



Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Immagini a super-risoluzione con approccio bayesiano

Dario Comanducci

Tesina per il Corso di Probabilità e Processi Stocastici

Master in Data Science and Statistical Learning
Università degli Studi di Firenze

22 Aprile 2024



Introduzione

Super-risoluzione

Date più foto di una stessa scena, stimare un'immagine della scena con una risoluzione più elevata delle immagini a disposizione

Riferimenti

- ▶ D. P. Capel and A. Zisserman. *Computer vision applied to super-resolution*. IEEE Signal Processing Magazine, 20(3):75–86, 2003
- ▶ D. P. Capel. *Image Mosaicing and Super-resolution*. PhD thesis, University of Oxford, 2001.

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

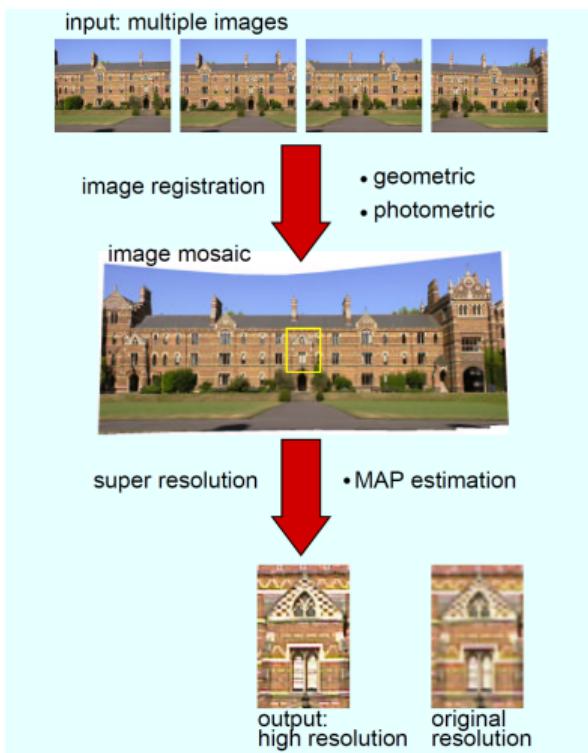
Esempi

Pipeline di elaborazione



Fasi principali

- ▶ Allineamento delle immagini
- ▶ Creazione di un mosaico
- ▶ Super-risoluzione su una porzione del mosaico



Super-risoluzione bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-risoluzione

MLE

Modello probabilistico

Esempi

MAP

Modello probabilistico

Esempi



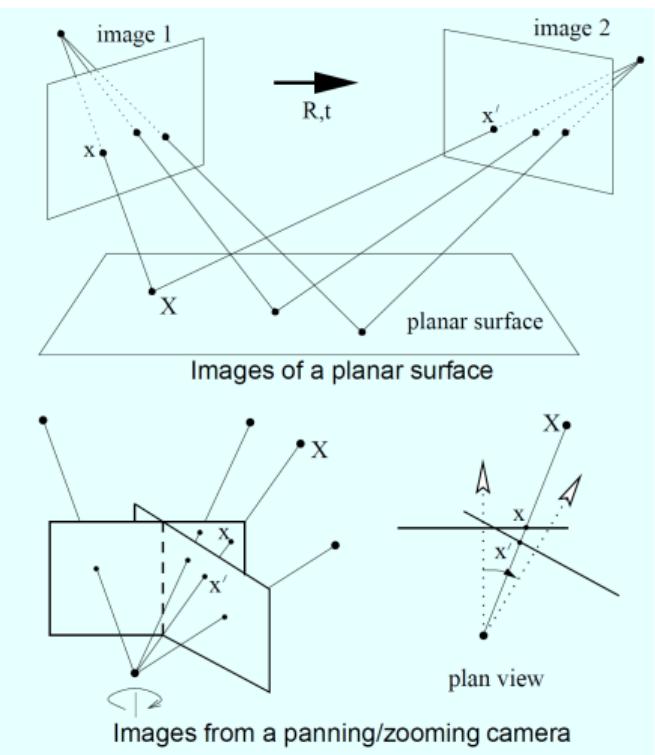
Allineamento delle immagini e mosaico

Omografie planari

$$x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$
$$y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$

Casi d'impiego

- ▶ scena planare vista con un moto arbitrario della telecamera
- ▶ scena 3D arbitraria vista ruotando il piano immagine della telecamera e/o applicando uno zoom.



Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

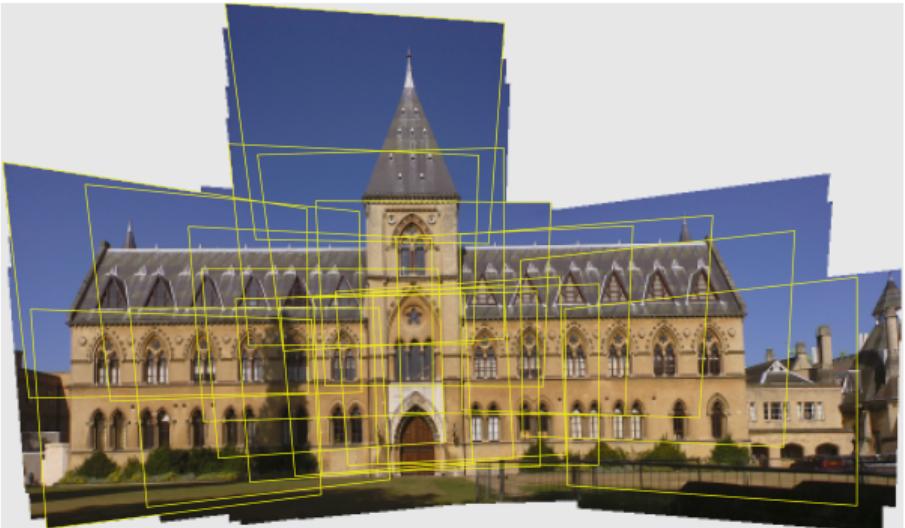
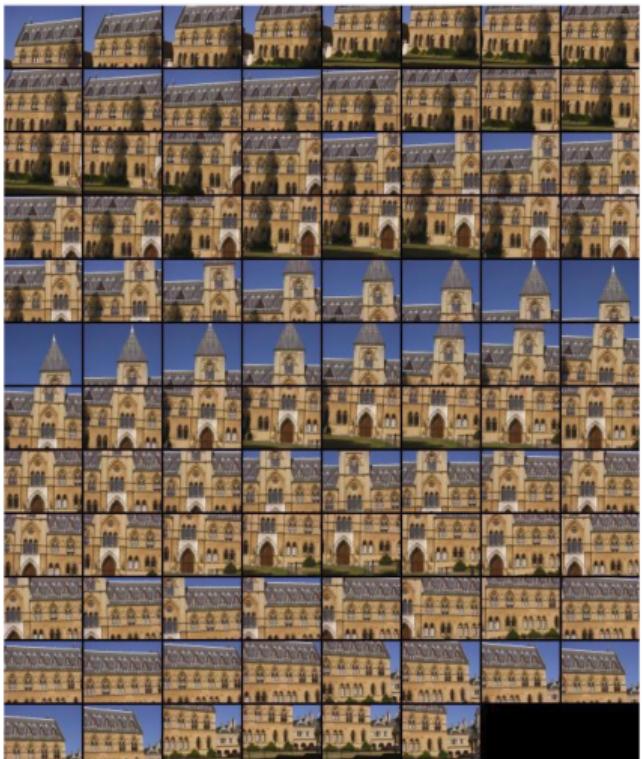
Modello
probabilistico
Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Allineamento delle immagini e mosaico

Composizione del mosaico



Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi



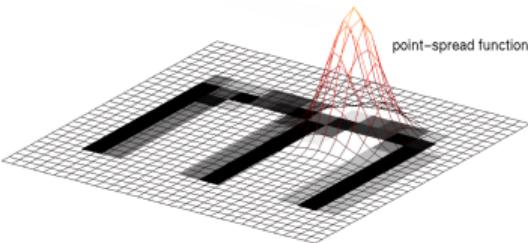
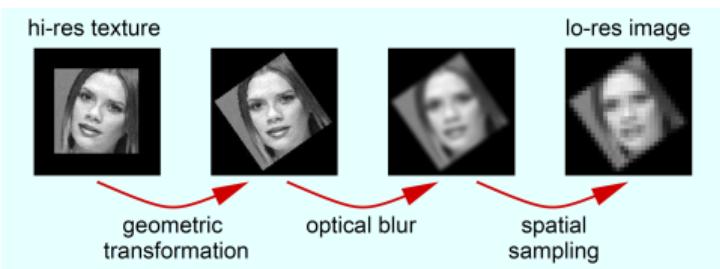
Super-risoluzione

Modello generativo (in scala di grigi)

$$g(x, y) = d \downarrow \underbrace{(k(\cdot) * f(T(x, y)))}_{\text{convoluzione}} + \epsilon(x, y)$$

essendo

- ▶ f l'immagine ad alta risoluzione
- ▶ g l'immagine osservata a bassa risoluzione
- ▶ T la trasformazione geometrica che porta le coordinate dei pixel di g su f
- ▶ $k(\cdot)$ la funzione di diffusione (PSF)
- ▶ $d \downarrow$ l'operatore di sotto-campionamento
- ▶ ϵ il rumore in ciascun pixel



Super-risoluzione bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-risoluzione

MLE

Modello probabilistico

Esempi

MAP

Modello probabilistico

Esempi



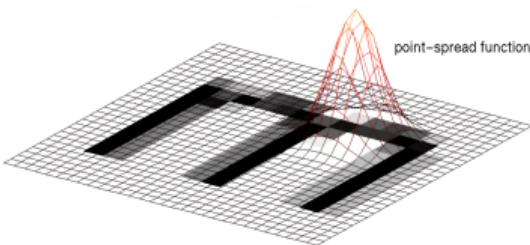
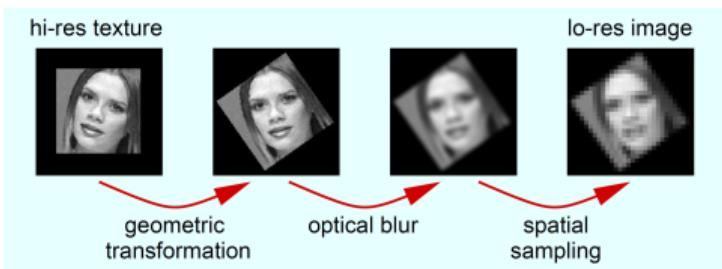
Super-risoluzione

Modello generativo (in scala di grigi)

$$g(x, y) = d \downarrow \underbrace{(k(\cdot) * f(T(x, y)))}_{\text{convoluzione}} + \epsilon(x, y)$$

essendo

- ▶ f l'immagine ad alta risoluzione
- ▶ g l'immagine osservata a bassa risoluzione
- ▶ T la trasformazione geometrica che porta le coordinate dei pixel di g su f
- ▶ $k(\cdot)$ la funzione di diffusione (PSF)
- ▶ $d \downarrow$ l'operatore di sotto-campionamento
- ▶ ϵ il rumore in ciascun pixel



$$\mathbf{g}_n = \mathbf{M}_n \mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}$$

\mathbf{g}, \mathbf{f} : riordino per colonne dei pixel a bassa e alta risoluzione

Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Modello probabilistico



$$\epsilon(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}, \quad \hat{\mathbf{g}}_n = \mathbb{M}_n \hat{\mathbf{f}} \quad \Rightarrow \quad g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \quad \forall (x, y)$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Modello probabilistico



$$\epsilon(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}, \quad \hat{\mathbf{g}}_n = \mathbb{M}_n \hat{\mathbf{f}} \quad \Rightarrow \quad g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \quad \forall (x, y)$$

$$p(g_n(x, y) | \hat{\mathbf{f}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{Likelihood per un pixel})$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi



Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Modello probabilistico

$$\epsilon(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d., } \hat{\mathbf{g}}_n = \mathbb{M}_n \hat{\mathbf{f}} \quad \Rightarrow \quad g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \quad \forall (x, y)$$

$$p(g_n(x, y) | \hat{\mathbf{f}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{Likelihood per un pixel})$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{g}_n | \hat{\mathbf{f}}] = \prod_{(x,y)} p(g_n(x, y) | \hat{\mathbf{f}}) = L_n \quad (\text{Likelihood per una singola immagine } \mathbf{g}_n)$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi



Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Modello probabilistico

$$\epsilon(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d., } \hat{\mathbf{g}}_n = \mathbb{M}_n \hat{\mathbf{f}} \quad \Rightarrow \quad g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \quad \forall (x, y)$$

$$p(g_n(x, y) | \hat{\mathbf{f}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{Likelihood per un pixel})$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{g}_n | \hat{\mathbf{f}}] = \prod_{(x,y)} p(g_n(x, y) | \hat{\mathbf{f}}) = L_n \quad (\text{Likelihood per una singola immagine } \mathbf{g}_n)$$

$$L = \prod_{n=1}^N L_n \quad (\text{Likelihood per il dataset } \{\mathbf{g}_n : n = 1 \dots N\})$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi



Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Modello probabilistico

$$\epsilon(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \text{ i.i.d., } \hat{\mathbf{g}}_n = \mathbf{M}_n \hat{\mathbf{f}} \Rightarrow g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y) \sim N(0, \sigma^2) \quad \forall (x, y)$$

$$p(g_n(x, y) | \hat{\mathbf{f}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{Likelihood per un pixel})$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{g}_n | \hat{\mathbf{f}}] = \prod_{(x, y)} p(g_n(x, y) | \hat{\mathbf{f}}) = L_n \quad (\text{Likelihood per una singola immagine } \mathbf{g}_n)$$

$$L = \prod_{n=1}^N L_n \quad (\text{Likelihood per il dataset } \{\mathbf{g}_n : n = 1 \dots N\})$$

$$\ln L = \sum_{n=1}^N \ln L_n = \sum_{n=1}^N \alpha_n - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \underbrace{\|\mathbf{g}_n - \mathbf{M}_n \hat{\mathbf{f}}\|_2^2}_{\alpha_n} \quad \text{essendo}$$

$$\ln L_n = \sum_{(x, y)} \ln p(g_n(x, y) | \hat{\mathbf{f}}) = \overbrace{\sum_{(x, y)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)}^{\|\mathbf{g}_n - \mathbf{M}_n \hat{\mathbf{f}}\|_2^2} - \frac{1}{2\sigma^2} \overbrace{\sum_{(x, y)} (g_n(x, y) - \hat{g}_n(x, y))^2}^{\|\mathbf{g}_n - \mathbf{M}_n \hat{\mathbf{f}}\|_2^2}$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Modello probabilistico



$$\mathbf{f}_{\text{MLE}} = \arg \max L \equiv \arg \min(-\ln L) \equiv \arg \min_{\hat{\mathbf{f}}} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{g}_n - \mathbf{M}_n \hat{\mathbf{f}}\|_2^2$$

$$= \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}_{\text{MLE}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{g}$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Modello probabilistico



$$\mathbf{f}_{\text{MLE}} = \arg \max L \equiv \arg \min(-\ln L) \equiv \arg \min_{\hat{\mathbf{f}}} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{g}_n - \mathbf{M}_n \hat{\mathbf{f}}\|_2^2$$

$$= \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}_{\text{MLE}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{g}$$

\mathbf{M} enorme matrice molto sparsa \Rightarrow soluzione tramite metodi iterativi

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Dataset “Library”



Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

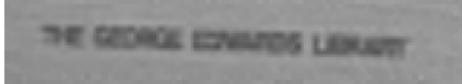
MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Dataset "Library"



Low-Res. interpolazione bicubica 2 \times



Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

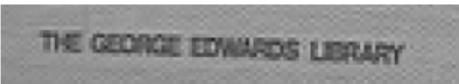
Dataset "Library"



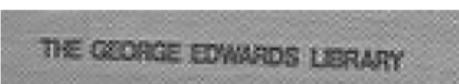
Low-Res. interpolazione bicubica 2×



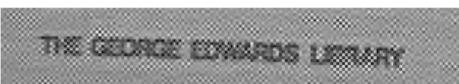
MLE 1.25×



MLE 1.5×



MLE 1.75×



MLE 2×

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

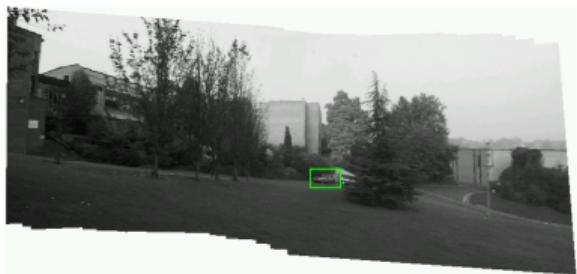
MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Verosimiglianza (MLE)

Dataset "Car"



Low-Res. bic. 2×



MLE 1.25×



MLE 1.5×



MLE 1.75×



MLE 2×

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Modello probabilistico



- ▶ prior $\mathbb{P}[\mathbf{f}]$ nota

- ▶ Regola di Bayes: $\mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}] = \frac{\mathbb{P}[\mathbf{g}|\mathbf{f}] \mathbb{P}[\mathbf{f}]}{\mathbb{P}[\mathbf{g}]}$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Modello probabilistico



- ▶ prior $\mathbb{P}[\mathbf{f}]$ nota

- ▶ Regola di Bayes: $\mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}] = \frac{\mathbb{P}[\mathbf{g}|\mathbf{f}] \mathbb{P}[\mathbf{f}]}{\mathbb{P}[\mathbf{g}]}$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}] \equiv \arg \min_{\mathbf{f}} (-\ln \mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}])$$

$$\ln \mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}] = \ln \mathbb{P}[\mathbf{f}] + \ln \mathbb{P}[\mathbf{g}|\mathbf{f}] - \ln \mathbb{P}[\mathbf{g}] = \ln \mathbb{P}[\mathbf{f}] - \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \underbrace{\sum_n \alpha_n}_{\text{indipendente da } \mathbf{f}} - \ln \mathbb{P}[\mathbf{g}]$$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} \equiv \arg \min_{\mathbf{f}} \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 - \ln \mathbb{P}[\mathbf{f}] \equiv \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 - \underbrace{(2\sigma^2)}_{\lambda > 0} \ln \mathbb{P}[\mathbf{f}]$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico
Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Modello probabilistico



- ▶ prior $\mathbb{P}[\mathbf{f}]$ nota

- ▶ Regola di Bayes: $\mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}] = \frac{\mathbb{P}[\mathbf{g}|\mathbf{f}] \mathbb{P}[\mathbf{f}]}{\mathbb{P}[\mathbf{g}]}$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}] \equiv \arg \min_{\mathbf{f}} (-\ln \mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}])$$

$$\ln \mathbb{P}[\mathbf{f}|\mathbf{g}] = \ln \mathbb{P}[\mathbf{f}] + \ln \mathbb{P}[\mathbf{g}|\mathbf{f}] - \ln \mathbb{P}[\mathbf{g}] = \ln \mathbb{P}[\mathbf{f}] - \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \underbrace{\sum_n \alpha_n}_{\text{indipendente da } \mathbf{f}} - \ln \mathbb{P}[\mathbf{g}]$$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} \equiv \arg \min_{\mathbf{f}} \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 - \ln \mathbb{P}[\mathbf{f}] \equiv \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 - \underbrace{(2\sigma^2)}_{\lambda > 0} \ln \mathbb{P}[\mathbf{f}]$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{f}] = \frac{1}{Z} \exp(-\mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f}) \Rightarrow \mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f} + \lambda \ln Z$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico
Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Gaussian Markov Random Fields)



$$\mathbb{P}[\mathbf{f}] \propto \exp(-\mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f})$$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{\text{MAP}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M} + \lambda \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{g} \quad (\text{ma sol. iter.})$$

- ▶ $\mathbf{Q} = \mathbb{I}$
- ▶ $\mathbf{Q} = \mathbf{L}^\top \mathbf{L}$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi



Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Gaussian Markov Random Fields)

$$\mathbb{P}[\mathbf{f}] \propto \exp(-\mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f})$$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{\text{MAP}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M} + \lambda \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{g} \quad (\text{ma sol. iter.})$$

► $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ $\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{f} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_2^2$

► $\mathbf{Q} = \mathbf{L}^\top \mathbf{L}$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Gaussian Markov Random Fields)



$$\mathbb{P}[\mathbf{f}] \propto \exp(-\mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f})$$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{\text{MAP}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M} + \lambda \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{g} \quad (\text{ma sol. iter.})$$

- ▶ $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ $\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{f} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_2^2$
- ▶ $\mathbf{Q} = \mathbf{L}^\top \mathbf{L}$ $\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{L}\mathbf{f} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{L}\mathbf{f}\|_2^2$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Gaussian Markov Random Fields)



$$\mathbb{P}[\mathbf{f}] \propto \exp(-\mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f})$$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{\text{MAP}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M} + \lambda \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{g} \quad (\text{ma sol. iter.})$$

► $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ $\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{f} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_2^2$

► $\mathbf{Q} = \mathbf{L}^\top \mathbf{L}$ $\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{L}\mathbf{f} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{L}\mathbf{f}\|_2^2$

$$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{4m \times m} \text{ t.c. } \forall f(x, y)$$

$$d_{(1,0)}(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y)$$

$$d_{(0,1)}(x, y) = f(x, y+1) - f(x, y)$$

$$d_{(1,1)}(x, y) = (f(x+1, y+1) - f(x, y)) / \sqrt{2}$$

$$d_{(1,-1)}(x, y) = (f(x+1, y-1) - f(x, y)) / \sqrt{2}$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico
Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Gaussian Markov Random Fields)



$$\mathbb{P}[\mathbf{f}] \propto \exp(-\mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f})$$

$$\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{Q} \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{\text{MAP}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M} + \lambda \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{g} \quad (\text{ma sol. iter.})$$

► $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ $\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{f} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_2^2$

► $\mathbf{Q} = \mathbf{L}^\top \mathbf{L}$ $\mathbf{f}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \mathbf{f}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{L}\mathbf{f} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{L}\mathbf{f}\|_2^2$

$$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{4m \times m} \text{ t.c. } \forall f(x, y)$$

$$d_{(1,0)}(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y)$$

$$d_{(0,1)}(x, y) = f(x, y+1) - f(x, y)$$

$$d_{(1,1)}(x, y) = (f(x+1, y+1) - f(x, y)) / \sqrt{2}$$

$$d_{(1,-1)}(x, y) = (f(x+1, y-1) - f(x, y)) / \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{L}\mathbf{f}\|_2^2 = \sum_{(x,y)} \left(d_{(1,0)}^2(x, y) + d_{(0,1)}^2(x, y) + d_{(1,1)}^2(x, y) + d_{(1,-1)}^2(x, y) \right)$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico
Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Huber Markov Random Fields)



- ▶ Le funzioni *subquadratiche* consentono di penalizzare meno le derivate elevate rispetto a d^2
- ▶ La funzione di Huber

$$\rho(d) = \begin{cases} d^2 & \text{per } |d| < \alpha \\ 2\alpha|d| - \alpha^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Super-risoluzione bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-risoluzione

MLE

Modello probabilistico

Esempi

MAP

Modello probabilistico

Esempi

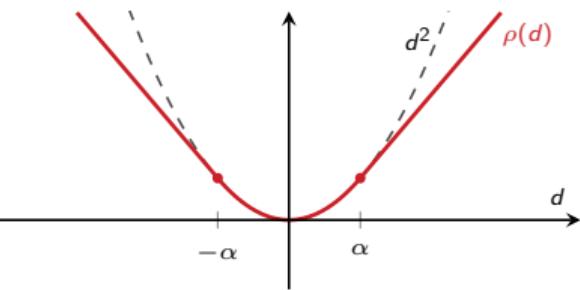


Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Huber Markov Random Fields)

- ▶ Le funzioni *subquadratiche* consentono di penalizzare meno le derivate elevate rispetto a d^2
- ▶ La funzione di Huber

$$\rho(d) = \begin{cases} d^2 & \text{per } |d| < \alpha \\ 2\alpha|d| - \alpha^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

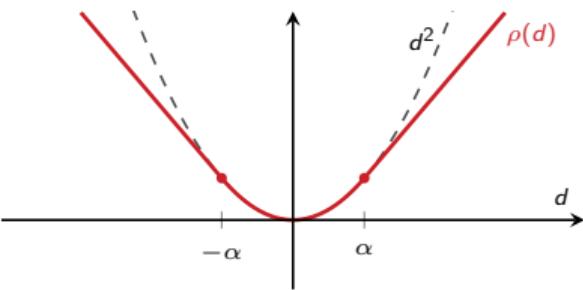


Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Huber Markov Random Fields)

- ▶ Le funzioni *subquadratiche* consentono di penalizzare meno le derivate elevate rispetto a d^2
- ▶ La funzione di Huber

$$\rho(d) = \begin{cases} d^2 & \text{per } |d| < \alpha \\ 2\alpha|d| - \alpha^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\|\mathbf{L}\mathbf{f}\|_2^2 = \sum_{(x,y)} \left(d_{(1,0)}^2(x,y) + d_{(0,1)}^2(x,y) + d_{(1,1)}^2(x,y) + d_{(1,-1)}^2(x,y) \right)$$

↓

$$\|\rho(\mathbf{L}\mathbf{f})\|_1 = \sum_{(x,y)} \left(\rho(d_{(1,0)}(x,y)) + \rho(d_{(0,1)}(x,y)) + \rho(d_{(1,1)}(x,y)) + \rho(d_{(1,-1)}(x,y)) \right)$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

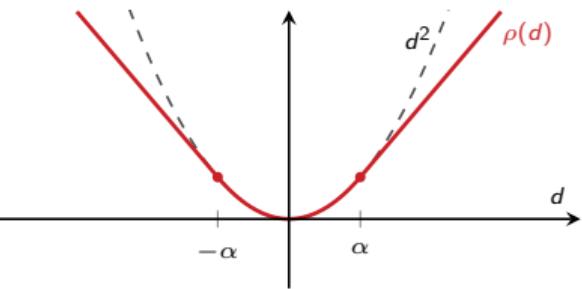


Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Huber Markov Random Fields)

- ▶ Le funzioni *subquadratiche* consentono di penalizzare meno le derivate elevate rispetto a d^2
- ▶ La funzione di Huber

$$\rho(d) = \begin{cases} d^2 & \text{per } |d| < \alpha \\ 2\alpha|d| - \alpha^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\|\rho(\mathbf{Lf})\|_1 = \sum_{(x,y)} \left(\rho(d_{(1,0)}(x,y)) + \rho(d_{(0,1)}(x,y)) + \rho(d_{(1,1)}(x,y)) + \rho(d_{(1,-1)}(x,y)) \right)$$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

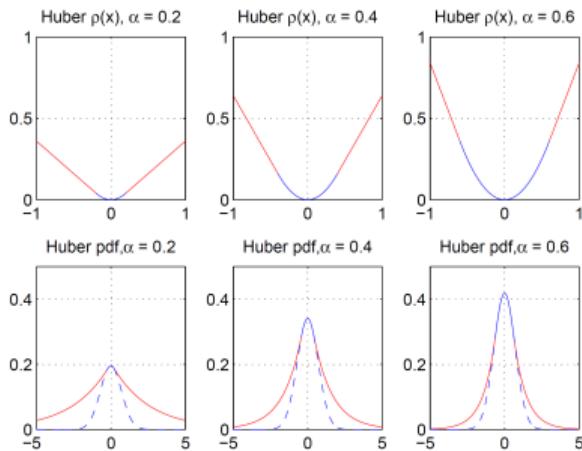


Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Prior d'interesse (Huber Markov Random Fields)

- Le funzioni *subquadratiche* consentono di penalizzare meno le derivate elevate rispetto a d^2
- La funzione di Huber

$$\rho(d) = \begin{cases} d^2 & \text{per } |d| < \alpha \\ 2\alpha|d| - \alpha^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\|\rho(\mathbf{L}\mathbf{f})\|_1 = \sum_{(x,y)} (\rho(d_{(1,0)}(x,y)) + \rho(d_{(0,1)}(x,y)) + \rho(d_{(1,1)}(x,y)) + \rho(d_{(1,-1)}(x,y)))$$

$$p(f(x,y)) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\rho(d_{(1,0)}(x,y)) - \rho(d_{(0,1)}(x,y)) - \rho(d_{(1,1)}(x,y)) - \rho(d_{(1,-1)}(x,y)) \right)$$

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Dataset Library/Car



THE GEORGE EDWARDS LIBRARY

MLE 1.5×

THE GEORGE EDWARDS LIBRARY

MLE 2.0×

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Dataset Library/Car



THE GEORGE EDWARDS LIBRARY

MLE 1.5×

THE GEORGE EDWARDS LIBRARY

MLE 2.0×

THE GEORGE EDWARDS LIBRARY

MAP 3.0 × $\|f\|_2^2$

THE GEORGE EDWARDS LIBRARY

MAP 3.0 × $\|Lf\|_2^2$

THE GEORGE EDWARDS LIBRARY

MAP 3.0 × $\|\rho(Lf)\|_1$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico
Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Dataset Library/Car



Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

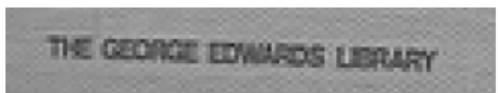
Super-
risoluzione

MLE

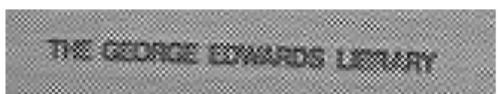
Modello
probabilistico
Esempi

MAP

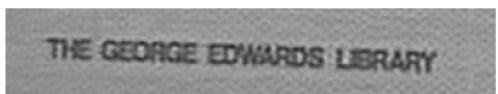
Modello
probabilistico
Esempi



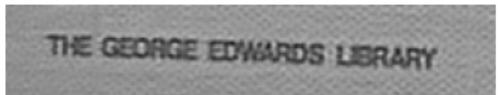
MLE 1.5×



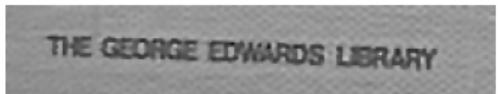
MLE 2.0×



MAP 3.0× $\|f\|_2^2$



MAP 3.0× $\|Lf\|_2^2$



MAP 3.0× $\|\rho(Lf)\|_1$



MLE 1.5×



MLE 2.0×



MAP 3.0× $\|f\|_2^2$



MAP 3.0× $\|Lf\|_2^2$



MAP 3.0× $\|\rho(Lf)\|_1$

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Dataset CMP (Center for Machine Perception, Univ. Praga)



Low-Res. bic. 3.0×



MLE 1.25 ×



MAP 3.0 × $\|f\|_2^2$



MAP 3.0 × $\|\mathbf{L}f\|_2^2$



MAP 3.0 × $\|\rho(\mathbf{L}f)\|_1$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

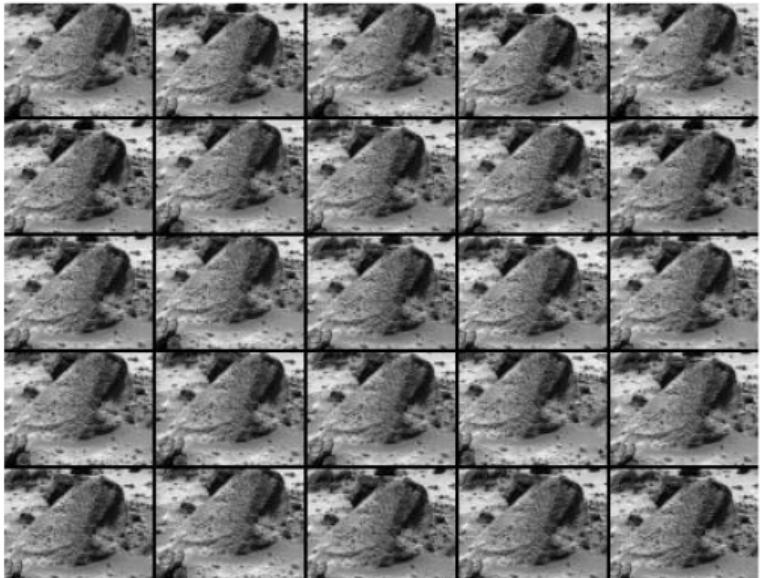
Modello
probabilistico
Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Stimatore a Massima Posteriori (MAP)

Dataset Nasa Mars Pathfinder



MLE 1.5×



MAP 3.0 × $\|Lf\|_2^2$

Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico
Esempi

MAP

Modello
probabilistico
Esempi

Grazie!



Super-
risoluzione
bayesiana

D. Comanducci

Sommario

Mosaico

Super-
risoluzione

MLE

Modello
probabilistico

Esempi

MAP

Modello
probabilistico

Esempi