



**தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு**  
**நான்காம் தவணைப் பரீட்சை - 2024**  
**National Field Work Centre, Thondaimanaru.**  
**4<sup>th</sup> Term Examination - 2024**

**இணைந்த கணிதம் - I**  
**Combined mathematics - I**

**Gr -13 (2024)**

**10**

**T**

**B**

**பகுதி - B**

11) (a)  $a, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$  எனவும்  $f(x) = x^2 + 3x + k$ ,  $g(x) = 2x^2 + ax + k$  எனவும் கொள்வோம்.  $f(x) = 0$  இன் மூலங்கள்  $\alpha, \beta$  எனவும்  $g(x) = 0$  இன் மூலங்கள்  $\alpha, \gamma$  எனவும் தரப்பட்டுள்ளன.  $\alpha = 3 - a$  எனவும்  $k = -(a - 3)(a - 6)$  எனவும் காட்டுக.

(i)  $f(x) = 0, g(x) = 0$  ஆகியவற்றின் பிரித்துக்காட்டிகளை  $a$  இன் உறுப்புகளில் காண்க. **இதிலிருந்து,**  $f(x) = 0, g(x) = 0$  ஆகிய இரு சமன்பாடுகளின் மூலங்களும் மெய்யானவை எனக் காட்டுக.

(ii)  $f(x) = 0$  இன் மூலங்கள் இரண்டும் மறையானவை எனின்,  $3 < a < 6$  எனக் காட்டி,  $g(x) = 0$  இன் இரண்டு மூலங்களும் மறையானவை எனக் காட்டுக.

(iii)  $\beta, \gamma$  ஆகியவற்றை  $a$  இன் சார்பில் கண்டு,  $\beta, \gamma$  ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு  $2x^2 + 3(6 - a)x + (6 - a)^2 = 0$  எனக் காட்டுக.

(b) பல்லுறுப்பிச் சார்பு  $f(x)$  ஐ  $\alpha x - \beta$  இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி  $f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$  எனக் காட்டுக.

$p(x) = 4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + x - 2$  எனக் கொள்வோம்.

$p(x)$  ஐ  $2x - 1, 2x + 1$  இனால் வகுக்கும்போது வரும் மீதிகளைக் கண்டு,  $p(x)$  ஐ  $4x^2 - 1$  இனால் வகுக்க வரும் மீதியைக் காண்க. மேலும்,  $p(1), p(-2)$  ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு,  $p(x)$  ஐக் காரணிப்படுத்துக.

12) (a)  $f(x) = \sin x$  இன் பெறுதியை முதற்கோட்பாடுகளில் இருந்து காண்க. **இதிலிருந்து,**  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$  இற்கு  $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1} 2x\}$  ஐக் காண்க.

(b)  $x = \tan \theta$  எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவழியாக  $0 < x < 1$  ஆக இருக்கும்போது  $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$  குறித்து  $\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  இன் பெறுதியைக் காண்க.

(c)  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$  இற்கு  $y = x.e^{-\frac{k}{x}}$  எனக் கொள்வோம்.

(i)  $x^2 \frac{dy}{dx} = (x + k)y$  எனவும்

(ii)  $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - kx \frac{dy}{dx} + ky = 0$  எனவும் காட்டுக.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-k}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=-k}$  ஆகியவற்றைக் காண்க.

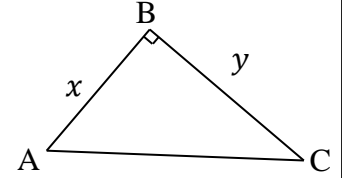
13) (a)  $x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$  இற்கு  $f(x) = -\frac{x^3}{(x-2)(x+2)}$  எனக் கொள்வோம்.  $f(x)$  இன் பெறுதி

$f'(x)$  ஆனது  $x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$  இற்கு  $f'(x) = -\frac{x^2(x^2-12)}{(x-2)^2(x+2)^2}$  இனால்

தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து  $f(x)$  இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.  $(0, 0)$  ஆனது ஒரே ஒரு விபத்திப் புள்ளியெனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அனுகூலகோடுகள், திரும்பற் புள்ளிகள், விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி  $y = f(x)$  இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

(b)  $a$  நீளமான  $ABC$  என்னும் கம்பித்துண்டொன்று உருவில் காட்டியவாறு  $\hat{ABC} = \frac{\pi}{2}$  ஆகுமாறு ஒரு செங்கோண முக்கோணி  $ABC$  இன் வடிவத்தில் வளைக்கப்பட்டுள்ளது.  $AB = x$ , எனவும்  $BC = y$  எனவும் கொள்வோம்.



(i)  $y = \frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$  எனக் காட்டுக.

(ii) முக்கோணி  $ABC$  இன் பரப்பளவு  $A$  ஆனது  $A = \frac{ax(a-2x)}{4(a-x)}$  எனக் காட்டி

$x = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})a$  ஆகும் போது  $A$  உயர்வெனக் காட்டுக.

14) (a) பிரதியீடு  $x + \frac{1}{x} = t$  ஐப் பயன்படுத்தி  $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4+6x^2+1} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{5}{4} \right) - \frac{\pi}{8}$  எனக் காட்டுக.

(b) எல்லா  $x \in \mathbf{R}$  இற்கும்  $3x^3 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (x+c)(x-1)^2$  ஆகுமாறு  $A, B, C$  என்னும் மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து,  $\frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$  ஐப் பகுதிப்பின்னங்களில் எழுதி,  $\int \frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$  ஐக் காண்க.

(c) (i) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி  $\int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$  எனக் காட்டுக; இங்கு  $f'(x)$  என்பது  $x$  குறித்து  $f(x)$  இன் பெறுதியாகும்.

$\int_1^2 \frac{e^x(1+x \ln x)}{x} dx = e^2 \ln 2$  என்பதை உய்த்தறிக்க.

(ii)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$  என்பதை நிறுவுக.

இதிலிருந்து,  $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \ln \left( \frac{1}{x} - 1 \right) dx$  ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

- 15)  $P \equiv (x_0, y_0)$  எனவும்  $l$  ஆனது  $ax + by + c = 0$  இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம்.  $P$  இலிருந்து  $l$  இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம்  $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  எனக் காட்டுக.
- ஒரு சாய்சதுரம்  $ABCD$  இன் மூலைவிட்டம்  $AC$  யின் சமன்பாடு  $2x + y - 4 = 0$  எனவும் உச்சி  $C \equiv (1, 2)$  எனவும் பக்கம்  $AB$  யின் சமன்பாடு  $x + 2y + 4 = 0$  எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. மூலைவிட்டங்கள்  $AC, BD$  என்பன புள்ளி  $E$  இல் சந்திக்கின்றன.  $A \equiv (4, -4)$  எனக் காட்டி,  $E$  இன் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.
- $BD$  இன் சமன்பாடு  $2x - 4y - 9 = 0$  எனக் காட்டி, புள்ளி  $B$  யின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.
- பக்கம்  $BC$  இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.
- $AC$  மீது  $E$  இற்கும்  $A$  இற்கும் இடையில் உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி  $Q$  இன் ஆள்கூறுகள் வடிவம்  $\left(\frac{5}{2} + t, -1 - 2t\right)$  இல் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக;
- இங்கு  $0 < t < \frac{3}{2}$ .
- புள்ளி  $Q \left(\frac{5}{2} + t, -1 - 2t\right)$  இலிருந்து  $AB, BD$  இற்கான செங்குத்துத் தூரங்கள் சமனாயின்  $t = \frac{9}{16}$  எனக் காட்டுக.
- இதிலிருந்து  $ABD$  இன் இருகூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
- 16) சமன்பாடு  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$  இனால் தரப்படும் வட்டம்  $S$  இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையும் ஆரையையும் கண்டு,  $xy$ -தளத்தில் வட்டம்  $S$  ஐப் பரும்படியாக வரைக.
- $P$  என்பது வட்டம்  $S$  மீது உற்பத்தி  $O$  விலிருந்து மிக அண்மையாக உள்ள புள்ளியெனக் கொள்வோம். புள்ளி  $P$  யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
- வட்டம்  $S$  இற்குப் புள்ளி  $P$  யில் உள்ள தொடலிக் கோடு  $l$  இன் சமன்பாடு  $3x + 4y - 10 = 0$  இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.
- கோடு  $l$  ஐத் தொடுகின்ற ஒரு வட்டம்  $S'$  ஆனது வட்டம்  $S$  ஐ  $P$  யிலிருந்து வேறுபட்ட ஒரு புள்ளியில் வெளியே தொடுகின்றது. வட்டம்  $S'$  இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள்  $(h, k)$  எனக் கொள்வோம். கோடு  $l$  குறித்து  $O$  வினதும்  $S'$  இன் மையத்தினதும் தானங்களைக் கருதுவதனால்
- $3h + 4k > 10$  எனக் காட்டுக.
- $S'$  இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள்  $(h, k)$  ஆனது சமன்பாடு
- $16x^2 + 9y^2 - 24xy - 180x - 240y + 375 = 0$  ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன எனவும் காட்டுக.
- மேலும், வட்டம்  $S'$  இன் மையம்  $y$ -அச்ச மீது உள்ளதெனத் தரப்படின,  $S'$  இன் மையங்களின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

17. (a) சமன்பாடு  $y = \frac{1+\sin x}{5+4\cos x}$  ஐ வடிவம்  $\cos(x + \alpha) = R$  இல் எடுத்துரைக்க. இங்கு  $R, \alpha$  என்பன  $y$  சார்பில் துணியப்படவேண்டியவை. இதிலிருந்து,  $x \in R$  இற்கு  $0 \leq \frac{1+\sin x}{5+4\cos x} \leq \frac{10}{9}$  எனக் காட்டுக. சமன்பாடு  $\frac{1+\sin x}{5+4\cos x} = \frac{1}{3}$  ஐத் தீர்க்க.

(b) வழமையான குறியீடுகளுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி  $ABC$  இற்கு சைன் நெறியைக் கூறி நிறுவுக.

வழமையான குறியீடுகளுடன் முக்கோணி  $ABC$  இல் கோணம்  $A$  இன் உள்ளிருகூறாக்கி  $BC$  ஐ  $D$  இல் சந்திக்கின்றது எனத் தரப்பட்டுள்ளது. முக்கோணிகள்  $ABC, ABD, ACD$  ஆகியவற்றிற்கு சைன் நெறியைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம்

(i)  $AB:AC = BD:DC$  எனவும்

(ii)  $AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$  எனவும்

காட்டுக.

(c)  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$  எனின்,  $xy + yz + zx = 1$  எனக் காட்டுக.