



தேசிய தொண்டைமானாறு வெளிக்கள நிலையம்
ஆறாம் தவணைப் பரீட்சை-2024
National Field Work Centre, Thondaimanaru
Sixth Term Examination – 2024
இணைந்த கணிதம் - I

தரம் : 13(2024)

10 T I

மூன்று மணித்தியாலம்
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் 10 நிமிடங்கள்

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

(10) இணைந்த கணிதம் - I		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
மொத்தம்		

இணைந்த கணிதம் -I

இணைந்த கணிதம் -II

இறுதிப் புள்ளிகள்

பகுதி A

1. $a_1 = 3$ எனவும் எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n$ எனவும் கொள்வோம். கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $a_n = \frac{6}{n+1}$ என நிறுவுக.

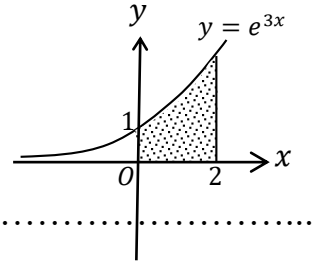
2. $y = x^2$, $y = |x + 2|$ ஆகியவற்றின் பரும்படி வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, சமனிலி $x^2 < |x - 2|$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் காண்க.

3. $|z - 2i| \geq |z - 2|$, $|z - 2 - 2i| \leq 2$ ஆகிய இரு சமனிலிகளையும் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசம் S ஐ ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் நிழற்றுக. பிரதேசம் S இல் உள்ள z இற்கு $|z - 4|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $(1 + kx + x^2)(1 + x)^n$ என்னும் விரியில் உள்ள x^2 இன் குணகம் $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ எனின், மெய்யம் மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, ${}^{n+2}C_2 = {}^nC_2 + 2{}^nC_1 + {}^nC_0$ எனக் காட்டுக.

5. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin 2x - 2 \sin(x+\alpha) + \sin 2\alpha}{(x+\alpha)(x-\alpha)^2} = -\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

6. $y = e^{3x}, x = 0, x = 2, y = 0$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசம் R ஆனது உருவில் நிழற்றிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. R இன் பரப்பளவு $\frac{e^6 - 1}{3}$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக. பிரதேசம் R ஐ x அச்சைப் பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றுவதனால் உண்டாகும் திண்மத்தின் கனவளவையும் காண்க.



-
- This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

- [illegible]

9. $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$ ஆகிய வட்டங்களை நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டுவதும் x அச்சை $x + 3 > 0$ என்னும் பிரதேசத்தில் தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $8 \left(1 - \cos \frac{\pi}{8}\right) \left(1 + \sin \frac{\pi}{8}\right) \left(1 - \cos \frac{3\pi}{8}\right) \left(1 + \sin \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ எனக் காட்டுக.



தேசிய தொண்டைமானாறு வெளிக்கள நிலையம்
ஆறாம் தவணைப் பரீட்சை-2024
National Field Work Centre, Thondaimanaru
Sixth Term Examination – 2024
இணைந்த கணிதம் -I
பகுதி B

- 11.(a) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x) = ax^2 + bx + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ உம் $a < 0$ உம் ஆகும். $f(x)$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $-\frac{\Delta}{4a}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\Delta = b^2 - 4ac$.
- $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $g(x) = (2 - 3k)x^2 + (1 + 3k)x - 3$ எனவும் இருபடிச்சமன்பாடு $g(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனவும் கொள்வோம்.
- (i) $k \in \mathbb{R}$ இற்கு $g(x) = 0$ இற்கு மெய்யம் மூலங்கள் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.
- (ii) α, β ஆகிய இரண்டும் நேராக இருக்கும் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
- (iii) $g(x)$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் 1 எனின், k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b)மீதித் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

5 ஆம் படியில் உள்ள பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஐ $x, (x - 1), (x - 2), (x - 3), (x - 4), (x - 5)$ ஆகியவற்றினால் வகுக்கப்படும்போது மீதிகள் முறையே 1, 1, 2, 3, 4, 5 ஆகும்.

$g(x) = f(x) - x$ எனக் கொள்வோம். $g(x)$ இன் எல்லா ஏகபரிமாணக் காரணிகளையும் கண்டு இதிலிருந்து, பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஐக் காண்க. $f(x)$ ஐ $(x - 6)$ இனால் வகுக்க வரும் மீதியைக் காண்க.

- 12.(a) RESTITUTION என்னும் சொல்லில் உள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் எடுத்துச் செய்யத்தக்க வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவற்றுள்
- (i) மூன்று T களும் அடுத்தடுத்து இருக்கும் எண்ணிக்கை யாது?
- (ii) மூன்று T களில் இரு T கள் அடுத்தடுத்தும் மூன்றாவது அதை அடுத்தும் இருக்காத எண்ணிக்கை யாது?
- (iii) எந்த இரு உயிர் எழுத்துக்கள் அடுத்தடுத்து இருக்காத எண்ணிக்கை யாது?
- (RESTITUTION என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் E, I, O, U என்பன உயிர் எழுத்துக்களாகும்.)

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} - \frac{1}{4r(r+1)}$ எனவும் $V_r = \frac{2}{(2r-1)} - \frac{1}{r}$ எனவும் கொள்வோம்.

$4U_r = V_r - V_{r+1}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{4(n+1)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $W_r = \frac{(-1)^{r-1}}{r(r+2)}$ எனக் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $W_{2r-1} + W_{2r} = U_r$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,

n ஓர் இரட்டை நேர்நிறைவேண் எனின், $\sum_{r=1}^n W_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$ எனக் காட்டுக.

n ஓர் ஒற்றை நேர்நிறைவேண் எனின், $\sum_{r=1}^n W_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ என்பதை உய்த்தறிக.

13.(a) $a, b \in \mathbb{R}$ இற்கு $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ எனவும் $A^2 = A + 5I$ எனவும் கொள்வோம், இங்கு I என்பது

வரிசை 2 இலுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம் ஆகும்.

$a = 2, b = 1$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $A^6 = 96A + 205I$ எனக் காட்டுக.

$A^6 = \begin{pmatrix} 397 & 96 \\ 288 & 109 \end{pmatrix}$ ஐ உய்த்தறிக.

(b) $z \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்.

$|z + i|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Im} z + 1$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $z \neq -i$ இற்கு $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z+i} \right) = -\frac{1+\operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ எனக் காட்டுக.

மேலே உள்ள இரு முடிவுகளையும் பயன்படுத்தி

$z \neq -i$ ஆகவும் $|z| = 1$ ஆகவும் இருந்தால்-இருந்தால் மாத்திரம் $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z+i} \right) = -\frac{1}{2}$ என்பதை காட்டுக.

$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z+i} \right) = -\frac{1}{2}, -\pi < \operatorname{Arg} z < 0$ என்னும் இரு நிபந்தனைகளையும் திருப்தியாக்கும்

சிக்கலெண்கள் z ஐக் கொண்ட தொடை S எனக் கொள்வோம்.

S இல் உள்ள சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளை ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

z ஆனது S இலும் $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆகவும் இருப்பின், $z = \cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் தமோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $z^{2024} + \frac{1}{z^{2024}} = -1$ எனக் காட்டுக.

14.(a) $x \neq 1$ இற்கு $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq 1$ இற்கு $f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற ஆயிடைகளையும் $f(x)$ குறைகின்ற ஆயிடைகளையும் காண்க.

மேலும் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடு, திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

(b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ எனவும் $y = ax^2 + bx + c$ எனவும் கொள்வோம். $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து,

$a > 0$ எனின், y இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$ எனக் காட்டுக.

$a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ எனின், எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $ax^2 + bx + c > 0$ என்பதை உய்த்தறிக.

எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $y = ax^2 + bx + c$ இன் வரைபானது மேன்முகக் குழிவைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.

15.(a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x + 4 = A(x - 2)(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + Cx(x - 2)(7x - 6)$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் A, B, C என்பன உள்ளனவெனத் தரப்பட்டுள்ளன. மாறிலிகள் A, B, C ஆகியவற்றைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\frac{x+4}{x(x-2)(x^2+1)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களில் எழுதி, $\int \frac{x+4}{x(x-2)(x^2+1)} dx$ ஐக் காண்க.

மேலே உள்ள முடிவைப் பயன்படுத்தி, $\int \frac{e^x+4}{(e^x-2)(e^{2x}+1)} dx$ ஐயும் காண்க.

(b) a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ ஐ நிறுவுக.

$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(c) (i) $0 \leq x \leq \pi$ இற்கு $g(x) = \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}$ எனக் கொள்வோம். $g'(x) = -\frac{1}{2(1+\sin x)}$

எனக் காட்டுக. $\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x} dx$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(ii) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int \ln(2-x)dx$ ஐக் காண்க.

16.புள்ளி (x_1, y_1) இலிருந்து நேர்கோடு $ax + by + c = 0$ இற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம்

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
 எனக் காட்டுக.

புள்ளி $A(5, 0)$ இனாடாகச் செல்வதும் படித்திறன் m ஐ உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

உற்பத்தியில் இருந்து இந்நேர்கோட்டிற்கான செங்குத்துத் தூரம் 4 அலகுகள் எனின், $m = \pm \frac{4}{3}$ எனக் காட்டுக.

$\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$ ஆகிய m இன் பெறுமானங்களிற்கு ஒத்த நேர்கோடுகள் முறையே l_1, l_2 எனக் கொள்வோம். l_1, l_2 இன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l_1, l_2 ஆகிய இரு நேர்கோடுகளையும் தொடுவதும் x அச்சில் மையத்தைக் கொண்டுள்ளதும் ஆரை 2 அலகுகளைக் கொண்டதுமான S_1, S_2 என்னும் இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

S_1, S_2 ஆகிய இரு வட்டங்களைத் தொடுவதும் l_1, l_2 ஆகிய இரு கோடுகளைத் தொடுவதுமான வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17.(a) $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta$ ஐ $R \cos(\theta - \alpha)$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்க; இங்கு $R, \alpha \in \mathbb{R}$ உம் $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

இதிலிருந்து சமன்பாடு $\sqrt{3} \cos^2 \theta + (1 - \sqrt{3}) \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta - \cos \theta + \sin \theta = 0$ இன் பொதுத்தீர்வைக் காண்க.

(b) $(a^2 - b^2) \sin(A + B) = (a^2 + b^2) \sin(A - B)$ எனின் முக்கோணி ABC ஆனது இருசமபக்க முக்கோணி அல்லது செங்கோண முக்கோணி எனக் காட்டுக.

(c) $A + B + C = \pi$ எனின் $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக

$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \pi$ எனின் $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$ எனக் காட்டுக.