# ALGORITHMS FOR CONSTRAINED AND UNCONSTRAINED OPTIMIZATION PROBLEMS

*Dario Comanducci, 26 marzo 2024*

## Esercizio 1

*Given*

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2xy \quad s.t. \\ &y - x + 1 \leqslant 0 \\ &\quad -y + 2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

*Find all points satisfying KKT conditions for the problem.*

### Svolgimento

Sia $f(x,y)$ che

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= y - x + 1 \\ g_2(x,y) &= -y + 2 \end{aligned}$$

sono funzioni $\mathcal{C}^1$; $g_1(x,y)$ e $g_2(x,y)$ sono inoltre lineari. Notiamo anche che

$$\begin{aligned} \nabla g_1(x,y) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \\ \nabla g_2(x,y) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

sono costanti e linearmente indipendenti per ogni punto. Possiamo quindi provare a determinare i punti di minimo ed i moltiplicatori di Lagrange $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ per i quali valgono le condizioni KKT:

$$\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0 \tag{1a}$$
$$\lambda_1 g_1(x,y) = 0 \tag{1b}$$
$$\lambda_2 g_2(x,y) = 0 \tag{1c}$$
$$\lambda_1 \geqslant 0 \tag{1d}$$
$$\lambda_2 \geqslant 0 \tag{1e}$$
$$g_1(x,y) \leqslant 0 \tag{1f}$$
$$g_2(x,y) \leqslant 0 \tag{1g}$$

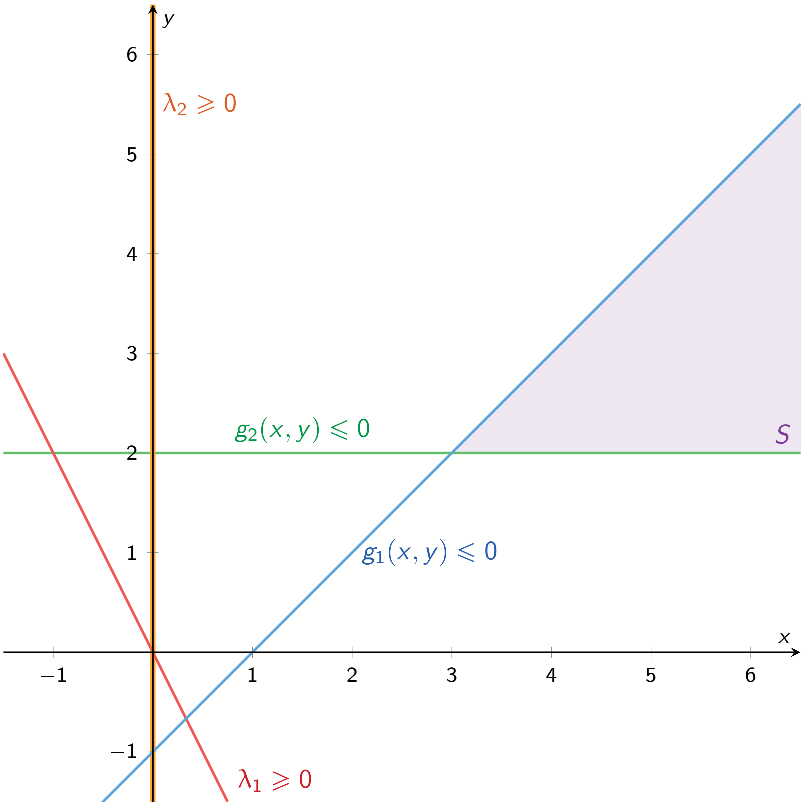


Fig. 1: Insieme ammissibile e vincoli su $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ (per ogni vincolo, la porzione di piano che lo soddisfa è indicata dal lato dove appare l'indicazione per ciascuna retta).

Da Eq. (1a) vogliamo $x, y, \lambda_1, \lambda_2$ t.c.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\nabla f(x,y)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\nabla g_1(x,y)} \lambda_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\nabla g_2(x,y)} \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ossia, risolvendo rispetto a $\lambda_1$, $\lambda_2$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2(2x + y) \\ \lambda_2 = 6x \end{cases} \tag{2}$$

Osservando Fig. 1 si nota che $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (Eq. (1d), (1e)) per ogni punto di $S$[1] (Eq. (1f), (1g)); pertanto le condizioni di complementarietà (Eq. (1b), (1c))

$$\begin{cases} \lambda_1 g_1(x, y) = 0 \\ \lambda_2 g_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

[1] Volendo giustificare tale affermazione formalmente, dobbiamo dimostrare che $(x, y) \in S \Rightarrow \lambda_1 = 2(2x+y) > 0$, $\lambda_2 = 6x > 0$: infatti $(x, y) \in S \Leftrightarrow 2 \leqslant y \leqslant x-1 \Leftrightarrow 2x+2 \leqslant 2x+y \leqslant 2x+x-1 = 3x-1$. Pertanto $(x, y) \in S \Rightarrow 2x + 2 \leqslant 3x - 1 \Leftrightarrow x \geqslant 3$: a sua volta, $x \geqslant 3 \Rightarrow \lambda_2 = 6x \geqslant 18 > 0$; inoltre, $(x, y) \in S, x \geqslant 3 \Rightarrow \lambda_1 = 2(2x + y) \geqslant 2(2x + 2) \geqslant 16 > 0$.

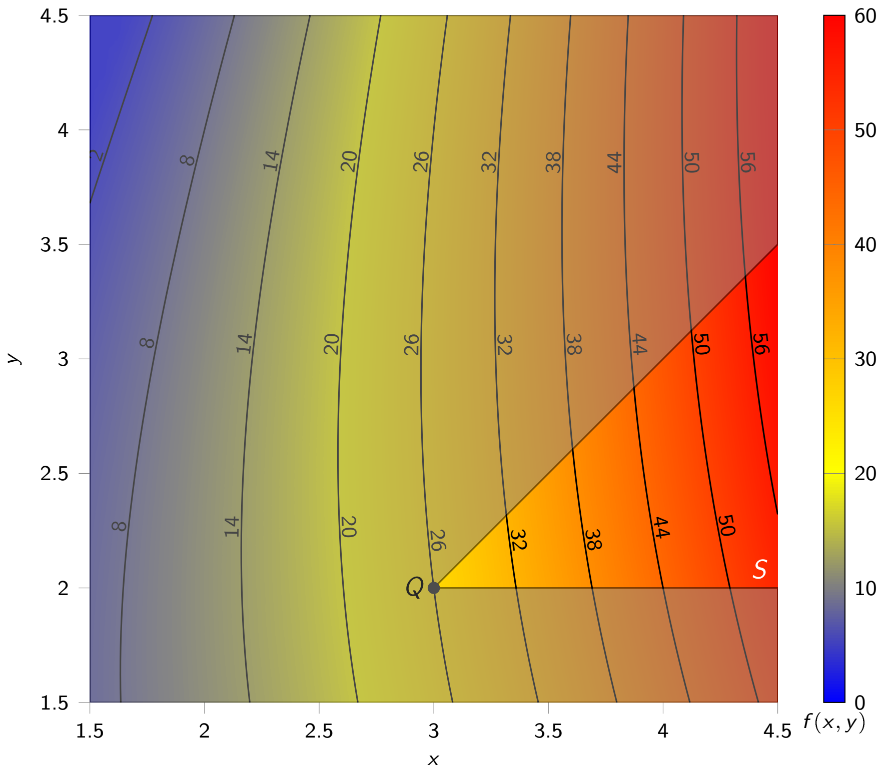


Fig. 2: Andamento per $f(x, y)$, con alcune linee di livello all'interno dell'insieme ammissibile $S$: il punto di ottimo si trova in $Q = (3, 2)$.

sono soddisfatte solo quanto $g_1(x, y) = 0$ e $g_2(x, y) = 0$, ossia per nell'intersezione delle due rette $y = x - 1$ (da $g_1(x, y) = 0$) e $y = 2$ (da $g_2(x, y) = 0$): il punto $Q = (3, 2)$, in corrispondenza del quale da Eq. (2) abbiamo $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 18$.

A riprova che $Q$ è il punto di ottimo per il problema dato, in Fig. 2 visualizziamo $Q$ rispetto alle curve di livello per $f(x, y)$.

## Esercizio 2

*Given*

$$\min_{x,y} \frac{1}{2}(x - y)^2$$

*Find a descent direction at point* $(1, -1)$*. Then, check if the Armijo condition is satisfied along that direction, with* $c_1 = 1/8$ *by a stepsize* $\alpha = 0.5$*.*

### Svolgimento

Poiché i criteri più semplici per determinare le direzioni di discesa si basano sul criterio del gradiente e sul metodo di Newton valutiamo

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} x - y \\ y - x \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo tuttavia che in questo caso la matrice Hessiana non è invertibile, per cui ci limiteremo ad analizzare la direzione $\mathbf{d}$ basata sul gradiente nel punto $\mathbf{p} = [1\ \ -1]^\top$:

$$\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{p}) = -\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per verificare se la condizione di Armijo è soddisfatta per $c_1 = 1/8, \alpha = 0.5$ occorre valutare se

$$f(\mathbf{p}+\alpha\mathbf{d}) = f\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{d}\right) = 0 \leqslant f(\mathbf{p})+c_1\alpha\,\mathbf{d}^\top\nabla f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})+\frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\,\mathbf{d}^\top\nabla f(\mathbf{p}) = \frac{3}{2}$$

La condizione di Armijo è soddisfatta in quanto

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) &= f(1,-1) = 2 \\ f(\mathbf{p}+\mathbf{d}/2) &= f(0,0) = 0 \\ \mathbf{d}^\top\nabla f(\mathbf{p}) &= -\|\nabla f(\mathbf{p})\|^2 = -8 \end{aligned}$$