

Impiego delle copule nella teoria delle reti

Dario Comanducci, 27 marzo 2025

1 Introduzione

Una *copula* è formalmente definita come una funzione di distribuzione cumulativa con marginali uniformi. Nella teoria delle reti, le copule sono utilizzate come uno strumento flessibile per modellare le dipendenze tra le caratteristiche dei nodi o dei collegamenti di una rete, separando la struttura di dipendenza dalle distribuzioni marginali individuali.

I modi in cui le copule vengono impiegate nella teoria delle reti sono molteplici, come si evince dall'elenco seguente.

Stima delle esposizioni bilaterali in reti finanziarie In questo contesto, le copule possono essere utilizzate per stimare le esposizioni¹ tra diverse entità (come banche o paesi) in una rete finanziaria quando si hanno a disposizione solo informazioni aggregate (ad esempio, esposizioni totali) [1, 3, 11]. La stima delle esposizioni bilaterali è cruciale per comprendere e analizzare il rischio di contagio all'interno di una rete finanziaria. Se un'entità in rete sperimenta difficoltà finanziarie (ad esempio, un default), le sue esposizioni bilaterali possono trasmettere lo shock finanziario alle altre entità a cui è connessa. Questo strumento può essere prezioso

¹ In reti finanziarie, con esposizioni bilaterali si intendono le specifiche connessioni o relazioni finanziarie che esistono tra coppie di entità all'interno della rete. In altre parole, un'esposizione bilaterale descrive quanto un'entità (ad esempio, una banca o un paese) è finanziariamente legata a un'altra entità specifica nella rete. Un'esposizione in generale, in questo contesto, rappresenta l'ammontare o il valore che un'entità rischia di perdere a causa della sua interconnessione finanziaria con un'altra entità. Questa interconnessione può derivare da diverse forme di obbligazioni finanziarie, come prestiti interbancari o partecipazioni azionarie. Per chiarire ulteriormente:

- in una rete interbancaria, un'esposizione bilaterale tra la Banca A e la Banca B potrebbe rappresentare l'ammontare di denaro che la Banca A ha prestato direttamente alla Banca B, o viceversa;
- in una rete di esposizioni tra paesi, un'esposizione bilaterale tra il Paese X e il Paese Y potrebbe indicare l'ammontare di debito che il Paese X ha nei confronti del Paese Y, o il valore degli investimenti diretti tra i due paesi.

per le *analisi di stress test*. In pratica, una copula può essere usata per generare una matrice stocastica che, moltiplicata per le esposizioni totali, fornisce una stima dei valori bilaterali: Baral e Figue [3] hanno proposto un approccio basato su copule in alternativa al metodo della Massima Entropia (ME).

Modellazione di reti con correlazioni di grado Le copule offrono un metodo generale per la *costruzione di insiemi di reti casuali con una distribuzione di grado arbitraria e una struttura di correlazione di grado desiderata*. Questo permette di creare modelli nulli più completi che tengono conto delle associazioni tra i gradi dei nodi. L'idea fondamentale è *separare le distribuzioni marginali (della distribuzione del grado)* dalla struttura di associazione (la correlazione tra i gradi) utilizzando le funzioni copula come fatto da Raschke et al. [7]. Attraverso il teorema di Sklar, si può costruire una matrice di probabilità con una dipendenza grado-grado imposta; questa matrice di probabilità viene poi utilizzata per generare insiemi di reti casuali che riflettono le correlazioni di grado specificate.

Flessibilità nella modellazione delle dipendenze Uno dei vantaggi chiave dell'uso delle copule è la loro *malleabilità rispetto all'imposizione di strutture di dipendenza* (gerarchiche, miste, ecc.); ciò aumenta la possibilità di ottenere una stima che si adatti bene ai dati, specialmente in presenza di blocchi di nodi più interconnessi rispetto ad altri [3].

Alternativa al metodo della Massima Entropia In alcuni casi, specialmente in sistemi complessi come le reti finanziarie, il metodo della Massima Entropia (ME) [9] può avere delle limitazioni come in certe reti dense [3].

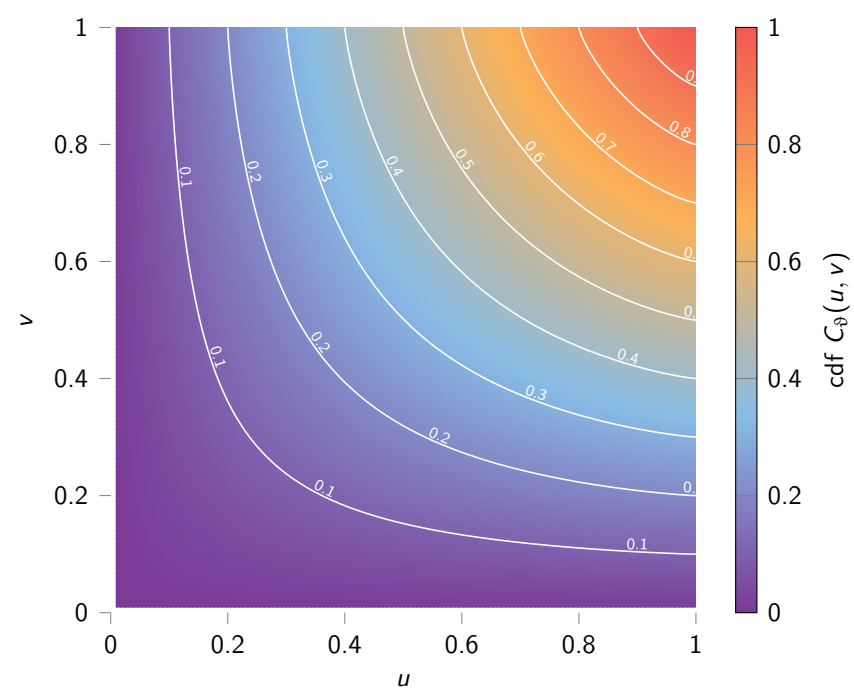
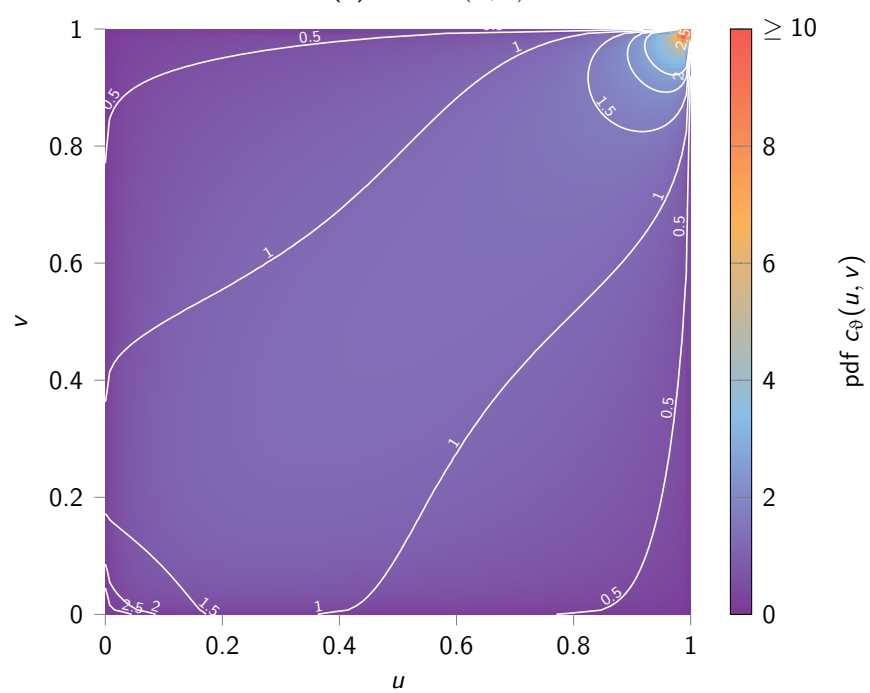
1.1 La copula di Gumbel

Come copula viene impiegata la *copula di Gumbel bivariata*, appartenente alla famiglia dei valori estremi; date due v.a. U e V con distribuzione uniforme standard, la copula di Gumbel è parametrizzata come (Fig. 1)

$$C_{\vartheta}(u, v) \equiv \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \exp \left(- \left[(-\ln u)^{\vartheta} + (-\ln v)^{\vartheta} \right]^{\frac{1}{\vartheta}} \right), \quad \vartheta \in [1, \infty)$$

La stima di ϑ è ottenuta massimizzando la log-verosimiglianza [4]

$$\ln L(\theta \mid \{(u_k, v_k)\}_{k=1}^N) = \sum_{k=1}^N \ln c_{\theta}(u_k, v_k)$$

(a) $\text{cdf } C_\vartheta(u, v)$ (b) $\text{pdf } c_\vartheta(u, v)$ Fig. 1. Copula di Gumbel, per $\vartheta = 5/4 = 1.25$.

dove $c_\vartheta(u, v)$ è la densità di probabilità della copula [8]

$$\begin{aligned} c_\vartheta(u, v) &= \frac{1}{uv} C_\vartheta(u, v) (t_\vartheta(u) + t_\vartheta(v))^{-2+2/\vartheta} \\ &\quad \cdot (\ln u \ln v)^{\vartheta-1} (1 + (\vartheta - 1)(t_\vartheta(u) + t_\vartheta(v))^{-1/\vartheta}) \\ t_\vartheta(w) &= (-\ln w)^\vartheta \end{aligned}$$

La copula di Gumbel è *asimmetrica e ha code pesanti*, caratteristiche ritenute adatte a modellare la matrice di adiacenza (le dipendenze) in alcuni contesti economici e finanziari, come le reti interbancarie con una struttura *core-periphery* [3].

1.1.1 Il teorema di Sklar

Il teorema di Sklar è alla base dell'impiego delle copule, e non si limita alla copula di Gumbel.

Teorema 1.1 (Sklar). Sia $F(x_1 \dots x_d)$ una funzione di ripartizione congiunta con ripartizioni marginali $F_1(x) \dots F_d(x)$: allora esiste una copula $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ tale che

$$F(x_1 \dots x_d) = C(F_1(x_1) \dots F_d(x_d)) \quad (1)$$

Viceversa, se C è una copula e $F_1(x) \dots F_d(x)$ sono funzioni di ripartizione univariate, allora la funzione F in Eq. (1) è una funzione di ripartizione congiunta con marginali $F_1(x) \dots F_d(x)$.

C è unica se tutte le funzioni di ripartizione marginali sono continue.

2 Ricostruzione di reti

Il lavoro di Baral e Figue [3] si concentra specificamente sulla stima delle esposizioni bilaterali x_{ij} tra le entità che compongono la rete, cioè stimano le connessioni dirette (i “link”) tra i nodi della rete ed il peso associato a tali link (ad esempio, l'ammontare del prestito o il valore degli scambi commerciali), avendo a disposizione solo *informazioni aggregate* (cfr. Tab. 1)

$$\begin{aligned} x_{i\bullet} &= \sum_j x_{ij} \\ x_{\bullet j} &= \sum_i x_{ij} \end{aligned}$$

come le esposizioni totali (attività e passività totali delle banche) o i flussi commerciali totali (importazioni ed esportazioni totali dei paesi).

Tab. 1. Matrice \mathbf{X} incognita, di cui sono disponibili solo le informazioni aggregate $x_{i\bullet}$ e $x_{\bullet j}$ (con $i, j = 1 \dots N$)

x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1N}	$\sum_j x_{ij}$
x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2N}	$x_{1\bullet}$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	$x_{2\bullet}$
x_{N1}	x_{N2}	\dots	x_{NN}	\vdots
$\sum_i x_{ij}$	$x_{\bullet 1}$	$x_{\bullet 2}$	\dots	$x_{N\bullet}$
				$x_{\bullet N}$

La copula viene utilizzata per “colmare le lacune” e *stimare le connessioni bilaterali specifiche* tra le entità della rete a partire da questi totali, modellando la *struttura di dipendenza* tra le variabili (in questo caso, le esposizioni tra entità) *separatamente dalle loro distribuzioni marginali* (ad esempio, le esposizioni totali o i gradi dei nodi). Questa separazione offre una grande flessibilità nell’incorporare diverse forme di dipendenza.

2.1 Descrizione del metodo

La copula di Gumbel è applicata alle variabili marginali di ogni nodo $n = 1 \dots N$, ossia l’*esposizione totale in uscita* $x_{\bullet n}$ e l’*esposizione totale in entrata* $x_{n\bullet}$ impiegando il teorema di Sklar con le funzioni di distribuzione empiriche delle marginali \hat{F}_1 e \hat{F}_2 :

$$u_n = \hat{F}_1(x_{\bullet n}) = \hat{F}_1\left(\sum_j x_{nj}\right)$$

$$v_n = \hat{F}_2(x_{n\bullet}) = \hat{F}_2\left(\sum_i x_{in}\right)$$

$$C_\theta(u_n, v_n) = \exp\left(-\left[(-\ln(u_n))^\theta + (-\ln(v_n))^\theta\right]^{1/\theta}\right)$$

La funzione di log-verosimiglianza da massimizzare diventa quindi:

$$\ln L(\theta | \{x_{\bullet n}, x_{n\bullet}\}_{n=1}^N) = \sum_{n=1}^N \ln c_\theta(u_n, v_n)$$

2.1.1 Generazione della matrice di probabilità

Una volta stimato il parametro di dipendenza $\hat{\theta}$, la copula viene utilizzata per inferire una struttura di dipendenza tra le esposizioni totali: date le marginali

uniformi corrispondenti ai nodi i e j

$$u_i = F_1(x_{\bullet i}) = F\left(\sum_j x_{ij}\right)$$

$$v_j = F_2(x_{j\bullet}) = F\left(\sum_i x_{ij}\right)$$

allora $C_{\hat{\theta}}(u_i, v_j)$ rappresenta la probabilità che l'esposizione normalizzata in uscita del nodo i sia minore o uguale a u_i e l'esposizione normalizzata in entrata del nodo j sia minore o uguale a v_j .

A partire dalla copula così stimata viene costruita una matrice di probabilità cumulate P , i cui elementi p_{ij} valgono

$$p_{ij} = C_{\hat{\theta}}(u_i, v_j)$$

La matrice di probabilità P riflette la struttura di dipendenza congiunta tra le marginali trasformate delle esposizioni totali. I suoi elementi p_{ij} sono basati sulla funzione di copula valutata per la coppia di entità i e j e quantificano la loro interdipendenza secondo il modello della copula scelta. Le somme di riga e di colonna di questa matrice non sono vincolate a un valore specifico.

2.1.2 Trasformazione in matrice stocastica

Data quindi P la matrice $N \times N$ i cui elementi p_{ij} sono derivati dalla valutazione della copula, la trasformazione in una matrice stocastica S avviene attraverso una normalizzazione riga per riga (per distribuire le esposizioni in uscita).

Normalizzazione per riga La matrice derivata dalla copula (che riflette le probabilità cumulate) viene poi *trasformata in una matrice stocastica*.

Per ottenere la matrice S *stocastica per righe*, il suo generico elemento in posizione (i, j) è determinato come

$$s_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{n=1}^N p_{in}}$$

Con questa normalizzazione, per ogni riga i di S , si ha:

$$\sum_{j=1}^N s_{ij} = \sum_{j=1}^N \frac{p_{ij}}{\sum_{n=1}^N p_{in}} = \frac{\sum_{j=1}^N p_{ij}}{\sum_{n=1}^N p_{in}} = 1$$

Questo significa che ogni riga della matrice S può essere interpretata come una distribuzione di probabilità (o un insieme di pesi che sommano a 1) che indica come l'entità i distribuisce le sue esposizioni in uscita verso le altre entità.

2.1.3 Stima delle esposizioni bilaterali

La matrice stocastica ottenuta al passaggio precedente viene moltiplicata per i totali di riga (ad esempio, le attività totali della banca mutuante) per ottenere una stima iniziale delle esposizioni bilaterali. Se s_{ij} è l'elemento (i, j) della matrice stocastica e $x_{i\bullet}$ è il totale di riga del nodo i , allora l'esposizione bilaterale iniziale $\hat{X}^{(0)}$ è data da

$$\hat{x}_{ij}^{(0)} = s_{ij} \cdot x_{i\bullet}$$

Avendo utilizzato una matrice in partenza normalizzata per riga, si sta inizialmente modellando come ogni entità distribuisce la propria esposizione totale in uscita verso le altre entità in proporzione ai pesi derivati dalla copula: questa matrice, moltiplicata per le esposizioni totali in uscita, fornisce una prima stima delle esposizioni in uscita. A questo punto occorre re-bilanciare la matrice, in modo che le sue somme di riga e di colonna corrispondano alle esposizioni totali osservate per riga e per colonna. A tale scopo viene impiegato l'algoritmo RAS.

A differenza del metodo ME standard che assume inizialmente una distribuzione uniforme delle connessioni, in questo caso si utilizza la struttura di dipendenza catturata dalla copula per guidare l'assegnazione dei valori bilaterali durante il processo di fitting con l'algoritmo RAS, assicurando che le restrizioni sui totali siano soddisfatte e che la struttura di dipendenza tra le marginali sia tenuta in considerazione.

L'algoritmo RAS L'algoritmo RAS è una procedura iterativa che prende una matrice iniziale e la adatta di iterazione in iterazione:

1. Le righe della matrice corrente vengono scalate in modo che la loro somma corrisponda al rispettivo totale di riga target.
2. Le colonne della matrice risultante vengono scalate in modo che la loro somma corrisponda al rispettivo totale di colonna target.

Questo processo viene ripetuto finché la matrice non converge, cioè finché le somme di riga e di colonna non sono sufficientemente vicine ai valori target: a partire dalla matrice stocastica iniziale S , l'algoritmo RAS produce una sequenza di matrici convergenti a una matrice finale \hat{X} le cui somme di riga $\sum_j \hat{x}_{ij}$ approssimano le esposizioni totali in uscita del nodo i , e le cui somme di colonna $\sum_i \hat{x}_{ij}$ approssimano le esposizioni totali in entrata del nodo j .

La matrice risultante dall'applicazione dell'algoritmo RAS fornisce perciò una *stima della matrice delle esposizioni bilaterali*. L'elemento \hat{x}_{ij} di questa matrice rappresenta l'esposizione stimata del nodo i verso il nodo j .

Descrizione formale dell'algoritmo RAS Data una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} = [a_{ij}]$, a valori *non negativi*, e due vettori *positivi* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, il problema della matrice vincolata biproporzionale è quello di determinare una matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n} = [b_{ij}]$ tale che le equazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{diag}(\mathbf{x}) \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{y}) \\ \sum_{j=1}^n b_{ij} &= u_i \\ \sum_{i=1}^m b_{ij} &= v_j \end{aligned}$$

valgano simultaneamente per qualche coppia di vettori non negativi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Ciò è ottenibile ripetendo fino a convergenza i seguenti passi [2], partendo dall'assegnazione iniziale $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{A}$:

1. $r_i \leftarrow u_i / \sum_j b_{ij}$ per $i = 1 \dots m$ (con $r_1 \leftarrow 1$)
2. $\mathbf{B} \leftarrow \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{B}$
3. $s_j \leftarrow v_j / \sum_i b_{ij}$ per $j = 1 \dots n$
4. $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{B} \text{diag}(\mathbf{s})$

3 Generazione di ensemble di reti

In [7] viene presentato un approccio basato su copule per la modellazione di reti con correlazione di grado, ossia reti in cui i gradi dei nodi connessi non sono indipendenti, ma mostrano una certa *associazione*: l'approccio utilizza le copule per catturare la struttura di dipendenza tra i gradi dei nodi adiacenti.

Esistono due tipi principali di correlazione di grado, assortatività e disassortatività.

Correlazione di grado positiva (o assortatività per grado) In questo caso, i nodi con un alto grado tendono a connettersi con altri nodi che hanno anch'essi un alto grado. Allo stesso modo, i nodi con un basso grado tendono a connettersi con altri nodi a basso grado.

Correlazione di grado negativa (o disassortatività per grado) In questo scenario, i nodi con un alto grado tendono a connettersi con nodi che hanno un basso grado, e viceversa.²

Mentre l'algoritmo generatore per il Configuration Model consente di produrre reti casuali a partire da una certa distribuzione di grado $P(K = k)$, per generare reti aleatorie rispetto ad una certa associazione di grado occorre definire la distribuzione del numero di connessioni alle due estremità di un arco, incluso l'arco stesso [6, 7, 10]: ad ogni arco è associata cioè la realizzazione una coppia di v.a. $H = (I, J)$ secondo una distribuzione $P(I = i, J = j)$ indicante la probabilità che un arco casualmente selezionato insista su una coppia di nodi con grado i e j . Nelle reti reali tale distribuzione è spesso a coda pesante.

Imponendo una limitazione superiore h_{\max} al numero di connessioni, data la natura discreta di $H = (I, J)$, tale distribuzione può essere organizzata in una matrice di probabilità.

3.1 Costruzione della matrice di probabilità

Per brevità di notazione, indicheremo la probabilità della distribuzione di grado come $P(k)$, e con $P(i, j)$ la distribuzione di grado congiunta.

Consideriamo inoltre per semplicità una rete non direzionata: in tal caso la distribuzione $P(i, j)$ è simmetrica ($P(i, j) = P(j, i)$) e possiamo ricavare la distribuzione marginale ai capi degli archi come

$$P_e(k) = \sum_i P(i, k)$$

Poiché ogni nodo di grado k ha probabilità $P(k)$, la probabilità di selezionare un arco connesso ad un nodo di grado k è proporzionale a $kP(k)$ ³; normalizzando si ottiene quindi che vale anche la seguente relazione [10]

$$P_e(k) = \frac{kP(k)}{\sum_k kP(k)} = \frac{kP(k)}{\bar{k}} \Rightarrow P(k) = \frac{\bar{k}}{k} P_e(k)$$

dove \bar{k} costituisce il grado medio della rete.

² Un esempio potrebbe essere una rete di trasporto aereo, dove grandi hub aeroportuali (alto grado) si connettono a molte destinazioni più piccole (basso grado), e le piccole destinazioni spesso si connettono solo all'hub principale.

³ Si consideri un vertice raggiunto seguendo un arco scelto casualmente sul grafico: il grado di questo vertice non è distribuito in base a $P(k)$; invece, è polarizzato in favore dei nodi di alto grado, poiché più archi terminano in un vertice di alto grado rispetto a uno di basso grado. Ciò significa che la distribuzione del grado per il vertice alla fine di un arco scelto casualmente è proporzionale a $kP(k)$, piuttosto che solo $P(k)$ [5].

Un modo semplice per costruire la matrice di probabilità $P(i, j)$ è l'applicazione di una distribuzione casuale discreta bivariata; tuttavia, il numero di distribuzioni bivariate discrete (e in particolare, a coda pesante), è molto limitato. Per superare questo inconveniente, in [7] si propone l'impiego di copule per modellare $P(i, j)$ in modo da separare le distribuzioni marginali dalla struttura associativa. Il formalismo che sta alla base dell'impiego delle copule per costruire $P(i, j)$ è fornito dalla relazione

$$P(u_1 \leq U < u_2, v_1 \leq V < v_2) = C(u_1, v_1) + C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) \quad (2)$$

In [7] vengono proposte tre procedure per costruire la matrice $P(i, j)$ attraverso le copule, ipotizzando che il numero di connessioni all'estremo di un arco sia compreso in un intervallo $[h_{\min}, h_{\max}]$.

Procedura I $P_e(h)$ è definita a partire da una cdf $F(x)$ *continua* secondo

$$P_e(h) = F(h) - F(h - 1) \quad (3)$$

Combinando Eq. (2) con Eq. (3), e ricorrendo al teorema di Sklar possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} P(i, j) = & C(F(i), F(j)) - C(F(i - 1), F(j)) \\ & + C(F(i - 1), F(j - 1)) - C(F(i), F(j - 1)) \end{aligned}$$

La matrice viene infine normalizzata rispetto a $T = \sum_{i,j} P(i, j)$ in modo che sia a somma 1, ottenendo al termine della procedura

$$\begin{aligned} P(i, j) & \leftarrow P(i, j) / T \\ P_e(k) & := \sum_{i=h_{\min}}^{h_{\max}} P(i, k) \end{aligned}$$

Procedura II In questo caso $P_e(h)$ è fornita in ingresso e, costruita la cdf “discreta” di $P_e(h)$ come

$$G(h) = \sum_{j=h_{\min}}^h P_e(j)$$

si ha che la matrice di probabilità $P(i, j)$ è ottenuta su base copula come

$$\begin{aligned} P(i, j) = & C(G(i), G(j)) - C(G(i - 1), G(j)) \\ & + C(G(i - 1), G(j - 1)) - C(G(i), G(j - 1)) \end{aligned}$$

$P(i, j)$ può poi essere troncata a h_{\max} come nella Procedura I.

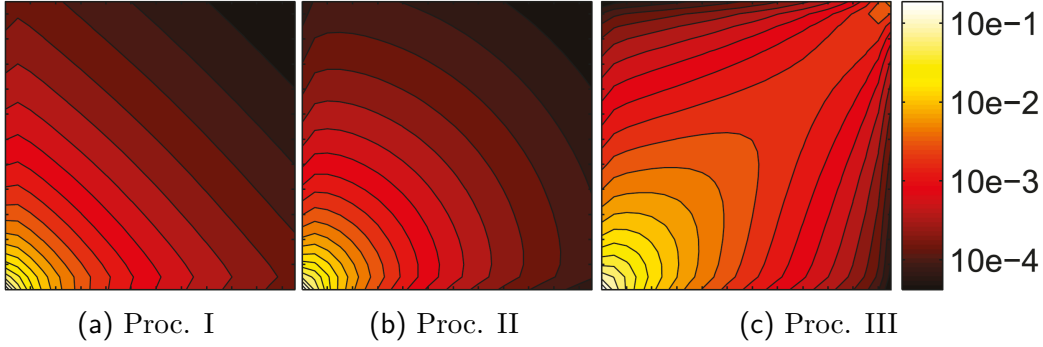


Fig. 2. matrice $P(i, j)$ con $h_{\min}=2$ e $h_{\max} = 25$ ottenuta dalle tre procedure.

Procedura II Infine, come ultima proposta, $P_e(h)$ è fornita in ingresso ma *obbligata a priori* ad essere troncata in h_{\max} .

Si noti che nel caso di $F(\cdot)$ a coda pesante, le distribuzioni marginali risultanti $P_e(h)$ nelle procedure I e II non sono strettamente a coda pesante a causa del troncamento.

Data una rete reale, i parametri sia della distribuzione marginale che della copula possono essere stimati mediante metodi comuni di inferenza statistica, come il metodo della massima verosimiglianza.

Il Fig. 2 mostra la costruzione di $P(i, j)$ a partire da una copula di Gumbel parametrizzata da $\vartheta = 2$, attraverso le tre diverse procedure:

- per Proc. I (Fig. 2a), è stata impiegata una distribuzione marginale di Pareto (distribuzione continua), ossia $F(h) = 1 - (h - 1)^{-\gamma}$ per costruire $P_e(h)$ (con $\gamma = 0.7$);
- per Proc. II (Fig. 2b) una distribuzione di Zipf modella $P_e(h)$ (con $\gamma=2$):

$$P_e(h) = \frac{h^{-\gamma}}{\sum_{h_{\min}}^{\infty} h^{-\gamma}}$$

- infine, per Proc. III (Fig. 2c), la precedente distribuzione di Zipf è troncata a $h_{\max} = 25$:

$$P_e(h) = \frac{h^{-\gamma}}{\sum_{h_{\min}}^{h_{\max}} h^{-\gamma}}$$

Curiosamente, le diverse procedure portano a strutture di associazione notevolmente diverse, sebbene vengano applicate la stessa funzione copula e distribuzioni marginali simili.

3.2 Generazione di un ensemble

Se $P(h, h')$ è data, è possibile costruire delle reti aleatorie a partire dalla generazione casuale di n realizzazioni di K , tratte dalla distribuzione di probabilità $P(k)$ (per cui un generico nodo j ha un totale di k_j “monconi” (*stub*) da cui attingere per gli archi), imponendo il vincolo che la somma $\sum_m k_m$ sia pari.

Selezionato un generico nodo j , di grado k_j , che deve essere connesso, la matrice $P(i, j)$ interviene nella valutazione della probabilità $P_i(i|k_j)$ di assegnare il nodo j ad un altro nodo i (con grado k_i):

$$P_i(i|k_j) = r_{k_i} \frac{P(k_j|k_i)}{\sum_{m=1}^n P(k_j|k_m)} \quad (4a)$$

$$P(k|k') = \frac{P(k, k')}{P_e(k')} \quad (4b)$$

dove

- r_{k_i} rappresenta il numero di stub rimanenti del nodo i (questo fattore tiene conto del fatto che un nodo può essere connesso solo se ha ancora bordi disponibili);
- il termine cruciale $P(k_j|k_i)$ rappresenta la probabilità condizionata che un'estremità di un bordo abbia grado k_j dato che l'altra estremità ha grado k_i riflettendo in pratica la struttura di associazione essendo proporzionale a $P(k_i, k_j)$

3.2.1 Algoritmo di generazione

1. Generazione casuale di n realizzazioni di K , tratte dalla distribuzione di probabilità $P(k)$, t. c. $\sum_{m=1}^n k_m$ sia pari.
2. Selezione casuale di un nodo con almeno uno stub rimanente e grado k' .
3. Assegnazione del nodo selezionato a un nodo i con grado k_i , che ha di nuovo almeno uno stub rimanente e non è ancora connesso al nodo selezionato secondo la probabilità di assegnamento $P_i(i|k')$
4. I due stub selezionati vengono collegati per formare il bordo.
5. Se sono presenti nodi con stub rimanenti, tornare al passaggio 2.

Riferimenti bibliografici

- [1] Kartik Anand, Iman van Lelyveld, Ádám Banai, Soeren Friedrich, Rodney Garratt, Grzegorz Hałaj, Jose Figue, Ib Hansen, Serafín Martínez Jaramillo, Hwayun Lee, José Luis Molina-Borboa, Stefano Nobili, Sriram Rajan, Dilyara Salakhova, Thiago Christiano Silva, Laura Silvestri, and Sergio Rubens Stancato de Souza. The missing links: A global study on uncovering financial network structures from partial data. *Journal of Financial Stability*, 35:107–119, 2018.
- [2] A. Bachem and B. Korte. On the RAS-algorithm. *Computing*, 23:189–198, 1979. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02252097>.
- [3] Pallavi Baral and José Pedro Figue. Estimation of bilateral exposures: A copula approach. In *1st annual CIRANO workshop on networks in trade and finance*, 2012. <https://cirano.qc.ca/conferences/public/pdf/networks2012/02-BARAL-FIQUE-EstimationofBilateralExposures-ACopulaApproach.pdf>.
- [4] Barbara Choroś, Rustam Ibragimov, and Elena Permiakova. Copula estimation. In Piotr Jaworski, Fabrizio Durante, Wolfgang Karl Härdle, and Tomasz Rychlik, editors, *Copula Theory and Its Applications*, pages 77–91, Berlin, Heidelberg, 2010. Springer Berlin Heidelberg. <https://scholar.harvard.edu/sites/scholar.harvard.edu/files/ibragimov/files/cip.pdf>.
- [5] M.E.J. Newman. Assortative mixing in networks. *Phys. Rev. Lett.*, 89:208701, Oct 2002.
- [6] Mathias Raschke, Markus Schläpfer, and Roberto Nibali. Measuring degree-degree association in networks. *Phys. Rev. E*, 82:037102, Sep 2010.
- [7] Mathias Raschke, Markus Schläpfer, and Konstantinos Trantopoulos. Copula-based modeling of degree-correlated networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2014(2):P02019, feb 2014.
- [8] Ulf Schepsmeier and Jakob Stöber. Derivatives and fisher information of bivariate copulas. *Statistical Papers*, 55(2):525–542, may 2014. https://www.researchgate.net/publication/257406195_Derivatives_and_Fisher_information_of_bivariate_copulas.

- [9] Christian Upper and Andreas Worms. Estimating bilateral exposures in the german interbank market: Is there a danger of contagion? *European Economic Review*, 48(4):827–849, 2004.
- [10] Sebastian Weber and Markus Porto. Generation of arbitrarily two-point-correlated random networks. *Phys. Rev. E*, 76:046111, Oct 2007.
- [11] Hai-Chuan Xu, Zhi-Yuan Wang, Fredj Jawadi, and Wei-Xing Zhou. Reconstruction of international energy trade networks with given marginal data: A comparative analysis. *Chaos, Solitons Fractals*, 167:113031, 2023.