GBI-Übungsstunde

Kahoot!

- Wir spielen jetzt noch eine letzte Runde Kahoot!
- Das heutige Quiz könnt ihr euch später nochmal anschauen: https://create.kahoot.it/share/gbi-ubungsstunde/f80350a3-4473-4080-aeaf-35f456ac2a19
- Alle anderen Kahoot!s sind in den entsprechenden Foliensätzen verlinkt

Aufgabe 1: Sprachen

Aufgabe

Gegeben seien die folgenden Sprachen:

$$L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \quad | \quad n, m \in \mathbb{N}_0, n > m\}$$
$$L_2 = \left\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{c}^o \quad \middle| \quad n, o \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_+\right\}$$

a) Geben Sie für $i \in \{1, 2\}$ einen regulären Ausdruck R_i an, sodass gilt: $\langle R_i \rangle = L_i$.
Falls eine der Sprachen nicht regulär ist, geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die diese Sprache erzeugt.

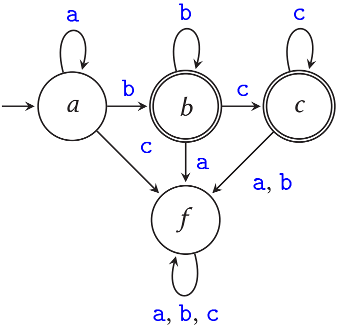
b) Geben Sie für jede reguläre Sprache L_i ($i \in \{1, 2\}$) einen endlichen Akzeptor A_i an, der genau L_i akzeptiert.

Aufgabe 1: Sprachen

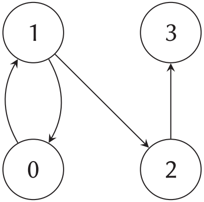
Lösung a)

- $G_1 = (\{S, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} | X, X \to \mathtt{a}X | \mathtt{a}\})$
- $R_2 = \mathtt{a} * \mathtt{bb} * \mathtt{c}*$

Lösung b)



Aufgabe 2: Graphen



Aufgabe

Gegeben seien der oben dargestellte Graph $G = (V, E)$.

a) Geben Sie die Adjazenzmatrix A und die Wegematrix W von G an.

b) Geben Sie einen gerichteten Graphen $G_W = (V, E_W)$ an, dessen Adjazenzmatrix W ist.

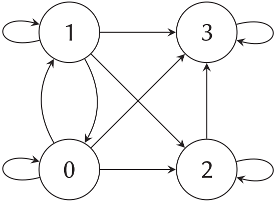
c) Geben Sie einen schleifenfreien Graphen $G' = (V', E')$ an, der nicht zu G isomorph ist, für den aber $G'_W = (V', E'_W)$ isomorph zu G_W ist.
Dabei ist G'_W analog zu b) der Graph, dessen Adjazenzmatrix die Wegematrix von G' ist.

Aufgabe 2: Graphen

Lösung a)

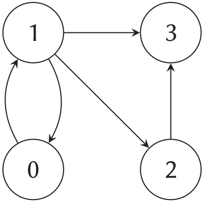
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung b)



Aufgabe 2: Graphen

Lösung c)



Feedback + kurze Pause

https://5vuj7k3npj7.typeform.com/to/wn5gx2qp

Aufgabe 3: Äquivalenzrelation

Aufgabe

Sei $\mathcal{G}$ die Menge, die alle Graphen enthält.
(Wir ignorieren an dieser Stelle gekonnt, dass diese Definition keine Grundmenge hat)
Sei $R \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ eine binäre Relation, für die für beliebige $G, H \in \mathcal{G}$ gilt:
"$(G, H) \in R \Leftrightarrow G$ ist isomorph zu H". Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3: Äquivalenzrelation

Karlsruhe Institute of Technology

Lösung

Zeige, dass R (i) reflexiv, (ii) transitiv und (iii) symmetrisch ist.

(i) Sei $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ ein Graph.

- Setze $f = Id_V$. Dann ist f offensichtlich bijektiv.
- Es gilt für bel. $v_1, v_2 \in V$: $(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (v_1, v_2) = (f(v_1), f(v_2)) \in E$.
- Also ist f ein Graphenisomorphismus und es ist $(G, G) \in R$.

(ii) Seien $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), G_3 = (V_3, E_3) \in \mathcal{G}$ mit $(G_1, G_2), (G_2, G_3) \in R$.

- Dann ex. Graphenisomorphismen $f_1 : V_1 \longrightarrow V_2$ und $f_2 : V_2 \longrightarrow V_3$.
- Setze $f = f_2 \circ f_1$. f ist als Verkettung bijektiver Funktionen selbst bijektiv.
- Es gilt für $v_1, v_2 \in V_1$:
  $(v_1, v_2) \in E_1 \Leftrightarrow (f_1(v_1), f_1(v_2)) \in E_2$
  $\Leftrightarrow (f_2(f_1(v_1)), f_2(f_1(v_2))) \in E_3 \Leftrightarrow (f(v_1), f(v_2)) \in E_3$
- Also ist f ein Graphenisomorphismus und es folgt $(G_1, G_3) \in R$.

Aufgabe 3: Äquivalenzrelation

Lösung

Zeige, dass R (i) reflexiv, (ii) transitiv und (iii) symmetrisch ist.

(iii) Seien $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{G}$ mit $(G_1, G_2) \in R$.

- Dann ex. ein Graphenisomorphismus $f : V_1 \longrightarrow V_2$.
- Da f bijektiv ist, existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : V_2 \longrightarrow V_1$, die selbst bijektiv ist.
- Seien $v_1, v_2 \in V_2$ beliebig. Dann existieren $w_1, w_2 \in V_1$ mit $v_1 = f(w_1), v_2 = f(w_2)$ bzw. $w_1 = f^{-1}(v_1), w_2 = f^{-1}(v_2)$.
- Dann gilt: $(v_1, v_2) = (f(w_1), f(w_2)) \in E_2 \Leftrightarrow (w_1, w_2) = (f^{-1}(v_1), f^{-1}(v_2)) \in E_1$
- Also ist f^{-1} ein Graphenisomorphismus und es folgt $(G_2, G_1) \in R$.

Damit ist die Beh. gezeigt. $\square$

Aufgabe 4: Induktion (WS 2008)

Aufgabe

Es sei $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$. Die Sprache $L \subseteq A^*$ sei definiert durch

$$L = \left(\{\texttt{a}\}^* \cdot \{\texttt{b}\} \cdot \{\texttt{a}\}^*\right)^*$$

Zeigt, dass jedes Wort w aus $\{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*$, das mindestens einmal das Zeichen $\texttt{b}$ enthält, in L liegt. (Hinweis: Macht eine Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Zeichens $\texttt{b}$ in w.)

Aufgabe 4: Induktion (WS 2008)

$$L = \left(\{\texttt{a}\}^* \cdot \{\texttt{b}\} \cdot \{\texttt{a}\}^*\right)^*$$

Sei k die Anzahl der Vorkommen von $\texttt{b}$ in einem Wort $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*$.

Induktionsanfang

Für $k = 1$: In diesem Fall lässt sich das Wort w aufteilen in

$$w = w_1 \cdot \texttt{b} \cdot w_2$$

wobei w_1 und w_2 keine $\texttt{b}$ enthalten und somit in $\{\texttt{a}\}^*$ liegen. Damit gilt $w \in \{\texttt{a}\}^* \cdot \{\texttt{b}\} \cdot \{\texttt{a}\}^*$ und somit auch

$$w \in \left(\{\texttt{a}\}^* \cdot \{\texttt{b}\} \cdot \{\texttt{a}\}^*\right)^* = L$$

Aufgabe 4: Induktion (WS 2008)

Induktionsvoraussetzung

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass alle Wörter über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, die genau k-mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthalten, in L liegen.

Induktionsschritt

Wir betrachten ein Wort w, das genau $k+1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält. Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 \cdot w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k-mal das Zeichen $\mathtt{b}$. Nach Induktionsanfang liegt w_1 in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$, was bedeutet, dass $w = w_1 \cdot w_2$ in

$$\left(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*\right) \cdot \left(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*\right)^* \subseteq \left(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*\right)^* = L$$

liegt und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Und so geht es weiter...

- **Algo**rithmen **I**
  – Mehr zu Algorithmen, Laufzeiten, Datenstrukturen, Graphen
- **T**echnische **I**nformatik
  – Realisierung von Schaltungen, Prozessoren (MIMA, ...)
- **T**heoretische **G**rundlagen der **I**nformatik
  – Mehr zu Grammatiken, Komplexität, Entscheidbarkeit, Turingmaschinen

— The End —

Viel Erfolg bei
euren Klausuren! ☺

Credits

An der Erstellung des Foliensatzes haben mitgewirkt:

Daniel Jungkind
Thassilo Helmold
Philipp Basler
Nils Braun
Dominik Doerner
Ou Yue
Max Schweikart