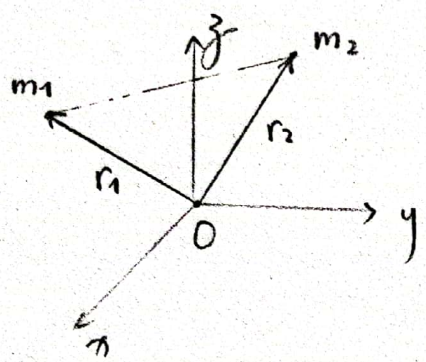
Prop. 两体问题与质心系

Prob. 考虑惯性系下的两个孤立质点体系：



其仅受等大反向的相互作用力.

试分析其运动学方程.

Scholium. 大家都知道，Newton力学的核心就是 F=ma，通过各种操作把情景转化到这个式子上. 这个问题也不难，惯性力为零.故：

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d^2r_1}{dt^2}=f & (1) \\ m_2\dfrac{d^2r_2}{dt^2}=-f & (2) \end{cases}$$

然后f可能是各种形式，再分析就行了.

不过.我们可以再充分地利用一下 f 的性态.我们知道.不在少数的这种相互作用力实际上只是相对位置的函数(比如库仑力)，即

$$f=f(r_1-r_2) \qquad (3)$$

我们就需要凑出 r_1-r_2，这件事情不难.只需 $^{(1)}/_{m_1}-{}^{(2)}/_{m_2}$：

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}=\frac{f}{m_1}+\frac{f}{m_2}$$

i.e.

$$\frac{d^2(r_1-r_2)}{dt^2}=f\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$

let $\mu:=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$. that's $\mu\frac{d^2(r_1-r_2)}{dt^2}=f$ (4)

这个拥有质量的量纲的物理量μ,则命名为"约化质量".

好了,现在利用完f了,两个方程重组成了一个好看的方程,那么应该还有一个方程吧:对应的就是(1)+(2):

$$m_1\frac{d^2r_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2r_2}{dt^2}=0$$

i.e. $$\frac{d^2(m_1r_1+m_2r_2)}{dt^2}=0$$

这个$m_1r_1+m_2r_2$对应的啥,已经很明显了,只需两边同时除以m_1+m_2.

$$\frac{d^2\left(\frac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}\right)}{dt^2}=0$$

let $r_c:=\frac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}$. that's $\frac{d^2r_c}{dt^2}=0$ (5)

这个拥有位矢的量纲的物理量r_c,则命名为"质心".

于是我们就完成了$F=ma$的转换:

$$\begin{cases}\mu\frac{d^2r}{dt^2}=f\\ m_c\frac{d^2r_c}{dt^2}=0\end{cases}$$ in which $r=r_1-r_2$, $m_c=m_1+m_2$.

也就是说，质心不受力，即质心匀速直线运动，质点组动量守恒.

那么，质心系也是惯性系，来看看这个系有啥性质：

$$r_{c1} = r_1 - r_c = \frac{m_2}{m_1+m_2}(r_1-r_2) = \frac{m_2}{m_1+m_2}r$$

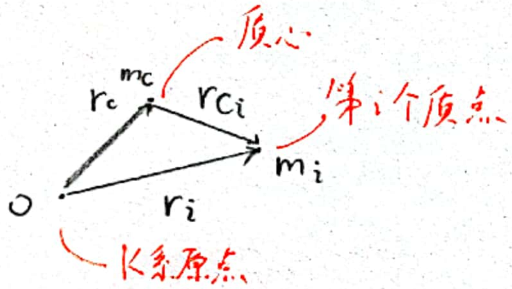
$$r_{c2} = r_2 - r_c = \frac{-m_1}{m_1+m_2}(r_1-r_2) = -\frac{m_1}{m_1+m_2}r$$

即，质心系的位矢距离反比于质点质量，质心在两质点连线上.

动量已经讨论过了，质点组动量即看成质心动量. 那么质心显然相对质心系静止，故体系动量恒为零.

现在看机械能，设K、Kc分别为原惯性系和质心系，质心系的第i个质点（不仅仅考虑两体）有

$$r_i = r_c + r_{ci}$$



$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \qquad E_{kc} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ci}^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2}m_i (v_c + v_{ci})^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2}m_i (v_c^2 + 2v_c v_{ci} + v_{ci})^2$$

$$= \frac{1}{2}m_c v_c^2 + v_c \sum_i m_i v_{ci} + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ci}^2$$

对于第一项，乃质心在K系的动能.

第二项存在质心在质心系的动量，故为零.

第三项为质点组在质心系的动能，即E_{kc}.

Theor.

† 体系动能等于质心动能与体系于质心系动能之和.

即 König 定理. †

由以上证明过程. 质心系是否是惯性系. König 定理都成立.

回过头来看两体问题, 其动能则为

$$E_{kc} = \frac{1}{2}m_1 v_{c_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{c_2}^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d(r_1-r_2)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{d(r_1-r_2)}{dt}\right)^2$$

let $v := \frac{dr}{dt} = \frac{d(r_1-r_2)}{dt}$, that's

$$E_{kc} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2 \qquad (6)$$

大家都知道. 孤立的这两个质点单独拿出来看. 谁都不是惯性系.
即若要以其中一个为参考系. 则需引入惯性力.

但惯性力的来源是啥? 是为了凑齐 Newton's 2^{nd} law.

但是此时此刻我们已经推出来了这样形式的东西:

$$f = \mu\frac{d^2 r}{dt^2}$$

这个 r 是 $r_1 - r_2$. 即从 2 指向 1 的矢量.

i.e. 以 2 为参考系时分析 1 的运动. 无需引入惯性力. 仅需将 1 的质量视作二者的约化质量.

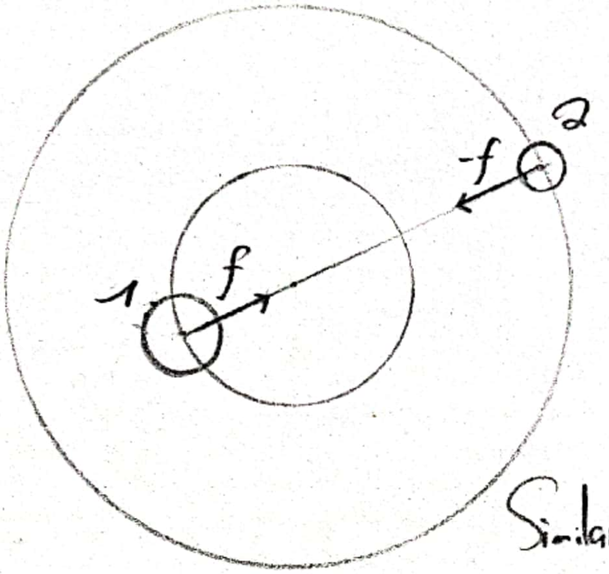
并且有. 此时该系的 1 的动能即为质心系的动能.

In his edendis, Vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum Typotheratum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, sed etiam Author fuit ut horum editionem aggrederer.

— IS. NEWTON.

两体问题的一个很好的例子是双星系统. 其中的f是引力.

引力与库仑力不同, 它仅不仅仅是相对位置的函数. 还是引力质量的函数. 它与惯性质量几乎是一个东西.



of course, there's $\mu\ddot{r} = G\frac{m_1m_2}{r^2}$

but we could change the direction:

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\ddot{r} = G\frac{m_1m_2}{r^2} \Rightarrow$$

$$m_1\ddot{r} = \frac{G}{r^2}m_1(m_1+m_2)$$

Similarly there's $m_2\ddot{r} = \frac{G}{r^2}m_2(m_1+m_2)$

我们之前的操作: 把运动物体的惯性质量看作 μ.

现在的操作: 把不动的物体的引力质量看作 m_1+m_2.

这个东西仍是 $f=ma$ 的形式. 故可适用惯性系的任何操作.

也就是说. 双星系统可看作一个星球不动. 并以两星球质量之和为引力质量吸引另一颗星球.

显然此时, 另一颗星球的轨迹也是那几种基本圆锥曲线.

但是这个不是我们的视角。我们大致处于一个"惯性系"。这于两星球是运动的，但与其质心大概静止。那么如果用上述方法分析质心系，则得到啥结果？

We know that $r_{C_1}=\frac{m_2}{m_1+m_2}r$. so there's

$$\ddot{r}_{C_1}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{r}$$

$$m_1\ddot{r}=\frac{G}{r^2}m_1(m_1+m_2) \Leftrightarrow m_1\cdot\frac{m_1+m_2}{m_2}\ddot{r}_{C_1}=\frac{Gm_1(m_1+m_2)}{\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}r_{C_1}\right)^2}$$

i.e. $$m_1\ddot{r}_{C_1}=\frac{G}{r_{C_1}^2}m_1\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}$$

Similarly, there's $$m_2\ddot{r}_{C_2}=\frac{G}{r_{C_2}^2}m_2\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}$$

故以质心系看 m_i，则等价于质心处的引力质量为 $\frac{m_i^3}{(m_1+m_2)^2}$。

这样便可以单独分析双星中的任意一个。

Sol solio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula Gyris.
Jam patet horrificis quae sit via flexa Cometis;
Jam non miramur barbati Phaenomena Astri.

— EDM. HALLEY.