# Financial Risk Management

Sonia Buffa, Dario Comanducci, Tommaso Letterio, Samuele Miglietta

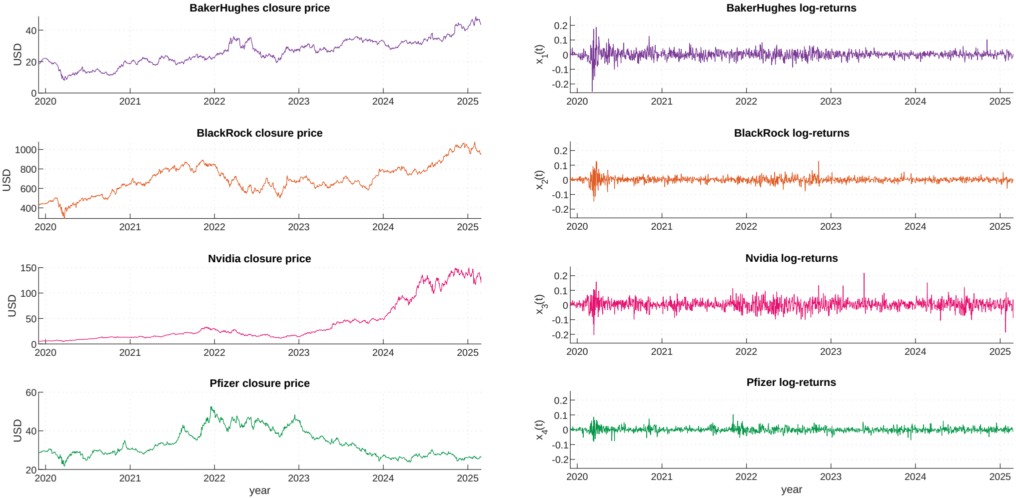
Elaborato di gruppo

**Master in Data Science and Statistical Learning**
Università degli Studi di Firenze

10 Marzo 2025

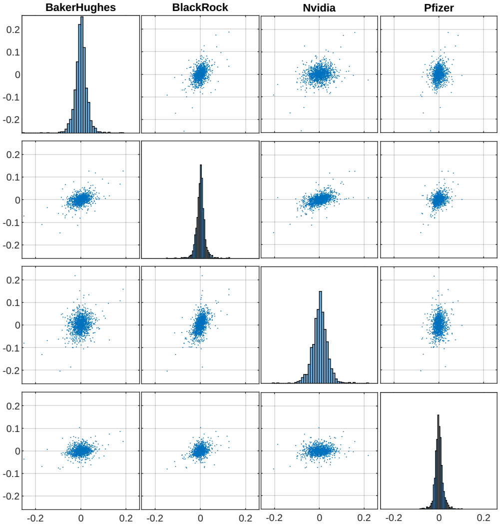
# Gli assets

## Quotazioni e log-returns



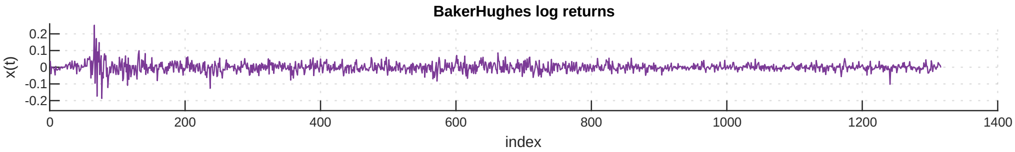
# Gli assets

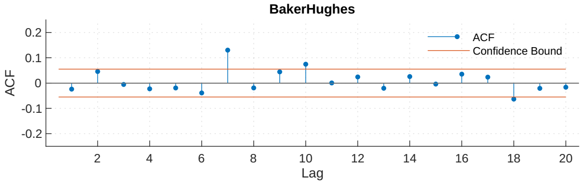
## Distribuzione dei ritorni logaritmici

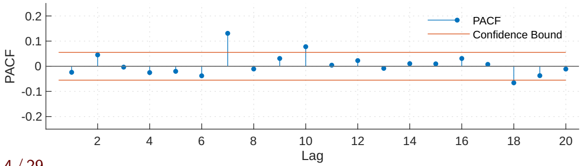


# Stazionarietà dei ritorni logaritmici

## BakerHuges



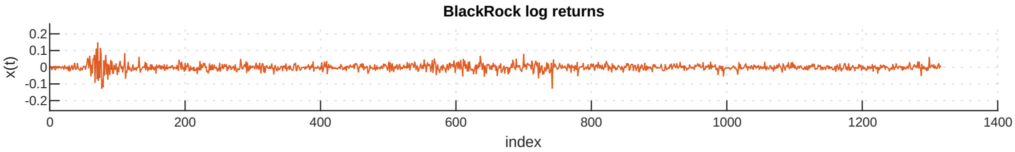



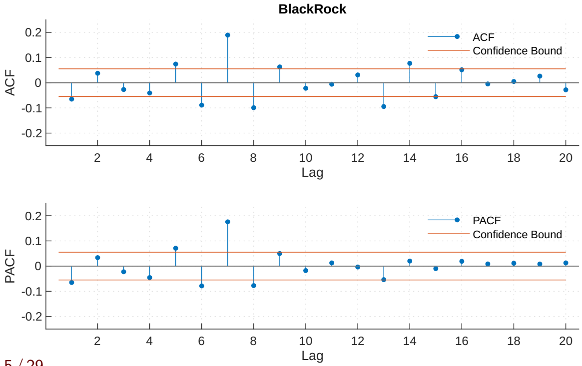

### Test statistici di stazionarietà

- ADF test
  p-value $= 0.0010$
- KPSS test
  p-value $= 0.1000$

# Stazionarietà dei ritorni logaritmici

## BlackRock



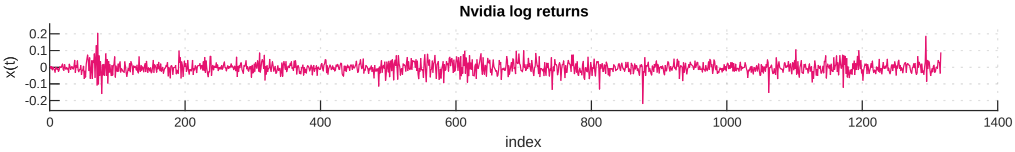



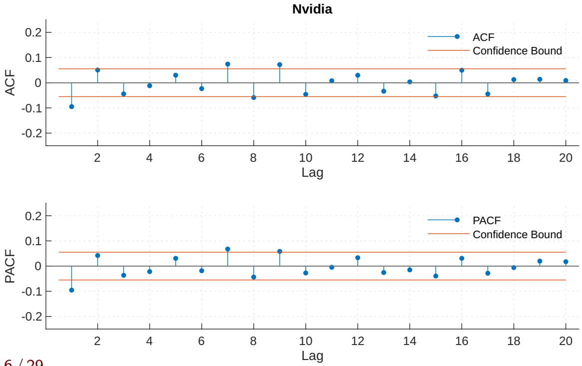

## Test statistici di stazionarietà

- ADF test
  p-value = 0.0010
- KPSS test
  p-value = 0.1000

# Stazionarietà dei ritorni logaritmici

## Nvidia

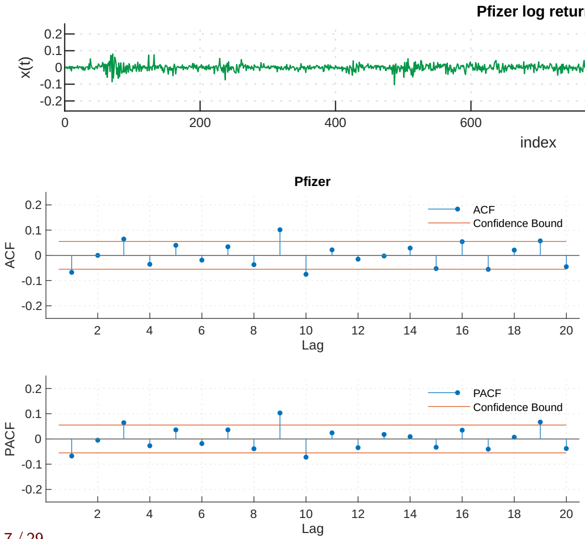



### Test statistici di stazionarietà

- ADF test
  p-value $= 0.0010$
- KPSS test
  p-value $= 0.1000$

# Stazionarietà dei ritorni logaritmici
## Pfizer




## Test statistici di stazionarietà

- ADF test
  p-value $= 0.0010$
- KPSS test
  p-value $= 0.1000$

# Indici di rischio

## Value at Risk & Expected Shortfall

### Loss function

$$L_{t-1,t} = -\log \frac{P_t}{P_{t-1}} = -X(t)$$

### Value at Risk (VaR)

$$\mathrm{VaR}_L(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq \alpha\}, \qquad \alpha \in (0,1)$$
$$F_L(x) = \mathbb{P}[L_{t-1,t} \leq x]$$

### Expected Shortfall (ES)

$$\mathrm{ES}_L(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_L(u)\, du$$

(perdita attesa qualora il VaR venga superato, per loss random continue)

# Metodo storico

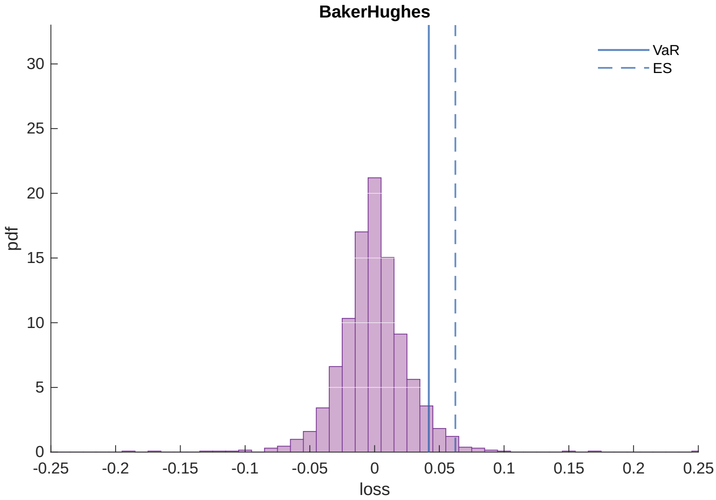
Nessuna assunzione a priori sulla distribuzione della loss

## Sketch

Sia $l = \{l_s : s = 1 \ldots n\}$ una realizzazione della loss per un dato asset:

1. Calcola la cdf empirica
$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \mathrm{I}(l_s \leq x)$$
2. Calcola il $\widehat{\mathrm{VaR}}_L(\alpha)$ come il quantile di $F_n(x)$ corrispondente ad $\alpha$
3. Calcola lo ES come la media dei valori storici della loss più grandi di $\widehat{\mathrm{VaR}}_L(\alpha)$

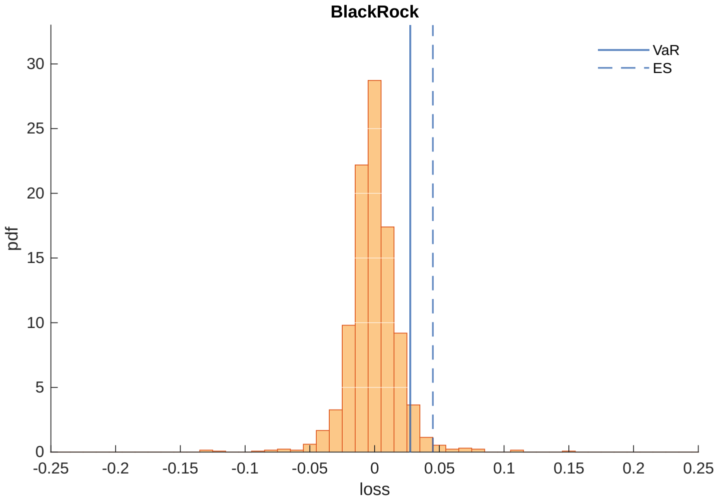
# Metodo storico
## BakerHughes




$\alpha = 0.95$

- VaR $= 0.0417$
- ES $= 0.0624$

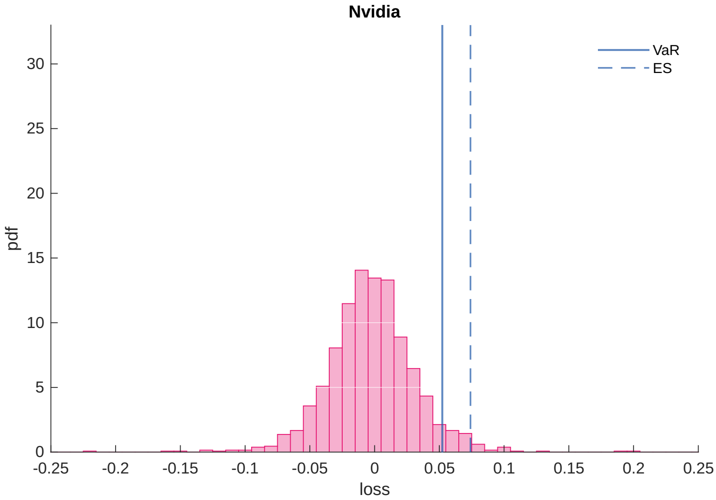
# Metodo storico
## BlackRock




$\alpha = 0.95$

- VaR $= 0.0276$
- ES $= 0.0450$

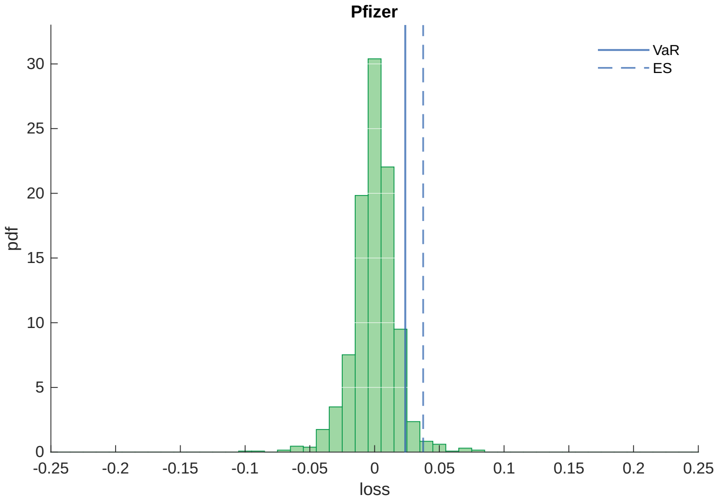
# Metodo storico
## Nvidia




$\alpha = 0.95$

- VaR $= 0.0525$
- ES $= 0.0741$

# Metodo storico
## Pfizer




$\alpha = 0.95$

- VaR $= 0.0239$
- ES $= 0.0375$

# Metodo parametrico

## $L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$VaR_L(\alpha) = \mu + \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$ES_L(\alpha) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

Note:

- $\Phi(u)$ cdf della distr. Normale
- $\phi(u)$ pdf della distr. Normale
- $\lim_{\alpha \to 1^-} \mathrm{ES}_L(\alpha)/\mathrm{VaR}_L(\alpha) = 1$

## $L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$

$$VaR_L(\alpha) = \mu + t_\nu^{-1}(\alpha)$$

$$ES_{\frac{L-\mu}{\sigma}}(\alpha) = \frac{t'_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \cdot \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1}$$

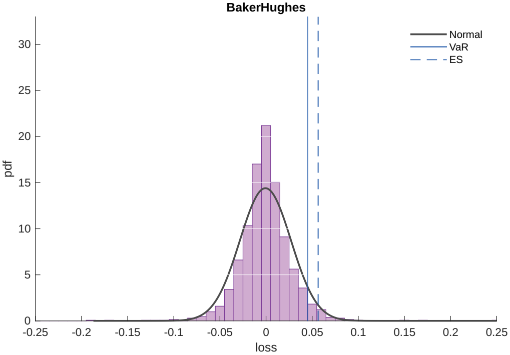
Note:

- $t_\nu(u)$ cdf della distr. $t$ di Student
- $t'_\nu(u)$ pdf della distr. $t$ di Student
- $\lim_{\alpha \to 1^-} \mathrm{ES}_L(\alpha)/\mathrm{VaR}_L(\alpha) = \frac{\nu}{\nu-1}$

# Metodo parametrico

## BakerHughes

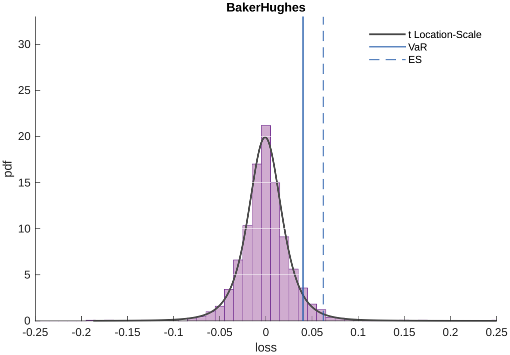
$L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$




$\alpha = 0.95$: VaR $= 0.0449$; ES $= 0.0565$

$(\mu = -0.0006;\ \sigma = 0.0277)$

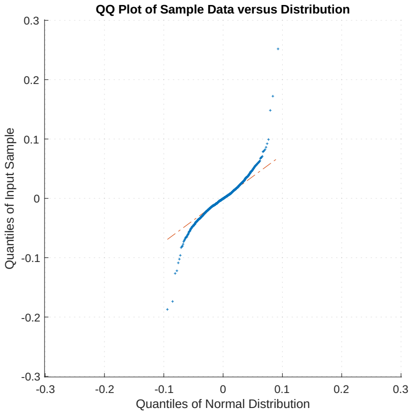
$L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$



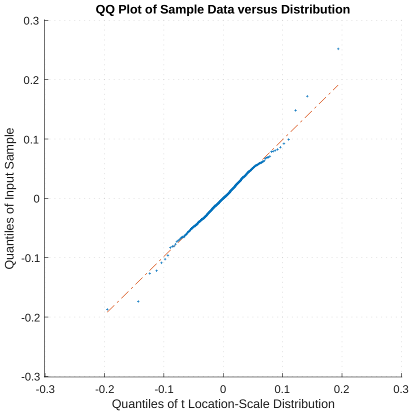

$\alpha = 0.95$: VaR $= 0.0401$; ES $= 0.0622$

$(\mu = -0.0009;\ \sigma = 0.0187;\ \nu = 3.6565)$

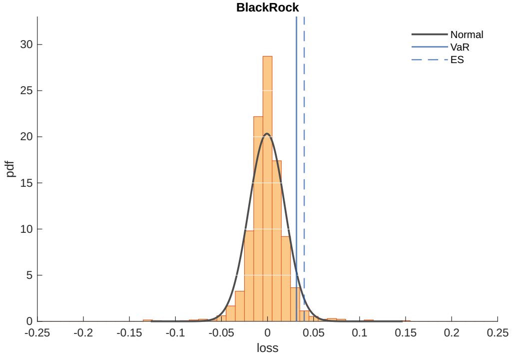
$L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$




$L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$



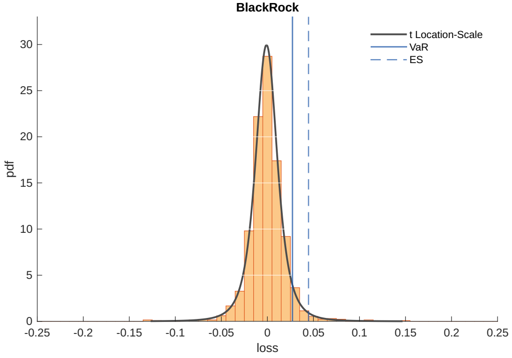
$L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$




$\alpha = 0.95$: VaR $= 0.0317$; ES $= 0.0399$

$(\mu = -0.0006;\ \sigma = 0.0196)$

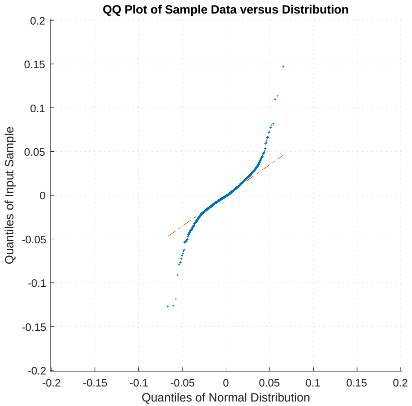
$L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$



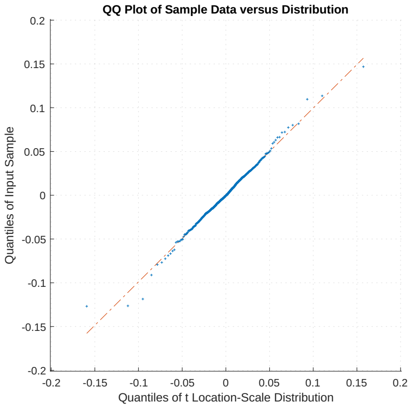

$\alpha = 0.95$: VaR $= 0.0274$; ES $= 0.0447$

$(\mu = -0.0009;\ \sigma = 0.0123;\ \nu = 3.1775)$

$L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



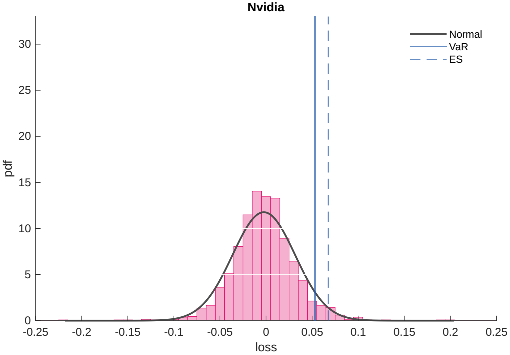

$L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$



# Metodo parametrico
## Nvidia



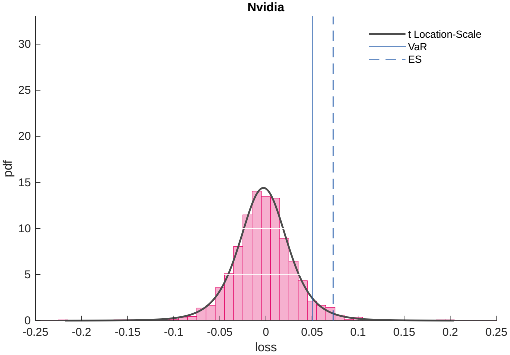
$L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$




$\alpha = 0.95$: VaR $= 0.0534$; ES $= 0.0676$

$(\mu = -0.0024;\ \sigma = 0.0339)$

$L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$

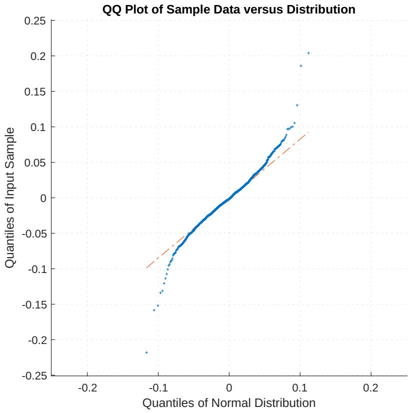



$\alpha = 0.95$: VaR $= 0.0503$; ES $= 0.0730$

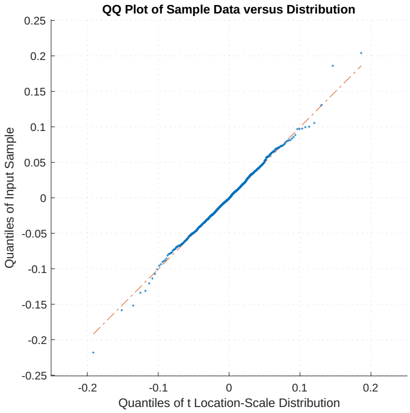
$(\mu = -0.0026;\ \sigma = 0.0264;\ \nu = 5.0992)$

# Metodo parametrico
## Nvidia

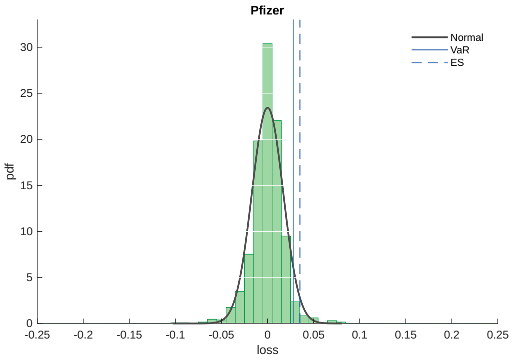
$L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$




$L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$



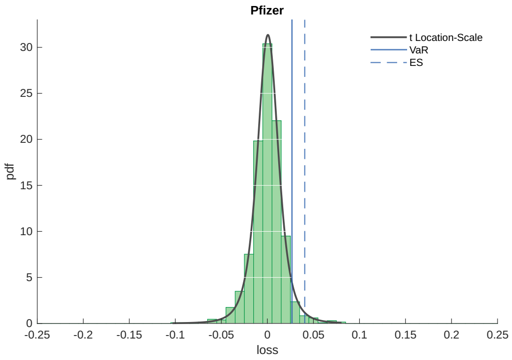
$L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$




$\alpha = 0.95$: VaR $= 0.0281$; ES $= 0.0352$

$(\mu = 7.6 \cdot 10^{-5};\ \sigma = 0.0170)$

$L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$

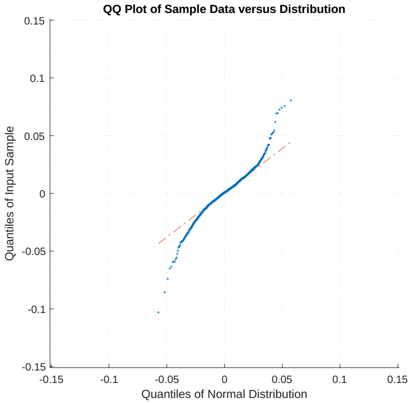



$\alpha = 0.95$: VaR $= 0.0266$; ES $= 0.0406$

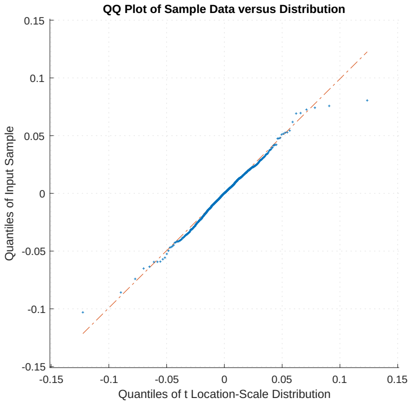
$(\mu = 0.0006;\ \sigma = 0.0119;\ \nu = 3.6692)$

# Metodo parametrico
## Pfizer

$L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



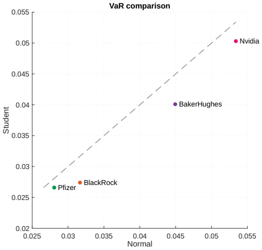

$L \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$

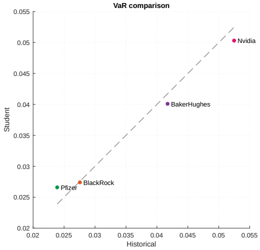


# Risultati a confronto

## VaR

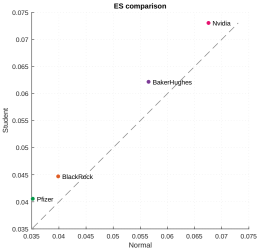
| $\alpha = 0.95$ | parametrico | | storico |
|---|---|---|---|
| titolo | Normal | Student | |
| BakerHughes | 0.0449 | 0.0401 | 0.0417 |
| BlackRock | 0.0317 | 0.0274 | 0.0276 |
| Nvidia | 0.0534 | 0.0503 | 0.0525 |
| Pfizer | 0.0281 | 0.0266 | 0.0239 |

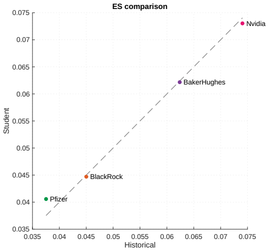


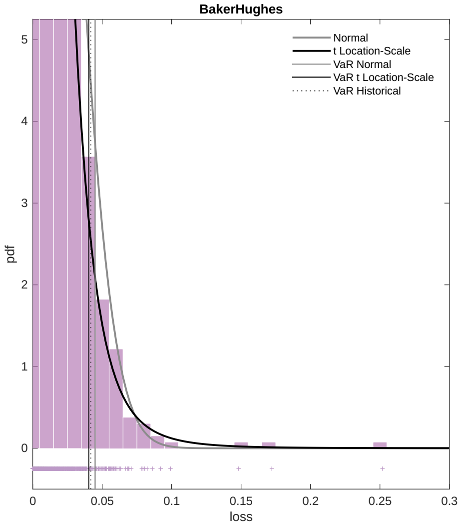

## ES

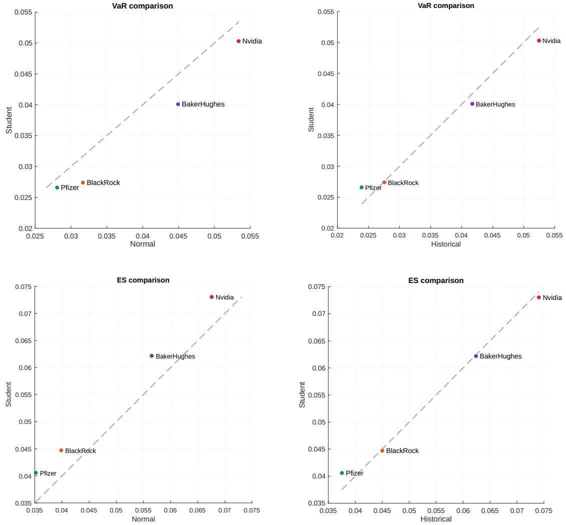
| $\alpha = 0.95$ | parametrico | | storico |
|---|---|---|---|
| titolo | Normal | Student | |
| BakerHughes | 0.0565 | 0.0622 | 0.0624 |
| BlackRock | 0.0399 | 0.0447 | 0.0450 |
| Nvidia | 0.0676 | 0.0730 | 0.0741 |
| Pfizer | 0.0352 | 0.0406 | 0.0375 |



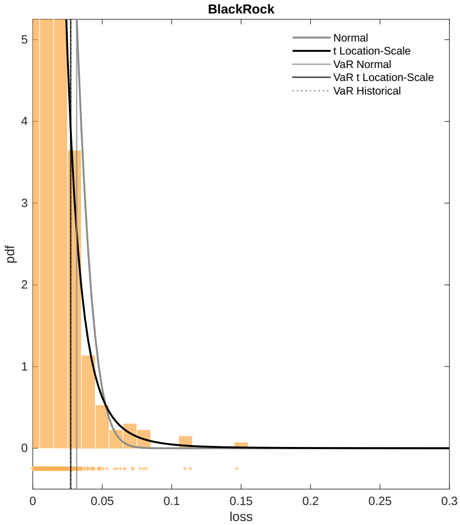



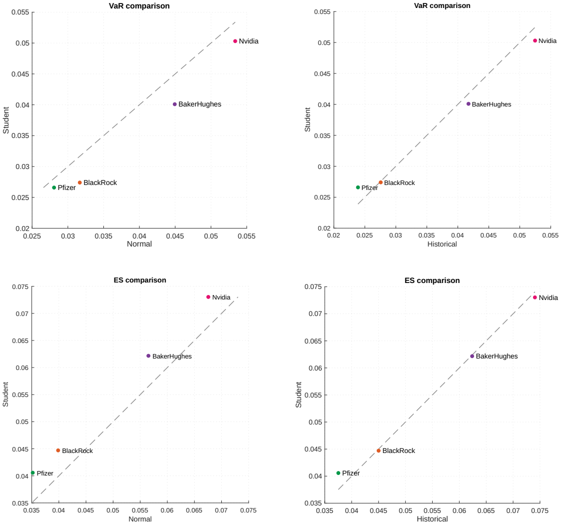
# Risultati a confronto



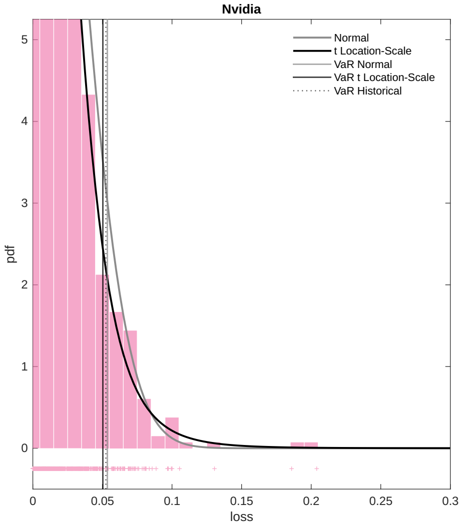



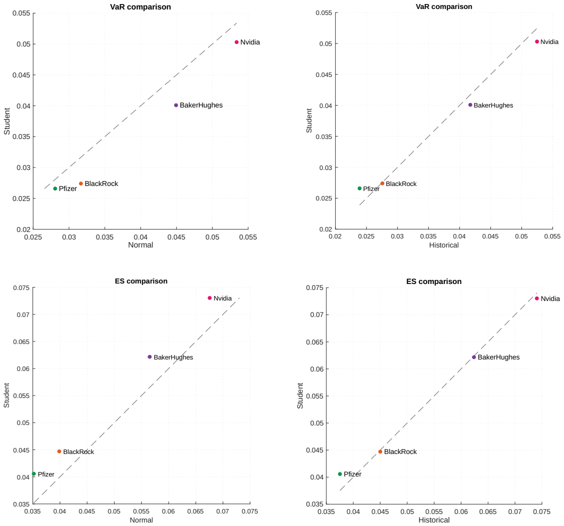
# Risultati a confronto



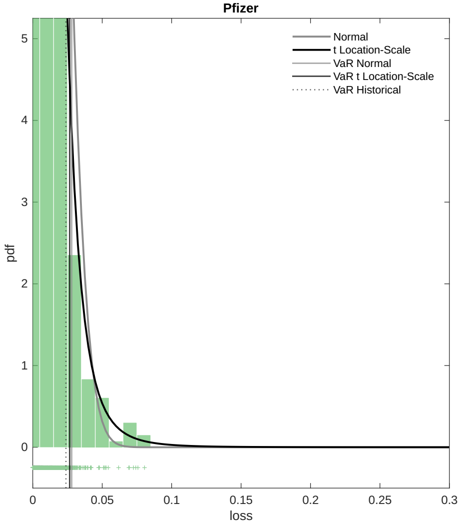



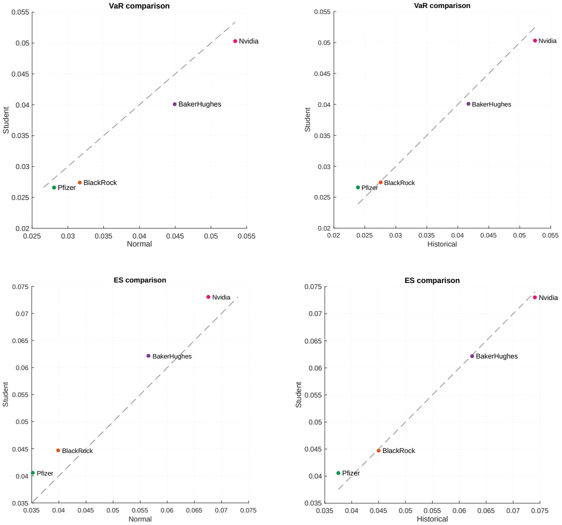
# Risultati a confronto



# Risultati a confronto

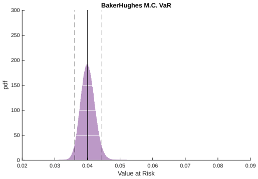


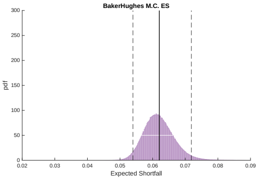
# Monte Carlo

## Processo di generazione con t di Student (1M di realizzazioni)

### BakerHughes

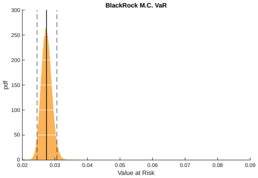



VaR=0.0401 (Student 0.0401)

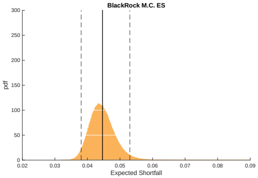



ES=0.0620 (Student 0.0622)

### BlackRock

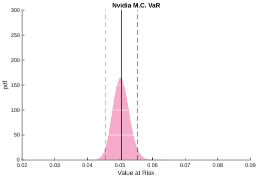



VaR=0.0274 (Student 0.0274)

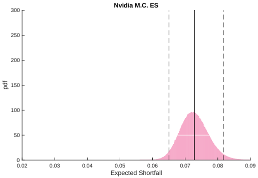



ES=0.0446 (Student 0.0447)

### Nvidia

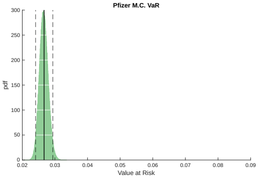



VaR=0.0503 (Student 0.0503)

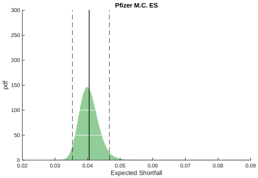



ES=0.0728 (Student 0.0730)

### Pfizer




VaR=0.0266 (Student 0.0266)




ES=0.0404 (student 0.0406)

# Riepilogo
## Vantaggi e svantaggi



### Pro metodo storico

- agnostico
- semplice
- impiega la loss realizzata

### Pro metodo parametrico

- soluzione analitica

### Pro metodo Monte Carlo

- Funziona per qualsiasi modello che può essere simulato
- intervalli di confidenza "by product"

### Contro metodo storico

- disponibilità di una serie sufficientemente lunga
- no intervalli di confidenza
- non è garantito che gli eventi estremi passati bastino per stimare la coda della distribuzione

### Contro metodo parametrico

- supporre a priori che una data distribuzione rappresenti il processo sconosciuto di generazione dei dati
- mancanza di clustering degli eventi estremi (o loro assenza)

### Contro metodo Monte Carlo

- computazionalmente oneroso
- qualsiasi risultato ottenuto sarà valido solo quanto il modello utilizzato

# Joint Distribution

## Come trovare una meta-distribuzione

Una distribuzione congiunta contiene implicitamente sia le informazioni del comportamento marginale di ogni singola variabile casuale, sia l'informazione della loro struttura di dipendenza.

- Distribuzione Congiunta = Struttura di dipendenza (Copula) + Distribuzioni marginali

### Copula

Una **Copula** è una funzione di distribuzione congiunta le cui distribuzioni marginali sono uniformi standard: $C(u_1, ..., u_d)$

### Sklar's theorem

Sia $C$ una **Copula** e siano $F_1, \ldots, F_d$ funzioni di distribuzioni univariate, allora

$$F(x) := C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d))$$

è una funzione di **distribuzione congiunta** con **marginali** $F_1, \ldots, F_d$.

In particolare, $F(x) = F(x_1, \ldots, x_d)$ è detta **meta-distribuzione** multivariata con **marginali** $F_1, \ldots, F_d$ e **Copula** $C$.

# Joint Distribution

## Come trovare una meta-distribuzione

Attraverso la copula possiamo quindi isolare l'informazione della struttura di dipendenza tra le nostre variabili casuali.
Nel nostro caso,

- abbiamo un processo $X_t$ che rappresenta i log-returns dei nostri 4 assets,
- che hanno un'identica funzione di distribuzione congiunta $F$ ad ogni tempo $t$.
- Assumendo che $F$ abbia marginali continue, per il teorema di Sklar, allora, $F$ ha un'unica rappresentazione.

# Copula: step 1

## Stima delle marginali e costruzione di uno pseudo-campione

Le stime delle marginali, $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_d$, possono essere ottenute in diversi modi, per esempio

- (i) stima parametrica;
- (ii) stima non parametrica utilizzando una variante della funzione di distribuzione empirica (EDF).

Successivamente, possiamo generare lo pseudo-campione di osservazioni dalla copula, che consiste nei vettori $\hat{U}_1, \ldots, \hat{U}_n$ , dove, per $t \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\hat{U}_t = \left(\hat{F}_1(X_{t,1}), \ldots, \hat{F}_d(X_{t,d})\right)'$$

## Copula: step 2

### Stima di massima verosimiglianza dei parametri

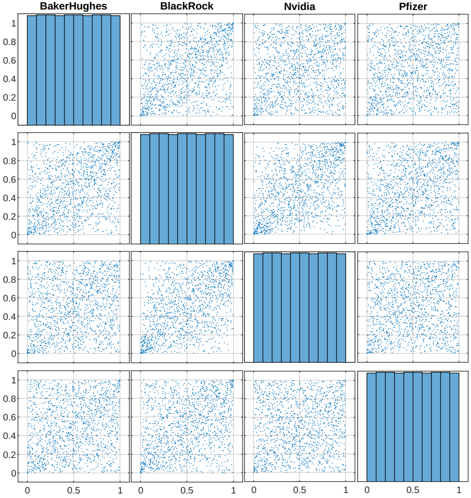


Sia $C_\theta$ una copula, avente $\theta$ come vettore dei parametri da stimare. La stima di massima verosimiglianza (**MLE**) è ottenuta massimizzando

$$lnL(\theta; \hat{U}_1, ..., \hat{U}_n) = \sum_{t=1}^{n} lnc_\theta(\hat{U}_t)$$

rispetto a $\theta$, dove $c_\theta$ è la **densità** della copula e $\hat{U}_t$ lo pseudo-campione di osservazioni generato dalla copula.

La qualità delle stime dei parametri della copula dipende molto dalla qualità delle stime delle distribuzioni marginali utilizzate nella formazione dello pseudo-campione allo **Step 1**.




- Copula gaussiana:

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3968 & 0.1927 & 0.1908 \\ 0.3968 & 1 & 0.5005 & 0.3275 \\ 0.1927 & 0.5005 & 1 & 0.1232 \\ 0.1908 & 0.3275 & 0.1232 & 1 \end{bmatrix}$$

Log-Likelihood $= 381.9640$; BIC $= -720.8338$

- Copula t:

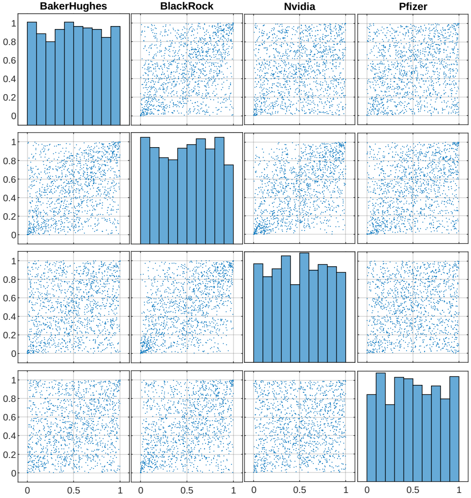
$\hat{\nu} = 5.6455$

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3930 & 0.1822 & 0.1852 \\ 0.3930 & 1 & 0.4860 & 0.3232 \\ 0.1822 & 0.4860 & 1 & 0.1145 \\ 0.1852 & 0.3232 & 0.1145 & 1 \end{bmatrix}$$

Log-Likelihood $= 458.3204$; BIC $= -866.3643$

# Copula con stima parametrica delle marginali

## Stima parametrica delle marginali (Student)




- Copula gaussiana:

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3985 & 0.1971 & 0.1882 \\ 0.3985 & 1 & 0.5012 & 0.3260 \\ 0.1971 & 0.5012 & 1 & 0.1189 \\ 0.1882 & 0.3260 & 0.1189 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Log-Likelihood} = 382.8164; \text{BIC} = -636.3505$$

- Copula t:

$$\hat{\nu} = 5.8859$$

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3918 & 0.1838 & 0.1812 \\ 0.3918 & 1 & 0.4857 & 0.3200 \\ 0.1838 & 0.4857 & 1 & 0.1114 \\ 0.1812 & 0.3200 & 0.1114 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Log-Likelihood} = 459.4104; \text{BIC} = -782.3560$$

# Conclusione

## Prossimi passi

Ora che abbiamo ricavato una meta-distribuzione congiunta e conosciamo la struttura di dipendenza dei nostri asset, ci sono diverse possibili applicazioni:

- **stima delle metriche di rischio**: calcolare VaR ed ES di portafogli composti dai 4 assets con diverse allocazioni (pesi);
- **stress testing e analisi di scenario**: valutare l'impatto di shock specifici su uno o più asset e le conseguenti ripercussioni sull'intero portafoglio;
- **simulazione di scenari**: simulare possibili andamenti futuri dei 4 assets che rispettano sia il comportamento individuale che le loro interdipendenze;
- **ottimizzazione**: determinare l'allocazione che minimizza il rischio per un dato rendimento atteso.