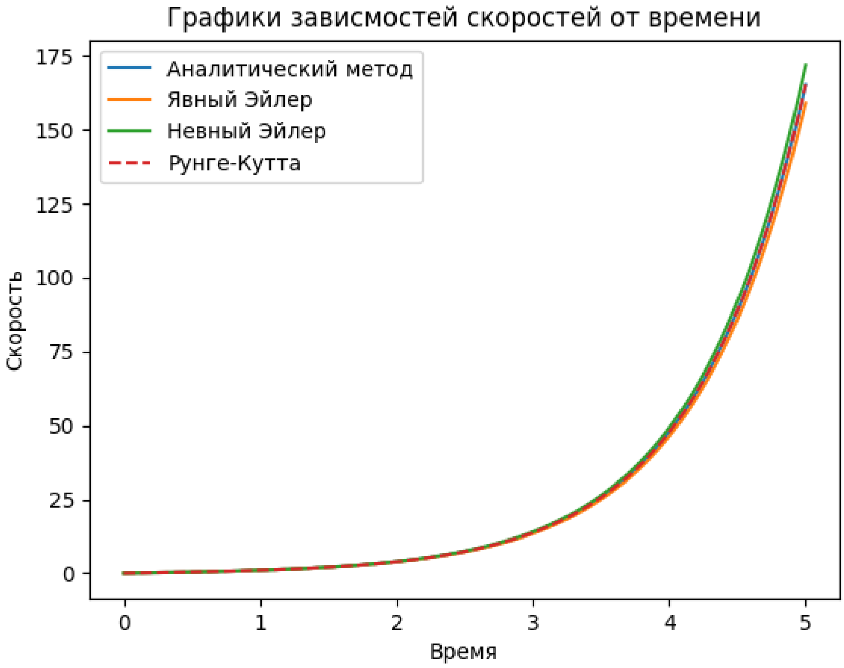

Рис. 1.2: Графики зависимостей скоростей от времени для аналитического и численных методов.

Для более лучшего анализа методов построены графики ошибок относительно аналитического метода:

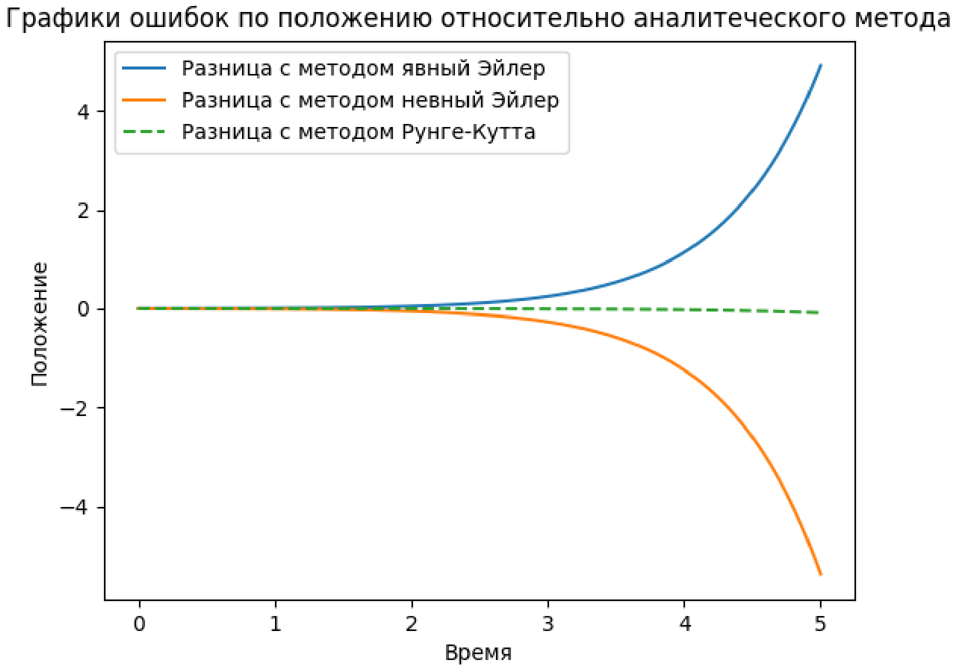

Рис. 1.3: Графики ошибок скоростей для различных численных методов.

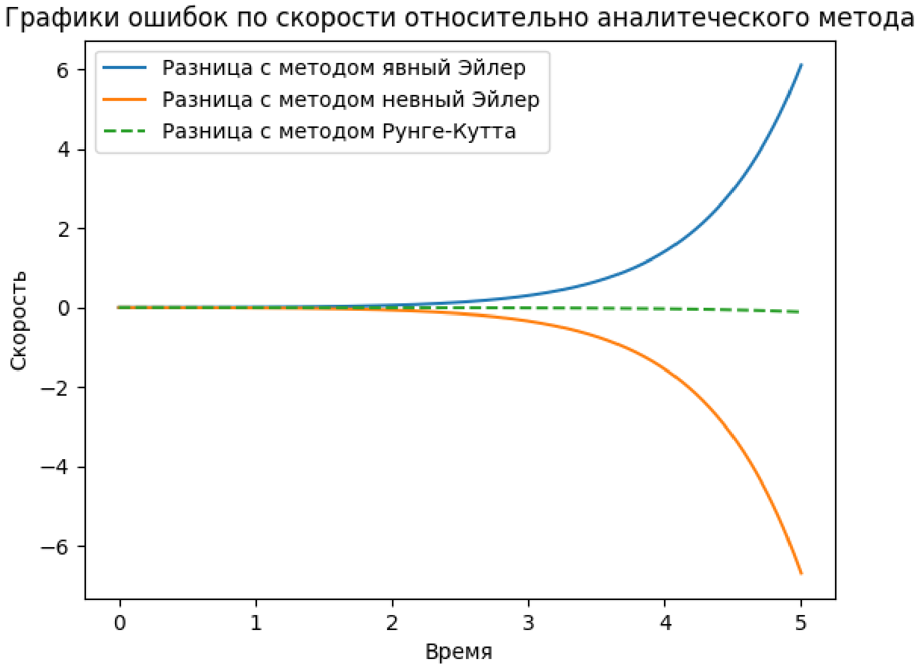

Рис. 1.4: Графики ошибок положений для различных численных методов.

Ниже приведена таблица, показывающая среднеквадратичную ошибку численных методов относительно аналитического:

	Явный Эйлер	Неявный Эйлер	Рунге-Кутта
Положение	1.677	2.001	0.0005
Скорость	2.590	3.098	0.0009

Таблица 1.1: СКО по положению и скорости для разных методов интегрирования

Вывод

В ходе работы было произведено сравнение решений однорого дифференциального уравнения аналитическим и численными методами. Сравнения показали, что лучше аналитический метод совпал с методом Рунге-Кутта. Для методов явный и неявный Эйлер характерен рост ошибки, так как методы Эйлера делают только одно приблежение на каждом шаге. Метод Рунге-Кутта делает 4 приблежения на каждом шаге. Если понизить шаг h, то методы Эйлера также будут иметь меньшую ошибку.