

# Julia, Fatou & Mandelbrot

Dario Comanducci

**Sommario**—Gli studi pionieristici di Gaston Julia e Pierre Fatou durante la prima guerra mondiale sulla successioni di punti nel piano complesso governate da funzioni razionali hanno trovato la possibilità di essere visualizzati graficamente a seguito dell'elaborazione numerica introdotta da Benoit Mandelbrot oltre mezzo secolo dopo. Sono qui riassunte alcune delle proprietà degli insiemi che portano il nome dei tre matematici: gli insiemi di Julia, Fatou e Mandelbrot.

## I. INTRODUZIONE

Consideriamo la risoluzione<sup>1</sup> dell'equazione [2, p. 27]

$$2x^3 + x + 1 = 0 \quad (1)$$

Un procedimento generale per risolvere equazioni del tipo  $g(x) = 0$ , con  $g(x)$  derivabile, è il *metodo delle tangenti* (Fig. 1a) proposto da Newton [2, p. 39], in cui si studia la convergenza della successione<sup>2</sup>

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}}_{f(x_n)} \quad (2)$$

In particolare, applicando Eq. (2) a Eq. (1) abbiamo<sup>3</sup>

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n + 1}{6x_n^2 + 1} = \frac{4x_n^3 - 1}{6x_n^2 + 1} \quad (3)$$

Poiché un'equazione algebrica  $g(x) = 0$ , con  $g(x)$  polinomio di grado  $m$ , ammette nel campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  esattamente  $m$  radici (contando ciascuna di esse con la propria molteplicità) [1, p. 268], acquista senso applicare Eq. (3) con  $x_n \in \mathbb{C}$ : fu Arthur Cayley nel 1879 ad estendere da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  il metodo di Newton in Eq. (2), allo scopo di individuare le regioni di punti iniziali  $z_0$  della successione<sup>4</sup> tali da convergere alla stessa soluzione dell'equazione  $g(z) = 0$  [2, p. 44].

Se solo Cayley avesse avuto un computer, avrebbe potuto visualizzare tali regioni, come fatto in Fig. 1b relativamente al caso di Eq. (3):

- i tre puntini scuri al centro dell'immagine rappresentano le soluzioni nel piano complesso per  $2z^3 + z + 1 = 0$ , ossia una radice reale e due complesse coniugate, che cadono nella regione compresa tra  $-2 - 2i$  e  $2 + 2i$ ;
- a ciascuna delle 3 radici è associata una tonalità di colore (arancione per quella reale, blu e viola per le altre due), mentre l'intensità di colore indica invece la velocità di

<sup>1</sup>Si richiede che il lettore abbia una conoscenza almeno basilare di Analisi matematica, in particolare del concetto di limite e di derivata di una funzione; anche se in § A verranno forniti richiami per le nozioni più “astratte” di topologia, limiti e derivate non verranno trattati.

<sup>2</sup>Posto  $x_{n+1}$  il punto in cui la retta tangente in  $g(x_n)$  intercetta  $y = 0$ , deve valere  $g'(x_n) = (g(x_n) - 0)/(x_n - x_{n+1})$ .

<sup>3</sup> $g(x) = 2x^3 + x + 1 \Rightarrow g'(x) = 6x^2 + 1$

<sup>4</sup>D'ora in avanti verrà usata la variabile  $z$  per indicare che rappresenta un numero complesso e non semplicemente un numero reale.

convergenza verso le tre radici (più è chiaro il colore, minori sono le iterazioni necessarie a convergere)

Ad esempio tutti punti colorati più o meno intensamente di arancione in base alla loro velocità convergono verso la radice reale (analogamente per le altre due).

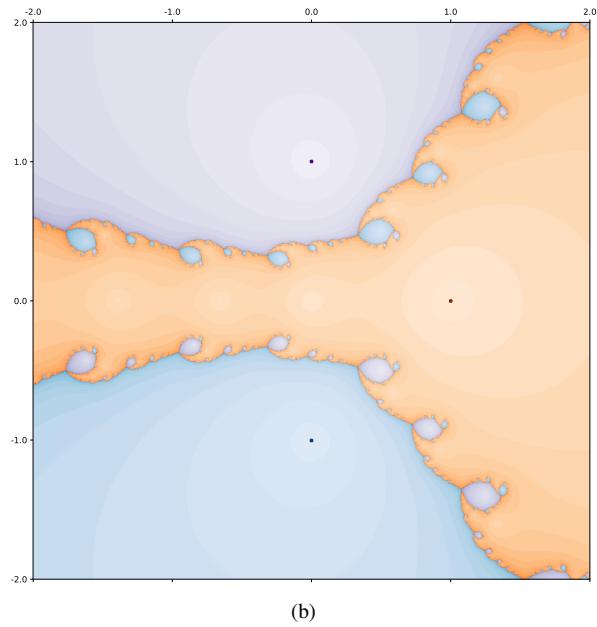
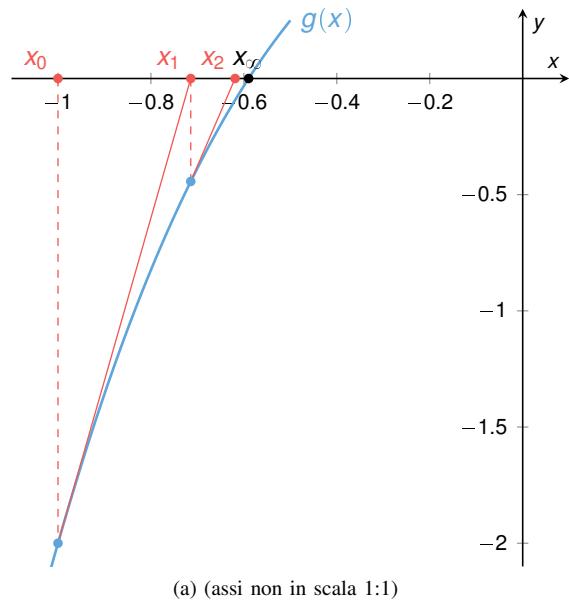


Figura 1: in (a): metodo delle tangenti di Newton per  $g(x) = 2x^3 + x + 1$  con sequenza  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$  convergente a  $x_\infty$  secondo Eq. (2),(3) partendo da  $x_0 = -1$ . In (b): visualizzazione grafica per la convergenza di Eq. (3) su  $\mathbb{C}$  (si veda nel testo per i dettagli).

Parlando più in generale, lo studio di successioni definite da generiche funzioni razionali complesse  $f(z)$ , di cui  $(4z^3 - 1)/(6z^2 + 1)$  è solo un particolare esempio, sarà l'argomento discusso in § II, a proposito degli insiemi di Julia (ad esempio la frontiera delle tre regioni in Fig. 1b forma un insieme di Julia); a sua volta l'insieme di Mandelbrot in § III è poi legato ad una particolare famiglia di  $f(z)$  e ai relativi insiemi di Julia.<sup>5</sup> In § IV sono poi trattati degli algoritmi per visualizzare graficamente tali insiemi, mentre in § V la successione che caratterizza l'insieme di Mandelbrot sull'asse reale viene messa in collegamento con la *dinamica di Verhulst*; per concludere, in appendice § A sono riportati dei richiami di topologia, in appoggio ai concetti esposti nelle sezioni precedenti.

## II. GLI INSIEMI DI JULIA

Gli insiemi di Julia sono sottoinsiemi del piano complesso  $\mathbb{C}$ . In questo ambito su  $\mathbb{C}$  verrà impiegata la *distanza euclidea*

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \equiv |z_1 - z_2| \quad (4)$$

per  $z_k = a_k + ib_k$  ( $k = 1, 2$ ), così da poter trattare  $\mathbb{C}$  come uno *spazio metrico* (Def. A.2); la definizione di *intorno* (Def. A.3) pertanto diventa

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

essendo  $d(z, 0 + 0i) \equiv |z|$  il *modulo* di  $z$ .

Consideriamo la seguente funzione razionale<sup>6</sup> [4, p. 27]

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

con  $p(z), q(z) : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  polinomi primi tra loro; supponiamo inoltre che il grado di  $f$  sia maggiore di 1.<sup>7</sup>

Per definire l'insieme di Julia  $J_f$  relativo alla funzione  $f$  conviene prima introdurre il concetto di *orbita periodica*.

### A. Orbite

DEF. II.1 (orbita futura). La successione

$$z_n = f(z_{n-1}) \equiv f^n(z_0) \quad n = 1, 2, \dots$$

definisce, per ogni  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ , l'*orbita futura* indicata dal simbolo  $\text{Or}^+(z_0)$ .

DEF. II.2 (orbita inversa). Dal momento che l'applicazione  $f$  non è iniettiva, definiamo come *orbita inversa* l'insieme di tutte le controimmagini:

$$\text{Or}^-(z') = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : f^k(z_0) = z' \text{ per } k = 0, 1, 2, \dots\}$$

ossia tutti quei punti  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  per i quali la successione  $f^k(z_0)$  arriva in  $z'$  con un certo numero di passi  $k$ .

<sup>5</sup>L'insieme di Fatou costituisce invece in generale il complementare di un insieme di Julia.

<sup>6</sup>ossia il dominio di  $f$  è dato dal piano dei numeri complessi esteso ai punti all'infinito, detto anche *sfera di Riemann*.

<sup>7</sup> $\text{grad}(f) = \max(\text{grad}(p), \text{grad}(q))$

### 1) Punti periodici:

DEF. II.3 (punto periodico). Se per qualche valore di  $n$  si ha  $f^n(z_0) = z_0$  in  $\text{Or}^+(z_0)$ , diremo che  $z_0$  è un *punto periodico*.

DEF. II.4 (orbita periodica o ciclo). L'orbita futura corrispondente ad un punto periodico è detta *orbita periodica*.

DEF. II.5 (periodo di un'orbita periodica). Data un'orbita periodica, il più piccolo  $n$  tale che  $z_0 = f^n(z_0)$  è detto *periodo* dell'orbita.

DEF. II.6 (punto fisso). Un punto periodico con periodo d'orbita  $n = 1$  viene detto *punto fisso*.<sup>8</sup>

DEF. II.7 (stabilità di un punto periodico). Dato un punto periodico  $z_0$  di periodo  $n$ , sia  $\lambda$  il valore assunto dalla derivata di  $f^n(z)$  in  $z_0$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$  è detto *autovalore* di  $z_0$ ):

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{df^n(z_0)}{dz} = \frac{df(f^{n-1}(z_0))}{dz} = \frac{df(z_{n-1})}{dz_{n-1}} \frac{df^{n-1}(z_0)}{dz} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{df(z_k)}{dz} \end{aligned} \quad (5)$$

Tale numero è lo stesso per ogni punto del ciclo<sup>9</sup> ossia è una costante dell'orbita  $\text{Or}^+(z_0)$ ; pertanto in base al valore di  $\lambda$  il punto periodico  $z_0$ , così come il ciclo corrispondente, può essere

- *superattivo*  $\iff \lambda = 0$ ,
- *attrattivo*  $\iff 0 < |\lambda| < 1$
- *indifferente*  $\iff |\lambda| = 1$
- *repulsivo*  $\iff |\lambda| > 1$

In particolare, per un punto periodico repulsivo, piccole perturbazioni di  $z$  porteranno a grandi cambiamenti nelle iterazioni successive: intuitivamente, un punto periodico repulsivo è un punto che “respinge” i punti vicini applicando iterativamente la funzione  $f(z)$ ; se la successione  $f^k(z')$  inizia con un punto  $z'$  vicino a un punto periodico repulsivo  $z_0$ , le iterazioni tenderanno ad allontanarsi da  $z_0$ .

DEF. II.8 (insieme di Julia). Siamo ora in grado di caratterizzare l'insieme di Julia  $J_f$  di una funzione razionale  $f(z)$ : sia quindi  $P$  l'insieme di tutti i punti repulsivi di  $f(z)$ ; in tal caso  $P$  è *denso* in  $J_f$  (Def. A.9), ossia ogni punto di  $J_f$  può essere espresso come limite di una successione di punti in  $P$ .<sup>10</sup>

DEF. II.9 (bacino d'attrazione). Dato un punto fisso attrattivo  $z_0$ , il suo *bacino d'attrazione* è dato dall'insieme

$$A(z_0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : f^k(z) \rightarrow z_0 \text{ per } k \rightarrow \infty\}$$

Il bacino d'attrazione contiene l'orbita inversa di  $z_0$ ,  $\text{Or}^-(z_0)$ ; inoltre, se  $\gamma$  è un ciclo attrattivo di periodo  $n$ , ognuno dei punti fissi  $f^k(z_0)$  di  $f^n(z)$  ( $k = 0 \dots n-1$ ) ha il proprio bacino di attrazione e  $A(\gamma)$  è dato dall'unione di tali bacini.

<sup>8</sup>Un punto periodico  $z_0$  di periodo  $k$  per  $f^n(z)$ , è un punto fisso per  $g(z) \equiv f^k(z)$ .

<sup>9</sup>Poiché attraverso la regola della catena è stato possibile scrivere  $df^n(z)/dz = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{df(z_k)}{dz}$ , e dato che i valori  $z_k$  sono periodici con periodo  $n$ , vale  $df^n(z_0)/dz = df^n(z_1)/dz = \dots = df^n(z_{n-1})/dz$ .

<sup>10</sup>Da Def. A.9 e nota 24 quindi se  $P$  è denso in  $J_f$ , significa che ogni punto di  $J_f$  o appartiene a  $P$  oppure è un punto di accumulazione per  $P$ .

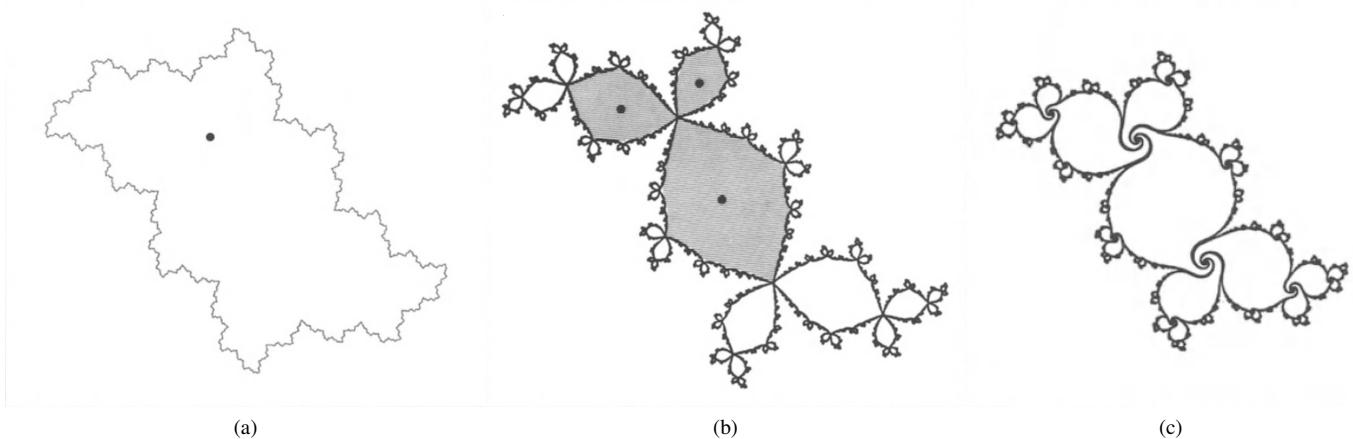


Figura 2: Bacini d'attrazione.

Fig. 2 illustra degli insiemi di Julia che limitano i bacini di attrazione per vari punti attrattivi.

### B. Proprietà fondamentali degli insiemi di Julia

Elenchiamo ora alcune proprietà fondamentali dell'insieme  $J_f$ , trovate da Gaston Julia nel 1918 e da Pierre Fatou nel 1919-20 [4, p. 28].

**DEF. II.10** (insieme di Fatou). L'insieme  $F_f = \hat{\mathbb{C}} \setminus J_f = J_f^c$  è l'insieme complementare di  $J_f$  e viene detto *insieme di Fatou*.

**PROP. II.1.**  $J_f$  è non vuoto, con un'infinità più che numerabile di punti

**PROP. II.2.**  $J_f$  Gli insiemi di Julia di  $f(z)$  e di  $f^k(z)$  coincidono per ogni  $k = 1, 2, \dots$

**PROP. II.3.**  $f(J_f) = J_f = f^{-1}(J_f)$

**PROP. II.4.** Per ogni  $z \in J_f$ , l'orbita inversa  $\text{Or}^-(z)$  è densa in  $J_f$

**PROP. II.5.** Se  $\gamma$  è un ciclo attrattivo di  $f$ , si ha  $A(\gamma) \subset F_f = \hat{\mathbb{C}} \setminus J_f$  ed inoltre  $\partial A(\gamma) = J_f$

**PROP. II.6.** Se  $J_f$  ha parte interna non vuota (ossia esiste almeno un punto  $z' \in J_f$  per cui  $D(z', \varepsilon) \subset J_f$  per qualche  $\varepsilon > 0$ ), possiamo concludere che  $J_f = \hat{\mathbb{C}}$ .<sup>11</sup>

**PROP. II.7.** Posti  $z' \in J_f$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $J^* = \{z \in J_f : |z - z'| < \varepsilon\}$ , esiste un intero  $n$  tale che  $f^n(J^*) = J_f$ .

La proprietà Prop. II.1 implica che ogni funzione razionale ha un considerevole numero di punti periodici repulsivi.

Da Prop. II.3 segue che l'insieme di Julia è invariante rispetto a  $f(z)$ , e dal fatto che  $P$  è denso in  $J_f$  si deduce che la dinamica sull'insieme di Julia è caotica.

Prop. II.4 suggerisce un metodo numerico per visualizzare graficamente  $J_f$ , ma si rendono necessari gli algoritmi sofisticati su  $\text{Or}^-(z)$  (§ IV), in quanto l'orbita inversa di un punto non si distribuisce uniformemente sull'insieme di Julia.

<sup>11</sup>Tale situazione si verifica raramente, ma ad esempio  $f(z) = (z-2)^2/z^2$  ne è un esempio.

Da Prop. II.5 segue che nella maggior parte dei casi  $J_f$  presenta una struttura frattale: ad esempio se  $f$  possiede più di due punti fissi attrattivi  $a, b, c, \dots$ , da tale proprietà abbiamo

$$\partial A(a) = J_f = \partial A(b) = \partial A(c) = \dots$$

ossia tutte le frontiere dei bacini di attrazione coincidono.

### C. Comportamento nell'intorno dei punti periodici indifferenti

Finora abbiamo visto che i punti periodici repulsivi appartengono all'insieme di Julia  $J_f$ , mentre i punti periodici attrattivi appartengono all'insieme di Fatou  $F_f = J_f^c$ ; occorre però ancora analizzare il comportamento dei punti indifferenti [4, p. 29]. Senza perdere di generalità, supponiamo quindi

$$f(0) = 0 \tag{6a}$$

$$\lambda = \frac{df(0)}{dz} = e^{2\pi\alpha i} \quad (\alpha \in [0, 1]) \tag{6b}$$

da cui segue che  $f(z)$  è esprimibile in serie di potenze come

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

**DEF. II.11** (punto periodico razionalmente indifferente o parabolico). Il punto fisso 0 per Eq. (6) è, come il corrispondente ciclo, *razionalmente indifferente* (talvolta detto *parabolico*) se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

**DEF. II.12** (punto periodico irrazionalmente indifferente). Il punto fisso 0 per Eq. (6) è *razionalmente indifferente* se  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ .

1) *Caso parabolico*: Per il caso parabolico valgono i due seguenti risultati.

**PROP. II.8.** Se  $z_0$  è un punto periodico parabolico di  $f(z)$ , allora  $z_0 \in J_f$ . In tal caso  $A(\gamma)$  non è vuoto, ossia  $\gamma = \{z_0, f(z_0), \dots, f^{n-1}(z_0)\} \subset J_f$  e  $\gamma \subset \partial A(\gamma)$ . Fig. 3 illustra questa situazione.

**TEOREMA II.1.** Siano

$$\lambda = df(0)/dz$$

$$\lambda^n = 1$$

$$\lambda^k \neq 1, \quad \text{per } 0 < k < n$$

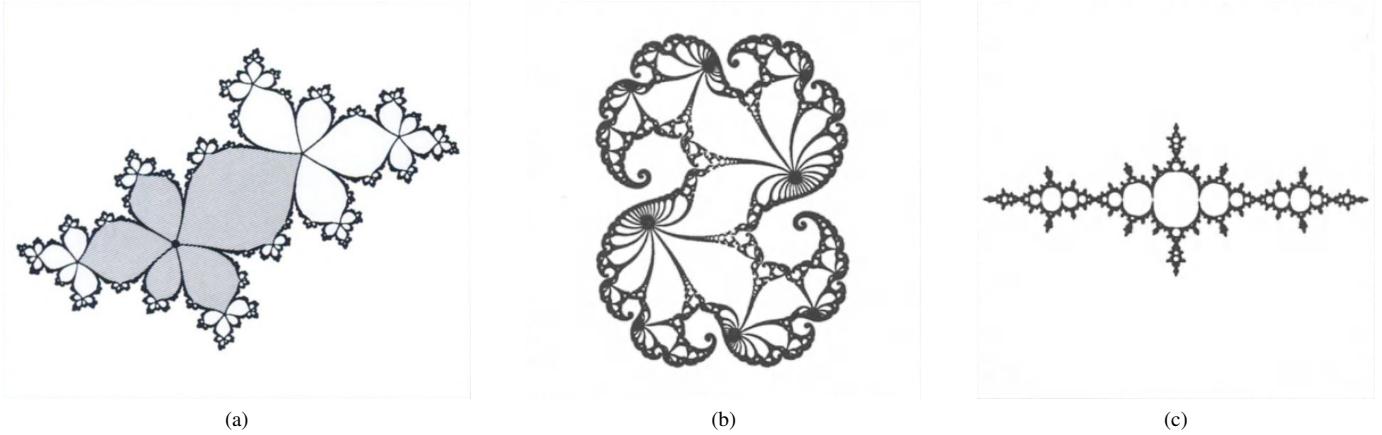


Figura 3: Bacini parabolici.

Allora o  $f^n(z) = z$  (cioè è l'applicazione identica) oppure esiste un omeomorfismo<sup>12</sup>  $h(z)$ , definito in un intorno dell'origine, t. c.

$$h(0) = 0 \quad (7a)$$

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z(1 + z^{kn}) = g(z) \text{ per qualche } k \geq 1 \quad (7b)$$

Eq. (7b) indica che  $f(z)$  e  $g(z)$  sono *topologicamente coniugate*, ossia  $h^{-1}(g(z)) = f(h^{-1}(z))$ : hanno quindi proprietà topologiche identiche, in particolare lo stesso numero di punti fissi e orbite periodiche con gli stessi tipi di stabilità [3].<sup>13</sup>

2) *Caso irrazionale*: Nel caso irrazionale è un problema aperto decidere se un punto irrazionalmente indifferente appartenga o meno a  $J_f$ . Per descrivere il problema è necessario introdurre il concetto di *stabilità*.

**DEF. II.13** (punto stabile). Il punto  $f(0) = 0$  è detto *stabile* se per ogni intorno  $U$  di 0, esiste un intorno  $V$  di 0 tale che

$$\begin{aligned} V &\subset U \\ f^k(V) &\subset U \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

I punti fissi attrattivi sono ovviamente stabili. Per descrivere la stabilità dei punti fissi indifferenti, introduciamo il seguente teorema.

**TEOREMA II.2.** Siano

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda z + a_2 z^2 + \dots \\ |\lambda| &= 1 \\ \lambda^n &\neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

In tal caso 0 è punto fisso stabile se e solo se l'equazione funzionale

$$\phi(\lambda z) = f(\phi(z)) \quad (\text{eq. di Schröder}) \quad (8)$$

ammette una soluzione analitica nell'intorno dell'origine.

<sup>12</sup>Un omeomorfismo fra due spazi topologici  $X$  e  $Y$  è una funzione continua e biunivoca  $f : X \rightarrow Y$ , la cui inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  è anch'essa continua.

<sup>13</sup>Inoltre,  $h(z)$  mappa le orbite future di  $f(z)$  sulle corrispondenti orbite future di  $g(z)$ , preservando l'ordine dei punti.

Supponiamo che Eq. (8) sia soddisfatta per  $\lambda = \exp(2\pi\alpha i)$ , ossia che

$$\lambda z = \phi^{-1}(f(\phi(z)))$$

allora  $f(z)$  è *localmente equivalente* (o *coniugata*) ad una rotazione di  $2\pi\alpha$ . Quando  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , Eq. (8) può essere risolta sviluppando in serie di Taylor  $\phi(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ , supponendo  $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ :

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda^k - \lambda) b_k z^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left( z + \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j \right)^k \quad (9)$$

da cui si possono ricavare i coefficienti  $b_k$  uguagliando i termini di pari grado.<sup>14</sup>

a) *I dischi di Siegel*: Quando  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , Eq. (9) è detta *problema di divisore piccolo*, ed esistono vari risultati in merito alla sua convergenza o meno, di cui il più significativo è costituito dai *dischi di Siegel* (1942).<sup>15</sup>

**TEOREMA II.3.** La serie di Schröder in Eq. (9) converge se per  $\alpha$  esistono  $\varepsilon, \mu > 0$  tali che

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| > \frac{\varepsilon}{n^\mu}, \quad \text{condizione diofantea} \quad (10)$$

per tutti gli interi  $m$  e per tutti gli interi positivi  $n$ .

La condizione in Eq. 10 dice che è *impossibile approssimare bene  $\alpha$  con un numero razionale*; scrivendo  $\alpha$  in forma di frazione continua,

$$\alpha = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \dots}}} \quad (\text{con } \alpha_k \in \mathbb{N})$$

<sup>14</sup>Quando  $\lambda$  è una radice dell'unità (ossia se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ), tale metodo non è applicabile.

<sup>15</sup>Tra gli altri risultati invece troviamo in particolare che se  $\lambda \in \{|\lambda| = 1 \text{ t.c. } \liminf |\lambda^n - 1|^{1/n} = 0\}$ , allora la serie di Schröder diverge (H. Cremer, 1938); un altro esempio di non convergenza era stato trovato in precedenza da G. A. Pfifer nel 1917.

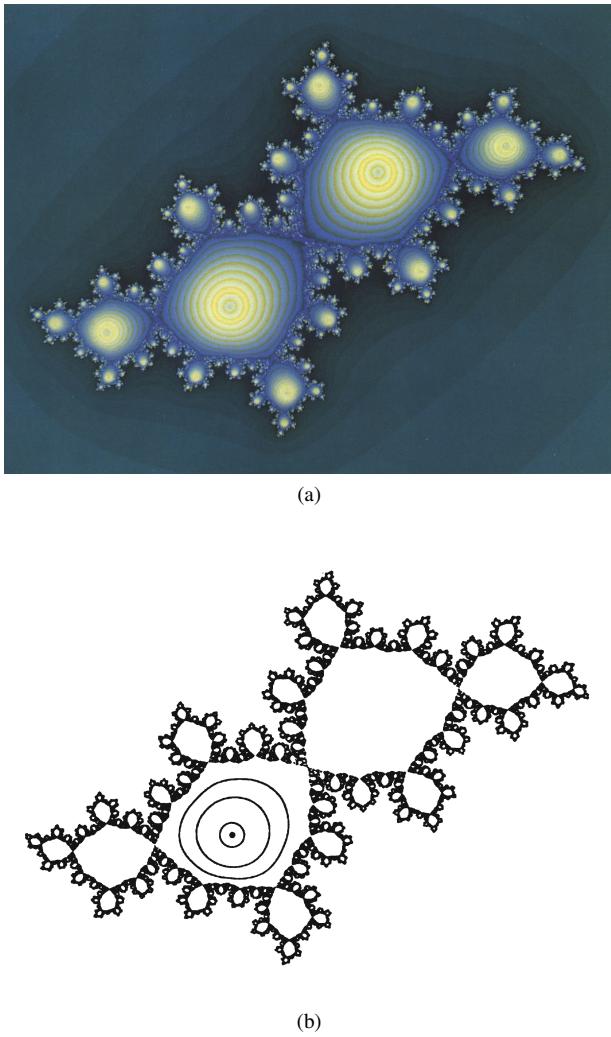


Figura 4: Disco di Seigel centrato nel punto fisso irrazionalmente indifferente  $z_0 = 0$ , per  $f(z) = z^2 + \lambda z$ , con  $\lambda = e^{2\pi\alpha i}$  e  $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$  (sezione aurea). La dinamica delle curve in (b) (ne sono indicate tre) equivale ad una rotazione di angolo  $\alpha$ . In (b) il *punto critico*  $z_c = -e^{2\pi\alpha i}/2$  appartiene all'insieme di Julia (cfr. § II-D).

abbiamo infatti che  $p_n/q_n = (\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n, 0, 0 \dots)$  sono le migliori<sup>16</sup> rappresentazioni razionali per  $\alpha$  valendo

$$\frac{1}{(\alpha_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\alpha_{n+1} q_n^2}$$

La condizione diofantea di Seigel in Eq. 10 è soddisfatta se i coefficienti dell'espansione sono limitati.

PROP. II.9. Si può dimostrare che l'insieme dei punti  $\alpha \in [0, 1]$  che soddisfano Eq. 10 ha misura 1.

DEF. II.14 ( $f(z)$  linearizzabile). Se la serie converge, diremo che  $f(z)$  è *linearizzabile* nell'origine.

DEF. II.15 (disco di Seigel). Il dominio massimo di convergenza  $D(0)$ , contenente  $f(0) = 0$ , in cui si ha  $\phi(\lambda z) = f(\phi(z))$  è detto *disco di Seigel*

<sup>16</sup>Per migliori s'intende che non vi sono altri numeri razionali  $p/q$ , con  $q \leq q_n$  più vicini ad  $\alpha$ .

PROP. II.10. Se  $z_0$  è il centro di un disco di Seigel, allora  $z_0 \in F_f$ .

Un esempio di disco di Seigel per la famiglia di polinomi  $f(z) = z^2 + c$  è visibile in Fig. 4:

- Fig. 4a illustra un disco di Seigel, le sue controimmagini rispetto a  $f(z)$  e il dominio di attrazione del punto all'infinito (la colorazione evidenzia i cerchi invarianti sui quali è confinata la dinamica nell'intorno dei punti fissi irrazionalmente indifferenti);
- Fig. 4b rappresenta un tale punto fisso, alcune curve invarianti e l'insieme di Julia.

#### D. Punti critici

La comprensione della dinamica globale di una funzione razionale  $f(z)$  è strettamente connessa alla dinamica dei suoi *punti critici* [4, p. 53]. Prima di definire i punti critici, merita però introdurre il concetto di bacino d'attrazione immediato.

DEF. II.16 (bacino d'attrazione immediato). Sia  $z_0$  un punto fisso attrattivo o razionalmente indifferente per  $f(z)$ , e sia  $A(z)$  il suo bacino d'attrazione. Si dice *bacino d'attrazione immediato* la componente连通的 di  $A^*(z_0)$  di  $A(z_0)$  contenente  $z_0$ .

Come esempi, in Fig. 2a si ha  $A^*(z_0) = A(z_0)$ ; in Fig. 3a  $z_0$  è un punto fisso parabolico e  $A^*(z_0)$  è rappresentato dalla zona tratteggiata. D'altra parte, Fig. 5a illustra un esempio di punti fissi attrattivi per i quali  $A^*(z_0) \neq A(z_0)$ .

Si può dimostrare che  $A^*(z_0)$  o è semplicemente connesso (intuitivamente, non ha "buchi") o presenta connessione infinita (infiniti buchi, Fig. 5).

DEF. II.17 (bacino d'attrazione immediato per un'orbita). Indicando con  $A^*(z, g)$  il bacino d'attrazione immediato di un punto fisso  $z$  di una qualsiasi applicazione  $f(z)$ , e data un'orbita  $\gamma = \{z_0, f(z_0) \dots f^{n-1}(z_0)\}$  di periodo  $n$ , attrattiva o razionalmente indifferente, definiamo il *bacino d'attrazione immediato per  $\gamma$*  come

$$A^*(\gamma) = \bigcup_{k=0}^{n-1} A^*(f^k(z_0), f^n)$$

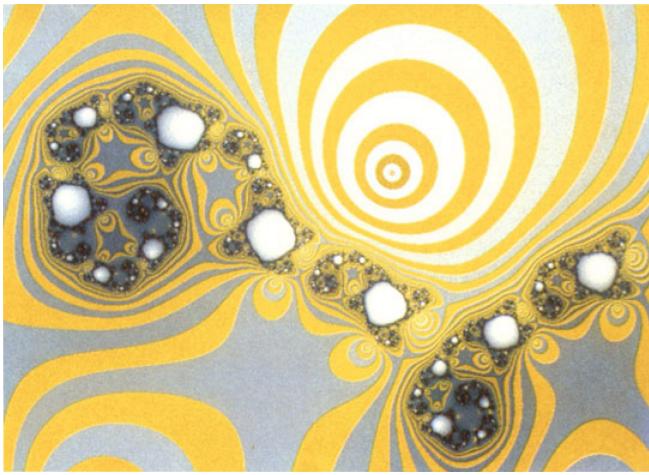
Nel caso di un'orbita irrazionalmente indifferente e tale che  $f^n(z)$  sia linearizzabile in un intorno di  $z_0$ , poniamo invece

$$D(\gamma) = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(D_0) \quad (11)$$

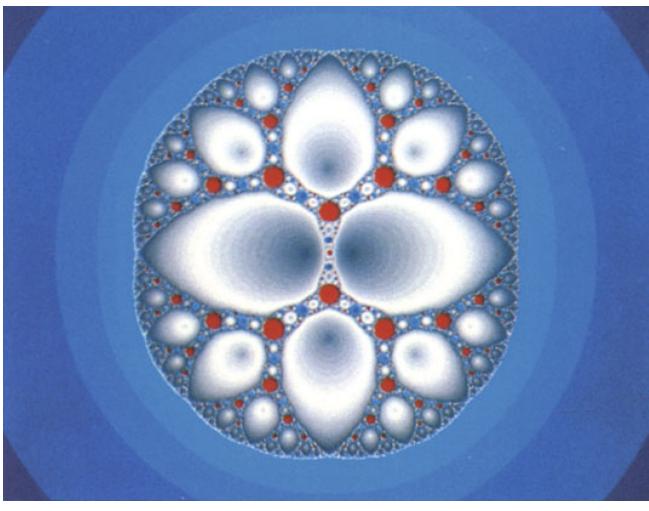
essendo  $D_0$  il disco di Seigel di  $z_0$  per  $f^n(z)$ .<sup>17</sup>

TEOREMA II.4. L'insieme di Fatou  $F_f = \hat{\mathbb{C}} \setminus J_f$  ha un'infinità numerabile di componenti connesse: se  $E_0$  è una di tali componenti,  $E_0$  è *definitivamente periodica* (ossia esiste un valore di  $k$  per il quale  $f^k(E_0)$  è una componente periodica di  $F_f$ ).

<sup>17</sup>Nel caso in cui  $z_0$  sia un punto fisso,  $\gamma$  è semplicemente l'insieme  $\{z_0\}$ .



(a)



(b)

Figura 5: Esempi in cui  $A^*(z_0)$  ha connessione infinita (i buchi sono rappresentati dalle macchie bianche).

1) *Classificazione di Sullivan:* Sia  $F_0$  una componente连通的 periodica di  $F_f$  di periodo  $n$ , ed indichiamo con  $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(E_0)$  il ciclo ad essa associato.<sup>18</sup> Abbiamo che  $\Gamma$  può essere classificato come<sup>19</sup> [4, p. 54]

- 1) un bacino di attrazione immediato  $A^*(\gamma)$  associato ad un ciclo super-atrattivo  $\gamma$ ;
- 2) un bacino di attrazione immediato  $A^*(\gamma)$  associato ad un ciclo atrattivo  $\gamma$ ;
- 3) un bacino di attrazione immediato  $A^*(\gamma)$  associato ad un ciclo parabolico  $\gamma$ ;
- 4) una collezione di dischi di Seigel  $D(\gamma)$  associati ad un ciclo irrazionalmente indifferente  $\gamma$  (cfr. Eq. 11).

2) *Classificazione tramite punti critici:* Ognuna delle classi appena elencate è ulteriormente caratterizzabile in base ai punti critici, di seguito definiti.

<sup>18</sup>Il termine “ciclo” per  $\Gamma$  è usato in senso lato, nel senso che  $\Gamma$  potrebbe non contenere punti periodici (si veda la nota 19).

<sup>19</sup>Esiste anche un’ulteriore alternativa a quelle indicate, non associata ad alcun punto periodico ma simile ai cicli irrazionalmente indifferenti, fornita da una collezione di *anelli di Herman*  $H = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(H_0)$ : su  $H_0$   $f^n(z)$  è analiticamente equivalente ad una rotazione irrazionale dell’anello standard.

DEF. II.18 (valore critico). Un numero  $c \in \hat{\mathbb{C}}$  è detto *valore critico* di  $f(z)$  se l’equazione  $f(z) - c = 0$  ha uno zero di molteplicità maggiore di 1.

DEF. II.19 (punto critico). Gli zeri corrispondenti a punti critici di  $f(z)$  prendono il nome di *punto critico*

PROP. II.11. I punti critici si ottengono come soluzione dell’equazione  $df/dz = 0$ .

Per le classificazioni di Sullivan 1-3,  $A^*(\gamma)$  contiene almeno un punto critico. Nel caso 4 la frontiera di  $D(\gamma)$  appartiene alla chiusura dell’orbita futura di un punto critico; in altre parole, esiste un punto critico  $z_c$  tale che  $\text{Or}^+(z_c)$  sia arbitrariamente vicino a  $\partial D(\gamma)$ .<sup>20</sup>

Se  $s$  è il grado<sup>21</sup> di  $f(z)$ , si può dimostrare che  $f(z)$  ha al più  $2s - 2$  punti critici: pertanto  $f(z)$  ammette solo un numero finito dei cicli del tipo 1-4. Si ritiene che  $D(\gamma)$  contenga sempre un valore critico; in particolare è stato dimostrato che ciò vale per  $f(z) = z^m + c$ , per  $m = 2, 3, \dots$  e  $c \in \mathbb{C}$ .

#### E. Dimensione di Hausdorff per gli insiemi di Julia

DEF. II.20 (insieme frattale). Seguendo la definizione di Mandelbrot, un insieme  $A$  si dice *frattale* se la sua *dimensione di Hausdorff* (Def. A.18) non è intera.

Sebbene gli insiemi di Julia siano tipicamente di natura frattale, poco è noto a riguardo della loro dimensione di Hausdorff. Un risultato notevole nel caso dell’insieme di Julia per  $f(z) = z^2 + c$ , stabilisce che per  $|c| \ll 1$

$$h(J_f) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \ln 2} + \text{termini di ordine superiore}$$

### III. L’INSIEME DI MANDELBROT

L’insieme di Mandelbrot consente di classificare in modo pressoché completo gli insiemi di Julia per  $f(z) = p(z)/q(z)$  con  $p(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$  e  $q(z) = 1$  [4, p. 56]. Per mezzo del cambio di variabili

$$\begin{cases} z = a_2 z' + \frac{a_1}{2} \\ c = a_0 a_2 \pm \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) \end{cases}$$

è possibile ricondurre  $p(z')$  al polinomio coniugato

$$f(z) = z^2 + c \tag{12}$$

portando il punto critico  $z_c = -a_1/2a_2$  nell’origine: pertanto non perdiamo di generalità studiando l’insieme di Julia  $J_c$  associato a  $f_c(z) = z^2 + c$ .

Osserviamo che  $\infty$  è un punto fisso super-atrattivo per  $f_c(z)$  e pertanto  $J_c = \partial A(\infty)$ , per cui  $J_c$  è connesso (come esempi di  $J_c$  connessi si vedano Fig. 2, 3 e Fig. 7) oppure ha struttura cantoriana (Fig. 6); da questo fatto nasce l’insieme di Mandelbrot (Fig. 8).

DEF. III.1 (insieme di Mandelbrot). Definiamo insieme di Mandelbrot  $M$  la porzione del piano complesso t.c.

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ è connesso}\}$$

<sup>20</sup>Discorso simile vale per la collezione di anelli di Herman nella nota 19.

<sup>21</sup>Se  $f(z) = p(z)/q(z)$ ,  $s = \text{grad}(f) = \max(\text{grad}(p), \text{grad}(q))$ .

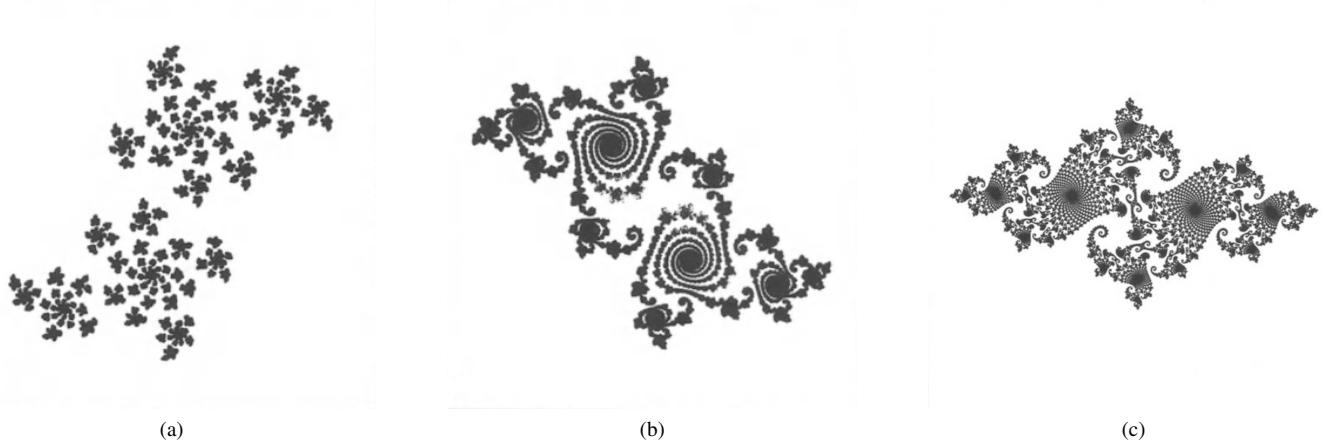
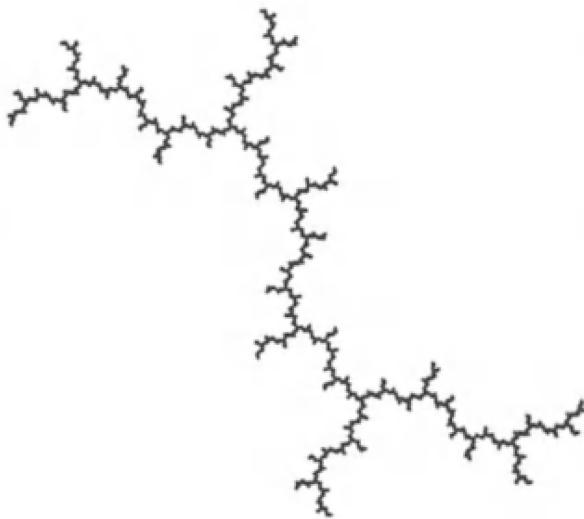
Figura 6: Insiemi di Julia  $J_c$  con struttura cantoriana.

Figura 7: Insieme di Julia connesso ma privo di parte interna, simile ad un dentide.

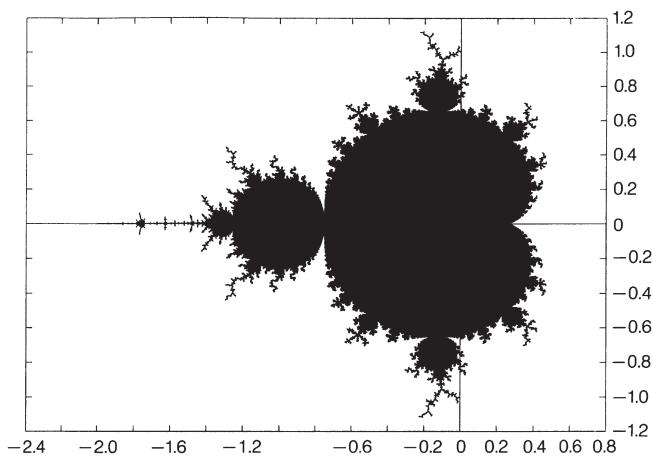


Figura 8: Insieme di Mandelbrot

Per determinare quali punti appartengano all'insieme di Mandelbrot si può far ricorso alle orbite dei punti critici per  $f_c(z)$ , dato che ogni ciclo attrattivo o razionalmente indifferente contiene nel suo bacino d'attrazione almeno un punto critico. I punti critici per  $f_c(z)$  sono solo due,  $\infty$  e 0; per  $\infty$  abbiamo già detto che si tratta di un punto fisso attrattivo, per cui resta da analizzare il comportamento di 0:

- ad esempio per  $c = 1$ , si osserva che  $0 \in A(\infty)$ , per cui in casi come questo non può esservi che l'unico attrattore  $\infty$ ;
- viceversa, per  $c = 0$ , si possono avere due attrattori ed in questo caso  $J_0 = S^1$  (il cerchio unitario, con tutti i punti interni) sono attratti verso l'origine.

Poiché  $J_c$  è connesso solo se  $0 \notin A(\infty)$  (risultato di Julia e Fatou)<sup>22</sup>, l'insieme di Mandelbrot può essere caratterizzato come [4, p. 56]

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(0) = \infty \right\} \quad (13)$$

La definizione di  $M$  attraverso Eq. (13) consente di implementare algoritmi capaci di visualizzare la forma di  $M$  in Fig. 8.

PROP. III.1.  $M$  è un insieme connesso (ossia non è contenuto nell'unione di due insiemi aperti non vuoti disgiunti).<sup>23</sup>

#### A. Dall'ordine al caos

Fig. 10 riassume come l'insieme di Mandelbrot  $M$  “controlla” la struttura degli insiemi di Julia per  $f_c(z) = z^2 + c$ : per definizione gli insiemi di Julia  $J_c$  sono connessi quando  $c$  si trova all'interno di  $M$ ; non appena  $c$  attraversa la frontiera  $\partial M$ , il corrispondente insieme  $J_c$  si frantuma in una polvere di punti [4, p. 1]. Inoltre ognuna delle varie parti di  $M$  rappresenta un enunciato qualitativo sul corrispondente insieme di Julia [4, p. 9]:

<sup>22</sup>In generale diremo che  $z_0$  è un *punto critico* per l'iterazione di  $z_{n+1} = f_c(z_n)$  se  $d_f(z_0)/dz = 0$  [4, p. 184].

<sup>23</sup>Non è noto se  $M$  sia anche localmente connesso, seppure questa sia una congettura diffusa (dato uno spazio metrico  $X$ , un insieme  $A$  è *localmente connesso* se per ogni aperto  $U \subset X$  tale che  $A \cap U \neq \emptyset$  e  $\forall x \in A \cap U$  esiste un intorno  $D(x) \subset U$  tale che  $D(x) \cap A$  sia connesso).

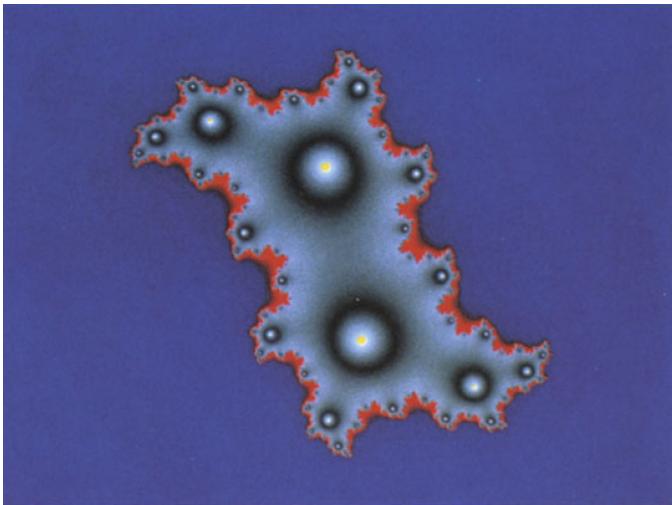


Figura 9: Versione a colori di Fig. 2a: la gradazione indica quante iterazioni di  $f_c(z)$  sono necessarie affinché un punto raggiunga un piccolo disco centrale nell'attrattore (eguale colore significa eguale distanza dinamica dal rispettivo centro di attrazione); pertanto nella regione esterna la colorazione quantifica la velocità di fuga verso  $\infty$ , mentre nella regione interna indica l'evolversi della dinamica limitata [4, p. 9].

- ad esempio il corpo centrale a forma di cardioide contiene tutti quei valori di  $c$  per i quali  $J_c$  è un cerchio, più o meno deformato, che racchiude il dominio di attrazione di un singolo punto, come in Fig. 2a;
- ciascuna gemma corrisponde invece ad un attrattore circolare di particolare periodo, come vedremo negli esempi successivi.

1) *Nella cardioide di Mandelbrot:* Analizziamo quindi più in dettaglio il comportamento della successione basata su  $f_c(z)$  per la generazione del corrispondente insieme di Julia  $J_c$

$$z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c \quad (14)$$

iniziando con l'approfondire il caso per  $c = 0$ ; a seconda del valore di partenza  $z_0$  si verificano tre possibilità:

- per tutti gli  $z_0$  tali che  $|z_0| < 1$  i numeri della successione diventano sempre più piccoli tendendo a 0, ossia l'origine è un attrattore per la successione  $z_{n+1} = z_n^2$ ;
- per  $|z_0| > 1$  l'attrattore è  $\infty$ , con i numeri che diventano sempre più grandi tendendo verso l'infinito;
- i punti per cui  $|z_0| = 1$  si mantengono invece sulla circonferenza unitaria che costituisce la frontiera tra i due domini di attrazione.

Ponendo  $c = -0.12375 + 0.56508i \in M$  otteniamo l'insieme  $J_c$  di Fig. 2a: pur restando valide i tre comportamenti osservati per  $c = 0$ , stavolta la frontiera di  $J_c$  non è più liscia e l'attrattore interno (raffigurato da un punto in Fig. 2a) non è più l'origine. La versione a colori in Fig. 9 rende un'idea migliore del fenomeno:  $J_c$  contiene il punto fisso instabile e tutte le sue controimmagini; contiene inoltre infinite successioni periodiche instabili, anch'esse con le loro controimmagini, e, soprattutto, successioni caotiche senza alcuna regolarità.

L'insieme di Julia in Fig. 2b è ottenuto per  $c = -0.12 + 0.74i$  (in Fig. 10 corrisponde al caso #3, in corrispondenza del

centro del grande bulbo in cima al corpo principale di  $M$ ): in questo caso  $J_c$  non è più una sola circonferenza deformata ma ne presenta infinite che tuttavia formano ancora un insieme connesso, ed i punti interni non sono più attratti verso un unico punto fisso ma verso un 3-ciclo rappresentato dai tre punti in Fig. 2b; il 3-ciclo è generato dalla “triforazione” di un punto fisso che si ha quando  $c$  si sposta dalla parte principale verso la gemma.

2) *Le gemme di Mandelbrot:* Fig. 3a illustra un tipico insieme di Julia corrispondente ad un punto di  $M$  in cui una gemma si connette al corpo centrale: in particolare  $J_c$  in Fig. 3a si ha per  $c = -0.481762 - 0.531657i$ , punto di germinazione di una gemma per un 5-ciclo stabile (in Fig. 10 è il caso #8); non appena  $c$  penetra nella gemma, i cinque punti di tale ciclo si “aprono” dal punto fisso. In corrispondenza del punto di biforcazione, l'insieme di Julia raggiunge l'attrattore, adesso marginalmente stabile (dinamica parabolica): Fig. 3b, 3c mostrano ulteriori esempi di Julia di questo tipo.

Oltre ai punti di germinazione delle gemme, l'insieme di Mandelbrot presenta ulteriori punti di frontiera. Ad esempio Fig. 4 corrisponde a  $c = -0.39054 - 0.58679i$  (caso #9 in Fig. 10), con punto fisso ancora marginalmente stabile: a differenza del caso parabolico, la frontiera non si estende fino al punto fisso che non viene raggiunto; i cerchi raffigurati in Fig. 4b attorno al punto fisso sono invarianti, ossia se il punto iniziale appartiene ad uno di essi, a questo apparterranno tutti i punti della successione. All'interno della regione racchiusa da  $J_c$  il punto si muove dalle gemme periferiche, più piccole, verso quelle più grandi fino a raggiungere il disco di Seigel contenente il punto fisso: penetrato al suo interno, si mette a ruotare sul corrispondente cerchio invariante.

I quattro esempi descritti costituiscono i casi tipici in cui la frontiera generata da  $f_c(z)$  definisce una regione interna. Riassumendo:

- se  $c$  è interno al corpo centrale di  $M$ , abbiamo per  $J_c$  un cerchio frattale deformato che circonda un unico punto fisso attrattivo (Fig. 2a);
- se  $c$  è interno ad una gemma,  $J_c$  è costituito da infiniti cerchi frattali deformati che circondano i punti di un attrattore periodico e delle rispettive controimmagini (Fig. 2b, 2c);
- quando  $c$  è un punto di germinazione di una gemma siamo invece nel caso parabolico, con la frontiera che presenta dei viticci che raggiungono l'attrattore, marginalmente stabile (Fig. 3);
- quando  $c$  è un qualunque altro punto della cardioide o di una gemma (specificando alcune condizioni sulla sua irrazionalità) abbiamo un disco di Seigel come in Fig. 4.

Come ulteriori esempi, le illustrazioni in Fig. 11 mostrano a colori la struttura interna dei domini di attrazione: Fig. 11a riporta un 3-ciclo attrattivo, mentre Fig. 11b raffigura un ciclo di periodo 11.

3) *Le antenne di Mandelbrot:* Oltre alla regioni già analizzate, l'insieme di Mandelbrot presenta antenne più o meno ramificate e contorte: l'insieme di Julia associato ad un qualunque punto di un'antenna ne riproduce approssimativamente la forma (come in Fig. 7, caso #4 in Fig. 10, generato da  $c = i$ );

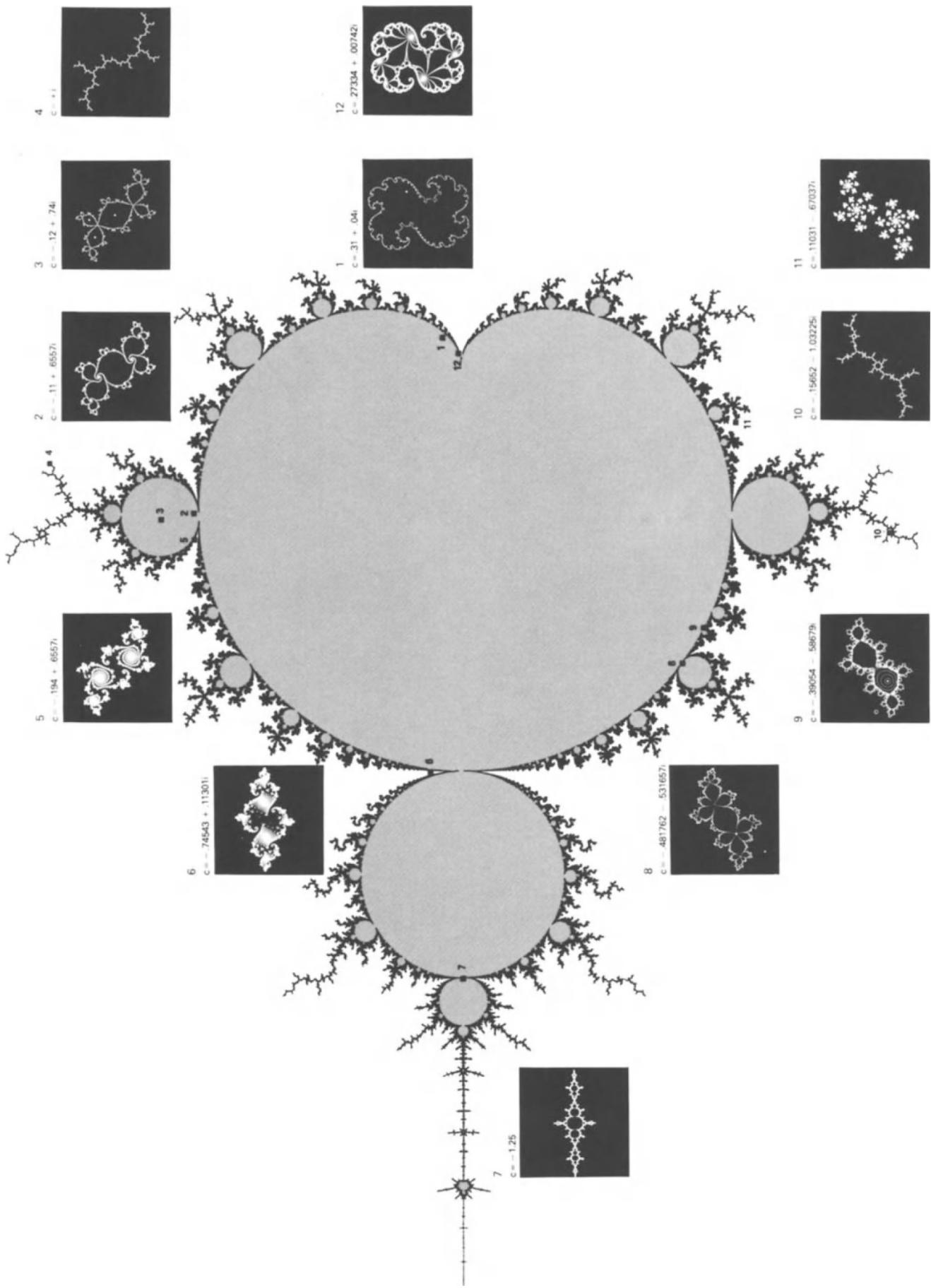


Figura 10: Legame tra l'insieme di Mandelbrot e la struttura degli insiemi di Julia relativi a  $f_c(z) = z^2 + c$ .

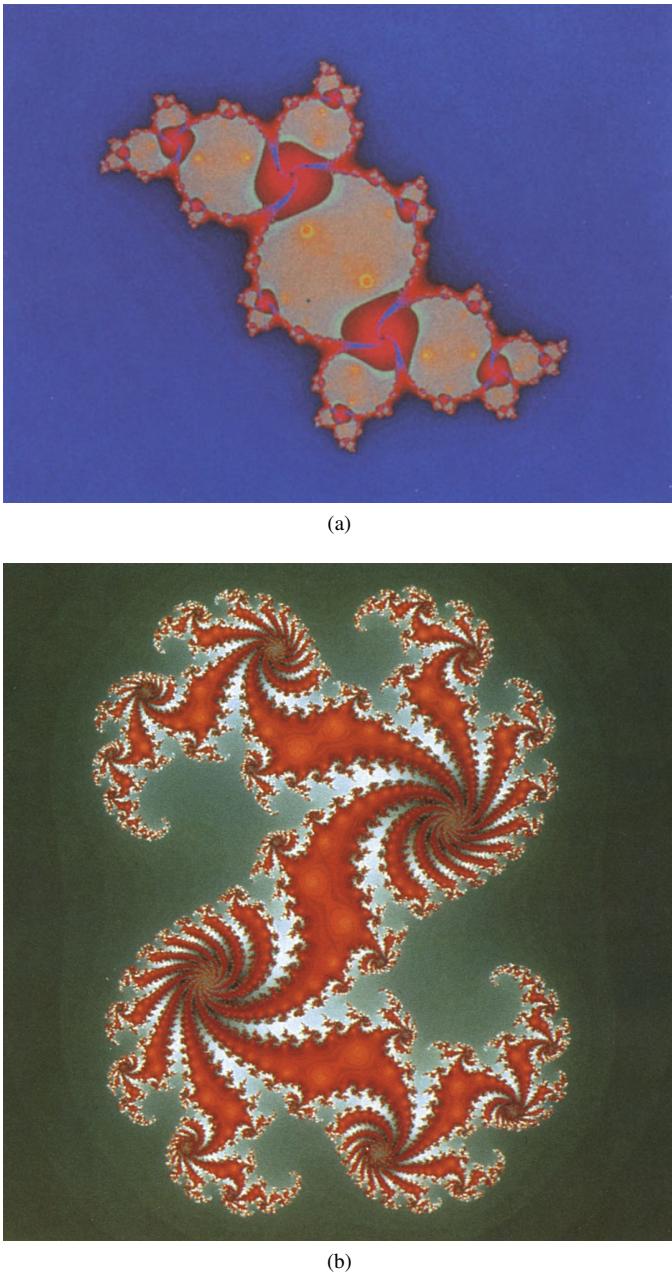


Figura 11: Struttura interna dei domini di attrazione.

tali dendriti sono privi di parte interna e l'unico attrattore è  $\infty$ . In questi casi l'insieme di Julia è ora la frontiera di un singolo dominio d'attrazione e contiene tutti quei punti che non evolvono verso l'attrattore.

Osservando più da vicino le antenne di  $M$ , si constata che esse contengono repliche in scala del corpo centrale, e le copie più grandi a loro volta ne contengono di più piccole in uno zoom senza fine. Scegliendo  $c$  in una delle repliche di  $M$  si ottiene un insieme di Julia che è una combinazione di un dendrite e dell'insieme di Julia generato dal corrispondente valore di  $c$  nel corpo centrale di  $M$ , replicato infinite volte ed appiccicato sul dentrite (Fig. 12).

4) All'esterno di Mandelbrot: Infine, scegliendo  $c$  esternamente a  $M$  abbiamo un unico attrattore come nella struttura

puramente dendritica: in tal caso però  $J_c$  si disperde in una nuvola di punti detta *polvere di Fatou* (Fig. 6, le cui illustrazioni corrispondono da sinistra a destra ai casi #11, 5, 6 di FIg. 10), che si dirada allontanandosi da  $M$ .

5) La frontiera di Mandelbrot: La frontiera dell'insieme di Mandelbrot è interessante non solo per la diversa struttura di  $J_c$  mano a mano che  $c$  passa dall'interno all'esterno dell'insieme di Mandelbrot, ma anche perché (come si può già intuire da Fig 12b) essa stessa esibisce una natura frattale, testimoniata dalle illustrazioni in Fig. 13–17.

Un aspetto notevole è la somiglianza tra la struttura di un dettaglio di  $M$  e la forma del corrispondente insieme di Julia: ad esempio  $J_c$  in Fig. 6c si riferisce ad un punto  $c$  prossimo al ricciolo nella frontiera di  $M$  in Fig. 16.

#### IV. CALCOLO DEGLI INSIEMI DI JULIA E MANDELBROT

##### A. Julia

Per gli insiemi di Julia gli enunciati in Prop. II.4, II.5 consentono di sviluppare degli algoritmi per visualizzare la dinamica esibita da  $f^n(z)$  [4, p. 34].

1) Metodo d'iterazione inversa: Dato un punto periodico repulsivo  $\bar{z} \in J_f$ , Prop. II.4 suggerisce di calcolare l'insieme

$$J_f^n = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) = \bar{z} \text{ per qualche } k \leq n\}$$

Poiché  $J_f$  è la chiusura (cfr. Def. A.11) dell'unione di tutti i possibili  $J_f^n$ , ossia

$$J_f = \overline{\bigcup_{n \geq 0} J_f^n}$$

si può pensare di ottenere una rappresentazione grafica di  $J_f$  raffigurando gli insiemi  $J_f^n$  per un numero  $n$  sufficientemente grande.

Tale impostazione naïve tuttavia richiede di essere modificata per dare buoni risultati, utilizzando solo una parte di punti di  $J_f^k$  ( $k < n$ ) che appartengono a regioni ad alta concentrazione:

- poiché il numero di elementi in  $J_f^n$  cresce come  $d^n$ , dove  $d$  è il grado di  $f(z)$ , l'albero degli elementi di  $J_f$  viene indicizzato in modo efficiente secondo lo schema di Fig. 14 tale da richiedere di memorizzare solo  $d(n-1)$  valori per generare  $J_f$ ;
- si dispone di un reticolo a maglie quadrate di lato  $\beta \ll 1$ ;
- per ogni elemento del reticolo viene interrotto l'utilizzo dei suoi punti interni quando ne avremo visitati un numero pari ad una soglia prefissata  $N_{max}$

2) Metodo di esame del bordo: Quando il metodo precedente fallisce, si possono usare metodi meno sofisticati, basati su Prop. II.5. Ricordiamo che se  $f(z)$  possiede un punto attrattivo  $\check{z}$  (ossia  $|df(\check{z})/dz| < 1$ , con  $f(\check{z}) = \check{z}$ ), si ha che  $J_f = \partial A(\check{z})$  essendo  $A(\check{z})$  il bacino d'attrazione di  $\check{z}$ .

Se  $f(z)$  possiede più di un punto fisso attrattivo  $\{\check{z}_j\}$ ,  $j > 1$ , l'algoritmo di calcolo è così strutturato (fissate due costanti  $N$  e  $0 < \varepsilon \ll 1$ ) [4, p. 38]:

- si dispone un reticolo a maglie quadrate di lato  $\beta \ll 1$ ;
- dato un generico quadrato  $B$  del reticolo supponiamo che  $B \cap J_f \neq \emptyset$ , per cui esso dovrà contenere punti degli  $A(\check{z}_j)$

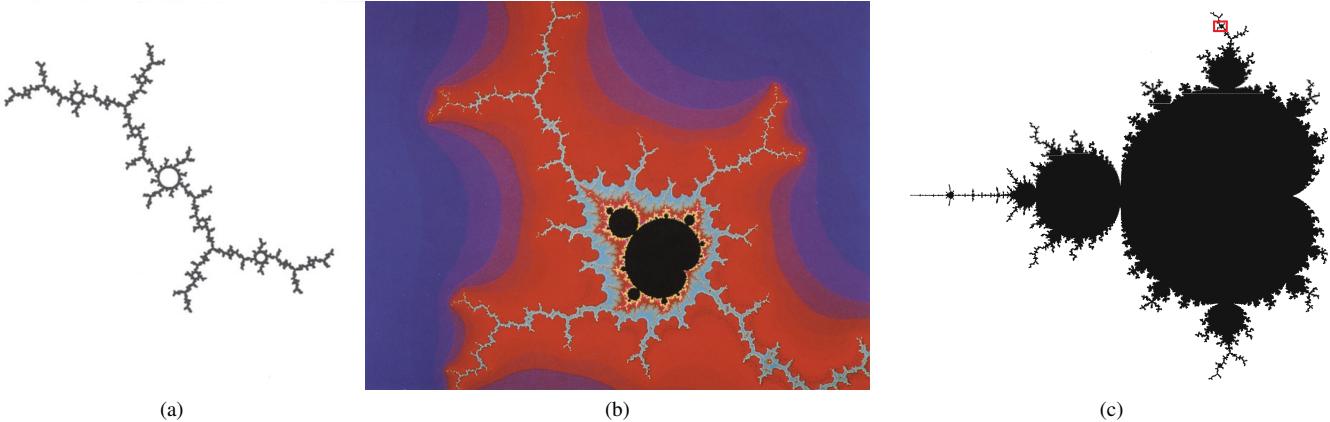


Figura 12: L'insieme di Julia in (a) è ottenuto scegliendo  $c$  all'interno della replica dell'insieme di Mandelbrot (b) situato in una delle antenne in alto di  $M$  evidenziata dal riquadro rosso in (c).

- detti  $c_1 \dots c_4$  i vertici di  $B$ , occorre verificare se e per quale  $\tilde{z}_j$  vale  $c_i \in A(\tilde{z}_j)$  secondo il seguente criterio

$$\exists k \leq N : |f^k(c_i) - z_j| < \varepsilon \Rightarrow c_i \in A(\tilde{z}_j)$$

- se  $c_1 \dots c_4$  appartengono tutti allo stesso punto bacino di attrazione, a  $B$  viene assegnato il colore bianco;
- viceversa,  $B$  viene colorato di nero.

In generale, disponendo di ulteriori informazioni su  $f(z)$ , non è necessario supporre l'esistenza di almeno due punti fissi attrattivi: ad esempio è possibile confrontare un bacino d'attrazione (di un punto fisso attrattivo o parabolico) con un disco di Seigel o addirittura su un insieme sul quale  $f(z)$  diverge; inoltre, nel caso di un punto attrattivo  $\tilde{z}$  di periodo  $m$ , gli  $f^k(\tilde{z})$ , con  $k < m$ , sono punti fissi attrattivi di  $f^m(\tilde{z})$ .

3) *J<sub>c</sub> tramite forza bruta:* Un approccio “brutale” per visualizzare gli insiemi di Julia  $J_c$  ed i suoi bacini d'attrazione si basa sull'iterare semplicemente la successione  $\{f_c^n(z)\}$  per un numero sufficientemente elevato, verificandone ad ogni passo il comportamento, secondo lo schema che segue: dal momento che  $\infty$  è sempre punto attrattivo, lo scopo è quello di colorarne il bacino d'attrazione indicando con  $K+1$  colori il tempo di fuga verso l'infinito (il colore per  $k = 0$  è impiegato per identificare i punti non attratti da  $\infty$ ) [4, p. 183].

- Dato  $c$  si fissi un valore  $m$  (ad esempio  $m = 100$ ) ed uno  $K > 0$  sufficientemente elevato, e sia inoltre  $\mathcal{R} = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \subset \mathbb{C}$  la regione da analizzare;
- Posto poi come  $a, b$  le dimensioni in pixel dell'immagine  $\mathcal{I}$  corrispondente alla regione  $\mathcal{R}$ , siano

$$\Delta_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{a - 1}$$

$$\Delta_y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{b - 1}$$

- per ogni pixel  $(\eta_x, \eta_y)$  dell'immagine  $\mathcal{I}$ , con  $\eta_x = 0 \dots a-1$  e  $\eta_y = 0 \dots b-1$ , si eseguano i seguenti passi:

- $k \leftarrow 0$
- $z_0 \leftarrow (x_{\min} + \eta_x \Delta_x) + i(y_{\min} + \eta_y \Delta_y)$

- $z_{k+1} \leftarrow f_c(z_k)$
- $r \leftarrow |z_{k+1}|^2$
- $k \leftarrow k + 1$
- se  $r < m$  e  $k < K$  tornare al passo 3
- se  $r > m$ , assegnare  $k$  al pixel in esame e passare a pixel successivo;
- se  $k = K$ , porre  $k = 0$  (colore “nero”) per il pixel corrente e passare a quello successivo;

### B. Mandelbrot

La caratterizzazione data da Eq. (13) per l'insieme di Mandelbrot  $M$  si presta bene ad un trattamento numerico per visualizzare graficamente tale insieme: scegliendo un reticolo di punti  $\{c_i \in \mathbb{C}\}$ , si verifica per ogni  $c_i$  se dopo  $K$  iterazioni il modulo della successione

$$0 \mapsto c_i \mapsto c_i + c_i^2 \mapsto \dots$$

è limitato da una prefissata costante  $m$  [4, p. 56]. Ad esempio Fig. 8 è stata ottenuta ponendo  $K = 1000$  e  $m = 100$ .

In maniera analoga a § IV-A3, supponiamo quindi di avere un'immagine  $\mathcal{I}$  con  $a \times b$  punti e  $K + 1$  colori relativa ad una regione del piano complesso  $\mathcal{R} = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ , assegnando il colore per  $k = 0$  ai punti non attratti da  $\infty$ , e poniamo  $m = 100$  [4, p. 184]. Per ogni punto  $(\eta_x, \eta_y)$  di  $\mathcal{I}$ , eseguire i seguenti passi:

- $c \leftarrow (x_{\min} + \eta_x \Delta_x) + i(y_{\min} + \eta_y \Delta_y)$
- $k \leftarrow 0$ ,  $z_0 \leftarrow 0$
- $z_{k+1} \leftarrow f_c(z_k)$
- $r \leftarrow |z_{k+1}|^2$
- $k \leftarrow k + 1$
- se  $r < m$  e  $k < K$  tornare al passo 3
- se  $r > m$ , assegnare  $k$  al pixel in esame e passare a pixel successivo;
- se  $k = K$ , porre  $k = 0$  (colore “nero”) per il pixel corrente e passare a quello successivo;

### V. DINAMICA DI VERHULST

Per concludere apriamo una parentesi sulla legge di Verhulst che modella la crescita di una popolazione nel tempo, in

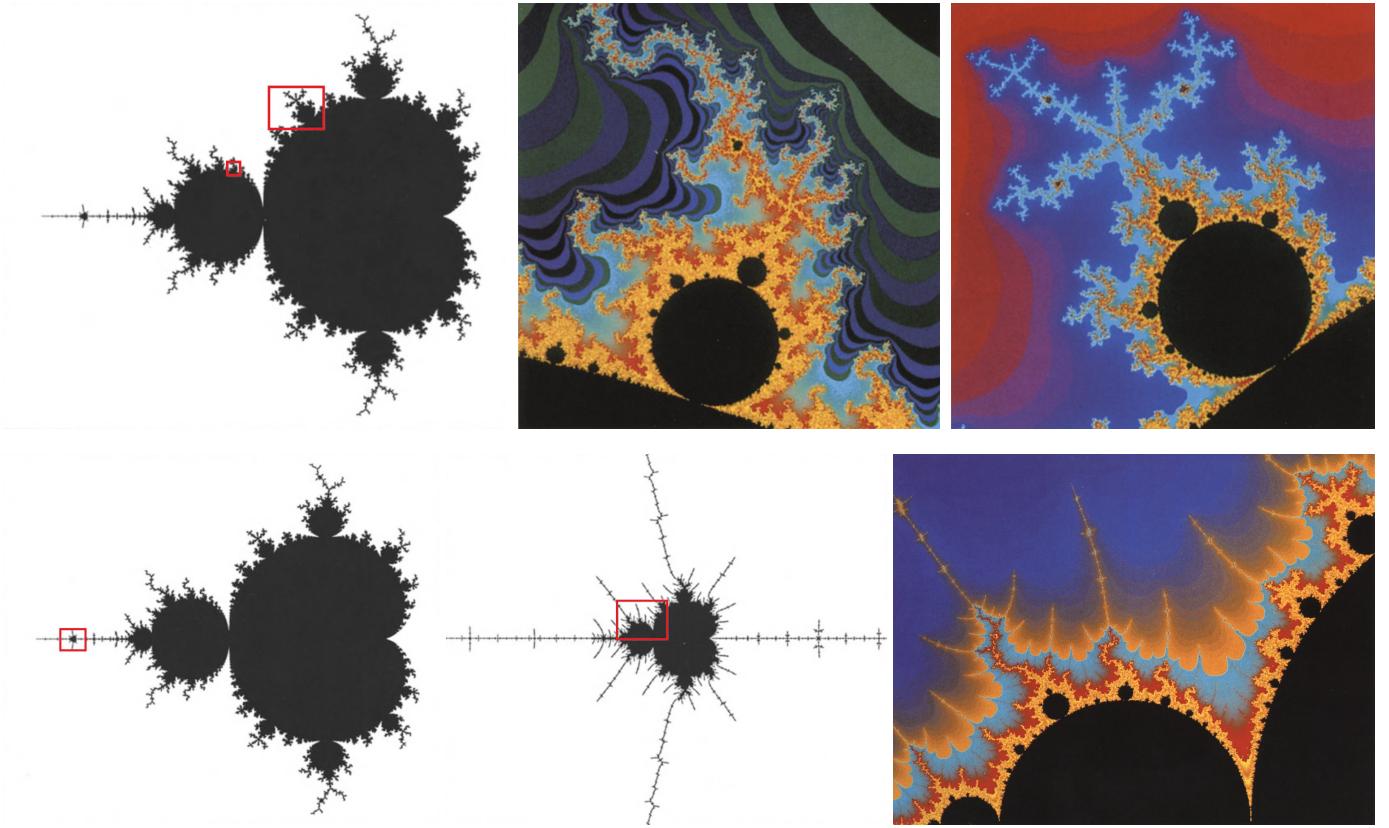


Figura 13: Dettagli della frontiera di  $M$ , in più porzioni del piano complesso.

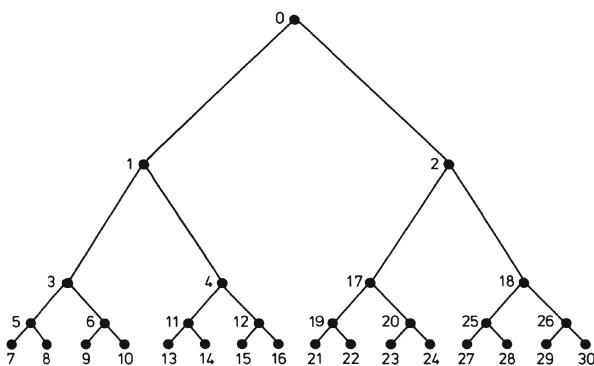


Figura 14: Gerarchia efficiente di immagazzinamento in memoria dell'orbita inversa per  $f(z)$  con grado due.

quanto presenta delle connessioni con la successione  $f_c^n(0)$  per  $M$  (si veda Eq. (13)) quando  $\text{imag}(c) = 0$  (ossia  $c \in \mathbb{R}$ ).

La crescita di una popolazione è generalmente espressa dal tasso di crescita  $\rho$ , ossia dall'incremento annuo rispetto alla popolazione totale  $x_n$  dell'anno precedente [4, p. 23]:

$$\rho = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

Nell'ipotesi di  $\rho$  costante, la legge di crescita sarà lineare

$$x_{n+1} = (1 + \rho)x_n$$

con conseguente incremento numerico esponenziale in  $n$  anni:

$$x_n = (1 + \rho)^n x_0$$

Poiché nessuna crescita può essere illimitata, occorre introdurre delle limitazioni a tale modello, ipotizzando un tasso di crescita variabile.

Partendo dal presupposto che una nicchia ecologica possa assicurare al più la sopravvivenza di una popolazione di  $X$  individui (numero che possiamo porre arbitrariamente pari a 1), P. F. Verhulst ipotizzò nel 1845 un  $\rho$  proporzionale a  $1 - x_n$

$$\rho = r(1 - x_n) \quad (15)$$

dove la costante  $r > 0$  rappresenta il *parametro di crescita*; in questo modo, se  $x_n < 1$  la popolazione può ancora crescere fino al raggiungimento della grandezza limite  $X = 1$ . La legge diviene pertanto

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n - rx_n^2 \quad (16)$$

Eq. (16) presenta due valori per i quali la popolazione è stazionaria ( $x_{n+1} = x_n$ ):  $x_0 = 0$  e  $x_0 = 1$ ; mentre  $x_0 = 0$  è sicuramente uno stato *instabile* (per qualsiasi  $x_0 = \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  piccolo a piacere, l'anno seguente avremo  $x_1 \approx x_0 + rx_0$  e così via), il comportamento di  $x_0 = 1$  è molto più articolato.

Ad esempio ponendo  $x_0 = 0.1$  e  $r = 1.8$ , abbiamo che  $x_n$  evolve come in Fig. 18a: in un primo momento, essendo il valore di  $x_n$  ben al di sotto di 1, la popolazione inizia a crescere fino a superare alla terza iterazione il valore limite

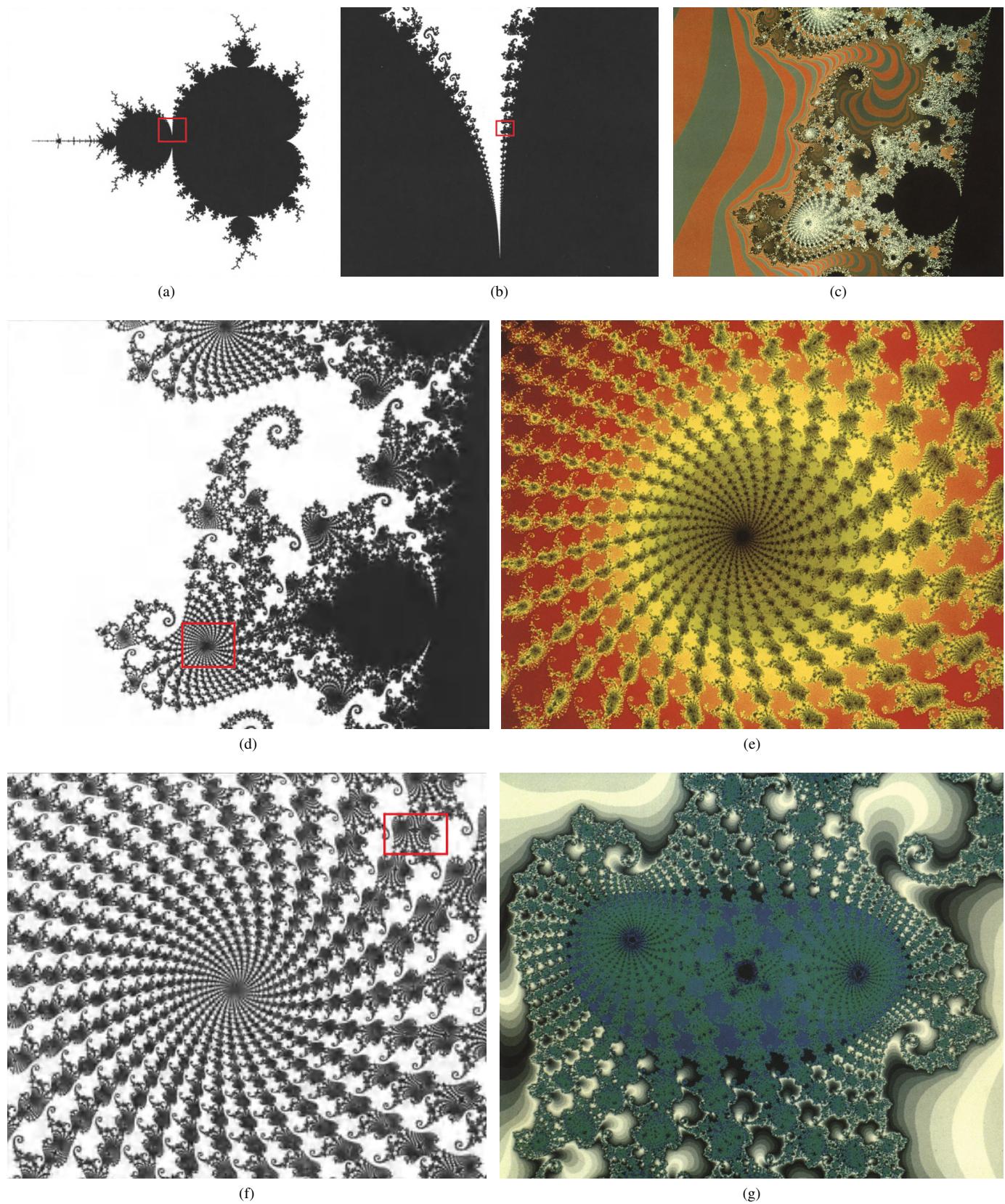


Figura 15: Dettagli della frontiera di  $M$ , con zoom progressivi.

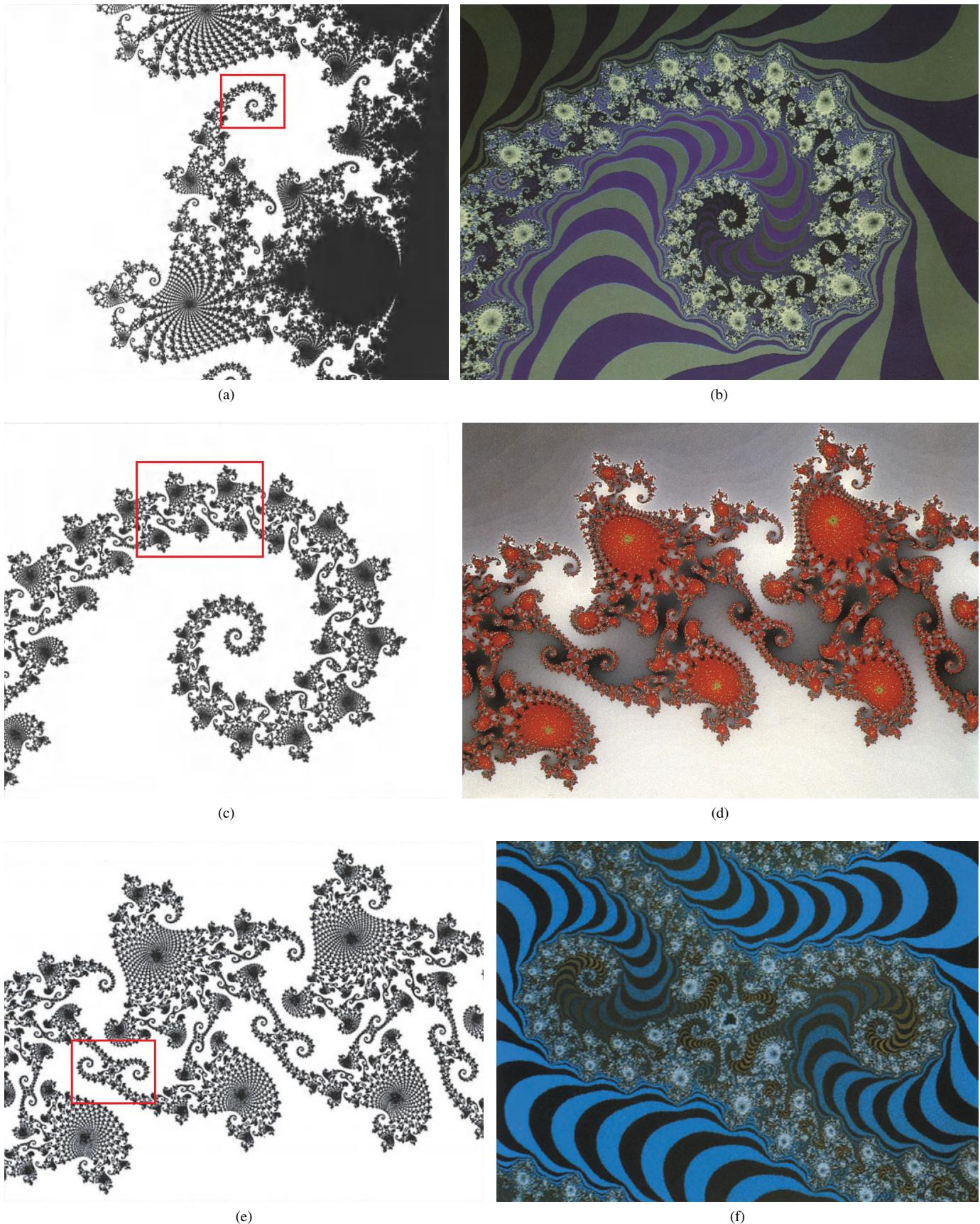
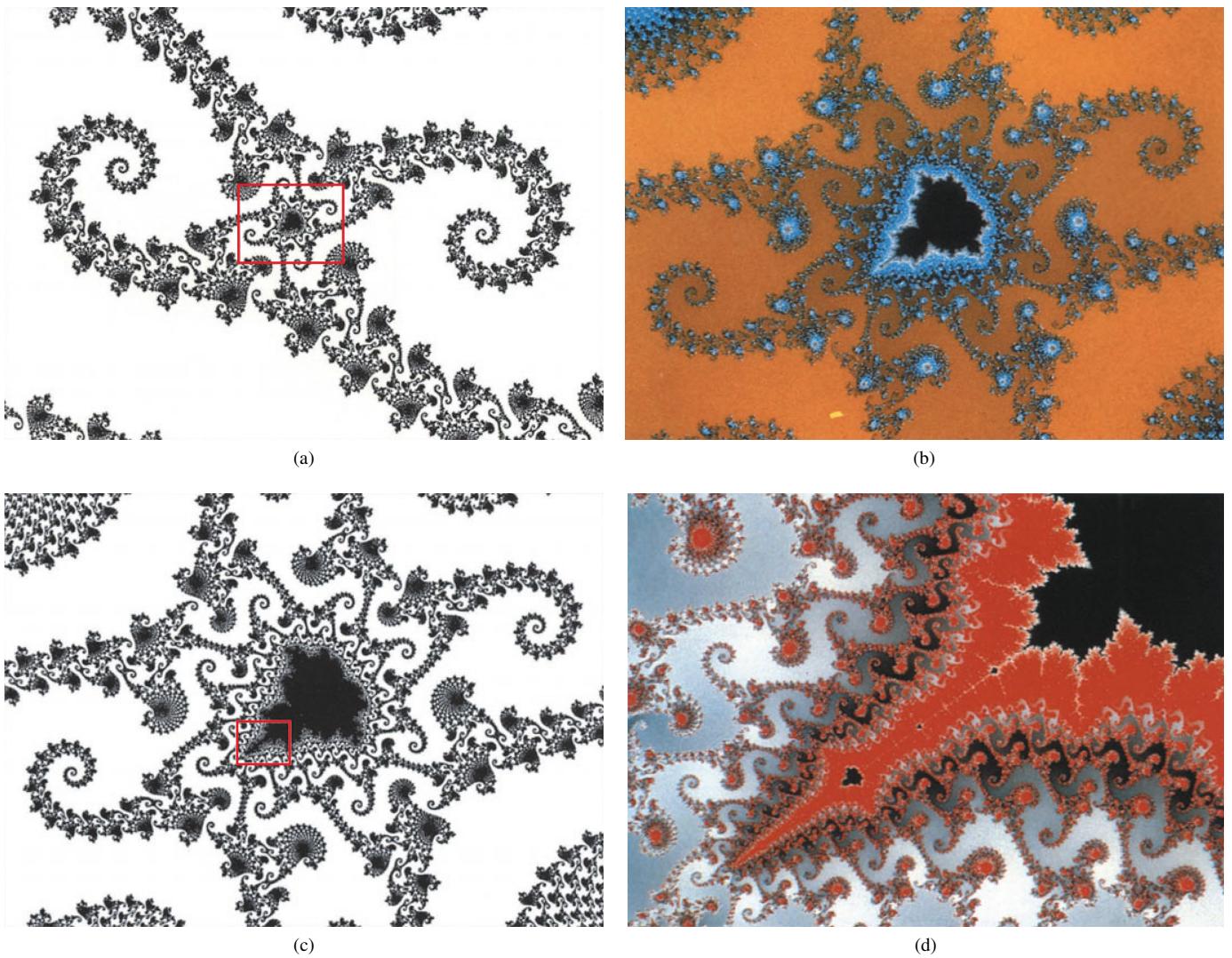


Figura 16: Dettagli della frontiera di  $M$ , riprendendo da Fig. 15d.

Figura 17: Dettagli della frontiera di  $M$ , continuando da Fig. 16f.

$X = 1$ ; in tal caso, linearizzando Eq. (16) intorno a  $x = 1$  abbiamo che

$$\Delta_{n+1} = (1 - r)\Delta_n \quad (17)$$

per cui la deviazione  $\Delta$  da 1 si decresce in valore assoluto ( $r = 1.8 \Rightarrow \Delta_{n+1} = -0.8\Delta_n$ ) ed il processo si stabilizza sullo stato finale  $x = 1$ .

In generale, da Eq. (17) per  $r \in (0, 2)$  avremo che le variazioni assolute della popolazione diminuiranno rispetto a quanto fatto all'iterazione precedente. Vediamo cosa accade per  $r = 2.3$  (Fig. 18b): il processo diviene instabile oscillando tra due livelli, suggerendo di analizzare la stabilità dei punti fissi per

$$x_{n+2} = f(f(x_n)) = f^2(x_n)$$

Si verifica che essi sono stabili fino a che  $r < \sqrt{6} \approx 2.449$ .

Fig. 18c illustra cosa accade per  $r = 2.5$ : il processo si stabilizza su un'oscillazione di periodo 4. In generale si hanno via via altri raddoppiamenti del periodo su intervalli sempre più piccoli di  $r$  fino ad arrivare a  $r \approx 2.570$  oltre il quale il processo non presenta più alcuna periodicità assumendo

il classico comportamento *caotico*: seppur governato da una legge deterministica, il valore di  $x_n$  diventa impredicibile su lunghi intervalli di tempo (Fig. 18d).

Il *diagramma di biforcazione* in Fig. 19 illustra lo scenario per il raddoppiamento del periodo nel caso di Eq. (16): il parametro di crescita  $r$  varia lungo l'ascissa per  $r \in [1.9, 3)$ ; per ogni valore di  $r$  sono raffigurate 120 iterazioni di Eq. (16) dopo un transitorio di 5000 iterazioni (così da permettere il raggiungimento dell'attrattore). Il diagramma consiste di un solo punto per  $r < 2$ , di due punti per  $2 < r\sqrt{6}$ , poi di 4, 8, 16 punti e così via: raggiunta la soglia critica  $r = 2.570$  la regione caotica dei punti dell'attrattore riempie l'intera banda.

Se  $r_k$  è il valore del parametro di crescita alla  $k$ -esima biforcazione (per il quale il periodo  $2^k$  diventa instabile, mentre  $2^{k+1}$  acquista stabilità), si può dimostrare che il rapporto delle lunghezze degli intervalli successivi

$$\delta_k = \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k}$$

tende ad un limite finito:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \delta = 4.669 \dots$ . Tale numero è una caratteristica dello scenario di raddoppiamento

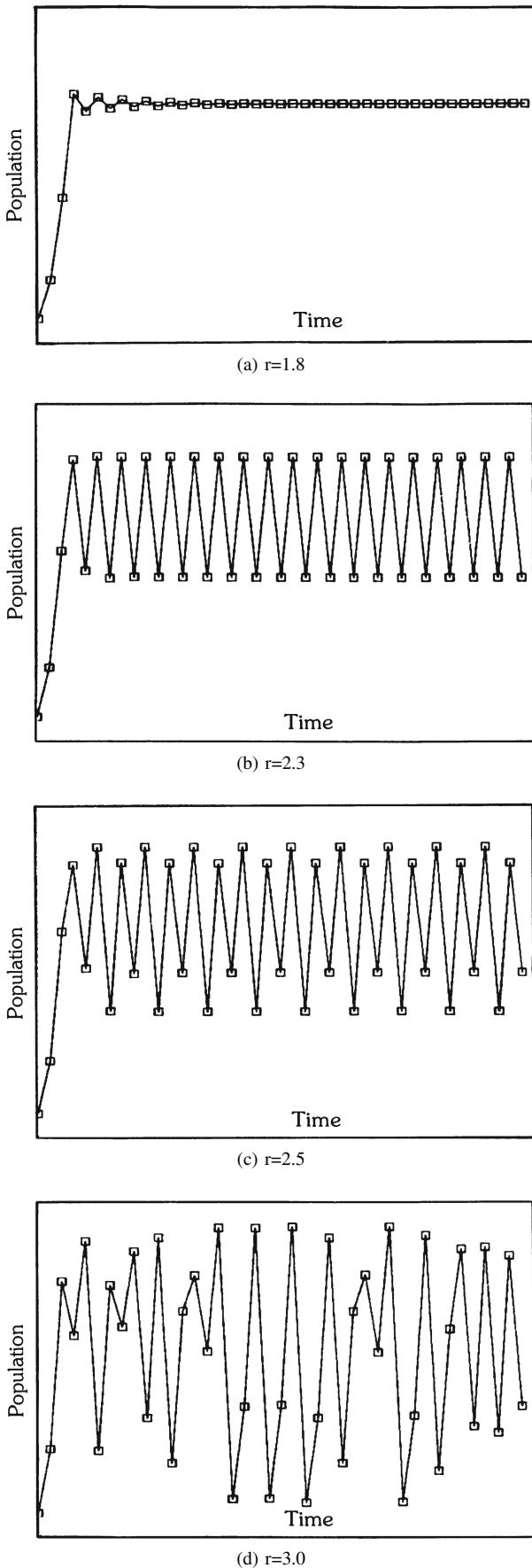


Figura 18: Evoluzione della popolazione  $x_n$  secondo Eq. (16) per valori significativi di  $r$ .

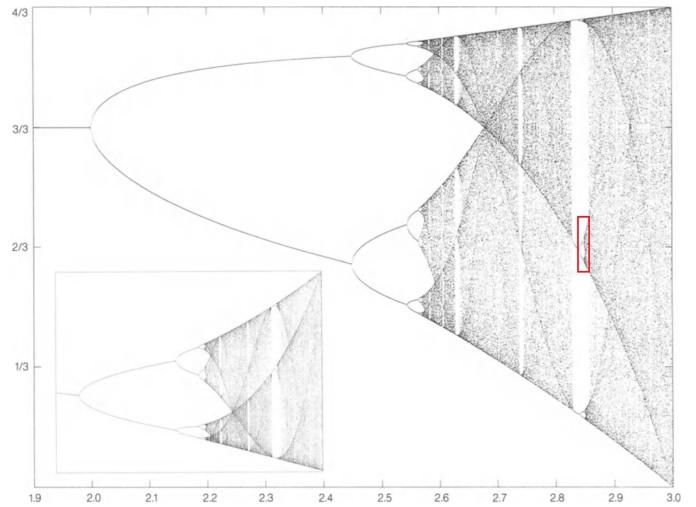


Figura 19: Diagramma di biforcazione per Eq. (16): è riportato anche un ingrandimento (non in scala) in corrispondenza del riquadro in rosso. In ascissa il valore impostato per  $r$ ; in ordinata i valori assunti a regime da  $f^k(x_0)$ .

del periodo comune a moltissime dinamiche unidimensionali. Fig. 19 contiene una serie di altri alberi di biforcazione, sempre caratterizzati dal parametro  $\delta$ : nel bel mezzo della regione caotica è possibile riscontrare finestre in cui l'attrattore è ancora formato da punti distinti.

#### A. Mandelbrot su $\mathbb{R}$

Per l'insieme di Mandelbrot, lo scenario del raddoppiamento del periodo secondo Verhulst si realizza sull'asse reale: il periodo 2 è stabile nella grande gemma che contiene i valori  $-1.25 < c < -0.75$ , ed è connessa al corpo centrale sul lato sinistro. Il punto  $c = -2$  è il punto finale dell'antenna di  $M$  e corrisponde al valore  $r = 3$  nel procedimento di Verhulst; Fig. 20 illustra questa relazione: le biforcazioni corrispondono ai punti di gemmazione mentre le finestre che interrompono il velo caotico corrispondono a piccole copie dell'insieme di Mandelbrot situate sull'antenna principale.

## APPENDICE A RICHIAMI DI TOPOLOGIA

#### A. Concetti generali

**DEF. A.1 (distanza).** Dato un generico insieme  $X$ , ogni funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tale da soddisfare le seguenti proprietà è detta *distanza*,  $\forall x, y, z \in X$ :

- 1)  $d(x, y) \geq 0$
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$
- 3)  $d(x, y) = 0 \iff x \equiv y$
- 4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**DEF. A.2 (spazio metrico).** Uno *spazio metrico*  $(X, d)$  è costituito da un insieme  $X$  su cui è stata definita una distanza (o *metrica*)  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ogni sottoinsieme  $A \subset X$  in uno spazio metrico  $(X, d)$  definisce anch'esso uno spazio metrico (con la metrica indotta),

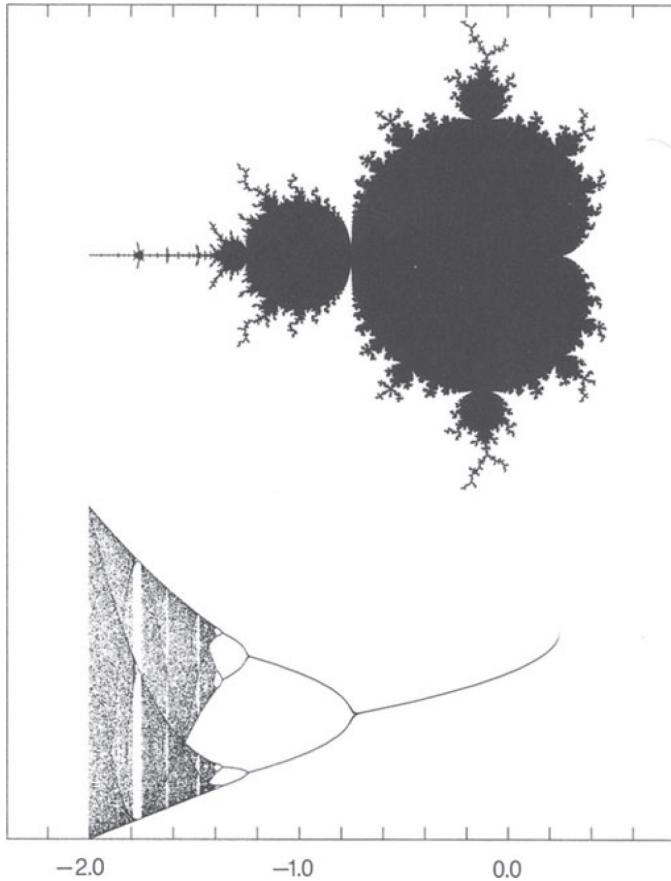


Figura 20: Relazione tra l'insieme di Mandelbrot e lo scenario del raddoppiamento di periodo per  $c \in \mathbb{R}$ .

restringendo  $d$  a  $A \times A \subset X \times X$ . Dato un generico insieme  $A \subset X$ , introduciamo quindi le seguenti definizioni.

DEF. A.3 (disco o intorno). Il *disco* di centro  $x_0 \in X$  e raggio  $\varepsilon > 0$  è l'insieme

$$D(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

DEF. A.4 (punto interno). Un punto  $x_0 \in A$  si dice *interno ad A* se

$$\exists \varepsilon > 0 : D(x_0, \varepsilon) \subset A$$

DEF. A.5 (punto esterno). Un punto  $x_0 \in A$  si dice *esterno ad A* se è interno al suo complementare  $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$

DEF. A.6 (punto di accumulazione). Un punto  $x_0 \in X$  è *di accumulazione per A* se ogni intorno di  $x_0$  contiene un punto  $x \in A$ , con  $x \neq x_0$ .

DEF. A.7 (insieme aperto). Un insieme  $A$  si dice *aperto* se ogni suo punto è interno, ossia

$$\forall x_0 \in A, \exists \varepsilon > 0 : D(x_0, \varepsilon) \subset A$$

DEF. A.8 (insieme chiuso). Un insieme  $A$  si dice *chiuso* se il suo complementare  $A^c$  è aperto.

DEF. A.9 (insieme denso). Un insieme  $A$  si dice *denso* in  $X$  se ogni insieme aperto  $B \subset X$ ,  $B \neq \emptyset$ , contiene almeno un punto di  $A$ .<sup>24</sup>

DEF. A.10 (interno o apertura di un insieme). L'*interno*  $\overset{\circ}{A}$  di  $A$  è l'insieme dei punti interni ad  $A$ .

DEF. A.11 (chiusura di un insieme). La *chiusura*  $\bar{A}$  di  $A$  è l'insieme dei punti non esterni ad  $A$ , ossia  $\bar{A} = ((\overset{\circ}{A})^c)^c$ .<sup>25</sup>

DEF. A.12 (frontiera di un insieme). La *frontiera*  $\partial A$  di  $A$  è l'insieme dei punti che non sono né interni né esterni ad  $A$ .

DEF. A.13 (insieme sconnesso). Un insieme  $A$  è *sconnesso* se esistono almeno due insiemi aperti  $A_1$  e  $A_2$  tali che

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= A \\ A_1 \cap A_2 &= \emptyset \end{aligned}$$

DEF. A.14 (insieme connesso). Un insieme  $A$  non sconnesso è detto *connesso*.

### B. La dimensione di Hausdorff

Per definire formalmente la dimensione di Hausdorff [4, p. 32] sono necessari i concetti di diametro e del  $\delta$ -ricoprimento di un insieme [5, p. 10].

DEF. A.15 (diametro di un insieme). Definiamo il *diametro di un insieme E*, in uno spazio metrico  $(X, d)$ , come<sup>26</sup>

$$\text{diam } E = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$$

Poniamo inoltre  $\text{diam } \emptyset = 0$ .

DEF. A.16 ( $\delta$ -ricoprimento di un insieme). Dato un insieme  $E$  e posto  $\delta \geq 0$ , sia  $\{U_i\}$  una successione di insiemi; se  $E \subset \bigcup_i U_i$  e  $\text{diam } U_i \in [0, \delta] \forall i$ , diciamo che  $\{U_i\}$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $E$ .

DEF. A.17 (misura esterna di un insieme). Sia  $E$  un sottoinsieme di uno spazio metrico, e sia  $s \geq 0$ . La *misura esterna s-dimensionale*  $\mathcal{H}_s(E)$  è definita da

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(E) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \\ \mathcal{H}_\delta^s(E) &= \inf \left\{ \sum_i (\text{diam } U_i)^s \right\} \end{aligned}$$

con l'estremo inferiore calcolato su tutti i  $\delta$ -ricoprenti finiti di  $E$  (ossia per insiemi  $U_i$  tali che  $\text{diam } U_i \leq \varepsilon$ , per  $\varepsilon > 0$ ).

A seconda del valore di  $s$ ,  $\mathcal{H}_s(E)$  può risultare finita o infinita: in particolare si dimostra che in corrispondenza di un preciso valore  $s^*$ ,  $\mathcal{H}_s(E)$  passa a valori finiti al crescere di  $s$ .

<sup>24</sup>Ad esempio, l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali è denso in  $\mathbb{R}$ . Informalmente,  $A$  è denso in  $X$  se ogni punto di  $X$  appartiene ad  $A$  o altrimenti è arbitrariamente “vicino” a un membro di  $A$ ; in modo più formale, ogni punto di  $X$  o appartiene ad  $A$  o è un punto di accumulazione per  $A$ .

<sup>25</sup> $(\overset{\circ}{A})^c$  costituisce i punti interni dell'insieme complementare ad  $A$ , ossia i punti esterni ad  $A$ .

<sup>26</sup>Ricordiamo che  $\eta \in \mathbb{R}$  è un *estremo superiore* per un insieme  $S \subset \mathbb{R}$  ( $\eta = \sup S$ ) se e solo se valgono le seguenti proprietà: i)  $s \leq \eta \forall s \in S$ ; ii)  $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{s} \in A : \eta - \epsilon < \bar{s}$ . Sulla stessa falsariga si definisce l'estremo inferiore  $\inf S$ .

DEF. A.18 (misura di Hausdorff). Si definisce la *misura di Hausdorff*  $h(E)$  per l'insieme  $E$  come

$$h(E) = \sup\{s > 0 : \mathcal{H}_s(E) = \infty\}$$

Intuitivamente  $h(A)$  misura la crescita del numero di insiemi di diametro  $\varepsilon$  necessari per ricoprire  $A$  al tendere di  $\varepsilon$  a 0: posto  $n(\varepsilon)$  il numero di dischi di raggio  $\varepsilon$  necessario a “ricoprire”  $A$ , se  $n(\varepsilon)$  cresce come

$$n(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D} \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

diremo che  $A$  ha dimensione di Hausdorff  $D$ .

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Silvana Abeasis. *Algebra lineare e geometria*. Zanichelli editore, Bologna, 1990.
- [2] Silvana Bettelli e Romolo Biolchini. *Frattali fib asteroidi – Manuale di laboratorio per personal computer MS-DOS*. Zanichelli editore, Bologna, 1989.
- [3] Yuri A. Kuznetsov. Conjugate maps. *Scholarpedia*, 2(12):5420, 2007. revision #91160 [http://www.scholarpedia.org/article/Conjugate\\_maps](http://www.scholarpedia.org/article/Conjugate_maps).
- [4] Heinz-Otto Peitgen e Peter H. Richter. *La bellezza dei frattali – Immagini di sistemi dinamici complessi*. Bollati Boringhieri editore, Torino, 1987.
- [5] Lorenzo R. Scichilone. Gli insiemi frattali: il concetto di dimensione, l'autosimilarità, gli algoritmi. Tesi di laurea, Università degli Studi di Trieste, 2003/2004. <https://dmi.units.it/~fonda/Frattali.pdf>.