П4

Від'ємний біноміальний розподіл.

Нехай пров. випроб. Бернуллі. Нехай $\xi_r(\omega)$ — це число випробувань до r-го „успіху". Нехай $\xi_r(\omega)=n$, тоді серед n випробувань було $r-1$ „успіхів" і $n-r+1$ — „невдач". Тому $P\{\xi_r(\omega)=n\}=C_n^{r-1}p^r(1-p)^{n-r+1}=C_n^{r-1}p^r q^{n-r+1}$, $n\geq r-1$

Цей розподіл назив. від'ємний біном.

При $r=1$ маємо геометричний розподіл.

Часто розглядають випадкову величину $\xi_r(\omega)$ - число „невдач" до r-го „успіху", тоді $P\{\xi_r(\omega)=n\}=C_{n+r-1}^{r-1}p^r(1-p)^n$

Цей розподіл теж від'ємний біноміальний

Гіпергеометричний розподіл.

Нехай в урні N куль, серед яких M білих і $N-M$ чорних. Навмання виймають $n\leq N$ куль. Нехай $\xi_r(\omega)$ - це к-ть білих куль серед вийнятих n куль. Тоді

$$P\{\xi_r(\omega)=m\}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad \max\{0, n-(N-M)\}\leq m\leq \min\{n, M\}$$

Нехай $n\leq M$, $n\leq N-M \Rightarrow n\leq \min\{M, N-M\}$. Тоді $0\leq m\leq n$ і із власт. розподілу ймовірностей маємо

$$1=\sum_{m=0}^{n}P\{\xi(\omega)=m\}=\sum_{m=0}^{n}\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \Rightarrow \sum_{m=0}^{n}C_M^m C_{N-M}^{n-m}=C_N^n$$

Пр. Із партії N виробів, серед яких M бракований, вибирають навмання n виробів. Яка ймов. того, що серед них не більше s бракованих ($s\leq \min(n, M)$)? ($n\leq \min(M, N-M)$)

Нехай $\xi_p(\omega)$ - к-ть брак. виробів серед вибраних n виробів. Тоді $P\{\xi(\omega)=m\} = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, $0 \le m \le n$

а значить $P\{\xi_p(\omega) \le S\} = \sum\limits_{m=0}^{S} P\{\xi(\omega)=m\}$

Розподіл Пуассона

Означення Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ ($\xi \simeq \Pi(\lambda)$), якщо

$$P(\xi = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\right) e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$$

Теорема Пуассона. Подвійна послідовність випр-нь Бернуллі, $\forall n \geq 1$ n випр. Бернуллі з імовірністю успіху p_n, і нехай ν_n – кільк. успіхів в n-й серії.

Припустимо: $p_n \to 0$, $n \to \infty$

$n \cdot p_n \to \lambda > 0$, $n \to \infty$

Тоді

$$\lim_{n \to \infty} P(\nu_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Приклад За 1хв на сервер надійшло 2000 запитів, за 0,001 запит може бути втрачено. Знайти ймовір-ть, що принаймні 2 запити буде втрачені.

$$P(\xi = k) = C_{2000}^{k} (0{,}001)^k \cdot (0{,}999)^{2000-k}$$

$$\lambda = 2000 \cdot 0{,}001 = 2$$

$$P(\xi = k) \approx \frac{2^k}{k!} e^{-2}$$

$$P(\xi \geq 2) = 1 - e^{-2} - 2 \cdot e^{-2}$$

▼ $P(\nu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\downarrow \; 1} \underbrace{(1-p_n)^{-k}}_{\downarrow \; 1} \underbrace{(n \cdot p_n)^k}_{\lambda^k} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n} - o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}_{\downarrow \; e^{-\lambda}} \to$$

$$\to \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad p_n \to 0$$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Математичне сподівання дискретної випадкової величини.

Приклад. Нехай ми спостерігаємо n випадкових величин, що мають однаковий розподіл

$$P(\xi_i = x_k) = p_k, \quad k = \overline{1,m}$$

ξ	x_1	....	x_m
L	p_1	.	p_m

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_k 1_{\xi_i = x_k} \ominus$$

$$\sum_{k=1}^{m} 1_{\xi_i = x_k} \qquad \ominus \sum_{k=1}^{m} x_k \frac{\nu_k(n)}{n}$$

$$\nu_k(n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\xi_i = x_k}$$

Якщо $n \to \infty$ $\sum_{k=1}^{m} x_k \frac{\nu_k(n)}{n} \to \sum_{k=1}^{m} x_k p_k$

математичне сподівання

Означення ξ - дискретна випадкова величина її знач. $\{x_1, \ldots x_n, \ldots\}$ та розп. $P(\xi = x_k) = p_k$ тоді її мат. сподіваннямназив. число!

оператор

$$\sum_{n \geq 1} x_n \cdot p_n = E\xi \quad (M_\xi)$$

за умови, що $\sum |x_n| p_n < \infty$

всі (x_n) - різні

Властивості:

1. теорема. ξ - д.в.в., $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow E g(\xi) = \sum_{k\geq 1} g(x_n) p_n$ $\quad (\sum |g(x_n)| p_n < \infty)$

$p_n = P(\xi = x_n)$

множина всіх різних значень

▼ $\eta = g(\xi) \in \{g(x_n), n \geq 1\} = \{z_k, k \geq 1\}$

$$E\eta = \sum_{k\geq 1} z_k P(g(\xi) = z_k) = \sum z_k P(\bigcup_{n: g(x_n)=z_k} \{\xi = x_n\}) =$$

$$= \sum_k z_k \sum_{n: g(x_n)=z_k} P(\xi = x_n) = \sum_k \sum_{n: g(x_n)=z_k} g(x_n) p_n =$$

$$= \sum_n g(x_n) p_n \quad \blacktriangle$$

2. теорема (Про властивості МС)
(а) $EC = C$, $C = const$
(б) $\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi \geq 0$
(в) $E(c\xi) = cE\xi$ - однорідність
(г) $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$ - лінійність
(д) $\xi_1 \leq \xi_2 \Rightarrow E\xi_1 \leq E\xi_2$ - монотонність
(е) Якщо ξ_n - прості в.в., які монот. неспадають $0 \leq \xi_n \uparrow$. Тоді
$\lim \xi_n = \eta$ - проста
тоді $\lim_{n\to\infty} E\xi_n = E\eta$ - неперервність знизу

▼ (а) $EC = C \cdot 1 = C$
(б) $\xi \geq 0 \Rightarrow \forall x_n \geq 0$
$E\xi = \sum x_n p_n \geq 0$
(в) $P(\xi = x_n) = p_n$
$\Rightarrow c\xi \in \{cx_n\}$
$p_n = P(c\xi = cx_n)$, $c \neq 0$

$E(c\xi) = \sum (cx_n) p_n = c \sum x_n p_n$
(г) $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $P(\xi_1 = x_n) = p_n$
$P(\xi_2 = y_k) = q_k$

$\xi \in \{(x_n, y_k), n \geq 1, k \geq 1\}$

$$P(\xi = (x_n, y_k)) = P(\xi_1 = x_n, \xi_2 = y_k)$$

$$g((x,y)) = x+y$$

$$E g(\xi) = E(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ k \geq 1}} (x_n + y_k) P(\xi_1 = x_n, \xi_2 = y_k) =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} x_n P(\xi_1 = x_n, \xi_2 = y_k) + \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} y_k P(\ldots) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} P\left(\bigcup_k \{\xi_1 = x_n, \xi_2 = y_k\}\right) = P(\{\xi_1 = x_n\}) \\ \quad \| \\ \sum_k P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = y_k) \end{array} \right| =$$

$$= \sum_n x_n P(\xi_1 = x_n) + \sum_{k\geq 1} y_k \sum_n P(\xi_1 = x_n, \xi_2 = y_k) =$$

$$= \sum_n x_n P(\xi_1 = x_n) + \sum_k y_k P(\xi_2 = y_k) = E\xi_1 + E\xi_2$$

збіг абсол

(g) $\xi_2 - \xi_1 \geq 0 \Rightarrow E(\xi_2 - \xi_1) \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$E\xi_1 - E\xi_2 \geq 0.$$

(e) $A_n = \{\xi_n \geq \eta - \varepsilon\} \uparrow \Omega$, $\varepsilon > 0$

$$\lim \xi_n \geq \eta, \quad \xi_n \geq 0 \Rightarrow \xi_n \geq (\eta - \varepsilon) 1_{A_n}$$

$c = \max\limits_{\omega} \eta(\omega) < \infty$ ($\infty \Rightarrow$, що η - проста)

$$\Rightarrow E\xi_n \geq E((\eta - \varepsilon) 1_{A_n}) = E(\eta - \varepsilon - \eta 1_{\overline{A_n}} + \varepsilon 1_{\overline{A_n}}) =$$

$(1_A = 1 - 1_{\overline{A}})$ $= E\eta - \varepsilon - E\eta 1_{\overline{A_n}} + \varepsilon E 1_{\overline{A_n}} \geq$

$(E 1_A = P(A) = P(A) \cdot 1 + P(\overline{A}) \cdot 0 = P(A))$, $\eta 1_{\overline{A_n}} \leq c 1_{\overline{A_n}}$

$$\Downarrow$$

$$E\eta 1_{\overline{A_n}} \leq cP(\overline{A_n})$$

$\geq E\eta - \varepsilon - cP(\overline{A_n}) + \varepsilon P(\overline{A_n})$

$$E\xi_n \geq E\eta - \varepsilon - cP(\overline{A_n}) + \varepsilon P(\overline{A_n})$$

$n \to \infty$, то $A_n \uparrow \Omega \Rightarrow \overline{A_n} \downarrow \emptyset$

$\lim\limits_n E\xi_n \geq E\eta - \varepsilon - 0$, $\varepsilon \downarrow 0$. $\blacktriangle$

Приклади. 1. $E 1_A = P(A)$

2. $\xi = \sum c_k 1_{A_k} \Rightarrow E\xi = \sum c_k P(A_k)$

3. Для біноміального розподілу

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p+q=1, \quad k=\overline{0,n}$$

$[np+p]$

$$E\xi = np$$

3(np) $\xi \simeq B(n,p)$, $E\xi = np$

спосіб 1) $E\xi = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!\, p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}}{(k-1)!(n-k)!} =$

$$= np(p+q)^{n-1} = np$$

2) $\{a_n, n \geq 1\}$, $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ $\quad \sum n a_n = a'(1)$

$$a(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k C_n^k p^k q^k q^{n-k} = (pz+q)^n$$

$$E\xi = \sum k C_n^k p^k q^{n-k} = a'(1)$$

$$E\xi = np(pz+q)^{n-1}\Big|_{z=1} = np$$

3) $\chi_k = 1_{\gamma_k}$, $\xi = \sum_{k=1}^{n} \chi_k$, $E\chi_k = p$

$$E\xi = E\sum_{k=1}^{n} \chi_k = \sum_{k=1}^{n} E\chi_k = np$$

4) $\xi \simeq G(p)$, $P(\xi = n) = pq^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

$$E\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot pq^{n-1} = p\Big(\sum_{n \geq 1} q^n\Big)'_q = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

5) $\xi \simeq \Pi(\lambda)$, $P(\xi = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n = 0, 1, \dots$

$$E\xi = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda \sum \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$