П6 Ймовірнісні нерівності

1. Нерівність Маркова

Нехай ξ - в.в, а g - борелівська: $g>0$ та $g\uparrow$ на мн-ні значень ξ.
Тоді $\forall \varepsilon>0$: $P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E g(\xi)}{g(\varepsilon)}$

▼ Зауважимо, що $\forall \omega$: $g(\xi) \geq g(\varepsilon) 1_{\xi \geq \varepsilon}$

$E g(\xi) \geq E(g(\varepsilon) 1_{\xi \geq \varepsilon}) = g(\varepsilon) P(\xi \geq \varepsilon)$ ▲

2. Нерівність Чебишова

Нехай ξ - інтегровна, $\forall \varepsilon>0$
$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P((\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2)$$

Підставимо у нерівність Маркова
$\xi \to (\xi - E\xi)^2$, $\varepsilon \to \varepsilon^2$
$g(x) = x$ на $\mathbb{R}_+$
$$P((\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Зауваження (прав. 3σ)
$\varepsilon = 3\sigma_\xi$
$$P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma_\xi) \leq \frac{D\xi}{9\sigma_\xi^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}89$$

Будь-яка величина відхиляється від середнього не більше ніж на 3σ.

А якщо $\xi \simeq N(\mu, \sigma^2)$, то ліва частина $\leq 0{,}003$

3. Нерівність Йєнсена

Нехай g - опукла до низу $\smile$
ξ та $g(\xi)$ - інтегровні.
Тоді $g(E\xi) \leq E g(\xi)$

Тоді $g(x) \geq g(x_0) + k(x - x_0)$ – опорна пряма
$x = \xi$, $x_0 = E\xi$
$g(\xi) \geq g(E\xi) + k(\xi - E\xi)$

$Eg(\xi) \geq g(E\xi) + E(k(\xi - E\xi)) =$
$= g(E\xi) + k \cdot 0 = g(E\xi)$ $\blacktriangle$

4. Нерівність Ляпунова
$1 < s < t$
$(E|\xi|^s)^{1/s} \leq (E|\xi|^t)^{1/t}$
$\eta = |\xi|^s$
$(E\eta)^{t/s} \leq E(\eta^{t/s})$

якщо $g(x) = x^{t/s}$, $x \in \mathbb{R}_+$, то ця нерівність є наслідком нерівності Йенсена

5. Нерівність Гельдера
$p, q \geq 1$: спряж. : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
ξ, η – в.в. : $E\xi\eta \leq (E|\xi|^p)^{1/p} (E|\eta|^q)^{1/q}$

$x, y > 0$: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

$$x = \frac{\xi}{(E|\xi|^p)^{1/p}} \qquad y = \frac{\eta}{(E|\eta|^q)^{1/q}}$$

$$\frac{E\xi\eta}{(E|\xi|^p)^{1/p}(E|\eta|^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

6. Нерівність Коші (част. випадок н-ті Коші)
$p = q = 2$

$$E\xi\eta \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

Зауваження (про рівність у нер-ті Коші)
Рів-ть у нер-ті Коші має місце $\Leftrightarrow$, коли $\exists$ стала c : $\xi = c\eta$ м.н.

$\nabla \Leftarrow$ $c>0$: $E(\xi\eta) = \underset{\underset{c E\eta^2}{\shortparallel}}{E(c\eta^2)} = \sqrt{E(c^2\eta^2)E\eta^2} = cE\eta^2$

$$\Rightarrow E(\xi - c\eta)^2 = E\xi^2 - 2cE\xi\eta + c^2E\eta^2 =$$

$$= E\xi^2 - 2c\sqrt{E\xi^2 E\eta^2} + c^2E\eta^2 = \left(\sqrt{E\xi^2} - c\sqrt{E\eta^2}\right)^2 = 0$$

$$c = \sqrt{\frac{E\xi^2}{E\eta^2}}, \quad E\eta^2 \neq 0$$

$\Rightarrow (\xi - c\eta)^2 = 0$ м.н $\Rightarrow \xi = c\eta$ м.н. $\blacktriangle$

7) Нерівність Мінковського

$p \geq 1$

$$\left(E|\xi+\eta|^p\right)^{1/p} \leq \left(E|\xi|^p\right)^{1/p} + \left(E|\eta|^p\right)^{1/p}$$

норма

коли $p>1$ $\Rightarrow$ $\int$ н-ті Гельдера

Вилучков: вектори вимірна