



УДК 519.711.74

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ РАССЕЯНИЯ НА ГРАФАХ

Жилякова Л.Ю.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва, Россия*

zhilyakova.ludmila@gmail.com

Рассматриваются две модели рассеяния на графах: chip-firing game – целочисленная пороговая модель, и неоднородная ресурсная сеть. Рассматриваются сходства и различия этих моделей, а также области их применения.

Ключевые слова: граф, дискретная модель, рассеяние, ресурс.

ВВЕДЕНИЕ

Модели рассеяния ресурсов на графах используются для решения различных задач в широком кругу предметных областей. Показано, что явления самоорганизующейся критичности [Bak et al., 1988], [Dhar, 1990], такие как сход лавин, можно имитировать достаточно простой целочисленной моделью. Модели катастроф: «лавина» и «абелева куча песка», модели балансирования нагрузки в распределенных сетях и т.д. при некоторых упрощениях математически эквивалентны играм «выстреливания фишек» (chip-firing games) (см. напр., [Bjorner et al., 1991, 1992], [Lovasz et al., 1995]).

Ресурсная сеть, предложенная в [Кузнецов, 2009], также является моделью рассеяния ресурсов. Однако она обладает несколькими отличительными особенностями, позволяющими с ее помощью моделировать более разнообразные процессы, такие, к примеру, как распространение вещества в водной среде [Жилякова, 2011].

1. Chip-firing game и связанные с ней модели

Пусть G – ориентированный граф, который может иметь петли и кратные дуги. В начальном состоянии в некотором множестве вершин графа содержатся стопки фишек. «Ход» состоит в выборе вершины, число фишек в которой не меньше числа ее исходящих дуг, после чего эта вершина выстреливает, т.е. передает по одной фишке по каждой исходящей дуге всем своим соседям. Игра продолжается до тех пор, пока остается хотя бы одна вершина, способная выстрелить.

Ключевое свойство таких игр – то, что из данной позиции все последовательности выстрелов ведут себя одинаково: либо все они будут длиться бесконечно, либо закончатся за одинаковое количество шагов с одной и той же конечной позицией [Lovasz et al., 1995].

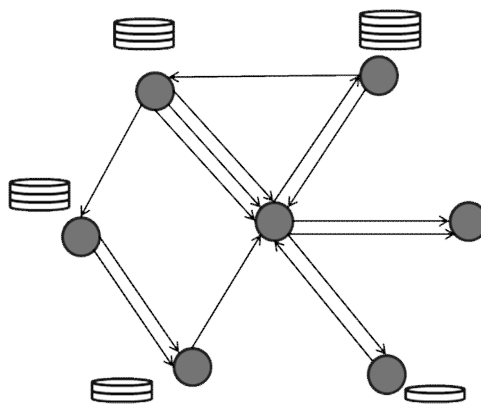


Рисунок 1 – Распределение фишек в chip-firing game с ориентированным графом

Для игры в выстреливания (chip-firing game) можно задать ряд естественных вопросов: будет ли процесс конечным или бесконечным? Если конечным, как долго он будет длиться? Если бесконечным, как скоро он заикнется? Сколько фишек необходимо для бесконечной игры? Как конкретная начальная позиция может быть трансформирована с помощью выстреливаний в другую позицию?

В случае неориентированных графов на эти вопросы получены ответы. Например, если n –

количество вершин, m – количество дуг в графе, то конечная процедура заканчивается за $O(n^4)$ шагов. Кратчайший период в периодической игре равен n ; минимальное число фишек для бесконечной игры равно m , количеству дуг. Существуют алгоритмы полиномиальной сложности для определения, задает ли начальная позиция конечную или бесконечную игру, а также для определения, достижима ли одна позиция из другой. Орграфы более трудны для изучения, и сложность некоторых вопросов для них пока неизвестна.

1.1. Модель «абелева куча»

Игрой в выстреливания на орграфе может быть представлена модель самоорганизующейся системы, называемая «абелева куча песка» или «лавина». В этой модели каждый узел представляет собой место, в котором аккумулируется снег. Специальный узел s отвечает за «внешний мир». Это узел, из которого идет снег. Он связан со всеми остальными узлами сети. Когда в каком-либо месте количество снега превышает порог, узел «обрушивается», посылая по единице снега каждому исходящему соседу, которые, в свою очередь, тоже могут обрушиться, и т.д., начиная лавину.

Снегопад включается в модель. Для этого узел s соединяется с каждым узлом i посредством a_i дуг. Снегопад соответствует выстреливанию узла s . Предполагается, что снега в s «достаточно» для того, чтобы он стрелял всегда.

Последовательность лавина-снегопад-лавина-снегопад-... задает бесконечную игру в выстреливания на графе с дополнительным ограничением: узел s стреляет только тогда, когда ни один другой узел не стреляет. Когда лавина начинает сходиться, очередность выстреливания узлов может быть различной, однако количества выстреливаний каждого узла и конечное распределение снега определены однозначно.

Недостатком модели является ее целочисленность и отсутствие параллельности. За один ход выстреливает только один узел.

1.2. Балансирование нагрузки в сетях

Балансирование нагрузки в распределенных сетях тесно связано с рассматриваемыми процессами на графах [Spencer, 1986]. В этой модели каждый узел (обычно регулярного неориентированного) графа соответствует процессору, и каждый процессор i имеет определенное количество рабочей нагрузки w_i . Процессоры хотят передать нагрузку другим процессорам по дугам, с тем чтобы их нагрузка приблизительно выровнялась. По духу это близко случайному блужданию на регулярном графе, где «вероятность» передается по ребрам и, в конечном счете, выравнивается.

Конечно, нижняя и верхняя границы времени, необходимого для выравнивания нагрузок, включают в себя параметры, знакомые из теории случайных блужданий: скорость распространения,

проводимость, зазор между собственными значениями и т.д. [Aiello et al., 1993].

2. Ресурсные сети

Ресурсная сеть – динамическая модель, представленная взвешенным графом с вершинами $v_i \in V$, функционирующая в дискретном времени t .

Ребрам (v_i, v_j) приписаны неотрицательные числа r_{ij} , постоянные во времени и называемые *пропускными способностями*. Сеть называется *двусторонней*, если любые две смежные вершины связаны парой противоположно ориентированных ребер. Будем называть сеть *сетью с петлями*, если множество ребер вида (v_i, v_i) непусто.

Ресурсами $q_i(t)$ называются неотрицательные числа, приписанные вершинам v_i и изменяющиеся в дискретном времени t . Вершины v_i могут хранить неограниченное количество ресурса.

$Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ – состояние сети в момент времени t .

Состояние сети Q^* называется *предельным*, если оно либо устойчиво и достижимо из $Q(0)$ за конечное время, либо асимптотически достижимо из $Q(0)$.

$R = (r_{ij})_{n \times n}$ – матрица пропускной способности сети; $r_{sum} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}$ – суммарная пропускная

способность сети; $r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}$ и $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ – входная и выходная пропускные способности вершины соответственно.

Суммарный ресурс, находящийся во всех вершинах, обозначим через W . В сети выполняется *закон сохранения*: при ее функционировании ресурс остается постоянным (не поступает извне и не расходуется).

Правила распределения ресурса. В момент t вершина v_i отдает в смежную ей вершину v_m :

r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);

$\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$ – в противном случае (правило 2).

Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру (v_i, v_m) в момент t , приходит в вершину v_m в момент $t + 1$.

Множество вершин с ресурсом $q_i(t)$, не превосходящим r_i^{out} , назовем зоной $Z(t)$. Вершины из $Z(t)$ функционируют по правилу 2.

$Z^+(t)$ – множество вершин, ресурс которых больше их выходной пропускной способности, они

функционируют по правилу 1. Для предельного состояния Q^* обозначим эти зоны через Z^* и Z^{+*} .

T – пороговое значение ресурса, такое что при $W \leq T$ все вершины начиная с некоторого t' переходят в зону $Z(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста начиная с некоторого t'' . Доказаны существование и единственность T для любой связной двусторонней несимметричной сети с петлями.

При $W \leq T$ процесс распределения ресурса представляет собой регулярную сеть Маркова. Предельное состояние существует и единственно для любой матрицы пропускной способности R , соответствующей двусторонней сети с петлями, и любого начального распределения ресурса $Q(0)$.

Процессы распределения в ресурсных сетях были исследованы в ряде работ (О.П. Кузнецовым и автором). Доказана стабилизация состояний и потоков при любых значениях ресурса в сети; сформулированы достаточные условия единственности предельного состояния. Произведена классификация сетей в соответствии с их топологией и выявлены особенности функционирования каждого класса сетей при больших значениях ресурса.

Из определений следует, что в ресурсной сети, в отличие от chip-firing game, мульти-ребра заменяются одним ребром с соответствующей пропускной способностью. Целочисленность модели chip-firing game накладывает на нее ряд серьезных ограничений, которые отсутствуют в ресурсной сети.

Главное отличие этих двух моделей состоит в их функционировании при больших t . Модель выстреливаний останавливается или заклинивается, проходя ряд последовательных состояний – в зависимости от количества фишек и их начального распределения. Ресурсная сеть из любого начального состояния стремится к предельному, причем процесс перераспределения ресурса продолжается бесконечно и поток ресурса стабилизируется. (Формулы для координат вектора предельного потока найдены для любой топологии сетей). Определение потока в ресурсных сетях является обобщением понятия потока в графовых моделях. В классической модели поток имеет направленность от источника к стоку; в ресурсной сети поток не направлен, источники и стоки отсутствуют.

2.1. Потоки в ресурсных сетях

Традиционное понятие потока [Форд и др., 1966], [Ahuja et al., 1993] для ресурсных сетей определяется следующим образом. Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру (v_i, v_j) в момент t , приходит в вершину v_j в момент $t + 1$. Соответственно, будем считать, что этот ресурс на интервале $(t, t + 1)$ находится на ребре (v_i, v_j) . Его величину назовем *поток*ом $f_{ij}(t)$.

$$\sum_{j=1}^n f_{ij}(t) = f_i^{out}(t) \quad - \quad \text{выходной поток из}$$

вершины v_i в момент t .

$$\sum_{i=1}^n f_{ij}(t) = f_j^{in}(t + 1) \quad - \quad \text{входной поток в}$$

вершину v_j ; кроме того, положим $f_j^{in}(0) = 0$.

Общий поток $F(t)$ описывается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n \times n}$.

Величиной потока будем называть сумму:

$$f_{sum}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(t).$$

Сети разных топологий имеют несходные свойства. Рассмотрим некоторые классы ресурсных сетей отдельно.

2.2. Однородные полные сети

Однородными называются сети с равной пропускной способностью ребер. Пусть пропускная способность каждого ребра равна r .

В полной двусторонней сети с петлями динамический процесс распределения ресурсов сходится к предельному состоянию следующим образом:

2.2.1. Если суммарный ресурс W сети не превосходит порога $T = rn^2$, то при любом начальном состоянии сети ее предельным состоянием является вектор $(\frac{W}{n}, \frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n})$. Для

таких сетей предельное состояние достигается за конечное время.

2.2.2. Если $W > rn^2$, то при любом начальном состоянии сети, в котором не все ресурсы вершин равны, происходит следующее. Будем говорить, что вершина v_i находится в зоне Z^- в момент t , если $q_i(t) \leq rn$, и в зоне Z^+ в противном случае. Тогда вершины, попавшие в зону Z^- , не смогут из нее выйти, а в предельном состоянии они имеют ресурс rn ; ресурс вершин, оставшихся в Z^+ , отличается от их начального ресурса на одну и ту же величину.

2.3. Несимметричные сети

Несимметричные ресурсные сети – частный случай неоднородных сетей, в которых пропускные способности произвольны. Введем обозначение $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out}$.

В общем случае вершины сети делятся на три класса:

- 1) вершины-приемники, для которых $\Delta r_i > 0$;
- 2) вершины-источники, $\Delta r_i < 0$;
- 3) нейтральные вершины, $\Delta r_i = 0$.

Несимметричной назовем сеть, которая обладает хотя бы одним источником и одним приемником.

Зона $Z(t)$ для таких сетей – это множество вершин, для которых $q_i(t) \leq r_i^{out}$.

Для несимметричных двусторонних сетей с петлями справедливы следующие утверждения:

2.3.1. Для любого начального состояния и любого W существует такой момент t' , что для всех $t > t'$ все источники и некоторые нейтральные вершины окажутся в зоне Z .

2.3.2. При любом W , при котором, начиная с некоторого момента t' , все вершины переходят в зону $Z(t)$, для любого $Q(0)$ предельное состояние существует и единственно.

2.3.3. Существует порог T , такой, что при $W \leq T$ все вершины, начиная с некоторого t' , переходят в зону $Z(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста, начиная с некоторого t'' . Для любой сети T единственен и не зависит от суммарного ресурса W и его начального распределения $Q(0)$. Кроме того, в несимметричных сетях T всегда меньше суммарной пропускной способности сети.

2.3.4. Для случая $W \leq T$ предложен метод вычисления предельного состояния. Он основан на том, что в предельном состоянии для любой вершины входной поток равен выходному.

2.3.5. Предельный поток существует при любом ресурсе W . Причем, при $W \leq T$ $f_{sum}^* = W$; при $W > T$ $f_{sum}^* = T$.

2.3.6. Для случая $W > T$ и любом начальном распределении ресурса предельное состояние Q^* существует.

2.3.7. При $W > T$ для некоторого множества вершин существуют начальные состояния, из которых эти вершины оказываются в зоне Z^+ . Такие вершины будем называть *потенциальными аттракторами*. Потенциальными аттракторами могут быть некоторые вершины-приемники, а также некоторые нейтральные вершины. Если в сети более одного потенциального аттрактора, ее предельное состояние не единственно и зависит от начального состояния.

2.3.8. Найден критерий аттрактивности вершин. Вершина является потенциальным аттрактором тогда и только тогда, когда при $W = T$ она в предельном состоянии имеет ресурс, равный своей выходной пропускной способности: $\tilde{q}_k = r_k^{out}$.

2.4. Симметричные и квазисимметричные сети

Сети, в которых для каждой вершины величины r_i^{in} (сумма пропускных способностей ребер, входящих в вершину v_i) и r_i^{out} (сумма пропускных способностей ребер, выходящих из вершины v_i) равны, делятся на два класса с похожими свойствами: симметричные сети (с симметричной

матрицей пропускной способности) и квазисимметричные сети, для которых матрица пропускной способности несимметрична, но для каждой вершины выполняется: $r_i^{in} = r_i^{out}$. В таких сетях (как и в однородных) все вершины являются потенциальными аттракторами.

2.4.1. В симметричных и квазисимметричных сетях пороговое значение T равно суммарной пропускной способности сети: $T = r_{sum}$.

2.4.2. Для случая $W \leq T$ предельное состояние единственно и задается вектором:

$$Q^* = \left(\frac{r_1^{out}}{r_{sum}} W, \frac{r_2^{out}}{r_{sum}} W, \dots, \frac{r_n^{out}}{r_{sum}} W \right).$$

2.4.3. Для случая $W > T$ вершины, попавшие за конечное число тактов в зону Z , не смогут из нее выйти, а в предельном состоянии они имеют ресурс $r_i^{in} = r_i^{out}$:

$$Q^* = (r_1^{out} + c_1^*, \dots, r_m^{out} + c_m^*, r_{m+1}^{out}, \dots, r_n^{out}).$$

2.5. Динамика потоков в ресурсных сетях

Потоки в двусторонних сетях с петлями стабилизируются при любом количестве ресурса и его начальном распределении. Однако в зависимости от начального состояния динамика потока может быть различной. Суммарный поток может быть как монотонным, так и немонотонным, может возрастать, убывать, а также иметь промежутки временной стабилизации. При этом, в зависимости от начального распределения одного и того же суммарного ресурса в одной и той же сети, потоки могут быть различными (хотя предельный поток будет одинаковым).

На рисунках представлена динамика потока в несимметричной сети с пятью вершинами при разном начальном состоянии.

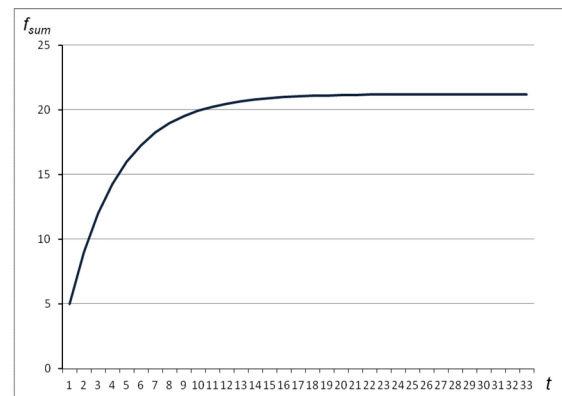


Рисунок 1 – Монотонно возрастающий поток

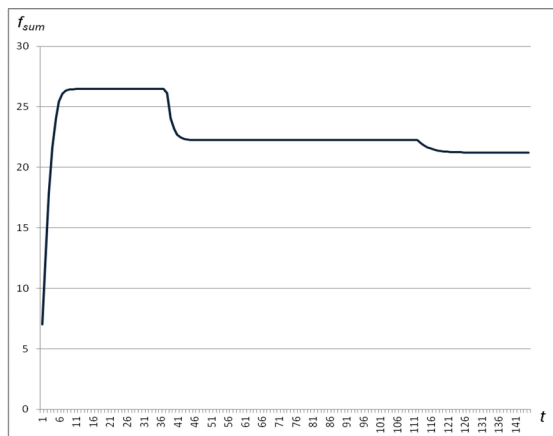


Рисунок 2 – Немонотонный поток с несколькими плато

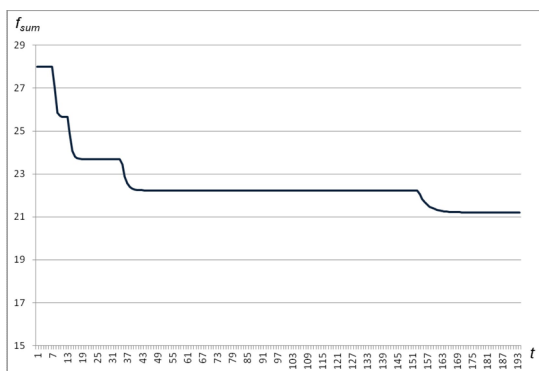


Рисунок 3 – Неубывающий поток с несколькими плато (в первые семь тактов $f_{sum}=r_{sum}$)

2.6. Динамика состояний в ресурсных сетях

Исследование изменений координат вектора предельных состояний выявило зависимость распределения ресурса от начального состояния и топологии сети. Чаще всего ресурсы в вершинах изменяются монотонно. Однако в некоторых случаях в сети возможны значительные колебания (рис. 4).

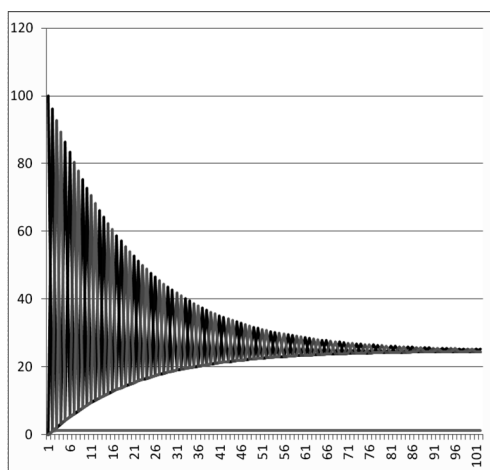


Рисунок 4 – Колебания и стабилизация ресурса в квазисимметричных сетях

Доказано (и видно из рисунков), что при любом изменении вектора предельных состояний имеет место асимптотическая сходимость к предельному состоянию.

3. Сравнительные характеристики двух моделей

Модель выстреливания фишек и ресурсная сеть имеют много общего. Общим является принцип функционирования: хранение ресурса в вершинах и распределение его по ребрам в смежные вершины. Однако имеется ряд существенных различий, которые определяют аппараты их исследования и предметные области, описываемые этими моделями.

Сходства и различия представим в виде сравнительной таблицы.

Таблица 1 – Характеристики модели «chip-firing game» и ресурсной сети

	Chip-firing game	Ресурсная сеть
Параллельность	–	+
Накопление ресурса до порогового значения	+	– пороговое значение определяет правило функционирования вершин
Распростр. малых ресурсов	–	+
Делимость ресурса	–	+
Асимптотич сходимость	– (либо остановка, либо бесконечный цикл)	+

Chip-firing game моделирует лавины за счет своей способности накапливать ресурс в узлах до момента выстреливания. В ресурсной сети вершины отдают ресурс, имея любое его количество. Таким образом, самоорганизующаяся критичность не может быть описана ресурсной сетью с набором правил, описанным в данной работе.

Ресурсная сеть подходит для моделирования иных процессов, в которых перераспределение должно происходить постоянно. На основе ресурсной сети построена модель распространения загрязняющих веществ в водной среде [Жилякова, 2011]. В этой модели сеть задана регулярной двумерной решеткой, наложенной на некоторую площадь водоема. Узлы хранят в себе количество вещества, ребра отвечают за перетоки между

смежными районами. Пропускные способности соответствуют полям течений, которые зависят от метеорологических и гидрологических параметров и считываются из базы данных. Пропускная способность петли отвечает за скорость оседания вещества.

Модели социальных процессов в сетях мобильных операторов, позволяющие предсказывать динамику оттока клиентов из данной сети (см. напр. [Dasgupta et al., 2008]) также можно описать в терминах ресурсных сетей. На основе данных о звонках и смс-сообщениях клиентов сети строится граф, узлы которого представляют собой телефонные номера, а двусторонние пары – обоюдные звонки. Веса ребер соответствуют количеству и продолжительности разговоров. Делается предположение, что решимость абонента сменить сотового оператора зависит от количества его друзей (смежных узлов), сменивших оператора за предыдущий период времени. В узлы, перешедшие в другую сеть, помещается некоторое количество ресурса, названное в данной модели «энергией». Энергия в соответствии с правилом 2 ресурсной сети распространяется по инцидентным ребрам в смежные узлы. После наступления стабилизации узлы, имеющие энергию, превосходящую некоторое пороговое значение, считаются потенциально готовыми к уходу из сети.

Третьей моделью, в основе которой лежит ресурсная сеть, является модель ассоциативной памяти [Жилиякова, 2010]. В ней узлы соответствуют понятиям, а двусторонние пары ребер – взаимным ассоциациям между ними.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описаны две модели рассеяния на графах: целочисленная последовательная пороговая модель chip-firing game и параллельная модель с бесконечно делимым ресурсом – неоднородная ресурсная сеть.

Рассмотрены свойства обеих моделей, описываемые ими предметные области и границы применимости каждой из них.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [Жилиякова, 2010] Жилиякова Л.Ю. Реализация рекурсивных запросов в динамической ассоциативной ресурсной сети // Двенадцатая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ'2010. Труды конференции, том 1. М. – Физматлит, 2010. с. 335-343.
- [Жилиякова, 2011] Жилиякова Л.Ю. Применение ресурсных сетей для моделирования распространения веществ в водной среде // Проблемы управления, 2011, № 2, с. 46-51
- [Кузнецов, 2009] Кузнецов О.П. Однородные ресурсные сети. I. Полные графы. // Автоматика и телемеханика, 2009, № 11, с.136-147.
- [Кузнецов и др., 2010] Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Двусторонние ресурсные сети – новая потоковая модель // Доклады АН, 2010, том 433, №5, с.609-612.
- [Форд и др., 1966] Форд Л.Р., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. 276 с.
- [Aiello et al., 1993] W. Aiello, B. Awerbuch, B. Maggs and S. Rao, Approximate load balancing on dynamic and asynchronous

networks, Proc. 25th ACM Symp. of Theory of Computing (1993), 632–634.

[Ahuja et al., 1993] Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B. Network Flows: Theory, Algorithms and Applications. Prentice Hall, New Jersey, 1993.

[Bak et al., 1988] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, Physical Review A 38 (1988), 364–374.

[Bjorner et al., 1991] A. Bjorner, L. Lovasz and P. Shor, Chip-firing games on graphs, Europ. J. Comb. 12 (1991), 283–291.

[Bjorner et al., 1992] A. Bjorner and L. Lovasz, Chip-firing games on directed graphs, J. Algebraic Combinatorics 1 (1992), 305–328.

[Dasgupta et al., 2008] K. Dasgupta, R. Singh, B. Viswanathan, D. Chakraborty, S. Mukherjee, A.A. Nanavati. Social Ties and their Relevance to Churn in Mobile Telecom Networks // Proceedings of the 11th international conference on Extending database technology EDBT'08: Advances in database technology ACM New York, NY, USA, 2008.

[Dhar, 1990] D. Dhar, Self-organized critical state of sandpile automaton models, Physical Review Letters 64 (1990), 1613–1616.

[Lovasz et al., 1995] L. Lovasz and P. Winkler. Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph // Surveys in Combinatorics, 1995 (ed. P. Rowlinson), London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press, 119–154.

[Spencer, 1986] J. Spencer. Balancing vectors in the max norm. Combinatorica, v. 6 (1986), 55–66.

DISCRETE MODELS OF DIFFUSION ON GRAPHS

Zhilyakova L. Yu.

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Profsoyuznaya ul., 65, Moscow, 117997 Russia
zhilyakova.ludmila@gmail.com

Two models of diffusion on graphs are considered: chip-firing game – an integer threshold model, and nonhomogeneous resource network. Their main properties are described. The similarities and differences between these models are analysed, and their applications are specified.

INTRODUCTION

There exist a number of graph-theoretic models, involving various kinds of diffusion processes. These models include: random walks on graphs; the “avalanche” or “sandpile” model of catastrophic events, which is mathematically equivalent to “chip-firing” games; load balancing in distributed networks; and, the our object of our study: nonhomogeneous resource networks.

CONCLUSION

In this paper we compare the two models: chip-firing game and nonhomogeneous resource network. In spite of many common properties they need different methods of research and have rather different applications.