OSTIS-2012
(Open Semantic Technologies for Intelligent Systems)

**УДК 510.63**

# ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЛОГИКА И ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС СИЛЛОГИСТИКИ

Сметании Ю.М

*ГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет» ,*
*г. Ижевск, Россия*

**gms1234gms@rambler.ru**

В работе рассматривается алгебра случайных событий и её интерпретация в невырожденной булевой алгебре на основе множеств. Показано, что классическое использование понятий логика и вероятность вполне совместимо с инженерными логико-вероятностными исчислениями и вероятностной логикой, начало которой восходит к классическим работам в области искусственного интеллекта. Показано, что некоторые весьма трудные задачи могут быть решены с помощью предлагаемого логического описания и точной интерпретации.
**Ключевые слова:** алгебраическая система, исчисление конституентных множеств, вероятность, ортогональный базис силлогистики.

## 1. Введение

Исторически сложилось три точки зрения на совместное использование понятий логика и вероятность:

1. классическая [Колмогоров1986]
2. инженерная (логико - вероятностное исчисление - ЛВИ) [Рябинин 2003]
3. исследователей искусственного интеллекта (вероятностная логика) [Nilson 1986].

Под термином вероятностная логика в данной работе понимается по сути классическая алгебра случайных событий и с исключенным двузначным отношением $X \subseteq Y$ между случайными событиями *X* и *Y*. В работе показано, что различие во взглядах и «трудности» совмещения понятия логика и вероятность происходят от того, что Колмогоровский подход к исчислению вероятностей случайных событий использует невырожденную булеву алгебру на основе множеств [Владимиров 1969], а инженерный подход и подход искусственного интеллекта, использует вырожденную булеву алгебру на основе множеств индикаторов случайных событий, по сути своей - неадекватную модель объективной реальности.

## 2. Постановка задачи

В работах [Сметанин 2009, 2010] предложен ортогональный базис силлогистики, имеющий выгодное отличие от системы простых суждений Аристотеля его определение дано, в том числе работе [Сметанин 2011b], опубликованной в данном сборнике.

Семь расширенных Жергонновых отношений изображены на фоне универсума смотри рис. 1

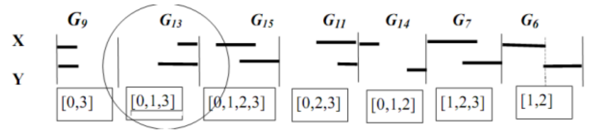


Рис.1 Расширенные Жергонновы отношения

$G_{11}$, $G_{13}$, - правостороннее и левостороннее включение;

$G_9$ – равенство (равносильность);

$G_{15}$ независимое пересечение (независимость);

$G_6$ - полное противоречие (событие X выполняется когда не происходит Y - полная несовместимость X' совпадает с Y);

$G_{14}$ неполное противоречие - соподчиненность (события несовместны и их объединение не равно универсуму – неполная несовместимость X' совместимо с Y);

$G_7$ - зависимое пересечение.

Последний термин явно не используется в теории вероятностей и не является отрицанием термина независимость событий. Все пары событий, кроме тех которые находятся в отношении $G_{15}$, являются зависимыми. Остальные восемь отношений являются вырожденными в том смысле, что допускают равенство универсуму сравниваемых множеств или их дополнений. Аристотель не допускал пустых терминов в рассуждениях [Брусенцов1998].

На Рис. 2 показано, как соотносятся отношение между множествами *X* и *Y* и отношения между их индикаторами *x* и *y*.

| Имя | Кон. | Соотн./мера | Образ |
|---|---|---|---|
| X Y G1 | $X'Y'=\emptyset$ | $A(X',Y)(X'=\emptyset)(Y'=\emptyset)$ | $(x'<y)(y'=0)$ |
| | $X'Y'=\emptyset$ | | |
| | $XY'=\emptyset$ | | |
| | $XY\neq\emptyset$ | $P(XY)=1$ | |
| X Y G2 | $X'Y'=\emptyset$ | $A(X',Y')(X'=\emptyset)(Y=\emptyset)$ | $(x'<y')(x'=0)(y=0)$ |
| | $X'Y=\emptyset$ | | |
| | $XY'\neq\emptyset$ | $P(XY')=1$ | |
| | $XY=\emptyset$ | | |
| G3 | $X'Y'=\emptyset$ | $A(X'Y)(X'=\emptyset)(A(X',Y')$ | $(x'\leq y)(x'=0)(x'\leq y')$ |
| | $X'Y\ \emptyset =$ | | |
| | $XY'\neq\emptyset$ | $P(XY')=P(Y')$ | |
| | $XY\neq\emptyset$ | $P(XY)=P(Y)$ | |
| X Y G4 | $X'Y'=\emptyset$ | $A(X,Y)(Y'=\emptyset)((X=\emptyset)$ | $(x<y)(x=0)(y'=0)$ |
| | $X'Y\neq\emptyset$ | $P(X'Y)=1$ | |
| | $XY'=\emptyset$ | | |
| | $XY=\emptyset$ | | $(x\leq y)(y'=0)(x'\leq y)$ |
| X Y G5 | $X'Y'=\emptyset$ | $A(X,Y)(Y=\emptyset)A(X'Y)$ | |
| | $X'Y\neq\emptyset$ | $P(X'Y)=P(X')$ | |
| | $XY'=\emptyset$ | | |
| | $XY\neq\emptyset$ | $P(XY)=P(X)$ | |
| X Y G6 | $X'Y'=\emptyset$ | $Eq(X,Y')(X\neq\emptyset)(Y\neq\emptyset)$ | $x=y$ |
| | $X'Y\neq\emptyset$ | $P(X'Y)=P(Y)$ | |
| | $XY'\neq\emptyset$ | $P(XY')=P(X)$ | |
| | $XY\neq\emptyset$ | $P(XY)=0$ | |
| X Y G7 | $X'Y'=\emptyset$ | $A(X',Y)\ (X\neq\emptyset)(Y\neq\emptyset)$ | $x'\leq y$ |
| | $X'Y\neq\emptyset$ | $P(X'Y)=P(X')$ | |
| | $XY'\neq\emptyset$ | $P(XY')=P(Y')$ | |
| | $XY\neq\emptyset$ | $P(XY)=1-P(X')-P(Y')$ | |
| X Y G8 | $X'Y'\neq\emptyset$ | $P(X'Y')=1$ | |
| | $X'Y=\emptyset$ | $A(X,Y')(X=\emptyset)(Y=\emptyset)$ | $(x=y)(x=0)(y=0)$ |
| | $XY'=\emptyset$ | | |
| | $XY=\emptyset$ | | |
| X Y G9 | $X'Y'\neq\emptyset$ | $P(X'Y')=P(X')=P(Y')$ | |
| | $X'Y=\emptyset$ | $Eq(X,Y)(X\neq\emptyset)(Y\neq\emptyset)$ | $x=y$ |
| | $XY'=\emptyset$ | | |
| | $XY\neq\emptyset$ | $P(XY)=P(X)=P(Y)$ | |
| X Y G10 | $X'Y'\neq\emptyset$ | $P(X'Y')=P(X')$ | |
| | $X'Y=\emptyset$ | $A(X,Y')\ (X\neq\emptyset)(Y=\emptyset)$ | $(x\leq y')(y=0)(x'\leq y')$ |
| | $XY'\neq\emptyset$ | $P(XY')=P(X)$ | |
| | $XY=\emptyset$ | | |
| X Y G11 | $X'Y'\neq\emptyset$ | $P(X'Y')=P(X')$ | |
| | $X'Y=\emptyset$ | $A(X',Y')(X\neq\emptyset)(Y\neq\emptyset)$ | $x'\leq y'$ |
| | $XY'\neq\emptyset$ | $P(XY')=1-P(X')-P(Y)$ | |
| | $XY\neq\emptyset$ | $P(XY)=P(Y)$ | |
| X Y G12 | $X'Y'\neq\emptyset$ | $P(X'Y')=P(Y')$ | |
| | $X'Y\neq\emptyset$ | $P(X'Y)=P(Y)$ | |
| | $XY'=\emptyset$ | $A(X,Y)\ (X=\emptyset)(Y\neq\emptyset)$ | $(x\leq y)(x=0)(x\leq y')$ |
| | $XY=\emptyset$ | | |
| X Y G13 | $X'Y'\neq\emptyset$ | $P(X'Y')=P(Y')$ | |
| | $X'Y\neq\emptyset$ | $P(X'Y)=1-P(X)-P(Y')$ | |
| | $XY'=\emptyset$ | $A(X,Y)\ (X\neq\emptyset)(Y\neq\emptyset)$ | $x\leq y$ |
| | $XY\neq\emptyset$ | $P(XY)=P(X)$ | |
| X Y G14 | $X'Y'\neq\emptyset$ | $P(X'Y')=1-P(X)-P(Y)$ | |
| | $X'Y\neq\emptyset$ | $P(X'Y)=P(Y)$ | |
| | $XY'\neq\emptyset$ | $P(XY')=P(X)$ | |
| | $XY=\emptyset$ | $A(X,Y')\ (X\neq\emptyset)(Y\neq\emptyset)$ | $x\leq y'$ |
| X Y G15 | $X'Y'\neq\emptyset$ | $X'Y'+X'Y+XY'+$ | $'y'+x'y+xy'+$ |
| | $X'Y\neq\emptyset$ | $+XY=U$ | $+xy=1$ |
| | $XY'\neq\emptyset'$ | | |
| | $XY\neq\emptyset$ | | |

Рис. 2 Проекция Жергонновых отношений

В столбце «Кон.» На рис. 2 показано, какие конституенты в данном отношении являются пустыми либо непустыми множествами. В столбце «Соотн./мера» показано, как жергонново соотношение межу множествами выражается через функторы ортогонального базиса силлогистики и дополнительные утверждения о равенстве (неравенстве) пустому множеству образующих соотношение множеств. Из соотношений, рассмотренных на рис.2, следует [Сметанин 2011a, 2011b] отсутствие изоморфизма между ними.

Алгебра множеств является булевой алгеброй относительно строгого и нестрогого включения - как естественного упорядочения. С каждой такой алгеброй автоматически связывается (в случае частичного упорядочения на основе нестрогого включения) изоморфная ей булева алгебра соответствующих характеристических функций (индикаторов) смотри [Сметанин 2001a, 2011b]. В случае частичного упорядочения на основе строгого включения между алгеброй множеств и алгеброй характеристических функций, устанавливается неизоморфное отображение. Случай нестрогого включения не обеспечивает односмысловость суждений, вследствие чего был введен ортогональный базис силлогистики [Сметанин 2009, 2010, 2011a ,2011b]

Таким образом, польку случайное событие имеет интерпретацию в форме множества, а высказывание интерпретируется как пропозициональная переменная с двумя возможными значениями “истина” и ”ложь”, то изоморфизм между алгеброй событий и алгеброй их индикаторов возможен только в случае если множества - события в универсуме (достоверном событии), упорядочены отношением нестрогого порядка. Для случая строгого частичного порядка показано, что изоморфизма нет, а есть гомоморфизм. С точки зрения просто частичного порядка безразлично, что рассматривать – алгебраическую систему множеств или изоморфную ей алгебраическую систему характеристических функций этих множеств. Это отражено в теореме Стона [Горбатов 1976]. Для случая строгого частичного порядка справедлива

**Теорема 1.** Алгебраическая система $\sum = \{X_i\}$ задаваемая системой множеств с определенным на них отношение строгого частичного порядка (строгое включение) не изоморфна алгебраической системе $S$ их индикаторов, на которой строгий частичный порядок из $\sum = \{X_i\}$ отражается в частичный порядок.

То есть, в случае рассмотрения строгого частичного порядка строгого изоморфизма между этими системами нет, а есть гомоморфное отображение первой во вторую. Проекционная модель [Вальков 1985] на основе индикаторов настолько грубая, что любое непустое подмножество универсума алгебраической системы множеств отражается в ней как ноль либо единица. Это, в свою очередь, является одной из причин парадоксов материальной импликации. Булевой алгеброй называется дистрибутивная структура с неравными друг другу нулем 0 и единицей 1, в которой всякий элемент имеет дополнение. Таким образом, булева алгебра всегда содержит не менее двух элементов. Алгебра, содержащая только 0 и 1 , называется вырожденной [Владимиров с.19]. **Классическая логика построена на основе вырожденной булевой алгебры, в которой 0 отождествлен с абстрактной ложью, а 1 с абстрактной истиной. То есть, она отражает объективную реальность как систему событий (минуя моделирование событий множествами) даже не в систему характеристических функции этих множеств, а в абстрактные, по Гильберту, пропозициональные переменные.**

В работах [Сметанин 2009, 2010, 2011b] в качестве модели высказывания предлагается рассматривать множество. Значение же высказывания определяется индикатором этого множества - высказывательной переменной. Эта идея восходит к самому Аристотелю, особенно наглядно ее представил Жергонн, однако алгебраический подход не получил развития в математической логике, и только в работах [Кулик1997, Кулик2010] получены существенные результаты. Причин здесь несколько и одна из наиболее веских - многосмысловость простых суждений Аристотеля (смотри работу [Сметанин 2011b] из настоящего сборника). Устранение многосмысловости за счет введения ортогонального базиса силлогистики (ОБ) сразу позволило значительно продвинуться вперед:

1. построить точную интерпретацию рассуждений в форме алгебраической системы;
2. построить эффективный алгоритм проверки логического следования заключений из посылок силлогизма;
3. указать на неправильные модусы Аристотеля и Б. Рассела[Сметанин 2011a];
4. доказать отсутствие парадоксов материальной импликации и вернуть ей смысл логического следования, а также установить причину, по которой анализируя словесную продукцию со связкой «если .., то» логики, используя вырожденную булеву алгебру вынуждены признавать наличие парадоксов [Сметанин 2011a].
5. свести воедино три означенные в начале публикации точки зрения на совместное использование логики и вероятности.

Рассмотрение суждений как множеств позволяет сопоставить терминологию элементарной теории вероятностей и суждений ортогонального базиса. Здесь имеет место одноодноэначное соответствие.

Испытание (опыт) – алгебраическая система с образующими $\sum=\{X_i\}$. $X_i$ - случайное событие и одновременно суждение на основе ортогонального базиса. В случае составного (с использованием связок) события ему сопоставляется сложное суждение на основе простых суждений ОБ. Отношения между случайными событиями $X_i$ (влечет, равносильно, независимость, несовместность, полное противоречие (событие противоположное данному) находятся во взаимно однозначном соответствии с семью расширенными жергонновыми отношениями и тремя функторами ОБ, смотри рис. 1 и комментарии к нему. Рассмотрение набора суждений и логического следования одних суждений (событий) из комплекса других приводит к необходимости рассмотрения многоместных отношений (предикатов). Наглядная форма представления таких отношений – линейные диаграммы Лобанова [Лобанов2009], которыми можно иллюстрировать интерпретацию алгебраических систем выражающих постановку задач полисиллогистики и вероятностной логики. Ввиду недостатка места автор не будет далее углубляться в теорию. Вместо этого мы постараемся привести убедительные примеры, иллюстрирующие новые возможности вероятностной логики в связи с использованием в ней ОБ.

При исследовании вопроса о том, какие множества можно построить посредством операций (объединения «+», пересечения «·», дополнения до универсума «’» X’=U\X из порождающих *n* произвольных множеств $X_1, X_2,\dots, X_n$, вводится важное понятие конституенты. Обозначим

$$X_i^{\sigma_i}=\begin{cases}X_i, & \text{если} \quad \sigma_i=1\\ \bar{X}_i, & \text{если} \quad \sigma_i=0\end{cases}$$

Множество вида,

$$\prod_{i=1}^{n} X_i^{\sigma_i}=X_1^{\sigma_1}X_2^{\sigma_2}\dots X_n^{\sigma_n} \text{ где } \sigma_i=0 \text{ или}$$

$\sigma_i=1$ назовем конституентой.

Общее число не пустых конституент не превосходит $2^n$. Каждой конституенте можно сопоставить двоичный набор $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_n^{\sigma_n}$ длины *n*, где $x_i^{\sigma_1}$ есть характеристическая функция множества

$$X_i^{\sigma_1},\ x_i^{\sigma_i}=\begin{cases}x_i, & \sigma_i=1\\ \bar{x}_i, & \sigma_i=0\end{cases}.$$

**Определение 1**. Булева переменная *x* является характеристической переменной (индикатором) множества *X*, если она определены следующим образом смотри (1), ***e*** – произвольный элемент универсума ***U***.

$$x=\begin{cases}1, \text{если} & e\in X\\ 0, \text{если} & e\notin X\end{cases}$$

Характеристическая функция множества (индикатор) *X* ставит в соответствие любому элементу универсума *e* двоичную переменную *x*, которая равна 1, если *e* принадлежит множеству *X* либо равна 0, если *e* не принадлежит *X*. Набор из индикаторов множеств составляющих конституенту будем называть характеристической функцией конституенты.

**Определение 2**. Базисом заданной алгебраической системы (системы с фиксированным порядком номеров порождающих множеств) будем называть множество непустых конституент данной системы.

**Определение 3.** Базовым множеством номеров (БМН или BSN) заданной алгебраической системы назовем множество номеров непустых конституент, представленное в десятичном, либо в двоичном виде[1].

Алгебраическая система с зафиксированным линейным порядком множеств носителей далее будет называться заданной.

Приведем важную теорему, которая позволяет распознавать многомерные отношения, содержащие независимые в совокупности случайные события.

**Теорема 2**. Система $\sum = \{X_i\}$ из *n* множеств являющаяся образующей алгебраической системы с заданным отношением строгого порядка (строгое включение) может быть взаимно однозначно сопоставлена системе случайных событий независимых в совокупности тогда и только тогда, когда ***БМН***($\sum$) = $[0..2^n]$. Другими словами, тогда и только тогда, когда все $2^n$ конституент, построенных из $\{X_i\}$ являются непустыми множествами.

Теорема доказывается по индукции.

## 3. Примеры решения задач

Сначала рассмотрим задачу с которой начиналась вероятностная логика. [Nilson 1986]. Здесь данная задача приводится в нашей транскрипции.

**Задача 1.** (Вероятностная логика в ИИ) Дана совокупность случайных событий X и Y, заданы - вероятность $P(X)=p_1$ и вероятность $P(X \subset Y)=p_2$. Найти (оценить) вероятность $P(Y)=p$.

Сразу отметим, что опыт в котором воспроизводятся X и Y определяет одно из невырожденных отношений из рисунков 1 и 2, поэтому значения вероятностей $p_1$ и $p_2$.в обязательном порядке зависят от реализуемого отношения, что понимал Нельсон, вводя понятия возможных миров. Для расчета искомой вероятности достаточно рассмотреть все невырожденные отношения и рассчитать вероятность *p* по ним.

Для $G_{15}$ $p_2$ должно быть равно $1-P(XY')=p_2$ в силу независимости *X* и *Y* имеем

$1-p_1(1-P(Y))=p_2$ или $1-p_1+p_1P(Y)=p_2$. Отсюда $P(Y)=(p_1+p_2-1)/p_1$. Последняя формула соответствует ответу для данной задачи, полученному в работе [Кулик 2010] другие случаи там не рассматриваются. Для $G_{14}$ мы с необходимостью имеем $p_2=0$ и $P(Y)<1-P(X)$. Для $G_{11}$ - $Y \subset X$ с необходимостью имеем $p_2=1$ и $p \geq p_1$. Для $G_{13}$ - $X \subset Y$ с необходимостью имеем $p_2=p$. Для $G_9$ – $X=Y$ необходимо имеем $p_2=1$ и $p=p_1$. Для $G_7$ и $G_6$ с необходимостью имеем $p_2=0$ и $p \leq 1-p_1$.

**Задача 2**. (Пример взят из работ по ЛВИ).

[1] Смотри пояснение к рисунку 3.

Рассмотрим один из примеров оценки риска и эффективности при борьбе двух компаний за заказ при противодействии третьей компании. Дружественные компании *A* и *B* хотят получить выгодный заказ. Компания С может помешать им. Компания *C* (событие X*3* с вероятностью $p_3$) вступит в борьбу за получение заказа и будет противодействовать компаниям *A* и *B*. Противодействие компании *C* могут заставить компанию *A* (событие *X5* с условной вероятностью $p_5=P(X5/X3)$ при $P(X5/X3')=0$) и компанию *B* (событие *X4* с условной вероятностью $p_4=P(X4/X3)$ при $P(X4/X3')=0$) отказаться от намерений. Если же компания *B* (событие *X1* с вероятностью $p_1=P(X1/X5')$ при $P(X1/X5)=0$)) и компания *A* (событие *X2* с условной вероятностью $p_2=P(X2/X4')$ при $P(X2/X4)=0$) смогут получить заказ, то прибыль компании *A* составит *E=6* млрд. и прибыль компании *B* составит *E=2* млрд.

В примере вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, $p_5$ назначены методом экспертной оценки с учетом внешних факторов и капитала фирм *A, B* и *C*.

Определить вероятность получения заказа компанией *A* или *B* и ожидаемый выигрыш двух компаний *A* и *B*.

Решим задачу традиционным способом.

Определим вероятности *P(X1), P(X2)* в силу попарной независимости (*X1* и *X2*), (*X14* и *X3*), (*X2* и *X3*) и несовместимости (*X1* и *X5*), (*X2* и *X4*),

*X1 = (X1X5') + (X1X5) = X1X5'* с учетом того, что *X1, X5* несовместимы, *X1X5 =Ǿ;*

*X2 = (X2X4') + (X2X4) = X2X4'* с учетом того, что *X2, X4* несовместимы, *X2X4 = Ǿ*;

*X4 = X4X3+X4X3'= X3X4* с учетом того, что *X3'X4= Ǿ*

*X5 = X5X3+X5X3'= X3X5* с учитывая, что *X3'X5= Ǿ*

*P(X4) = P(X3)*P(X4/X3) +P(X3')*P(X4/X3') = p3*p4 = r4;*

*P(X5) = P(X3)*P(X5/X3) +P(X3')*P(X5/X3') = p3*p5 = r5;*

*P(X1) = P(X5')*P(X1/X5') =(1-r5)*p1 = (1-p3*p5)* p1 = r1;*

*P(X2) = P(X4')*P(X2/X4') =(1-r4)*p2 = (1-p3*p4)*p2 = r2*

Примем вероятности событий.

*p1=0.85; p2=0.95; p3=0.7; p4=0.4; p5=0.5*

Целевое событие *Z=X1+X2.*

Вероятностный полином (функция) достижения цели *P(Z)=r1+ r2 - r1*r2 = (1-p3*p5)*p1+ 1-p3*p4)*p2 - (1-p3*p5)*p1*( 1-p3*p4)*p2=0,85859*

Введем в условия примера показатели эффективности достижения

трех разных целей:

*E1 = 6* , если свою цель достигнет только компания *A P1=P(X1X2') = 0,17459*;

*E2 = 2* , если свою цель достигнет только компания *B P2=P(X1'X2) = 0,30609*;

*E3 = 8* если свои цели достигнуть обе компании, *P3=P(X1X2)=0,37791;*

Используя вычисленные вероятности определяем суммарную эффективность достижения трех (математическое ожидание) целей равна

*T = E1*P1 + E2*P2 + E3*P3 = 6*0,17459+2*0,30609+8*0,37791= 4,683*

Решим задачу способом, ориентированным на применение компьютера, используя описание взаимосвязей между случайными событиями посредством функторов ортогонального базиса.

Построим систему случайных событий (алгебру) отражающую логическую структуру задачи, которая аналитически выглядит так:

Причинно следственные связи явлений (событий) процесса борьбы за заказ можно описать в виде четырех утверждений:

1. событие *X1* влечет событие противоположное *X5;*
2. событие *X2* влечет событие противоположное *X4*;
3. событие противоположное *X3* влечет не наступление *X5*;
4. событие противоположное *X3* влечет не наступление *X4*;

Тот же результат получается если, описать логику задачи в виде равенств равносильных отношению включения: $X1=X1X5'$; $X5=X5X3$; $X2=X2X4'$; $X4=X4X3$;

Для системы с заданными соотношениями включения и в виде равенств получены, с помощью программы. одинаковые базовые множества номеров Ur и построена линейная диаграмма рис 1.

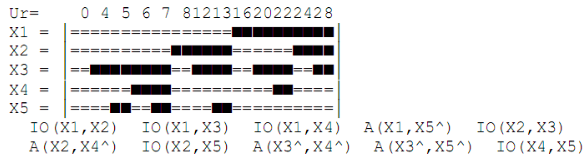


Рис. 3 Диаграмма логических связей задачи.

Номера входящие в множество *Ur* это номера непустых конституент упорядоченной (перенумерованной системы множеств *X1, X2, X3, X4, X5*. Сопоставление конституент номерам и наоборот осуществляется очень просто. Например, номер 28 переводится в двоичную систему счисления как 11100 и ему ставится в соответствие конституента $X1X2X3X4'X5'$ где единица на *i* -ом месте сопоставляется множеству *Xi*, а ноль на *j*-ом месте дополнению множества *Xj*, то есть множеству

$U\backslash Xj=Xj'$.

На диаграмме рис. 1 случайным событиям, которые могут произойти соответствуют подмножества номеров универсума *Ur.* Например, событию $X1=(X1X5')$ с вероятностью *r1* соответствует множество номеров $X1=X1X5'=[16, 20, 22, 24, 28]$, при этом вероятность $P(X1X5')=P(X5')*P(X1/X5') =1-r3)*p1=(1-p3*p5)*p1=r1$.

Последовательно, с учетом логических связей вычислим вероятность всех конституент, составляющих базовое множество номеров $Ur=[4,5,6,7,8,12,13,16,20,22,24,28]$. Используя логическое описание задачи, получим:

$[28]=X1X2X3X4'X5' = X1X2X3$ в силу 1 и 2. В силу независимости $X1,X2,X3$ $P[28]=r1*r2*r3$;

$[24]= X1X2X3'X4'X5' = X1X2X3'$ в силу 1 и 2, $P[24]=r1*r2*(1-r3)$;

$[2]= X1X2'X3X4X5'= X1X2'X4$ в силу 1 и 3, $P[22]=r1*(1-r2)*r4$;

$[20]= X1X2'X3X4'X5'= X1X2'X3X4'$ в силу 1 и 3 $P[20]= r1*(1-r2)*(r3-r4)$;

$[16]= X1X2'X3'X4'X5' = X1X2X3'$ в силу 3 и 4, $P[16]= r1*(1-r2)*(1-r3)$;

$[13] =X1'X2X3X4'X5= X1'X2X5$ в силу 2 и 4, $P[13]=(1-r1)*(r2)*(r5)$;

$[12] =X1'X2X3X4'X5'= X1'X2X3X5'$ в силу 2 и 4 $P[12]= (1-r1)*(r2)*(r3-r5)$;

$[8]= X1'X2X3'X4'X5' = X1'X2X3'X5'$ в силу 2 и 4 $P[8]= (1-r1)*(r2)*(1-r3)$;

$[7]= X1'X2'X3X4X5= X1'X2'X4X5$ в силу 3 и 4, $P[7]=(1-r1)*(1-r2)*r4*r5$;

$[6]= X1'X2'X3X4X5' = X1'X2X4X5'$ в силу 3, $P[6]=(1-r1)*(1-r2)*r4*(1-r5)$;

$[5]=X1'X2'X4'X5$ в силу 1, $P[5]=(1-r1)*(1-r2)*(1-r4)*r5$;

$[4]=X1'X2'X3X4'X5'$ в силу 3 и 4 и независимости *X4* и *X5*, $P[4]= (1-r1)*(1-r2)*(r3-r4-r5+r4*r5)$;

$[0]=X1'X2'X3'X4'X5'=X1'X2'X3'$ в силу 3 и 4 $P[0]=(1-r1)*(1-r2)*(1-r3)$;

Легко проверить, что

$P[16..28]=P[16]+P[20]+P[22]+P[24]+P[28]=P(X1) =r1*(1-r2)*(1-r3)+ r1*(1-r2)*(r3-r4)+ r1*(1-r2)*r4+ r1*r2*r3=r1$;

$P[8..13]+p[24,28]=P(X2)=(1-r1)*(r2)*(r5)+(1-r1)*(r2)*(r3-r5) +(1-r1)*(r2)*(1-r3)+r1*(1-r2)*r4+ r1*r2*r3 = r2$;

$P[4..7]+P[12,13]+P[20,22]+P[28]=P(X3)=(1-r1)*(1-r2)*(r3-r4-r5+r4*r5)+(1-r1)*(1-r2)*(1-r4)*r5+ (1-r1)*(1-r2)*r4*r5+(1-r1)*(1-r2)*r4*(1-r5)+ (1-r1)*(r2)*(r3-r5)+(1-r1)*(r2)*(r5)+r1*(1-r2)*(r3-r4)+r1*(1-r2)*r4 + r1*r2*r3 =r3$;

$P[6,7]+P[22]=P(X4)= (1-r1)*(1-r2)*r4*r5+(1-r1)*(1-r2)*r4*(1-r5)+ r1*(1-r2)*r4=(1-r1)*(1-r2)*[ r4*r5 +r4 - r4*r5]+ r1*(1-r2)*r4 =(1-r1)*(1-r2)*r4+ r1*(1-r2)*r4 =r4*(1-r2)$;

$P[5,7,13]= (1-r1)*(1-r2)*(1-r4)*r5+(1-r1)*(1-r2)*r4*r5+(1-r1)*(r2)*(r5)=(1-r1)*r5$;

$P[8..28]= P(X1+X2)=r1+r2-r1*r2$;

Этот и предыдущий результат указывают на детерминированную связь случайных событий X1 и X5', X2 и X4' одно не может произойти без другого. Кроме того, имеют место еще 2 равенства.

$P[0..7]=P(X1'X2')=(1-r1)*(1-r2)= 1-P(X1+X2)=(1-r1-r2+r1*r2)$;

$P[0, 4, 5, 6, 7, 8,12,13,16,20,22,24, 28] =1$

Произведем декомпозицию исходной логико - алгебраической модели задачи (рис. 4).

В системе событий можно выделить два кластера на основе силы логических связей между ними это системы $\{X1, X3, X5\}$ и $\{X2, X3, X4\}$. Их линейные диаграммы показаны на рис. 4.

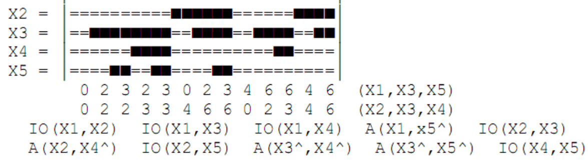


Рис. 4 Декомпозиция исходной задачи

То есть исходную задачу можно решать, разбив ее на две подзадачи. Решение приведено ниже. Разбиение можно осуществить на исходной диаграмме удалив из нее сначала множества *X2* и *X4*, затем *X1* и *X5* при этом перевычисляется множество базовых номеров, либо заново строится линейная диаграмма смотри рис.5.

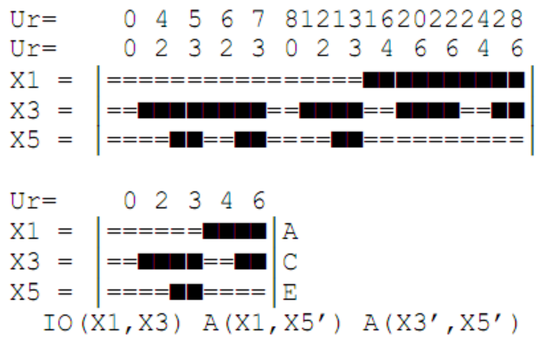


Рис.5 Иллюстрация способа вычисления БМН систем *{X1, X3, X5}* и *{X2, X3, X4}*

БМН для обеих систем совпадают, однако их образы в исходной системе из пяти множеств различные смотри рис.6.

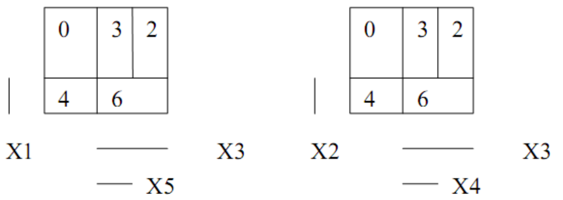


Рис. 6 Иллюстрация зависимости *X3, X5 (X3,X4)* и попарной независимости *X1* и *{X3, X5} (X2* и *{X3,X4})*

На рис. 6 показано соответствие между конституентами исходной и подзадачами декомпозированной задачи.

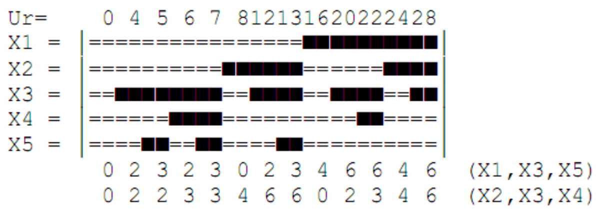


Рис.6 Соответствие между конституентами исходной задачи и подзадачами.

Ниже соответствие между номерами и вероятностями для декомпозиций задачи выписано аналитически, причем номера конституент и соответствующие им множества для составляющих большую задачу задач, показаны мелким шрифтом.

| Для {X1, X3, X5} | Для {X2, X3, X4} |
|---|---|
| ***p[0]=(1-r1)(1-r3)]=P[0,8]*** | ***p[0]=(1-r2)(1-r3)=P[0,16]*** |
| ***p[2]=(1-r1)(r3-r5)=P[4,6,12]*** | ***p[2]=(1-r2)(r3-r4)=P[4,5,20]*** |
| ***p[3]=(1-r1)r5=P[5,7,13]*** | ***p[3]=(1-r2)r4=P[6,7,22]*** |
| ***p[4]=r1(1-r3)=P[16,24]*** | ***p[4]=r2(1-r3)=P[8,24]*** |
| ***p[6]=r1r3=P[20,22,28]*** | ***p[6]=r2r3=P[12,13,28]*** |

Теперь будем осуществлять композицию подзадач, то есть произведем вычисление конституентных множеств и их вероятностных мер основной задачи, посредством выражения их через конституентные множества подзадач.

*[0]=[0][0]=[0,8][0,16]=(X1'X3'X5')(X2'X3'X4')=(X1'X3')(X2'X3')=X1'X2'X3';*
*P[0]=(1-r1)*(1-r2)*(1-r3)* в силу независимости *X1, X2, X3;*
*[4]=[2][2]=[4,6,12][4,5,20]=X1'3X5'X2'X3X4' =X1'X2'X3X4'X5'=X1'X2'X3X4'X5'= X1'X2'X3(X4+X5)'= X1'X2'X3\(X4+X5)* в силу независимости *X1, X2, X3* и зависимости *X3, X4, X5* имеем *P[4]= P(X1')*P(X2')*[P(X3)-P(X1)-P(X2)+P(X1)*P(X2)]=(1-r1)*(1-r2)*(r3-r4-r5+r4*r5);*
[5]=*[3][2]=[5,7,13][4,5,20]=X1'X5X2'X3X4'= X1'X2'X3X4'X5=X1'X2'X4'X5* в силу того, что *X5=X3X5*, так как *X4* и *X5* независимы, то *P[5]=(1-r1)*(1-r2)*(1-r4)*r5;*
*[6]=[2][3] = [4,6,12] [6,7,22]= X1'X3X5'X2'X4 = X1'X2'X4X5'* в силу того, что *X4=X3X4*, так как *X4* и *X5* независимы, то *P[6]= (1-r1)*(1-r2)*r4*(1-r5);*
*[7]=[3][3]=[5,7,13] [6,7,22]=X1'X5X2'X4* отсюда *P[7]=(1-r1)*(1-r2)*r4*r5;*
*[8]=[0][4]=[0,8] [8,24]=X1'X3'X2X3'=X1'X2X3'* отсюда в силу независимости *X1, X2, X3*
*$P[8]=(1-r1)*r2*(1-r3);*
*[12]=[2][6]=X1'X3X5'X2X3=X1'X2X3X5'=X1'X2X3X5' P[12]=(1-r1)*r2*(r3-r5);*
*[13]=[3][6]=[5,7,13] [12,13,28] =X1'X5X2X3 = X1'X2X5*
*P[13]=(1-r1)*r2*r5;*
*[16]=[4][0]=X1X3'X2'X3'=X1X2'X3'* отсюда *P[16]=r1*(1-r2)*(1-r3);*
*[20]=[6][2]=X1X3X2'X3X4'= X1X2'X3X4' отсюда P[20]=r1*(1-r2)*(r3-r4);*
*[22]=[6][3]=[20,22,28] [6,7,22]=X1X3X2'X4 = X1X2'X4*, отсюда
*P[22]=r1*(1-r2)*r4;*
*[24]=[4][4]=[16,24][8,24]= X1X3'X2X3'=X1X2X3'* отсюда *P[24]=r1*r2*(1-r3);*
*[28]=[6][6]=[20,22,28] [12,13,28] = X1X3X2X3 =X1X2X3$ P[28]=r1*r2*r3.*

Таким образом, мы получили тот же самый результат, что и при решении не декомпозированной задачи.

**Задача 3**

Рассмотрим систему энергоснабжения объекта, в котором X1 и X2 источники энергии X3 - распределительный щит, X4, X5 - потребители. Здесь элемент X3 выполняет роль переключателя, в силу чего между полюсами **a** и **b** допустимы только следующие пути X1X4, X2X5, X1X3X5, X2X3X4, если проходимость по всем путям нарушится, то система энергоснабжения откажет, если хотя бы один путь функционирует - система находится в работоспособном состоянии. Схема системы изображена на рис. 7.

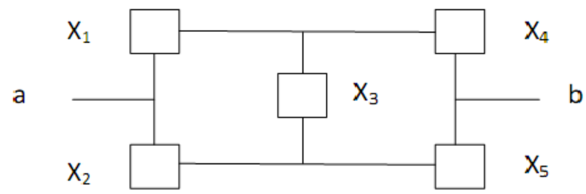


Рис. 7 Схема электроснабжения

Работоспособность схемы определяется случайным событием *Z=X1X4+X2X5+X1X3X5+X2X3X4.*

События *Xi* означают работоспособность *i* - го элемента схемы. Примем, что элементы работоспособны независимо друг от друга, то есть случайные события *{X1, X2, X3, X4, X5}* независимы в совокупности. На рис. 8 показана диаграмма логических связей случайных событий задачи.

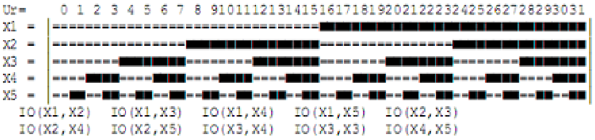


Рис. 8 Диаграмма логических связей задачи об электроснабжении.

Эта диаграмма удовлетворяет условиям теоремы 1, то есть события *{X1, X2, X3, X4, X5}* независимы в совокупности. На рис. 9 показана часть этой диаграммы, конституенты, которой образуют целевое событие Z.

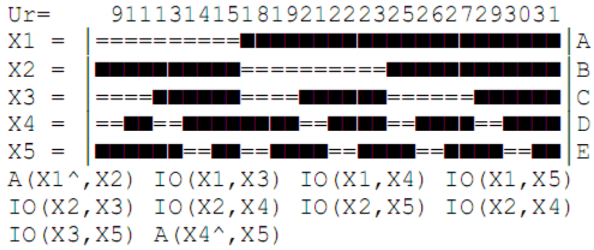


Рис. 9 Часть линейной диаграммы задачи, соответствующая событию целевому событию
*Z=X1X4+X1X3X5+X2X4+X2X3X4* .
*P[31]=r1*r2*r3*r4*r5;*
*P[30]= r1*r2*r3*r4*(1-r5);*
*P[29]= r1*r2*r3*(1-r4)*r5;*
*P[28]= r1*r2*r3*(1-r4)*(1-r5);*
*P[27]= r1*r2*(1-r3)*r4*r5;*
*P[26]=r1*r2*(1-r3)*r4*(1-r5);*
*P[23]=r1*(1-r2)*r3*r4*(1-r5);*
*P[22]=r1*(1-r2)*r3*r4*r5;*
*P[21]=r1*(1-r2)*r3*(1-r4)*r5;*
*P[20]=r1*(1-r2)*r3*(1-r4)*(1-r5);*
*P[19]=r1*(1-r2)*(1-r3)*r4*r5;*
*P[15]=(1-r1)*r2*r3*r4*r5;*
*P[14]=(1-r1)*r2*r3*r4*(1-r5);*
*P[13]=(1-r1)*r2*r3*(1-r4)*r5;*
*P[11]=(1-r1)*r2*(1-r3)*r4*r5;*
*P[10]=(1-r1)*r2*(1-r3)*r4*(1-r5);*

Для случая *когда r1=r2=r3=r4=r5=0,5* имеем *P(Z)=0,5*, что соответствует результату Рябинина И.А. и Кулика Б.А

**Задача 4**

Рассмотрим известный пример Бернштейна, иллюстрирующий, то обстоятельство, что попарно независимые случайные события числом не менее трех могут образовать систему событий не являющихся независимыми в совокупности.

У пирамиды четыре грани A, B, C, D. Грань A имеет цвет E, грань B имеет цвет F, грань C имеет цвет G, грань D трехцветная. Она имеет цвета E, F, G.

Случайные события при бросании тетраедра:

*A* - выпала грань *A;B*- выпала грань *B; C* - выпала грань *C; D* - выпала грань *D; E* - выпал цвет *E; F* - выпал цвет *F; G* - выпал цвет *G*.

Попарно несовместимыми событиями являются события A, B, C, D. Являются ли независимыми в совокупности события E, F, G ? Нет, не являются. Для того чтобы они были независимыми в совокупности необходимо, чтобы их БМН было равно [0,1, 2, 3,4, 5, 6, 7]. Это следует из теоремы 1

Её условие не выполняется, так как после удаления событий A, B, C, D БМН системы будет равно [7, 1, 2, 4]. Один из возможных вариантов задания логических связей задачи для компьютерной программы записан между служебными словами ZADNAME и END.

```
ZADNAME: BERN
NUMBERVAL:7
A B C D E F G
NUMBERPOS:13
EQ(A*B,U^)
EQ(A*C,U^)$
EQ(A*D,U^)$
EQ(B*C,U^)$
EQ(C*D,U^)$
EQ(B*D,U^)$
EQ(A+D,E)$
EQ(B+D,F)$
EQ(C+D,G)$
A(D,E)$
A(D,F)$
A(D,G)$
EQ(A+B+C+D,U)$ END
```

Этим ограничениям сопоставляется линейная диаграмма причинно - следственных связей испытания, показанная на машинограмме рис. 10. Если из нее удалить множества, *X1, X2, X3, X4,* соответствующие событиям *A, B, C, D*, то БМН оставшейся системы множеств E=X5, F=X6, G=X7, то есть множество номеров непустых конституент будет равно не [0..7], а будет равно [1, 2, 4, 7]. Таким образом, мы доказали, что случайные события E, F, G не являются независимыми в совокупности.

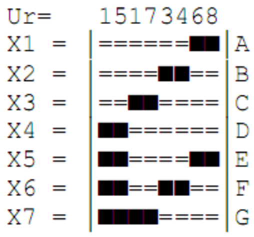


Рис. 10 Линейная диаграмма для примера Бернштейна

Рассмотренные примеры решения задач вероятностной логики, то есть задач теории вероятностей описанных в форме односмысловых логических суждений на основе функторов ортогонального базиса позволяют ставить и решатьзадачи компьютеризации интеллектуальной деятельности. По существу программная реализация точной интерпретации комплекса суждений является своеобразным усилителем естественного интеллекта.

## Заключение

В статье анализируется актуальная проблема искусственного интеллекта совместное использование логики и вероятности при решении задач. Как отмечается в работе [Кулик 2010] это является нетривиальной задачей. Автором предлагается алгебраическая (на основе алгебры множеств) интерпретация аристотелевской силлогистики изоморфная алгебре случайных событий относительно отношения строгого включения одного множества в другое. Которая позволяет решать задачи проверки гипотез о логическом следовании суждения из множества посылочных суждений, то есть устанавливать правильность рассуждений в форме полисиллогизмов. По свидетельству профессора Непейводы Н.Н. количество работ в мировой науке, посвященных этому вопросу превышает 500, что указывает на сложность проблемы. Для ее решения предложен целый ряд расходящихся решений, предложенных самыми авторитетными логиками. В работах [Сметанин 2010, 2011a, 2011b] предложена точная и непротиворечивая модель силлогистики, которая в данной публикации естественным образом «погружена» в вероятностную меру. В таком случае естественно возникает вопрос об адекватности этой модели содержательному смыслу. Наш анализ показывает, что эта модель не менее адекватна, чем лучшие из предложенных решений. Предлагаемый подход к компьютеризации решения задач является новым. Развитие предлагаемого подхода видится в создании формального исчисления конституентных множеств и построения системы искусственного интеллекта для решения вероятностных и логических задач, в частности возможно получить новые научно – обоснованные результаты в теории байесовских сетей [Тулупьев 2006], [Рассел 2006] и вероятностных выводов. Обратим внимание читателей на то, что предложенная модель не только является объединение всех трех подходов упомянутых во введении, но и естественным образом позволяет отразить не только причинно – следственные (детерминированные и стохастические) связи событий, но и естественное упорядочение их прообразов во времени в объективной реальности. Частичный порядок следования событий во времени легко укладывается в линейный порядок их следования в заданной алгебраической системе [Сметанин 2010]. В заключение автор обращается к научным работникам с предложением о партнерстве. Предлагается рассмотреть возможности совместных разработок для компьютеризации решения задач инжиниринга и реинжиниринга бизнес - процессов (BP), задач искусственного интеллекта, задач расчета надежности систем и безопасности бизнеса, задач анализа законодательных актов, задач модернизации и компьютеризации сложившейся в 20 веке дидактической системы обучения логике. Все это произвести на на основе подхода развиваемого проф. Непейводой Н.Н. в области неклассических логик и хаотического программирования и подхода к решению задач полисиллогистики и вероятностной логики развиваемого доц. Сметаниным Ю.М.на основе ортогонального базиса силлогистики, являющегося альтернативой базису силлогистики Аристотеля.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


**[Бочаров 2010]** Бочаров В.А., Маркин В.И. Силлогистические теории. – М.: Прогресс – Традиция, 2010. 336 с.

**[Вальков 1985]** Вальков К.И. Проекционное моделирование и автоматизация. Учебное пособие для факультета повышения квалификации. Л.: ЛИСИ, 1985, 86 с.

**[Владимиров 1969]** Владимиров Д.А. Булевы алгебры. М.: Наука 1969. С. 320, л.

**[Колмогоров ]** Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: //Сб. статей— М.: Наука, 1986.—535 с.

**Рябинин 2003]** Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем. // АиТ, «Наука», М, 2003, № 7, с. 178-186.

**[Лобанов 2009]** Лобанов В.И. Русская вероятностная логика – М.: «Русская правда» 2009.- 320 стр.

**[Сметанин 2009]** Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Серия математика, механика. Компьютерные науки. Вып. 4 . 2009 г. С .155-166

**[Сметанин 2010]** Сметанин Ю. М. Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4.-С. 172-185.

**[Сметанин 2011a]** Анализ парадоксов материальной импликации в ортогональном базисе силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4.- С.144-162

**[Сметанин 2011b]** Медицинская диагностика **и** ортогональный базис силлогистики.// В настоящее сборнике.

**[Горбатов 1976]** Горбатов В.А**.** Теория частично упорядоченных систем. – М.: «Советское радио», 1976. – 336 с.

**[Кулик 1997]** Кулик Б.А. Логические основы здравого смысла. Под редакцией Поспелова Д.А. – СПб.: Политехника, 1997. – 131 с.

**[Кулик 2010]** Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний . Б.А. Кулик, А.А. Зуенко, А.Я. Фридман. – СПб.: изд-во Полиехн. Ун-та, 2010.- 235 с.

**[Порецкий 1884]** Порецкий П.С. О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики.// Собрание протоколов заседаний секции физико - математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете, т. 2, Каз., 1884.

**[Брусенцов 1998]** Брусенцов Н.П. Искусство достоверного рассуждения. Неформальная реконструкция аристотелевой силлогистики и булевой математики мысли. - М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1998.

**[Nilson 1986]** Nilson N. J. Probabilistic Logic /N/ J/ Nilson // Artificial Intelligense. 1986 N 28/ - pp 71-87.

[**Тулупьев** 2006] Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. — СПб.: Наука, 2006. — 607 с.

[**Рассел 2006**] Рассел, Стюарт, норвиг, Питер. Искусственный интеллект: современный подход, 2 – е изд.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.: ил.»


**Probablistic logic and ortogonal basis of syllogistics**


Smetanin Yu.M.

*Udmurt State University,Izhevsk*

**gms1234gms@rambler.ru**


## RESUME


In this paper, we consider the algebra of random events and its interpretationin a non-degenerate Boolean algebra on the basres of setts/ It is shown that the classical use of the cons#cepts of logic and probability is quite compatible with the engineering logical –and-probabilistic estimate and probabilistic logic, the beginning of which goesback to classicalworks in the field of artificial intelligence/ It is whown that some of most labour-wide tasks can be solved with the help of the proposed logical description and accurate interpretation.

Key words: algebraic system, the calculation of constituent sets, probability, orthogonaline basis of syllogistic.