Ep. 75 动能定理与宇宙速度、地球系与质心系。

Prologue

当一物体从空中掉下来的时候，我们有 $mgh=\frac{1}{2}mv^2$.

Prop. 为啥可以如此计算？是准确还是近似？

大家都知道，苹果会掉下来是~~走流形的测地线~~受重力的作用，而后我们或许还能说出是重力势能转化为动能。

由于势能这东西是相对的，重力势时经常规定地面为0，而引力势经常规定无穷远为0，标准不一，故不妨追到其本源，表示为：

重力/引力 做功使动能增加。

那么蓝色星球的引力对林檎做正功，反过来呢？为啥我们会忽略掉这一作用？

Scholium.

功的表达式是 $\int F\cdot dr$，如果做功就是0，那自然可以忽略。那么咋让 $W=0$ 呢？显然只要位置一直不变，自然积分的上下限一致了。也就是说，只是要把参考系建在地球的质心上，引力对地球就不做功了。但是有个问题，这个系并非惯性系，应该还有惯性力作用在其中物体上，何解？

(i) 不走弯路，直接引入惯性力

$$Ma = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow a = \frac{Gm}{r^2}$$

$f_i = -ma = -\frac{Gm^2}{r^2}$, change the direction so that

$f_i = \frac{Gm^2}{r^2}$, $f = \frac{GMm}{r^2}$ $W = -\int_{R+h}^{R} (f_i + f)\,dr$

in which R is the earth radius, h is the height.

we have $W = mgh\frac{m+M}{M}\cdot\frac{R}{R+h}$

(ii) 等效为两体问题，引力质量变为 $m+M$.

then $f = \frac{Gm(m+M)}{r^2}$ …… $W = mgh\frac{m+M}{M}\cdot\frac{R}{R+h}$

于是我们得到了地球系中林檎获得的真正的动能，其的确 $\sim mgh$.

Prop. 引力势是 $-\frac{GMm}{r}$，这里 M 与 m 是平权的，这意味着蛤蟆？是二者都有这么大的引力势，还是整个系统的引力势？

为了体现中引力对二者皆做功，我们不再将参考系建立在地球上，而选用一个惯性系：质心系。

此时二者引力相互做正功，林檎引力势减少 $GMm(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})$，地球也同样，这俩一起变为系统的总动能，而质心系动量守恒，显然可以解出各自的速度。

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mr^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 2mgh\frac{R}{R+h} \\ Mr = mv \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 2mgh\frac{R}{R+h}\cdot\frac{M}{M+m}$$

仅仅变换了质心系，动能却几乎变作2倍了.这显然有问题，我们也很容易意识到问题在于重复的引力势能上.

viz. 引力势能是系统整体的物理量.

但是以上过程并不本质.可能看得不自然，那么我们应该用其本源"引力"导出同样结果：

质心系中，二者皆受引力做正功.我们先看苹果：

$$W = \int f\cdot dr = \int_{R+h}^{R}\frac{GMm}{r^2}dr$$

这不和上面那个错误分析一样了吗？但是理论上方法无错，问题在于 W 表达式中的 r 并非引力表达式中的 r，而是位矢.故令：

$$W = \int f dx \text{ , for } x = \frac{M}{m+M}r. \text{ so that}$$

$$W = \int_{R+h}^{R}\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{M}{m+M}dr = mgh\frac{R}{R+h}\cdot\frac{M}{M+m}$$

此时不难看出这个功直接就是苹果的动能.

而相应地，有地球的动能 $mgh\frac{R}{R+h}\cdot\frac{m}{M+m}$.

上面的过程还能看出一件事情.当使用 $-GMm(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$ 时.就相当于求算 $\int_{r_2}^{r_1}\frac{GMm}{r^2}dr$. 这里把引力的 r 与功的 r 同化了:

即将原点建立在其中一个物体上.

也就是说.若用此种方法计算一物体引力势变化.已经默认参考系是引力源的参考系.故我们刚才得出的"引力势各自再相加"的方法固然不正确.

最终.我们利用

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh\frac{R}{R+h}\cdot\frac{M}{M+m}$$

$$\frac{1}{2}MV^2=mgh\frac{R}{R+h}\cdot\frac{m}{M+m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(v+V)^2=mgh\frac{m+M}{M}\cdot\frac{R}{R+h}$$

此即之前所求的苹果在地球系的动能.

Prop. 第一宇宙速度

物体能环绕地球飞行的最小发射出速度.

显然,以这个 v 发射出去后.轨道直接变成圆, $\dot{r}=0$, $v_\theta\equiv v$.

$$a_r=\dot{\theta}^2r=\frac{GM}{r^2}\qquad r\equiv R$$

so that $v=\dot{\theta}r=\sqrt{gR}$

这个推导太水了，小学生都会。我们不妨用一些高级点的，利用守恒量。看看逐渐加速时，轨道咋变。(指增加初速度 v)

from Op.71. we know that when $\dot{r}=0$ there's

$$r^2+\frac{GmM}{E}r-\frac{mh^2}{2E}=0$$

in which $h=Rv$, $E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{R}$

$$r_A+r_B=-\frac{GmM}{E}=\frac{GmM}{\frac{GmM}{R}-\frac{1}{2}mv^2}$$

let $r_A=R$, then $r_B=\dfrac{1}{\frac{1}{R}-\frac{v^2}{2GM}}-R$

可以看到，当 $v=\sqrt{gR}$ 时，$r_B=R$，并且一定范围内，v 增大时 r_B 增大。当增大到一定程度时，r_B 中第一项的分母则不再是正数，i.e. r_B 不存在了。此时轨道则不再是椭圆，物体无法再回到地球。

Prop. 第二宇宙速度

物体逃逸地球引力的最小发射速度。

其实这么说不太合适，"引力"是逃不掉的，而逃走的对象是引力源，也就是受引力作用下的轨道不再闭合，从而可以一直远离。

通过上文，很容易看出来此时的判据是 $E=0$.

其意义则是无穷远引力势能为0时仍具有非负的动能.

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{R}=0$$

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2gR}$$

可以看出，若 M/R 大到一定程度，这个 v 则会超过光速 c.

不过要注意的是 v 是贴着 R 时的切向速度，不是说离多远都要这么大，显然，离引力源变远时这个 v 则会变小.

但是对于发光星体，它的光子则都是要经过表面发射的，故若这个天体的半径小于某一个值，则的确不允许光线离开.

$$R_s=\frac{2GM}{c^2}$$

此即具有 M 引力质量天体的 Schwarzschild 半径.

Prop. 第三宇宙速度

物体从地球出发摆脱太阳引力的最小发射速度.

同然，可以先求出对应的"在地球轨道上出发摆脱太阳引力"的最小初速度，此时假设地球引力忽略，则.

$$\frac{1}{2}mV_0^2-\frac{GmM_\odot}{R}=0$$

就在离太阳一个天文单位距离的东西应具有V_0的速度.

那么回到地球上,我们咋得到发射速度v?

V_0是太阳参考系时所求,回到地球上则没必要再找不自在采用太阳参考系.那么此时所需的地球系的末速度是啥?我们应最大利用地球公转线速度u.则命题为:

我们需要在忽略太阳引力下,使地球上以v发射的物体在脱离地球引力时在太阳系中具有V_0的速度.

则在地球系具有V_0-u的速度.即

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{r}=\frac{1}{2}m(V_0-u)^2$$

此中v即为所求的第三宇宙速度.

Epilogue

上面这个方程若参考太阳列,即物体初态为$v+u$,末态为V_0:

$$\frac{1}{2}m(v+u)^2-\frac{GmM}{r}=\frac{1}{2}mV_0^2$$

这显然与上文不等价,咋回事?

我们之前说,地球系和地球-物体质心系等价,这个系动量守恒,但这个系不是太阳系,其加速度可忽略但速度不能.

物体-地球的分离相当于碰撞，地球速度变为$v+dv$.

在地球系里其能量为$\frac{1}{2}Mdv^2$，是二阶小量.

而太阳系中为$\frac{1}{2}M(v+dv)^2$，动能变化为$Mvdv+\frac{1}{2}Mdv^2$. 其中的$Mvdv$为不可忽略量，故初状态应取：

地球速度u，物体速度$u+v$.

末状态，物体速度V_0，而动量守恒，地球速度V满足：

$$Mu+m(u+v)=MV+mV_0$$

而能量守恒则为：

$$\frac{1}{2}Mu^2+\frac{1}{2}m(u+v)^2-\frac{GmM}{r}=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}mV_0^2$$

此时两个方程，两个未知数，则正确了.

P.S. 将V代入能量守恒后，得到的式子与地球系仍有一点区别，则是我们忽略的dv^2项小量.