OPTIMIZATION CONDITIONS

Dario Comanducci, 12 marzo 2024

Esercizio 1

Given

$$\min_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xz^3$$

Does the problem admit an optimal solution? How can you tell it?

Svolgimento

Poiché la funzione $f(x,y,z)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^3$, calcolando ad esempio

$$\lim_{z\to-\infty} f(1,0,z) = -\infty$$
$$\lim_{z\to+\infty} f(-1,0,z) = -\infty$$

notiamo che il problema è illimitato inferiormente, per cui non può ammettere ottimo globale.[1]

Esercizio 2

Given

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = yx^3 + y^2x^2 - 3y^2$$

is direction $d = (0.5, 2)$ a descent direction for $f(x,y)$ at the point $(x,y) = (1,1)$?

Svolgimento

Occorre valutare il gradiente della funzione nel punto considerato, per cui

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 3yx^2 + 2y^2x & x^3 + 2x^2y - 6y \end{bmatrix}^\top$$

e verificare il segno per

$$\nabla f(1,1)^\top \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} = 5/2 - 6 = -7/2 < 0$$

da cui ricaviamo che $d = (0.5, 2)$ è una direzione di discesa per $f(x,y)$ in $(1,1)$.

[1] In appendice A viene analizzata anche la possibilità che esistano uno o più minimi locali; tale analisi è esclusa dal corpo dello svolgimento perché supportata da una giustificazione parzialmente grafica/intuitiva invece che matematicamente "rigorosa" in ogni suo passaggio: in ogni caso ero curioso di avere un riscontro sia su come avrei potuto concludere il procedimento, sia sulla sua correttezza per come l'ho svolto.

Tab. 1: Verifica delle condizioni di stazionarietà per l'esercizio 3.

(x, y)	$\partial f/\partial x$	$\partial f/\partial y$	stazionarietà
$(3, 0)$	$= 0$	< 0	no
$(1, 1)$	> 0	< 0	no
$(3, 2)$	$= 0$	$= 0$	si
$(0, 2)$	> 0	$= 0$	si
$(2, 0)$	< 0	< 0	no
$(5/3, 1)$	$= 0$	< 0	no
$(0, 4)$	> 0	> 0	no
$(0, 0)$	> 0	< 0	no
$(5/3, 2)$	$= 0$	$= 0$	si
$(3, 3)$	$= 0$	> 0	no

Esercizio 3

Given

$$\min_{x\geqslant 0, y\geqslant 0} x^3 - 7x^2 + 15x + y^2 - 4y - 5$$

which of the following solutions are stationary points?

Svolgimento

Dato $S = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, un punto $\bar{\mathbf{x}} \in S$ è stazionario se e solo se

$$\frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_j} \begin{cases} = 0 & \forall\, j : \bar{x}_j > 0 \quad \text{(coordinate interne)} \\ \geqslant 0 & \forall\, j : \bar{x}_j = 0 \quad \text{(coordinate di frontiera)} \end{cases} \tag{1}$$

Valutiamo pertanto $\nabla f(x, y)$ nei punti indicati

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 14x + 15 & 2y - 4 \end{bmatrix}^\top$$

La motivazione per il quadro sinottico di Tab. 1 è quindi la seguente:[2]

- $\nabla f((3, 0)) = [0 \;\; -4]^\top \;\; \Rightarrow$ il punto non è stazionario perché

$$y = 0 \;\text{ ma }\; \frac{\partial f(3, 0)}{\partial y} < 0$$

- $\nabla f((1, 1)) = [4 \;\; -2]^\top \;\; \Rightarrow$ il punto non è stazionario perché

$$x > 0, \;\text{ ma }\; \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} > 0; \qquad y > 0 \;\text{ ma }\; \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} < 0$$

- $\nabla f((3, 2)) = [0 \; 0]^\top \;\; \Rightarrow$ il punto è stazionario perché

$$x > 0, \;\text{ e }\; \frac{\partial f(3, 2)}{\partial x} = 0; \qquad y > 0 \;\text{ e }\; \frac{\partial f(3, 2)}{\partial y} = 0$$

[2] Invece che verificare Eq. (1) in ogni punto richiesto, si poteva determinare analiticamente solo tutti i punti che soddisfano Eq. (1) come riportato poi al termine dell'esercizio.

- $\nabla f((0,2)) = [15\ 0]^\top \;\Rightarrow\;$ il punto è stazionario perché

$$x = 0,\ \text{ e } \frac{\partial f(0,2)}{\partial x} \geqslant 0; \qquad y > 0 \text{ e } \frac{\partial f(0,2)}{\partial y} = 0$$

- $\nabla f((2,0)) = [-1\ \ -4]^\top \;\Rightarrow\;$ il punto non è stazionario perché

$$x > 0,\ \text{ ma } \frac{\partial f(2,0)}{\partial x} < 0; \qquad y = 0 \text{ ma } \frac{\partial f(2,0)}{\partial y} < 0$$

- $\nabla f((5/3,1)) = [0\ \ -2]^\top \;\Rightarrow\;$ il punto non è stazionario perché

$$y > 0 \text{ ma } \frac{\partial f(5/3,1)}{\partial y} < 0$$

- $\nabla f((0,4)) = [15\ 4]^\top \;\Rightarrow\;$ il punto non è stazionario perché

$$y > 0 \text{ ma } \frac{\partial f(0,4)}{\partial y} > 0$$

- $\nabla f((0,0)) = [15\ \ -4]^\top \;\Rightarrow\;$ il punto non è stazionario perché

$$x = 0,\ \text{ ma } \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} > 0; \qquad y = 0 \text{ ma } \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} < 0$$

- $\nabla f((5/3,2)) = [0\ 0]^\top \;\Rightarrow\;$ il punto è stazionario perché

$$x > 0,\ \text{ e } \frac{\partial f(5/3,2)}{\partial x} = 0; \qquad y = 0 \text{ e } \frac{\partial f(3,0)}{\partial y} = 0$$

- $\nabla f((3,3)) = [0\ 2]^\top \;\Rightarrow\;$ il punto non è stazionario perché

$$y > 0 \text{ ma } \frac{\partial f(3,3)}{\partial y} > 0$$

Svolgimento alternativo

Per $x > 0$, $y > 0$ calcoliamo i punti dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} 3x^2 - 14x + 15 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

ossia nei punti (5/3, 2), (3, 2), che sono quindi punti stazionari per $f(x,y)$.

Rimane da analizzare la frontiera di S, per $x = 0$ o per $y = 0$:

$$f(x,0) = x^3 - 7x^2 + 15x - 5$$
$$f(0,y) = y^2 - 4y - 5$$

Ponendo di nuovo a zero le derivate,

$$f'(x,0) = 3x^2 - 14x + 15$$
$$f'(0,y) = 2y - 4$$

abbiamo che

- $f'(x,0) = 0$ per $x = 5/3$ e $x = 3$;
- $f'(0,y) = 0$ in $y = 2$.

Per i punti $(5/3,0)$ e in $(3,0)$ occorre infine verificare se $\partial f/\partial y \geqslant 0$, così come in $(0,2)$ occorre che $\partial f/\partial x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(5/3,0)}{\partial y} &= -4 \quad \Rightarrow \quad (5/3,\ 0) \text{ non è stazionario} \\
\frac{\partial f(3,0)}{\partial y} &= -4 \quad \Rightarrow \quad (3,\ 0) \text{ non è stazionario} \\
\frac{\partial f(0,2)}{\partial x} &= 15 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 2) \text{ è stazionario}
\end{aligned}$$

Riepilogo In definitiva i punti stazionari per $f(x,y)$ sono solo

- $(5/3,\ 2)$
- $(3,\ 2)$
- $(0,\ 2)$

A Ottimalità locale per Es. 1?

Riprendendo il primo esercizio, seppur il problema non ammetta ottimo globale, possiamo analizzare comunque la possibilità che esistano degli ottimi locali: poiché $S \equiv \mathbb{R}^3$, possiamo imporre la condizione necessaria che le derivate parziali si annullino, cioè

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + z^3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{z^3}{2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 3xz^2 = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}z^5 = 0
\end{aligned}$$

Pertanto l'unico punto stazionario, in cui vale la condizione necessaria per il punto di minimo, si trova in $(0,0,0)$: per stabilire se esso sia un punto di minimo locale dobbiamo valutare se, nel nostro caso, $\exists\, \varepsilon > 0$:

$$f(\mathbf{p}) \geqslant 0 \quad \forall\, \mathbf{p} = (x,y,z) \in B_\varepsilon = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{p}\| < \varepsilon\} \ ;$$

viceversa, $(0,0,0)$ non è un punto di minimo locale se

$$\exists\, \mathbf{q} : \|\mathbf{q}\| < \varepsilon,\ f(\mathbf{q}) < 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

Valutiamo quindi i punti in cui $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xz^3 > 0$:

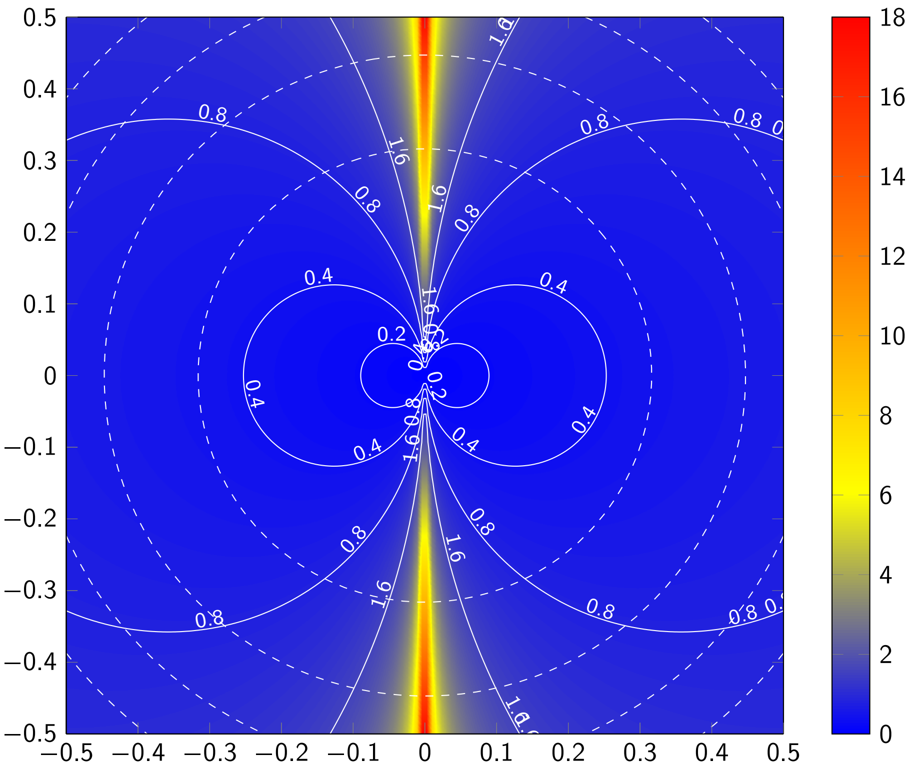

Fig. 1: Andamento per $g(x, y)$, con alcune linee di livello; le linee tratteggiate e circolari rappresentano possibili intorni dell'origine per qualche raggio ε.

- per $x > 0$,

$$z^3 > -\underbrace{\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)}_{w>0} = -\left|\frac{x^2+y^2}{x}\right| \quad \Rightarrow \quad -\sqrt[3]{\left|\frac{x^2+y^2}{x}\right|} < z$$

- per $x < 0$,

$$z^3 < -\underbrace{\left(\frac{x^2+y^2}{-|x|}\right)}_{w<0} = \underbrace{\left(\frac{x^2+y^2}{|x|}\right)}_{w>0} = \left|\frac{x^2+y^2}{x}\right| \quad \Rightarrow \quad z < \sqrt[3]{\left|\frac{x^2+y^2}{x}\right|}$$

Ne segue che, fissata una coppia qualsiasi $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$|z| < \sqrt[3]{\left|\frac{x^2+y^2}{x}\right|} = g(x, y) \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) > 0$$

Tuttavia, le curve di livello per $g(x, y)$ in Fig. 1 hanno un andamento a cuspide mano a mano che si tende a $x = 0$, $y = 0$: questo vanifica ogni tentativo di trovare un intorno B_ε di $(0, 0, 0)$ al cui interno valga sempre $f(x, y, z) \geqslant 0$.