П5

Дисперсія

$E(\xi - E\xi) = 0$

Значення $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

$D\xi < \infty \Leftrightarrow E\xi^2 < \infty$ - вправа

Теорема (про вл-ті дисперсії)

$E\xi^2 < \infty$

(1) $D\xi \geq 0$

(2) $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = E\xi$ м.н.

(3) $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

(4) $D(a+b\xi) = D(b\xi) = b^2 D\xi$

(5) $D\xi = \min\limits_{c\in\mathbb{R}} E(\xi-c)^2$

$E\xi = \arg\min\limits_{c\in\mathbb{R}} E(\xi-c)^2$

Значення $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ – середньо-квадратичне відхилення ξ в.в. ξ.

$$\boxed{|\xi| < \frac{1+\xi^2}{2}}$$

(1) $(\xi - E\xi)^2 \geq 0$

(2) $E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Leftrightarrow (\xi - E\xi)^2 = 0$ м.н.

(3) $D\xi = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) =$

$= E\xi^2 - 2E\xi E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$

(4) $D(a+b\xi) = E(a+b\xi - E(a+b\xi))^2 =$

$= E(a+b\xi - a + bE\xi)^2 = Eb^2(\xi - E\xi)^2 = b^2 D\xi$

(5) $E(\xi-c)^2 = E(\xi - E\xi + E\xi - c)^2 =$

$= E((\xi - E\xi)^2 + 2(\xi - E\xi)(E\xi - c) +$

$+ (E\xi - c)^2) = E(\xi - E\xi)^2 +$

$+ 2(E\xi - c)E(\xi - E\xi) + (E\xi - c)^2 =$

$= D\xi + (E\xi - c)^2 \underset{(c = E\xi)}{\geq} D\xi$

Теорема (про обчислення дисперсії)

$E\xi^2 < \infty$.

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_\xi(x) - (E\xi)^2$$

а) $P(\xi = x_n) = p_n \Rightarrow D\xi = \sum_{n\geq1} (x_n - E\xi)^2 p_n =$

$= \sum_{n\geq1} x_n^2 p_n - E\xi^2$

б) $\exists f_\xi(x)$ - щільн. : $D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_\xi(x)dx =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (E\xi)^2$

▪ $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_\xi(x)$, $g(x) = (x - E\xi)^2$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$, $g(x) = x^2$

$Eg(\xi) = \int_{-\infty} g(x) f_\xi(x)dx$ ▲

Приклади 1. $\xi = 1_A$, $A \in \mathcal{F}$

$E1_A = P(A)$, $D(1_A) = E1_A^2 - P^2(A) = P(A) - P^2(A) =$
$= P(A)P(\bar{A})$

2. Дисперсія біноміального розподілу.

$\xi \in \mathbb{Z}_+$

$\varphi_\xi(z) = \sum_{k\geq0} z^k P(\xi = k)$

$\varphi'_\xi(1) = \sum kP(\xi = k) = E\xi$

$\varphi''_\xi(1) = \sum_{k\geq2} k(k-1) z^{k-2} P(\xi = k)\Big|_{z=1} = E\xi(\xi - 1)$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \varphi''_\xi(1) + E\xi - (E\xi)^2$

$\xi \simeq Bi(n, p)$, $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$

$\varphi_\xi(z) = (pz + q)^n$, $E\xi = np$

$\varphi''_\xi(1) = n(n-1)p^2(p \cdot 1 + q)^{n-2} = n(n-1)p^2$

$D\xi = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = npq$

$D\left(\frac{\xi - np}{\sqrt{npq}}\right) = 1$

3. Геометричний розподіл

$\xi \simeq G(p)$

$P(\xi = k) = pq^{k-1}, \quad k \geq 1$

$\varphi_\xi(z) = \frac{pz}{1-qz}$ – генератриса

$\varphi_\xi'(z) = \frac{p}{1-qz} + \frac{pqz}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2}, \quad E\xi = \frac{1}{p}$

$\varphi_\xi''(1) = \frac{2pq}{p^3}$

$D\xi = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

4. Розподіл Пуассона

$\xi \simeq \Pi(\lambda)$

$\varphi_\xi(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda z)^k}{k!} e^{-\lambda} = \exp(-\lambda + \lambda z)$

$E\xi = \lambda \quad D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

$\frac{\sqrt{D\xi}}{E\xi} = \sigma_\xi$ – коефіцієнт варіації

$\parallel$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ – для розподілу Пуассона

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \to \infty, \lambda \to 0$

5. Рівномірний р-л

$\xi \simeq U(a,b)$

$D\xi = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

6. Показниковий р-л

$\xi \simeq Exp(\lambda)$

$E\xi = \frac{1}{\lambda}$

$D\xi = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

7. Нормальний розподіл

$\xi \simeq N(\mu, \sigma^2)$

$\xi = \mu + \sigma\zeta$

$D\xi = \sigma^2 D\zeta$

$D\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \qquad D\xi = \sigma^2$