



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

Julia, Fatou & Mandelbrot

Immagini di Sistemi Dinamici Complessi

Dario Comanducci

Tesina per il Corso di Complex System Analysis

Master in Data Science and Statistical Learning
Università degli Studi di Firenze

30 Ottobre 2024



Un po' di storia

Il metodo delle tangenti (Newton, 1669)

$$g(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$
$$x^* \in \mathbb{R} : g(x^*) = 0? \Rightarrow x^* = 1$$



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Un po' di storia

Il metodo delle tangenti (Newton, 1669)

$$g(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$
$$x^* \in \mathbb{R} : g(x^*) = 0? \Rightarrow x^* = 1$$

$r(x) = g'(x_n)(x - x_n) + g(x_n)$ retta tg. in $g(x_n)$

$$r(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = \frac{2x_n^3 - x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 2x_n + 1}$$

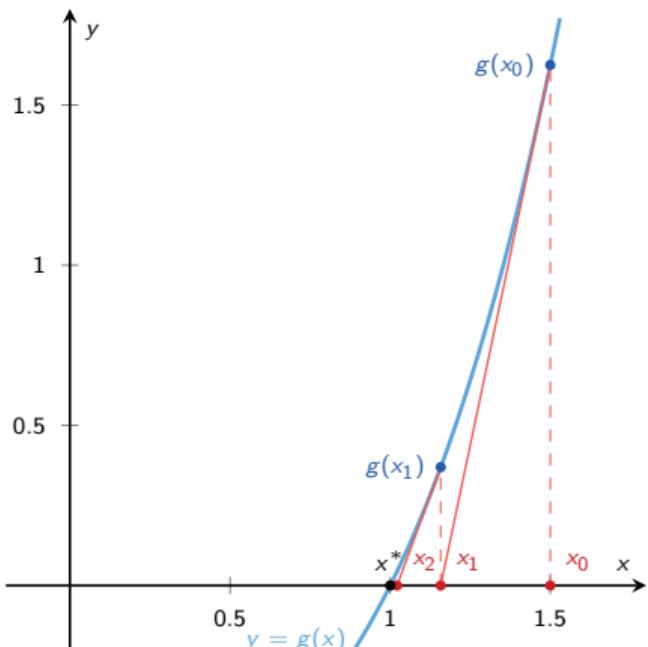
$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 \approx 1.4444$$

$$x_2 \approx 1.1306$$

$$x_3 \approx 1.0150$$

$$x_4 \approx 1.0002$$



$x_0 = 1.5$ è attratto dalla radice $x^* = 1$



Un po' di storia

Estensione al piano complesso (A. Cayley, 1879)

$$g(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = (z - 1)(z^2 + 1)$$

$$z^* \in \mathbb{C} : g(z^*) = 0? \Rightarrow z^* \in \{1, \pm i\}$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{g(z_n)}{g'(z_n)} = f(z_n) = \frac{2z_n^3 - z_n^2 + 1}{3z_n^2 - 2z_n + 1}$$

Bacino d'attrazione:

$$A(z^*) = \{z_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = z^*\}$$

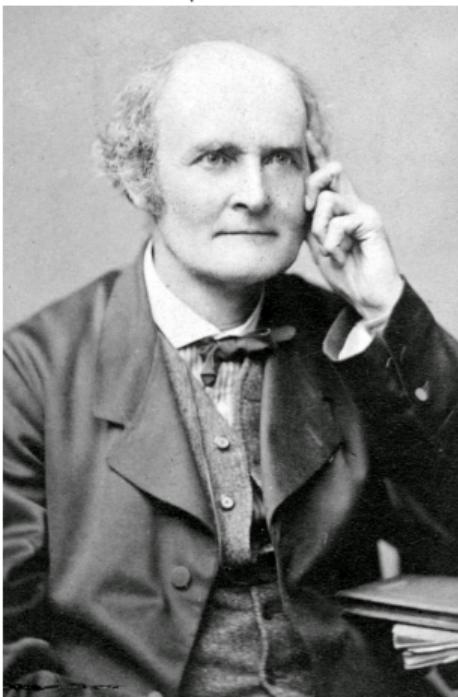
$$f^2(z_0) = f(f(z_0))$$

$$f^3(z_0) = f(f^2(z_0)) = f(f(f(z_0)))$$

⋮

$$f^{n+1}(z_0) = f(f^n(z_0))$$

$$z^3 + c = 0?$$



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Un po' di storia

Estensione al piano complesso (A. Cayley, 1879)

$$g(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = (z - 1)(z^2 + 1)$$

$$z^* \in \mathbb{C} : g(z^*) = 0? \Rightarrow z^* \in \{1, \pm i\}$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{g(z_n)}{g'(z_n)} = f(z_n) = \frac{2z_n^3 - z_n^2 + 1}{3z_n^2 - 2z_n + 1}$$

Bacino d'attrazione:

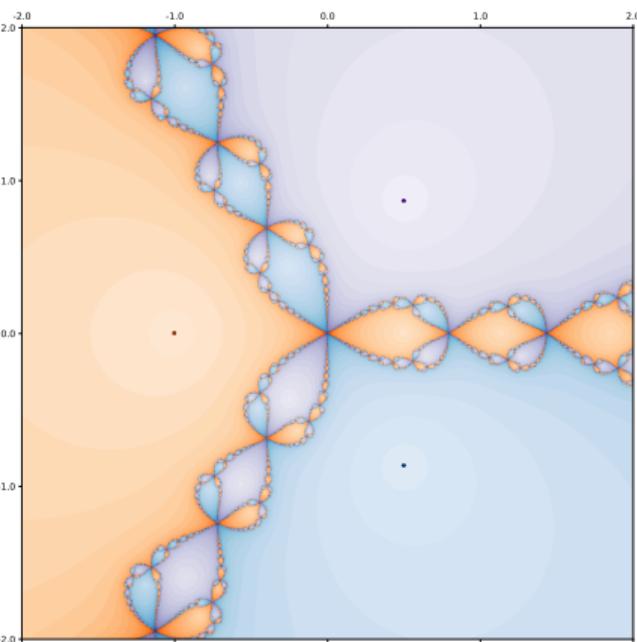
$$A(z^*) = \{z_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = z^*\}$$

$$f^2(z_0) = f(f(z_0))$$

$$f^3(z_0) = f(f^2(z_0)) = f(f(f(z_0)))$$

⋮

$$f^{n+1}(z_0) = f(f^n(z_0))$$



Bacini d'attrazione per $z^3 + 1 = 0$
 $z^* \in \{-1, (1 \pm i\sqrt{3})/2\}$

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Un po' di storia

Estensione al piano complesso (A. Cayley, 1879)

$$g(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = (z - 1)(z^2 + 1)$$

$$z^* \in \mathbb{C} : g(z^*) = 0? \Rightarrow z^* \in \{1, \pm i\}$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{g(z_n)}{g'(z_n)} = f(z_n) = \frac{2z_n^3 - z_n^2 + 1}{3z_n^2 - 2z_n + 1}$$

Bacino d'attrazione:

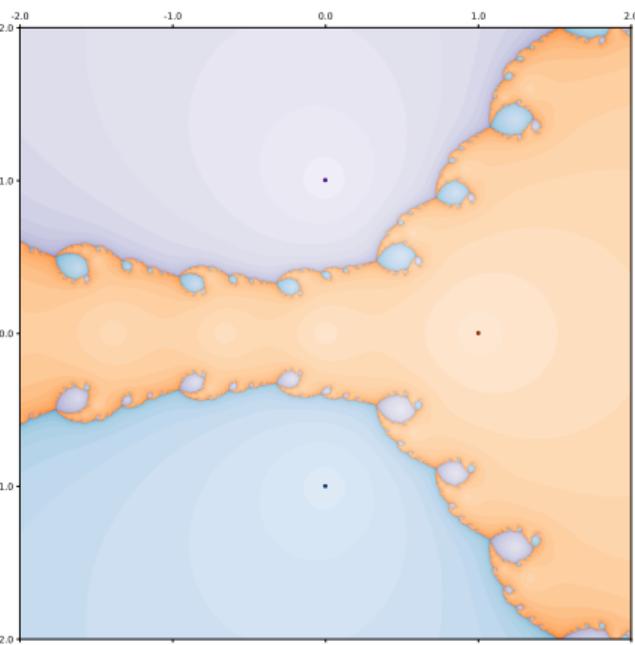
$$A(z^*) = \{z_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = z^*\}$$

$$f^2(z_0) = f(f(z_0))$$

$$f^3(z_0) = f(f^2(z_0)) = f(f(f(z_0)))$$

⋮

$$f^{n+1}(z_0) = f(f^n(z_0))$$



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Un po' di storia

Estensione al piano complesso (A. Cayley, 1879)

$$g(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = (z - 1)(z^2 + 1)$$

$$z^* \in \mathbb{C} : g(z^*) = 0? \Rightarrow z^* \in \{1, \pm i\}$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{g(z_n)}{g'(z_n)} = f(z_n) = \frac{2z_n^3 - z_n^2 + 1}{3z_n^2 - 2z_n + 1}$$

Bacino d'attrazione:

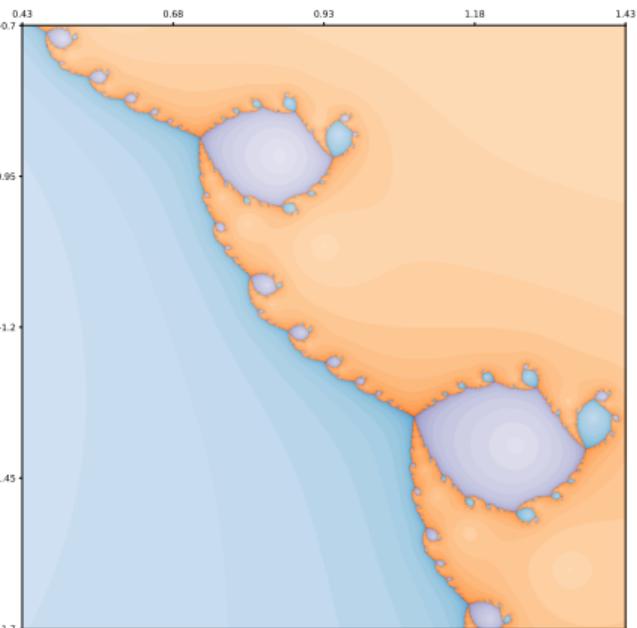
$$A(z^*) = \{z_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = z^*\}$$

$$f^2(z_0) = f(f(z_0))$$

$$f^3(z_0) = f(f^2(z_0)) = f(f(f(z_0)))$$

⋮

$$f^{n+1}(z_0) = f(f^n(z_0))$$



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

Un po' di storia

Teoria generale dell'iterazione complessa (G. Julia, 1917; P. Fatou, 1917)



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad z_n, z_{n+1} \in \overbrace{\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}}^{\text{sfera di Riemann}}$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$p(z), q(z)$: polinomi primi tra loro

Alcuni esempi:

$$f(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$$

$$f(z) = z^2 + c$$

$$f(z) = \frac{z^2 + p}{1 - \bar{p}z^2}$$



Gaston Julia



Pierre Fatou

Primo e secondo classificato al Grand Prix dell'Académie des Sciences del 1918 (pubblicazioni su Les Comptes Rendus Mathématique)



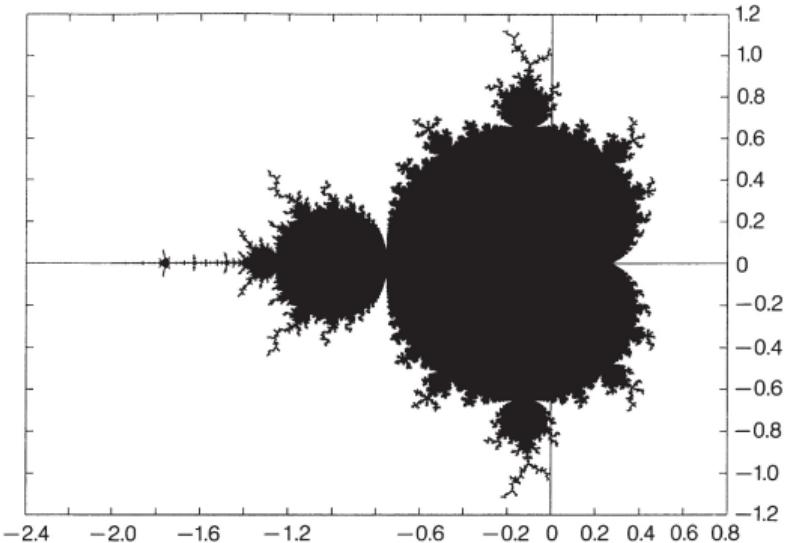
Un po' di storia

Frattali & Computer Graphics (B. Mandelbrot, 1980)

Insieme di Mandelbrot

$$\mathcal{M} = \left\{ c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty \right\}$$

$$f_c(z) = z^2 + c$$



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Un po' di storia

Frattali & Computer Graphics (B. Mandelbrot, 1980)

Insieme di Mandelbrot

$$\mathcal{M} = \left\{ c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty \right\}$$
$$f_c(z) = z^2 + c$$



R. Brooks & P. Matelski, *The dynamics of 2-generator subgroups of $PSL(2, \mathbb{C})$* , 1978



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Orbite su \mathbb{C}

Sia $f(z) : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una funzione razionale

J.F.M.

Orbita futura

La successione

$$z_n = f^n(z_0) \quad n = 1, 2, \dots$$

definisce, per ogni $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, l'*orbita futura* indicata dal simbolo $\text{Or}^+(z_0)$.

Orbita inversa

Si definisce *orbita inversa* l'insieme di tutte le controimmagini:

$$\text{Or}^-(z') = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : f^k(z_0) = z' \text{ per } k = 0, 1, 2, \dots\}$$

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Punti periodici

Sia $f(z) : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una funzione razionale

Punto periodico

Se per qualche valore di n si ha $f^n(z_0) = z_0$ in $\text{Or}^+(z_0)$, z_0 è detto *punto periodico*

Orbita periodica

L'orbita futura corrispondente ad un punto periodico è detta *orbita periodica*

Periodo di un'orbita periodica

Data un'orbita periodica, il più piccolo n t. c. $z_0 = f^n(z_0)$ è detto *periodo* dell'orbita

Punto fisso

Un punto periodico con periodo d'orbita $n = 1$ viene detto *punto fisso*

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Stabilità dei punti periodici

Autovalore λ di un punto periodico

Dato un punto periodico z_0 di periodo n , sia $\lambda \in \mathbb{C}$ il valore assunto dalla derivata di $f^n(z)$ in z_0 ; λ è una costante dell'orbita $\text{Or}^+(z_0)$ in quanto:

$$\lambda = \frac{df^n(z_0)}{dz} = \frac{df(f^{n-1}(z_0))}{dz} = \frac{df(z_n)}{dz} \frac{df^{n-1}(z_0)}{dz} = \prod_{k=0}^n \frac{df(z_k)}{dz}$$

Stabilità

Il punto periodico z_0 , così come il ciclo corrispondente, può essere

- ▶ *super-attrattivo* $\iff \lambda = 0$,
- ▶ *attrattivo* $\iff 0 < |\lambda| < 1$
- ▶ *indifferente* $\iff |\lambda| = 1$
- ▶ *repulsivo* $\iff |\lambda| > 1$

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Insiemi di Julia e di Fatou

Insieme di Julia \mathcal{J}_f (definizione formale)

Data una funzione razionale $f(z)$, l'*insieme di Julia* \mathcal{J}_f è l'insieme dei punti $z \in \hat{\mathbb{C}}$ nei quali non esiste un intorno di z nel quale $f(z), f^2(z), f^3(z) \dots$ è una sequenza equicontinua di funzioni (ossia $f(z)$ non è normale nel senso di Montel)

Insieme di Fatou \mathcal{F}_f

L'insieme di Fatou \mathcal{F}_f è l'insieme complementare di \mathcal{J}_f : $\mathcal{F}_f = \hat{\mathbb{C}} - \mathcal{J}_f = \mathcal{J}_f^c$

Bacino d'attrazione

Dato un punto fisso attrattivo z_0 , il suo *bacino d'attrazione* è dato dall'insieme

$$A(z_0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : f^k(z) \rightarrow z_0 \text{ per } k \rightarrow \infty\}$$

Vale la seguente proprietà: l'insieme di Julia è la frontiera di $A(z_0)$, $\mathcal{J}_f = \partial A(z_0)$



Richiami di topologia

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

Sia (X, d) uno spazio metrico, ossia $d(a, b) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è una distanza tra $a, b \in X$

Intorno

L'intorno di centro $x_0 \in X$ e raggio $\varepsilon > 0$ è l'insieme $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$

Punti interni ed esterni

Un punto $x_0 \in A$ si dice *interno ad A* se $\exists \varepsilon > 0 : D(x_0, \varepsilon) \subset A$; un punto $x_0 \in A$ si dice *esterno ad A* se è interno al suo complementare $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$

Insieme aperti e chiusi

Un insieme $A \subset X$ è *aperto* se ogni suo punto è interno; è *chiuso* se A^c è aperto

Frontiera di un insieme

La *frontiera* ∂A di A è l'insieme dei punti che non sono né interni né esterni ad A



Insieme di Julia \mathcal{J}_f

Altre "definizioni" alternative

- ▶ L'insieme di Julia è dato dalla *chiusura* dei punti periodici repulsivi di $f(z)$
- ▶ L'insieme P di tutti i punti repulsivi di $f(z)$ è *denso* in \mathcal{J}_f

Informalmente, A si dice denso in X se ogni punto di X appartiene ad A o altrimenti è arbitrariamente “vicino” a un membro di A : ad esempio, l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è denso in \mathbb{R}

Chiusura di un insieme

La *chiusura* \overline{A} di A è l'insieme dei punti non esterni ad A

Insieme denso

Un insieme A si dice *denso* in X se ogni insieme aperto $B \subset X$, $B \neq \emptyset$, contiene almeno un punto di A

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Insieme di Julia \mathcal{J}_f

Proprietà

- ▶ \mathcal{J}_f è non vuoto, con un'infinità più che numerabile di punti
- ▶ \mathcal{J}_f Gli insiemi di Julia di $f(z)$ e di $f^k(z)$ coincidono per ogni $k = 1, 2, \dots$
- ▶ $f(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f = f^{-1}(\mathcal{J}_f)$ (invarianza di \mathcal{J}_f rispetto a f)
- ▶ Per ogni $z \in \mathcal{J}_f$, l'orbita inversa $\text{Or}^-(z)$ è densa in \mathcal{J}_f
- ▶ Se \mathcal{J}_f ha parte interna non vuota (ossia esiste almeno un punto $z' \in \mathcal{J}_f$ per cui $D(z', \varepsilon) \subset \mathcal{J}_f$ per qualche $\varepsilon > 0$), si ha che $\mathcal{J}_f = \hat{\mathbb{C}}$
- ▶ Posti $z' \in \mathcal{J}_f$, $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{J}^* = \{z \in \mathcal{J}_f : |z - z'| < \varepsilon\}$, esiste un intero n t.c. $f^n(\mathcal{J}^*) = \mathcal{J}_f$
- ▶ Se γ è un ciclo attrattivo con periodo n di f , si ha $A(\gamma) \subset \mathcal{F}_f = \hat{\mathbb{C}} - \mathcal{J}_f$ ed inoltre $\partial A(\gamma) = \mathcal{J}_f$, essendo $A(\gamma)$ dato dall'unione dei bacini d'attrazione di ognuno dei punti fissi $f^k(z_0)$ di $f^n(z)$ ($k = 0 \dots n - 1$)
- ▶ Se f ha più punti fissi attrattivi a, b, c, \dots allora $\mathcal{J}_f = \partial A(a) = \partial A(b) = \partial A(c) = \dots$

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Insieme di Julia \mathcal{J}_f

Punti periodici indifferenti?

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

Finora abbiamo visto che

- ▶ i punti periodici repulsivi ($|\lambda| > 1$) appartengono all'insieme di Julia \mathcal{J}_f
- ▶ i punti periodici attrattivi ($|\lambda| < 1$) appartengono all'insieme di Fatou \mathcal{F}_f

Sia quindi adesso $|\lambda| = 1$, ossia $\lambda = e^{2\pi\alpha i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Esistono due categorie di punti indifferenti

- ▶ **punti razionalmente indifferenti (o parabolici)**, per $\alpha \in \mathbb{Q}$: se z_0 è un punto parabolico di periodo n , $z_0 \in \mathcal{J}_f$; in tal caso $A(\gamma) \neq \emptyset$ e $\gamma \subset \partial A(\gamma)$ essendo $\gamma = \{z_0, f(z_0) \dots f^{n-1}(z_0)\}$
- ▶ **punti irrazionalmente indifferenti**, per $\alpha \notin \mathbb{Q}$: non è sempre possibile decidere se un dato punto irrazionalmente indifferente appartenga o meno a \mathcal{J}_f (problema aperto)
- ▶ Nel caso dei punti irrazionalmente indifferenti si possono avere i **dischi di Siegel**, al cui interno la successione di punti si muove su cerchi concentrici



Insieme di Julia \mathcal{J}_f

Punti periodici indifferenti?

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

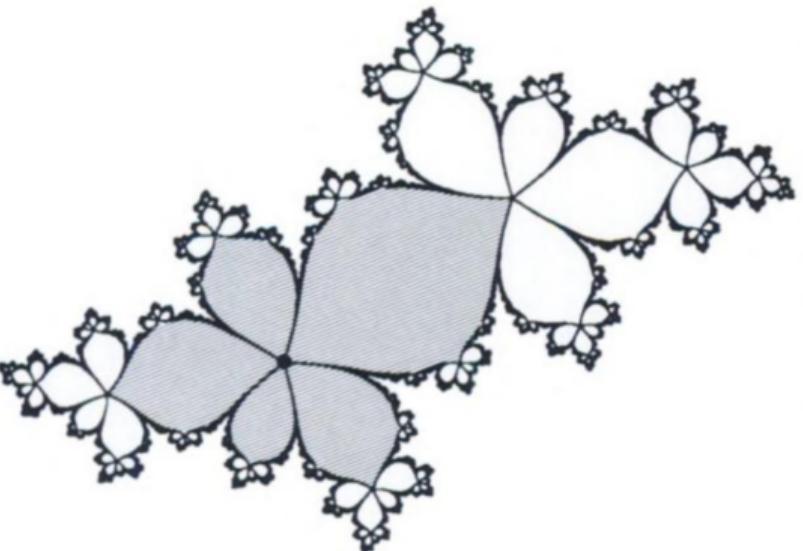
Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Esempio di bacino parabolico attorno ad un punto fisso (per $f(z) = z^2 + c$, con $c = -0.481762 - 0.531657i$)



Insieme di Julia \mathcal{J}_f

Punti periodici indifferenti?

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

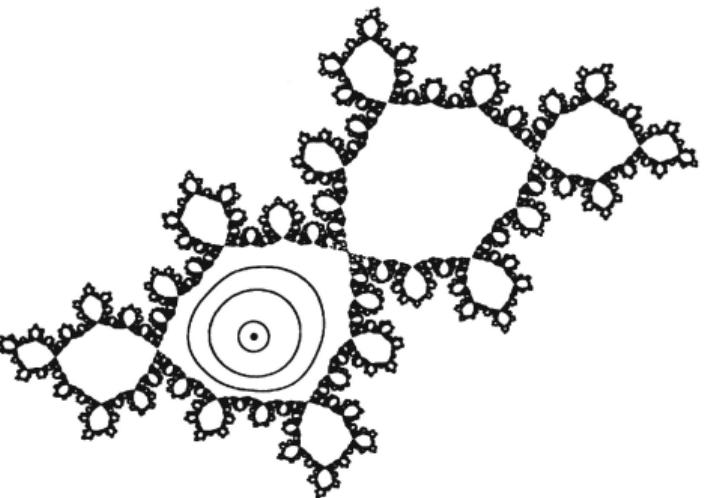
Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Esempio di disco di Seigel



Insieme di Julia \mathcal{J}_f

$$f(z) = z^2 + c$$

Data $f(z) = p(z)/q(z)$, sia $q(z) = 1$ e $p(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2$

Si può dimostrare che tale $f(z)$ è *coniugata* al polinomio $f(z) = z^2 + c$

Mappe coniugate

Due funzioni (altrimenti dette mappe) $f(x)$ e $g(y)$ sono dette *topologicamente coniugate* (o semplicemente *coniugate*) se esiste una funzione $h(\cdot)$ continua ed invertibile tale che $h(f(x)) = g(h(x))$ per ogni x :

$$h \circ f = g \circ h \quad \text{oppure} \quad f = h^{-1} \circ g \circ h$$

Due mappe topologicamente coniugate hanno identiche proprietà topologiche: lo stesso numero di punti fissi e orbite periodiche con gli stessi tipi di stabilità

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Data $f_c(z) = z^2 + c$, si consideri l'insieme di Julia \mathcal{J}_c al variare di $c \in \mathbb{C}$:

- ▶ il punto ∞ è un punto fisso superattrattivo per $f_c(z)$, per cui $\mathcal{J}_c = \partial A(\infty)$
- ▶ \mathcal{J}_c è connesso sse $c \notin A(\infty)$, altrimenti si disperde nella *polvere di Fatou*

Insieme di Mandelbrot

Si definisce l'insieme di Mandelbrot \mathcal{M} come $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}_c \text{ è connesso}\}$
 \mathcal{J}_c connesso sse $0 \notin A(\infty) \Rightarrow \mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_c(0) \neq \infty\}$

Insieme sconnesso

L'insieme A è *sconnesso* se esistono A_1 e A_2 aperti t.c. $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Insieme connesso

Un insieme A non sconnesso è detto *connesso*. Informalmente, per ogni $a, b \in A$, posso sempre trovare un “cammino continuo” di punti di A che collega a e b

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

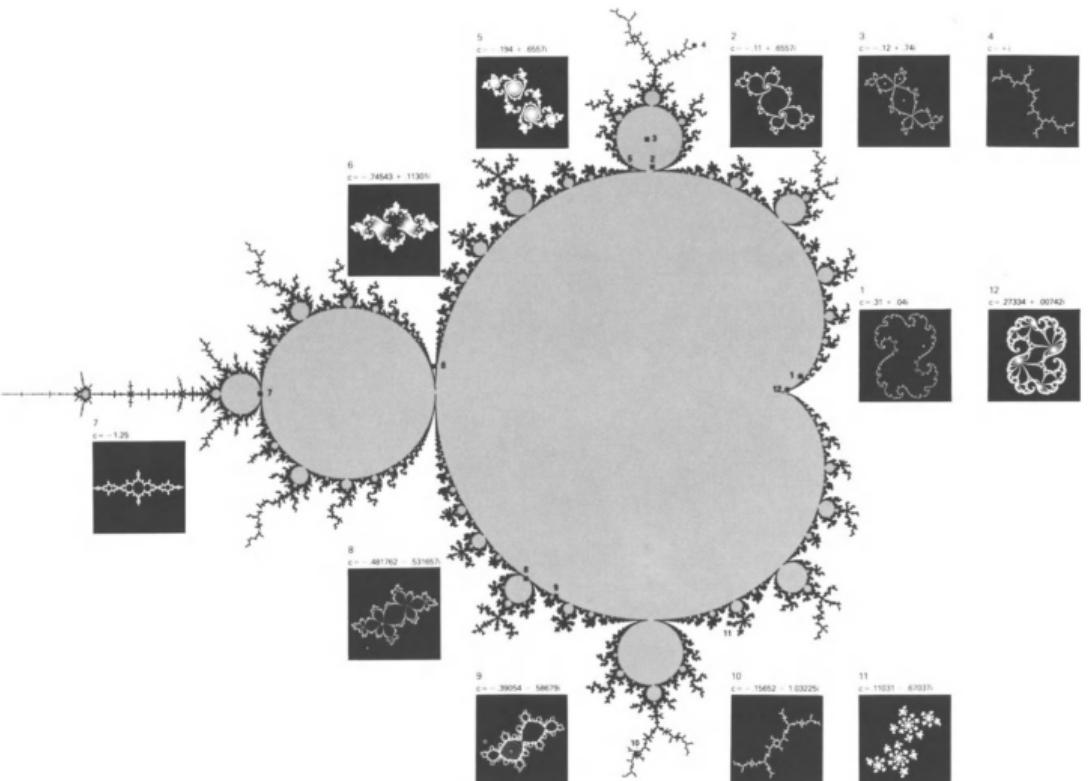
L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



J.F.M.

D. Comanducci



Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

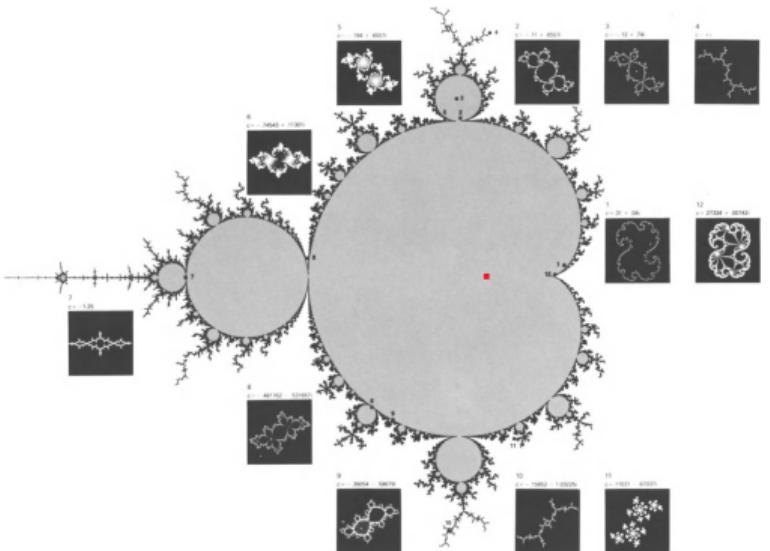
Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



$$c = 0 + 0i$$

$$z_{n+1} = z_n^2 \Rightarrow$$

- ▶ per tutti gli z_0 tali che $|z_0| < 1$, l'origine è un attrattore
- ▶ per $|z_0| > 1$ l'attrattore è ∞
- ▶ i punti per cui $|z_0| = 1$ si mantengono invece sulla circonferenza unitaria che costituisce la frontiera tra i due domini di attrazione

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

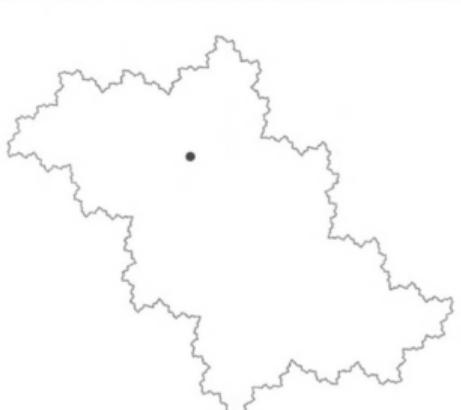
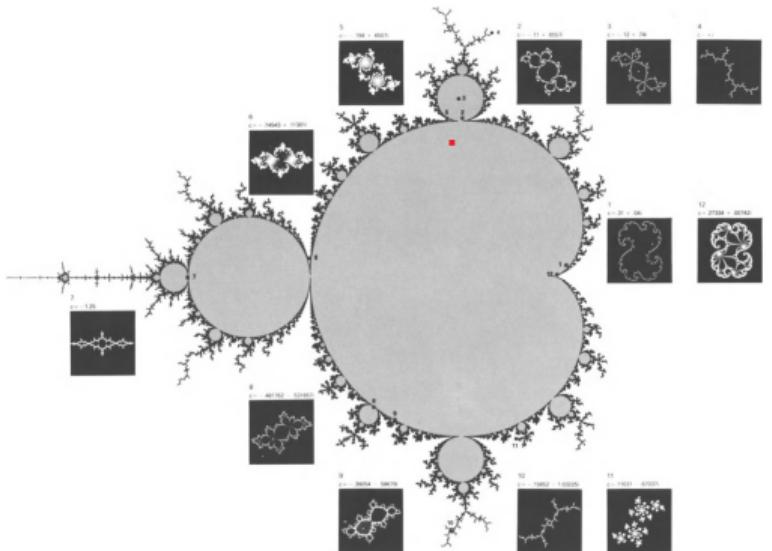
Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



la frontiera di \mathcal{J}_c non è più la circonferenza unitaria e l'attrattore interno non è più l'origine

$$c = -0.12375 + 0.56508i$$

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

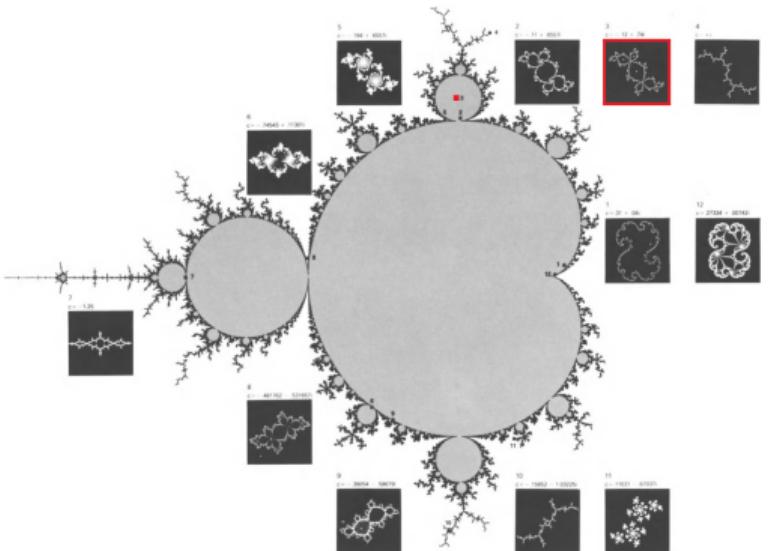
Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

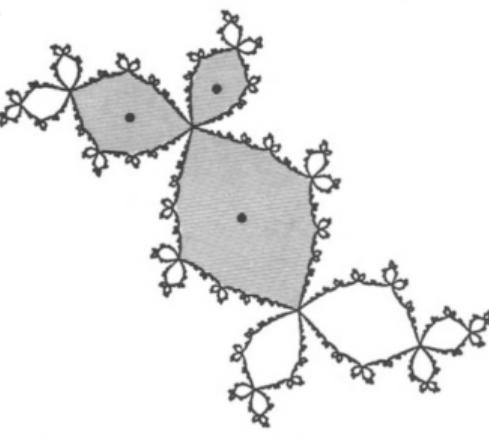


L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



$$c = -0.12 + 0.74i$$



\mathcal{J}_c non è più una sola circonferenza deformata ma ne presenta infinite che tuttavia formano ancora un insieme连通的, ed i punti interni non sono più attratti verso un unico punto fisso ma verso un 3-ciclo; il 3-ciclo è generato dalla "triforazione" di un punto fisso che si ha quando c si sposta dalla parte principale verso la gemma

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

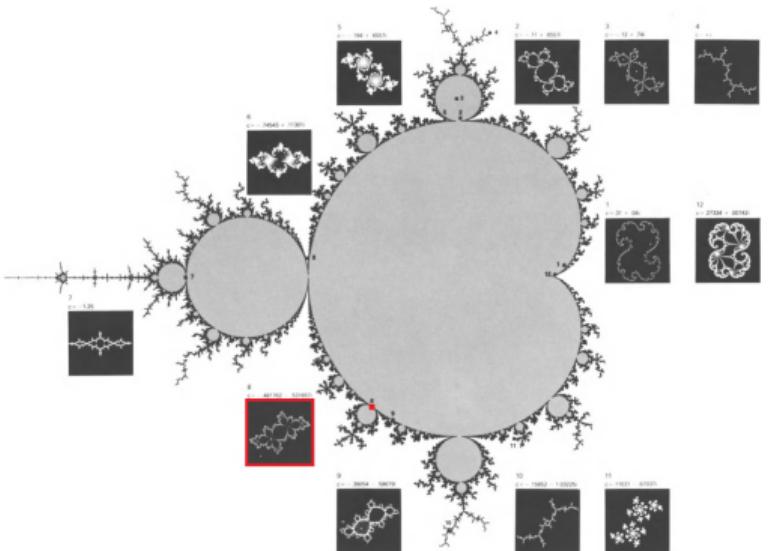
BSM

Dimensione di Hausdorff

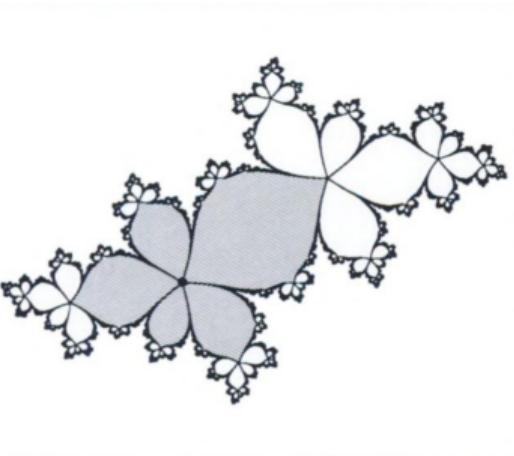
Bibliografia

L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



$$c = -0.481762 - 0.531657i$$



Tipico insieme di Julia corrispondente ad un punto di M in cui una gemma si connette al corpo centrale: in particolare \mathcal{J}_c presenta un 5-ciclo stabile (non appena c penetra nella gemma, i cinque punti di tale ciclo si "aprano" dal punto fisso). In corrispondenza del punto di biforcazione, \mathcal{J}_c raggiunge l'attrattore con dinamica parabolica



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

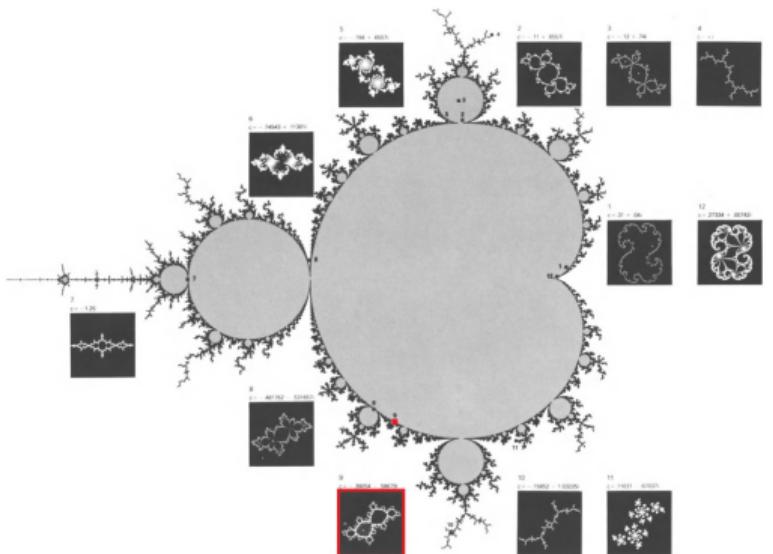
Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

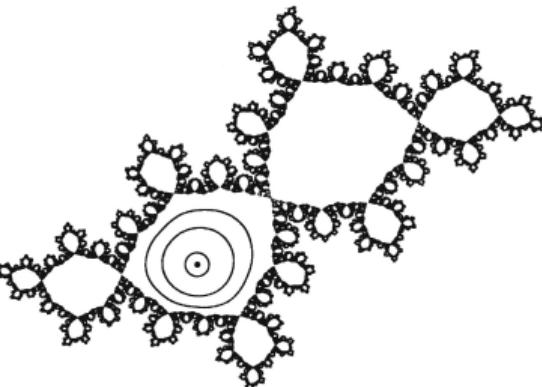
BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



$$c = -0.39054 - 0.58679i$$



Esempio di punto fisso marginalmente stabile non parabolico: la frontiera non si estende fino al punto fisso che non viene raggiunto; i cerchi raffigurati attorno al punto fisso sono invarianti. All'interno della regione racchiusa da \mathcal{J}_c il punto si muove dalle gemme periferiche, più piccole, verso quelle più grandi, fino a mettersi a ruotare sul corrispondente cerchio invariante

L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

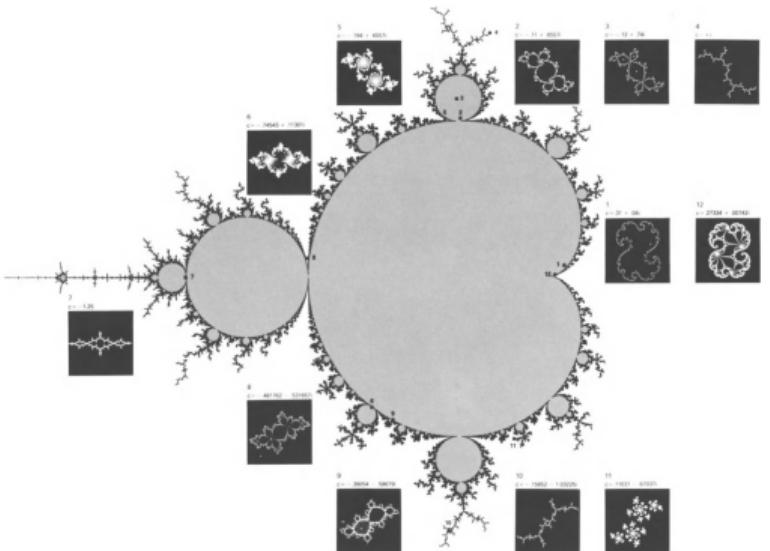
Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



Riassumendo quanto visto finora:

- ▶ se c è interno al corpo centrale di \mathcal{M} , abbiamo per \mathcal{J}_c un cerchio frattale deformato che circonda un unico punto fisso attrattivo;
- ▶ se c è interno ad una gemma, \mathcal{J}_c è costituito da infiniti cerchi frattali deformati che circondano i punti di un attrattore periodico e delle rispettive controimmagini;
- ▶ quando c è un punto di germinazione di una gemma siamo invece nel caso parabolico, con la frontiera che presenta dei viticci che raggiungono l'attrattore, marginalmente stabile;
- ▶ quando c è un qualunque altro punto della cardioide o di una gemma (specificando alcune condizioni sulla sua irrazionalità) abbiamo un disco di Siegel.

L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

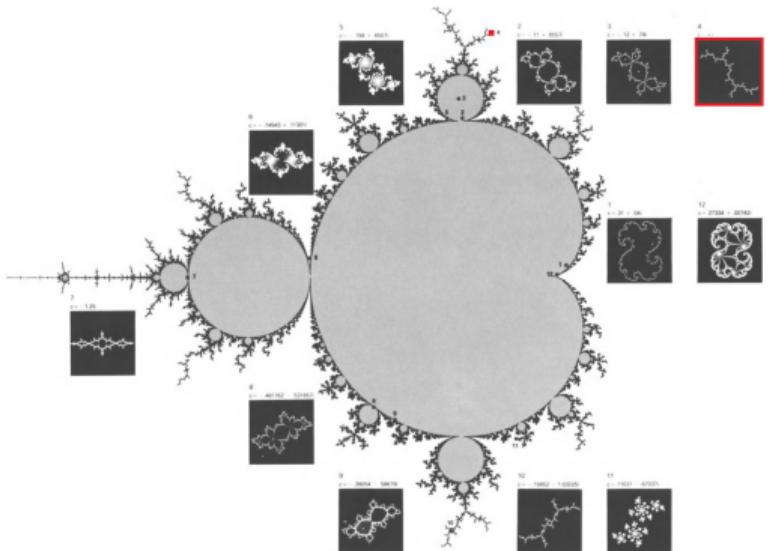
Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

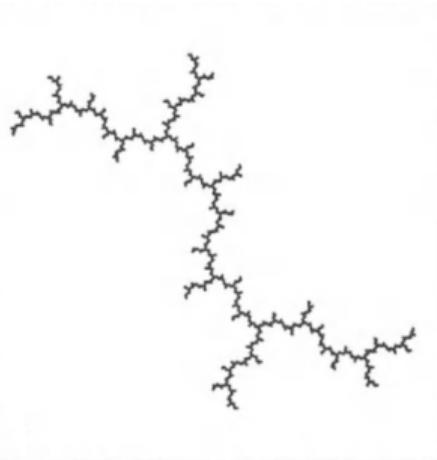
BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia



$c = i$

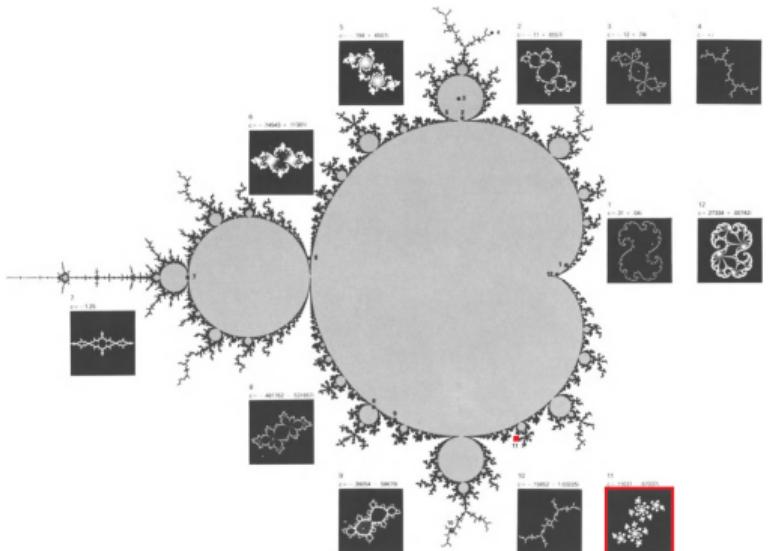


L'insieme di Julia associato ad un qualunque punto di un'antenna ne riproduce approssimativamente la forma; tali dendriti sono privi di parte interna e l'unico attrattore è ∞ . In questi casi l'insieme di Julia è ora la frontiera di un singolo dominio d'attrazione e contiene tutti quei punti che non evolvono verso l'attrattore



L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



$$c = 0.11031 - 0.67037i$$



Infine, scegliendo c esternamente a \mathcal{M} abbiamo un
unico attrattore come nella struttura puramente
dendritica: in tal caso però \mathcal{J}_c si disperde nella
polvere di Fatou

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti
periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer
graphics

Tempo di fuga (naïve)
IIM & MIIM
BSM

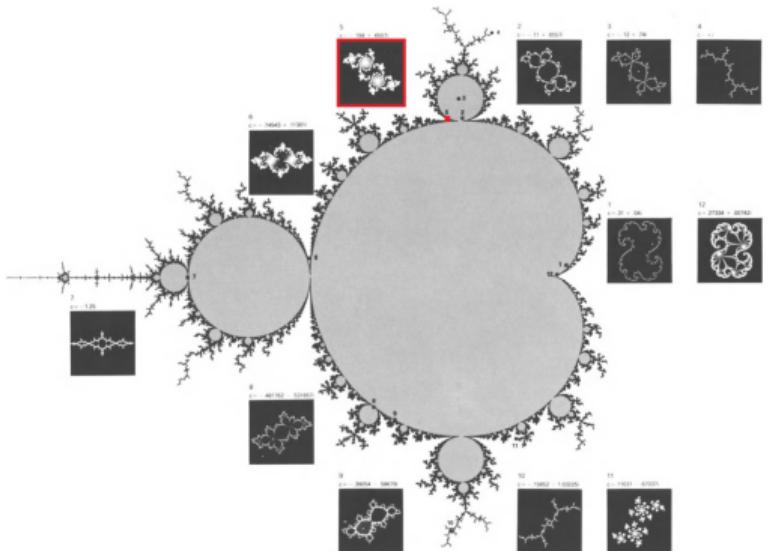
Dimensione di
Hausdorff

Bibliografia



L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



$$c = 0.194 - 0.6557i$$



Infine, scegliendo c esternamente a \mathcal{M} abbiamo un
unico attrattore come nella struttura puramente
dendritica: in tal caso però \mathcal{J}_c si disperde nella
polvere di Fatou

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti
periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer
graphics

Tempo di fuga (naïve)
IIM & MIIM
BSM

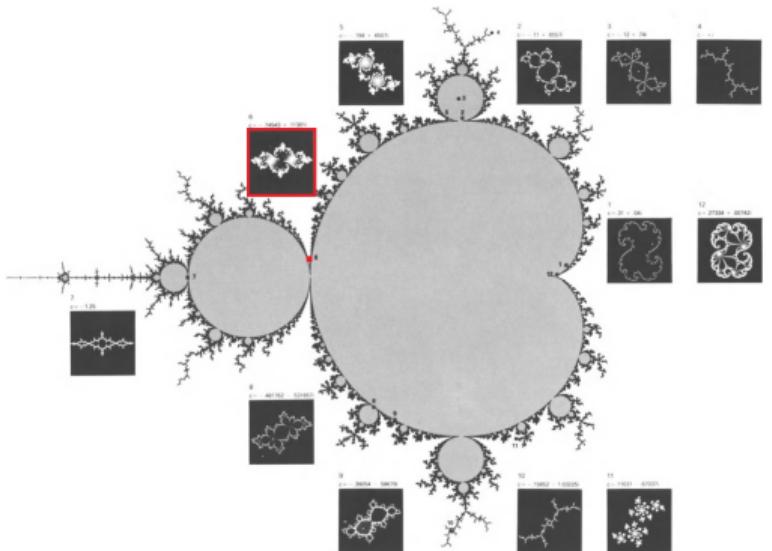
Dimensione di
Hausdorff

Bibliografia

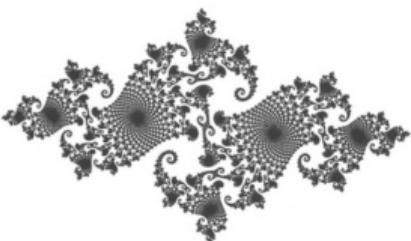


L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

Dizionario per \mathcal{J}_c



$$c = -0.74543 + 0.11301i$$



Infine, scegliendo c esternamente a \mathcal{M} abbiamo un
unico attrattore come nella struttura puramente
dendritica: in tal caso però \mathcal{J}_c si disperde nella
polvere di Fatou

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti
periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer
graphics

Tempo di fuga (naïve)
IIM & MIIM
BSM

Dimensione di
Hausdorff

Bibliografia

L'insieme di Mandelbrot \mathcal{M}

La frontiera di \mathcal{M}



J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

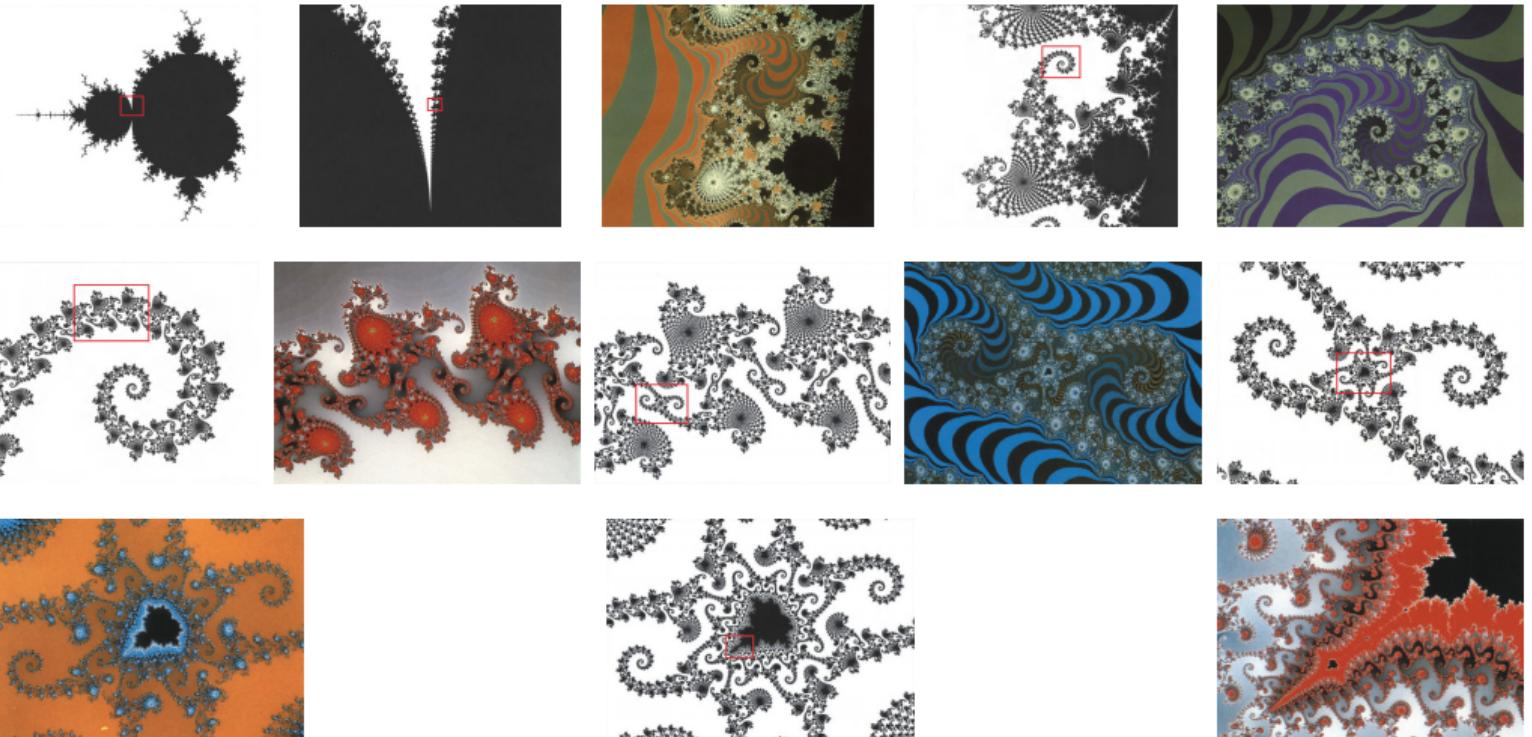
Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia





Dimensione di Hausdorff $h(E)$

Definizione rigorosa

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

Diametro di un insieme

Dato un insieme E in uno spazio metrico (X,d) , $\text{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}$

δ -ricoprimento di un insieme

Dato $\delta \geq 0$, sia $\{U_i\}$ una successione di insiemi; se $E \subset \bigcup_i U_i$ e $\text{diam}(U_i) \in [0, \delta] \quad \forall i$, diciamo che $\{U_i\}$ è un δ -ricoprimento di E

Misura esterna s -dimensionale $\mathcal{H}_s(E)$ di un insieme E

$$\text{Fissato } s \geq 0, \quad \mathcal{H}_s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\delta\text{-ric.}(E)} \left\{ \sum_i (\text{diam } U_i)^s \right\}$$

Misura di Hausdorff

Si dimostra che in corrispondenza di un preciso valore s^* , $\mathcal{H}_s(E)$ passa da infinito a valori finiti al crescere di s : $h(E) = \sup\{s > 0 : \mathcal{H}_s(E) = \infty\}$



Dimensione di Hausdorff $h(E)$

Capacità di un insieme

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia

Capacità di un insieme E

$$c(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} = \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log (\alpha \varepsilon^{-D})}{-\log \varepsilon}}_{\text{Per } N(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^{-D}, \alpha > 0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \alpha - D \log \varepsilon}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D \log \varepsilon}{\log \varepsilon} = D$$

Vale in generale $h(E) \geq c(E)$ (il più delle volte coincidono)

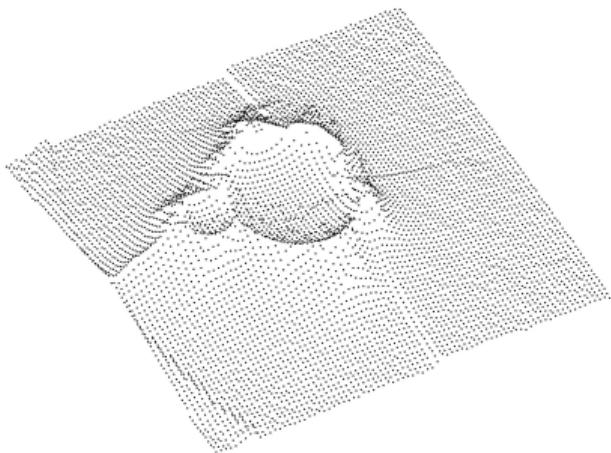


Dimensione di Hausdorff per \mathcal{J}_c

Data $f_c = z^2 + c$, la dimensione di Hausdorff per il corrispondente insieme di Julia \mathcal{J}_c è nota per vari casi di c

- ▶ se c è sulla frontiera di \mathcal{M} , $h(\mathcal{J}_c) = 2$
- ▶ se $|c| < 1/4$, $h(\mathcal{J}_c) \approx 1 + \frac{|c|^2}{4 + \ln 2}$ (più termini in $|c^3|$)
- ▶ se $|c| > (5 + 2\sqrt{6})/4$, $h(\mathcal{J}_c) \approx \frac{2 \ln 2}{|c| \ln 4} 4$

Nei casi non noti, possiamo impiegare gli algoritmi di visualizzazione per stimare $c(\mathcal{J}_c)$ all'aumentare della risoluzione dell'immagine (pixel accesi su aree sempre più piccole di \mathbb{C}), ed avere una stima per $h(\mathcal{J}_c)$



$c(E)$ tramite retta ai minimi quadrati su $(\ln \varepsilon_i^{-1}, \ln N(\varepsilon_i))$ al variare di ε_i



Riferimenti bibliografici

- ▶ H.-O. Peitgen, P. H. Richter, *La bellezza dei frattali – Immagini di sistemi dinamici complessi*. Bollati Boringhieri editore, 1987
- ▶ D. Saupe, *Efficient computation of Julia sets and their fractal dimension*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 28(3):358-370, 1987
- ▶ V. Drakopoulos, *Comparing rendering methods for Julia sets*. In “The 10-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision’2002”, WSCG 2002
- ▶ B. Demir, Y. Özdemir, M. Saltan, *The graph of fractal dimensions of Julia sets*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 70(3):401-409, 2011
- ▶ S. Sutherland, *An Introduction to Julia and Fatou Sets*. Fractals, Wavelets, and their Applications (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics), 2014
- ▶ Y. A. Kuznetsov, *Conjugate maps*. Scholarpedia, 2(12):5420, 2007. rev. #91160 (<http://www.scholarpedia.org/article/Conjugatemaps>).

J.F.M.

D. Comanducci

Introduzione

Orbite e punti periodici

Insiemi di Julia

Mandelbrot

Computer graphics

Tempo di fuga (naïve)

IIM & MIIM

BSM

Dimensione di Hausdorff

Bibliografia