Op. 71 有心力问题及Kepler定律

(Newton力学)

Def. 1.

† 有心力，即力的方向始终指向或背向固定中心的力：

$$F = f(r)\hat{r}$$

$f(r)$ 要求，有心力关于该固定中心球称。†

有心力存在的空间则称有心力场，固定中心称力心。

Corol. 1.

† 有心力做功只与始终点位置有关，与路径无关。

i.e. 有心力沿闭合路径做功为0：

$$\oint F \cdot dr = 0 \quad †$$

这个事不难解释，这个力只能在径上做功，故只与到力心的距离有关。

所以我们可以对其定义势能函数(即有心力是保守力)：

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} F \cdot dr + V_0$$

so that $$F = -\nabla \cdot V(r) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

此时我们得出两个结论：

(i) 质点必定在一个平面上运动.

(ii) 质点机械能守恒

现在再来看运动方程：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$$

考虑质点角动量 $L = r \times p = m r \times v$

有 $l = m \cdot r \cdot v_\theta = m r^2 \dot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad a_r = f(r)/m = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$a_\theta = 0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad (2)$$

则 $\dfrac{dl}{dt} = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})$

$= mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$

故此式的意义就是质点角动量守恒.

此时我们的该任务便是解这两个常微分方程.

我们找到了方程(2)的一个等价形式：$dl/dt = 0$. 则可以利用这个删掉不关注的质量 m：

$$h := l/m = r^2\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \dot{\theta} = h/r^2$$

so that (1): $a_r = \ddot{r} - r(h/r^2)^2 = \ddot{r} - h^2/r^3$

that's $a_r dr = \dot{r} d\dot{r} - \dfrac{h^2}{r^3} dr$

$$\int_{r_0}^{r} (a_r + \frac{h^2}{r^3}) dr = \int_{\dot{r}_0}^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r}, \quad \text{for} \quad \int_{r_0}^{r} a_r dr = \frac{V(r_0) - V(r)}{m}$$

we have $E := \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{mh^2}{2r^2} + V(r) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) \quad (3)$

while $dE/dt = 0$

于是乎，(1) 转化为了(3) 这个物理意义鲜明的式子：机械能守恒.

其中前两项分别为径向动能与横向动能.

Prop. 定量处理及轨道问题.

* 此时开始着手(3)式，由于$\dot{\theta}$未必恒定，故我们选用h.

$$\frac{dr}{dt}=\dot{r}=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{2V(r)}{m}-\frac{h^2}{r^2}}$$

that is $$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{2V(r)}{m}-\frac{h^2}{r^2}}}=\pm dt$$

把对应的$V(r)$代入积分，则可求出$r(t)$

那么对于极坐标的另一个的自由度：$\theta(t)$，则回到角动量守恒：

$$\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}=h/r(t)^2 \Rightarrow \frac{d\theta}{h}=\frac{dt}{r(t)^2}$$

同理，积分即可.

* 如果我们要求不那么高，仅仅需解出轨道，则另有一些方法.

先重申一下方程组：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}+V(r)=E \\ \dot{\theta}r^2=h\end{cases}$$

可以发现，这里面没有时间自身，只存在t的微分

于是很容易，利用一下h：

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}=\frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta} \quad (4)$$

此时用完了h，则代入E：

$$\frac{mh^2}{2r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{mh^2}{2r^2}+V(r)=E$$

$$\Rightarrow\quad d\theta=\frac{h\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2(E-V(r))}{m}-h^2/r^2}}$$

于是则直接有$\theta\sim r$关系式。

不过，如果只要求轨道，则可以直接从a_r、a_θ方程下手：

$$\begin{cases} a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=f/m & (5)\\ a_\theta=2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}=0 & (6)\end{cases}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-h\frac{d(1/r)}{d\theta}\qquad \text{let } u=1/r$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)=hu^2\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$(6)\Leftrightarrow\quad h=\dot\theta r^2$$

so that substitute into (5):

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-h^2u^3=f/m$$

i.e.

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-f/m\qquad \text{in which } u=1/r$$

这个便是轨道的微分方程，称Binet公式。

我们经常研究形如 $f(r)=kr^a$ 的有心力. 即 $f\propto r^a$.

此后. 可用分析力学的方法求出轨道的通式. (先挖个坑, 慢々填)

至此该回到主题上: 万有引力.

由于恒星超重于行星, 可假设其为固定的. 则

$$f=-G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

† Kepler's 2^{nd} law

相等时间内, 太阳与运动行星连线扫过面积相等.

把这个面积切成一堆小三角形:

$$S=\int dS=\int\frac{1}{2}r\,ds=\int\frac{1}{2}rv_\theta dt=\int\frac{1}{2}r\dot{\theta}r\,dt=\int\frac{h}{2}dt$$

此时也可看出 $h/2$ 的物理意义为掠面速度.

其中 S 是面积. s 是路径长度. 即 ds 为线元.

可以得到. 角动量守恒的体系均有此定律成立.

† Kepler's 1^{st} law

每一个行星都沿着各自的椭圆轨道环绕太阳, 太阳位于焦点.

至此. 我们要拿出轨道方程的 Binet 公式:

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{f}{m}=\frac{GM}{r^2}=GMu^2$$

that's $$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}$$

这是一个简单的二阶常系数非齐次线性常微分方程.

由于其非齐次部分为一常数,故显然有特解:

$$u=\frac{GM}{h^2}$$

接下来是齐次部分,它也十分友善,

for $$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=0$$

$$u(\theta)=C_1\sin\theta+C_2\sin\theta$$
$$=:A\cos(\theta-\theta_0)$$

So that $$u(\theta)=\frac{GM}{h^2}+A\cos(\theta-\theta_0)$$

由于θ_0的效果仅在于平移,不影响轨道形状,故我们选取合适的坐标系使$\theta_0=0$.则再代入r,有.

$$\frac{1}{r}=\frac{GM}{h^2}+A\cos\theta,\ \text{let } e:=\frac{Ah^2}{GM}$$

$$r=\frac{e/A}{1+e\cos\theta}$$

此即离心率为e,半正焦弦为e/A,焦点在原点的圆锥曲线.

† Kepler's 3rd law

行星公转周期的平方与椭圆轨道半长轴立方成正比.

这个定律可以帮助猜测万有引力的形式：

若轨道为圆形，轨道半径为r，周期为τ，则有速度$v=\frac{2\pi r}{\tau}$，而根据运动学可知$a_r=\omega^2 r=\frac{v^2}{r}$，故$f\propto\frac{v^2}{r}\propto\frac{r}{\tau^2}$

而根据 Kepler's 3rd law：$\tau^2\propto r^3$，故$f\propto r^{-2}$.

接下来，回到证明上。

大家都知道，掠面速度是$h/2$，那么对于椭圆：

$$\tau=\frac{2\pi ab}{h}$$, in which a is semi major. b is semi minor axis.

而我们熟悉的，乃是行星与焦点的距离而非半轴，故可选择近拱距与远拱距表示周期，而拱距则容易描述了：径向速度为0.

$$a=\frac{r_A+r_B}{2}$$

$$b=\sqrt{r_A r_B}$$

for $E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+V(r)$, $\dot{r}=0$. $V(r)=-\frac{GmM}{r}$

so that $E=\frac{mh^2}{2r^2}-\frac{GmM}{r}\Leftrightarrow r^2+\frac{GmM}{E}r-\frac{mh^2}{2E}=0$

from Vieta's formulas, there are:

$$a=\frac{r_A+r_B}{2}=-\frac{GmM}{2E},\quad b=\sqrt{r_A r_B}=h\sqrt{\frac{-m}{2E}}=h\sqrt{\frac{a}{GM}}$$

then $\tau=\frac{2\pi ab}{h}=\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$

Q.E.F.