Op.157. 力学知识合集

孙肇远 PB22030708, Walpurgis, *Jan. 2025*
University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China

1. 数学简介

1.
矢量属于线性空间, 具有范数, 诱导为内积空间:

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i, \tag{1}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i = A^i B^j g_{ij}. \tag{2}$$

对于三维空间, 以叉乘定义, 具有代数结构, 构成 Lie 代数:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} A^i B^j \vec{e}^k = \begin{vmatrix} A_x & B_x & \hat{x} \\ A_y & B_y & \hat{y} \\ A_z & B_z & \hat{z} \end{vmatrix} \tag{3}$$

2. 质点运动学

2.
坐标无关的协变描述: 对于转动矢量 $\vec{A}$, 其基矢在转动参考系下不变, 角速度为 $\vec{\omega}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{A}} + A\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}t} = \partial_t A \hat{\boldsymbol{A}} + \vec{\omega} \times \vec{A}. \tag{4}$$

运动学矢量:

$$\vec{v} = \partial_t \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \equiv \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{5}$$

$$\vec{a} = \partial_t (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}' + \partial_t \vec{\omega} \times \vec{r} + 2\omega \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{6}$$

对于圆周运动, 转动系下静止, 无 $\vec{v}', \vec{a}'$, i.e.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{7}$$

$$\vec{a} = \partial_t \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{8}$$

3.

极坐标系: (r, θ), 微分关系:

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\,\mathrm{d}\theta \hat{\boldsymbol{r}}, \tag{9}$$

进行基 $\left\{\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}$ 下的表示:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \partial_t & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & \partial_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta}, \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \partial_t & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & \partial_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta}, \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

4.

自然坐标系:

- 速度方向: 切向量 $\hat{\boldsymbol{v}}$;
- 曲率圆圆心方向: 主法向量 $\hat{\boldsymbol{n}}$;
- 次法向量: $\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{v}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$.

微分关系:

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{v}} = \mathrm{d}\theta \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathrm{d}s}{\rho} \hat{\boldsymbol{n}}, \tag{13}$$

进行基 $\left\{\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\right\}$ 下的表示:

$$\vec{v} = v\hat{\boldsymbol{v}}, \tag{14}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{\boldsymbol{v}} + v\frac{\mathrm{d}s}{\rho\,\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{n}} = \dot{v}\hat{\boldsymbol{v}} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{15}$$

i.e. 切向加速度 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, 法向加速度 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$.

可求算曲率半径:

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = \frac{v^3}{\rho} \implies \tag{16}$$

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}. \tag{17}$$

3. 质点动力学

5.
第一定律: 存在参考系使得无外力物体保持速度, 名曰 "惯性系".
6.
第二定律: 惯性系下, $\vec{F} = m\vec{a}$. 其中 m 形容了物体的惯性.
7.
第三定律: 接触力大小相等方向相反, 与参考系无关, 不要求惯性系.
8.
非惯性系引入虚拟力使得第二定律成立, 此时可作惯性系处理.
具体操作就是联络两个参考系的位矢:
非惯性系 k 原点相对于惯性系 K 原点的位矢为 $\vec{r}_0$, k 中一个位矢 $\vec{r}$ 在惯性系 K 为 $\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}_0$.
两系中对时间的导数 (时间流动一致) 不一致, 故需区分时间导数算符, 仍以大小写区分:

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{D}\vec{R}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{\mathrm{D}\vec{r}_0}{\mathrm{D}t} \equiv \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} = \frac{\mathrm{D}\vec{V}}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{\mathrm{d}(\vec{\omega} \times \vec{r})}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{\mathrm{D}\vec{v}_0}{\mathrm{D}t} \\ &\equiv \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_0,\end{aligned} \tag{19}$$

考虑第二定律

$$\vec{F} = m\vec{A} \implies \tag{20}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times r\vec{v} - m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} \tag{21}$$

$$\equiv \vec{F} + \vec{f}_{\mathrm{t}} + \vec{f}_{\mathrm{c}} + \vec{f}_{\mathrm{cor}} + \vec{f}_{\mathrm{e}}, \tag{22}$$

以上分别为真实力, 平移惯性力, 惯性离心力, Coriolis 力, Euler 力.

4. 动量定理

9.
动量定理: 孤立质点系动量守恒, 外力冲量使得动量改变:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{23}$$

10.
质心:

$$\vec{p} = \sum m\vec{v} = \sum m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sum m\vec{r}}{M} \equiv M\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}, \tag{24}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{c}} = \frac{\sum m\vec{r}}{\sum m} = \frac{\displaystyle\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\displaystyle\int \mathrm{d}m}. \tag{25}$$

质心运动:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{26}$$

11.
变质量物体.
质量连续变化:

$$t \longrightarrow t + \delta t, \tag{27}$$
$$p = m\vec{v} + \delta m\vec{u}, \tag{28}$$
$$p + \delta p = (m + \delta m)(\vec{v} + \delta\vec{v}), \tag{29}$$
$$\delta p = (m + \delta m)(\vec{v} + \delta\vec{v}) - (m\vec{v} + \delta m\vec{u}) = \vec{f}\delta t \implies \tag{30}$$
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{f}. \tag{31}$$

或对主客体分别考虑动量变化亦可.

5. 动能定理

12.
功 $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$.
要求惯性系下, 一个质点所受合力的功

$$\mathrm{d}W = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\cdot\vec{r} = m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{32}$$

定义为物体的动能.
13.
保守力: 做功与路径无关 $\implies$ 功是恰当微分,

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_\mathrm{k}, \tag{33}$$
$$\mathrm{d}E := \mathrm{d}(E_\mathrm{k} + V) \equiv \mathrm{d}E - \mathrm{d}W = 0, \tag{34}$$
$$\mathrm{d}V = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}, \tag{35}$$
$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}} = -\nabla V. \tag{36}$$

14.
机械能改变量等于非保守力做功与 “没转化为势能的那些外力” 做功.
15.
质心系: 质心位矢为 0, 孤立时 (质心在实验室系中) 加速度为 0.
不论何时, 质点系在质心系的动量为 0.
16.
不论质心系是否是惯性系, 体系动能都为质心动能 + 质心系中质点系动能.
质心系中惯性力做功为 0.(质心系是平动参考系)

17.

两体问题.

质量分别为 m, M, 不妨设为引力系, 质心静止或匀速直线运动, 则

$$mv + MV = 0, \quad 「37」$$
$$V = -\frac{m}{M}v \sim 0, \quad 「38」$$
$$T[M] = \frac{1}{2}MV^2 \sim 0. \quad 「39」$$

于是引力势全部为 m 的动能.

如果地球速度不再是小量 (比如相对地球向上以速度 u 运动的参考系), 则地球动能不再为小量, 能量守恒需考虑.

18.

第一宇宙速度: 环绕速度;

第二宇宙速度: 脱离地球, 即动能大于引力势.

第三宇宙速度: 脱离太阳.

19.

利用地球公转脱离太阳.

首先要求在仅考虑太阳引力时,

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \implies \quad 「40」$$
$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad 「41」$$

于是要求这个东西在脱离地球引力后应具有速度 v, 这个速度是太阳静止系的速度. 于是能量守恒可以表示为

$$T_{\text{earth}} + \frac{1}{2}m(29.8 + v')^2 + V = T'_{\text{earth}}, \quad 「42」$$

其中还有动量守恒可以求得地球末动能.

显然利用质心是方便的, 这不需要地球动能, 仅需速度转换: 质心系的速度即相对于地球的速度, 故

$$v' = 42.2 - 29.9, \quad 「43」$$

再于质心系能量守恒即可.

20.

约化质量.

对于两体问题, 将参考系选择其中一个身上, 则另一个质量视作约化质量, 与惯性系分析完全相同, 且其动能等于质心系动能.

对于引力具有有趣的情况, 设相对位矢 $\vec{r}$, 选择任意一个身上作为参考系, 则

$$F=\frac{Gm_1m_2}{r^2}=\mu\ddot{r}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\ddot{r}\implies \tag{44}$$

$$\ddot{r}=\frac{G}{r^2}(m_1+m_2), \tag{45}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{r}=\dfrac{G}{r^2}(m_1+m_2)m_1,\\ m_2\ddot{r}=\dfrac{G}{r^2}(m_1+m_2)m_2, \end{cases} \tag{46}$$

这组方程意味者可以将另一物体的引力质量看作 m_1+m_2.

21.

恢复系数.

$$v_2-v_1=e(u_1-u_2), \tag{47}$$

若对于斜碰, 其速度为碰撞的分量.

6. 角动量定理

22.

角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}, \tag{48}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}. \tag{49}$$

掠面速度

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}\,\mathrm{d}t|, \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|. \tag{51}$$

23.

和动量一样, 质心系中平移惯性力无力矩贡献, 角动量定理恒成立.

7. 万有引力

24.

有心力分析.

有心力是平面运动且具有势函数:

$$m\ddot{\vec{r}}=f[r]\boldsymbol{\hat{r}}, \tag{52}$$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\quad a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}, \tag{53}$$

$$\begin{cases} \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=f/m,\\ 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0. \end{cases} \tag{54}$$

此处我们可以注意到角动量守恒:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mrv_\theta = mr^2\dot{\theta}, \tag{55}$$

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0. \tag{56}$$

故若

$$h \equiv \frac{l}{m} = r^2\dot{\theta}, \tag{57}$$

将变量取为 (h, r), 则

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \implies \tag{58}$$

$$a_r = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} \implies \tag{59}$$

$$a_r \,\mathrm{d}r = \dot{r}\,\mathrm{d}\dot{r} - \frac{h^2}{r^3}\,\mathrm{d}r \implies \tag{60}$$

$$\int \frac{f[r]}{m} - \frac{h^2}{r^3}\,\mathrm{d}r = \int \dot{r}\,\mathrm{d}\dot{r}, \tag{61}$$

$$-V[r]/m - \frac{h^2}{2r^2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \mathrm{Const} \implies \tag{62}$$

$$E := \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V[r] = \mathrm{Const}, \tag{63}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{64}$$

继续回到 h, 解出 $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V[r]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}, \tag{65}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V[r]}{m} - \frac{h^2}{r^2}}} = \pm\,\mathrm{d}t, \tag{66}$$

此时已经可以积分解决.
上述得到时间的曲线, 而若仅需轨道则有处理方法:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + V[r], \\ h = r^2\dot{\theta}, \end{cases} \tag{67}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}\partial_\theta, \tag{68}$$

$$\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + V[r] = E, \tag{69}$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{h\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2(E - V[r])}{m} - \frac{h^2}{r^2}}}. \tag{70}$$

基于原始的处理: Binet 公式:

$$\begin{cases} f/m = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \\ 0 = \dot{h}, \end{cases} \tag*{「71」}$$

$$\dot{r} = \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -h\frac{\mathrm{d}1/r}{\mathrm{d}\theta}, \tag*{「72」}$$

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-h\frac{\mathrm{d}1/r}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\frac{h^2}{r^2}\mathrm{d}^2 1/r\mathrm{d}\theta^2, \tag*{「73」}$$

$$u \equiv 1/r \implies \tag*{「74」}$$

$$\ddot{r} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}, \tag*{「75」}$$

$$\dot{\theta} = hu^2 \implies \tag*{「76」}$$

$$f/m = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - h^2u^3. \tag*{「77」}$$

对于万有引力

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}, \tag*{「78」}$$

常数解

$$u_0 = \frac{GM}{h^2}, \tag*{「79」}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = 0 \implies \tag*{「80」}$$

$$u[\theta] = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{h^2}, \tag*{「81」}$$

θ_0 不影响轨道形状, 则取 0:

$$u = A\cos\theta + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM + Ah^2\cos\theta}{h^2}, \tag*{「82」}$$

$$r = \frac{h^2}{GM + Ah^2\cos\theta} = \frac{h^2/GM}{1 + \frac{Ah^2}{GM}\cos\theta} \equiv \frac{e/A}{1 + e\cos\theta}, \tag*{「83」}$$

e 即为离心率, 分子具有长度量纲, 记 r_0:

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos\theta}. \tag*{「84」}$$

当 $e \in (0,1)$, 椭圆, 近日点 $r = \dfrac{r_0}{1+e}$, 远日点 $r = \dfrac{r_0}{1-e}$, 长轴

$$2a = \frac{r_0}{1+e} + \frac{r_0}{1-e} = \frac{2r_0}{1-e^2}, \tag*{「85」}$$

短轴

$$2b = \frac{2r_0}{\sqrt{1-e^2}}. \tag*{「86」}$$

亦可能量分析: 长轴端点处无径向速度:

$$E=\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2-G\frac{mM}{r}=\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}-G\frac{mM}{r}, \tag{87}$$

$$r^2+\frac{GMm}{E}r-\frac{mh^2}{2E}=0, \tag{88}$$

$$r=\frac{-\frac{GMm}{E}\pm\sqrt{\left(\frac{GMm}{r}\right)^2+\frac{2mh^2}{E}}}{2}=-\frac{GMm}{2E}\pm\sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2+\frac{mh^2}{2E}}, \tag{89}$$

$$r_1+r_2=-\frac{GMm}{E}=2a. \tag{90}$$

25.

Kepler 第三定律.

椭圆性质可知

$$a=-\frac{GMm}{2E}, \tag{91}$$

$$b^2=r_1r_2=-\frac{mh^2}{2E}\implies \tag{92}$$

$$b=h\sqrt{\frac{a}{GM}}, \tag{93}$$

$$S=\pi ab=\frac{\pi ha^{3/2}}{\sqrt{GM}}, \tag{94}$$

掠面速度

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|=\frac{h}{2}, \tag{95}$$

$$T=\frac{2\pi ab}{h}=\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \tag{96}$$

8. 刚体力学

26.

刚体角速度唯一.

考虑刚体上一点 P, 选取两点 $\vec{R}_1,\vec{R}_2$, 分别以原点射到 $R_{1,2}$ 再射到 P 构建交换图, 设 $\vec{R}_{1,2}$ 到 P 的相对位矢为 $\vec{r}_{1,2}$, 则 P 速度交换:

$$\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} \tag{97}$$

$$\frac{R_1-R_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r_2-r_1}{\mathrm{d}t}, \tag{98}$$

$$\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t}+\omega_1\times(R_2-R_1)=\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t}+\omega_1\times(r_1-r_2), \tag{99}$$

$$\omega_1\times(r_2-r_1)=\omega_2\times r_2-\omega_1\times r_1, \tag{100}$$

$$\omega_1\times r_2=\omega_2\times r_2. \tag{101}$$

27.

刚体定轴转动.
合外力矩决定角加速度:

$$M = I\beta, \tag{102}$$

其中转动惯量 I 由转轴与物质自身决定.
28.
平行轴定理: 对于通过质心的某条轴的转动惯量 I_C, 则其平移 d 后的转动惯量

$$I_D = I_C + md^2. \tag{103}$$

正交轴定理: 对于薄板型的刚体, 则绕 z 轴的转动惯量为绕任意 x, y 轴的转动惯量和:

$$I_z = I_x + I_y. \tag{104}$$

29.
刚体动能.
对于质心系, 选择质心作为基点, 则

$$T = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \int \frac{1}{2}(v_c^i)^2 \, \mathrm{d}m_i \tag{105}$$

$$= \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2. \tag{106}$$

9. 振动和波

30.
一些定义和关系.

$$x = A\sin[\omega t + \phi], \tag{107}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{108}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{109}$$

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{110}$$

31.
俩同频率波合成:

$$x_1 = A_1\cos[\omega t + \phi_1], \tag{111}$$

$$x_2 = A_2\cos[\omega t + \phi_2], \tag{112}$$

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\phi_1 - \phi_2]}\cos[\omega t + \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}]. \tag{113}$$

当相位差

$$\phi_1-\phi_2=2k\pi \implies A=A_1+A_2, \tag{114}$$

$$\phi_1-\phi_2=(2k+1)\pi \implies A=|A_1-A_2|, \tag{115}$$

$$\phi_1-\phi_2=\frac{\pi}{2}+k\pi \implies A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}. \tag{116}$$

32.
俩同向的波合成:

$$x_1=A\cos[\omega_1 t+\phi_1], \tag{117}$$

$$x_2=A\cos[\omega_2 t+\phi_2], \tag{118}$$

$$x_1+x_2=2A\cos[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}]\cos[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}], \tag{119}$$

其中迅速震荡, 频率高者为 $\cos[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}]$ 其可视作新的振动频率, 而 $\cos[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}]$ 起包络线作用, 形成拍, 拍频为包络线相邻节点频率:

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}, \tag{120}$$

$$\nu=\frac{1}{T/2}=\frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}=|\nu_1-\nu_2|. \tag{121}$$

33.
阻尼运动.

$$m\ddot{x}=-kx-h\dot{x}, \tag{122}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}, \tag{123}$$

$$2\beta=\frac{h}{m}, \tag{124}$$

欠阻尼

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}, \quad \omega_0>\beta \tag{125}$$

$$x=A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos[\omega t+\phi], \tag{126}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}; \tag{127}$$

临界阻尼

$$\beta=\omega_0, \tag{128}$$

$$x=(A+Bt)\mathrm{e}^{-\beta t}; \tag{129}$$

过阻尼

$$\beta>\omega_0 \tag{130}$$

$$x=A\exp[-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t]+B\exp[-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t] \tag{131}$$

34.

受迫振动

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + f[t], \tag{132}$$

对于

$$f[t] = F_0, \tag{133}$$

为常数, 仅改变平衡位置;

对于

$$f[t] = F_0 \cos[\omega t], \tag{134}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos[\omega t]}{m}, \tag{135}$$

$$x = A\mathrm{e}^{-\beta t} \cos[\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \phi] + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}} \cos[\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}], \tag{136}$$

其中第一项为阻尼振动, 第二项为受迫简谐振动, 对于受迫振动部分,

$$B \equiv \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{137}$$

$$\varphi \equiv \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{138}$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\omega} = 0 \implies \tag{139}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \equiv \omega_\mathrm{r} \tag{140}$$

为共振角频率.

35.

平面单色波

$$\vec{B}[\vec{r}, t] = \vec{A} \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi], \tag{141}$$

其中波矢 $\vec{k}$ 的模为波数,

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}, \tag{142}$$

$$\nu \to T \to \omega, \tag{143}$$

$$\{v, \nu\} \to \lambda, k, \tag{144}$$

$$k = \frac{\omega T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{145}$$

36.

干涉: 频率相图波的合成.
对于空间中的俩波源

$$y_1^0 = A_1 \cos[\omega t + \phi], \tag{146}$$
$$y_2^0 = A_2 \cos[\omega t + \phi], \tag{147}$$

则传播到 P 点处时, 振动为俩圆面波合成:

$$y_1 = A_1 \cos[\omega t - kr_1 + \phi_1], \tag{148}$$
$$y_2 = A_2 \cos[\omega t - kr_2 + \phi_2], \tag{149}$$

其中 $r_{1,2}$ 为距这俩波源的距离,

$$y = y_1 + y_2. \tag{150}$$

37.
驻波.

$$y_1 = A \cos[\omega t + kx], \tag{151}$$
$$y_2 = A \cos[\omega t - kx], \tag{152}$$

显然和差化积后时空项分离:

$$y = 2A \cos[kx] \cos[\omega t], \tag{153}$$

这个波不再能传播, 而是每个地方自己振自己的振幅为 $2A \cos[kx]$.
38.
Doppler 效应.
波源静止, 人动, 则波长不变, 靠近增加单位时间内收到的波数,

$$\nu \longrightarrow \nu' = \frac{V + v_{人}}{\lambda} = \frac{V + v_{人}}{V}\nu. \tag{154}$$

波源动, 人静止, 则传播速度不变, 波长变小:

$$\nu \longrightarrow \nu' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{\lambda - v_{源}} = \frac{V}{V - v_{源}}\nu. \tag{155}$$

10. 流体力学

39.
Lagrange 坐标 (t^ξ, ξ^i) 为随体坐标, Euler 坐标 (t, x^i) 为空间坐标.
时间导数算符同随体时间导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t^\xi}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{x^i} + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_t \left(\frac{\partial x^i}{\partial t^\xi}\right)_{\xi^i} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \partial_i. \tag{156}$$

40.

流体受力平衡: 面力与体力合力为 0.

$$\int_S -p\,\mathrm{d}\vec{S} + \int_V \vec{f}\rho\,\mathrm{d}\tau = 0, \tag{157}$$

$$\rho\vec{f} = \nabla p. \tag{158}$$

41.
具有合力, 运动方程 (Navier-Stokes):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{159}$$

守恒量:

$$\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p, \tag{160}$$

若 $\vec{f}$ 为保守力 (因此可以写出恰当微分), 且 ρ 定常, 则

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}v^2) = -\,\mathrm{d}V - \mathrm{d}(\frac{p}{\rho}), \tag{161}$$

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho V + p) = 0. \tag{162}$$

42.
Newton 黏滞定律: 作用于流体切向的阻力正比于速度梯度.

$$F = \eta S\nabla v. \tag{163}$$

43.
圆管内定常流动: Poiseuille 定律.
合力为 0, 速度场存在径向分布:

$$F = \eta 2\pi r l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}, \tag{164}$$

其中可以发现边界 $r = R$ 处速度应为 0, 故

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0, \tag{165}$$

$$\Delta p > 0, \tag{166}$$

$$\Delta p\pi r^2 = -2\eta\pi r l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}, \tag{167}$$

$$\mathrm{d}v = -\frac{\Delta p r\,\mathrm{d}r}{2\eta l}, \tag{168}$$

$$v[r] = -\frac{\Delta p}{4\eta l}(r^2 - R^2) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2), \tag{169}$$

$$\mathrm{d}Q[r] = v2\pi r\,\mathrm{d}r, \tag{170}$$

$$Q = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\eta l}. \tag{171}$$

44.
Reynolds number.

$$\mathrm{Re} := \frac{vr\rho}{\eta}. \tag{172}$$

11. 狭义相对论

45.

惯性系平权.

光速不变.

46.

对于 x 方向相对 K 系以 v 速度运动的 K' 系, 则时空变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{-\beta x + ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix}. \tag{173}$$

47.

具体狭义相对论初步, 见 Op.79.