



தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு
நான்காம் தவணைப் பரீட்சை - 2023
National Field Work Centre, Thondaimanaru.
4th Term Examination - 2023

தரம் :- 13 (2023)

இணைந்த கணிதம் II - B

சுட்டெண்

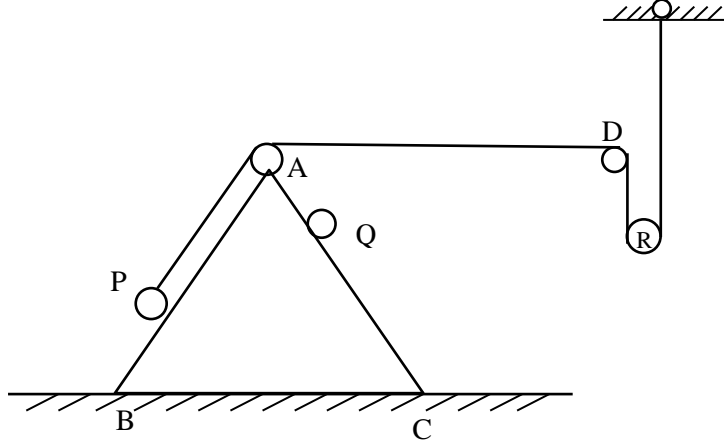
11. (a) ஓர் நேரான பேருந்து சாலையில் $PQ = 4a$ ஆகுமாறு P, Q என்பன இரண்டு பேருந்து தரிப்பிடங்கள் ஆகும். பேருந்து A ஆனது தரிப்பிடம் P இல் ஓய்வில் இருந்து புறப்பட்டு சீரான ஆர்முடுகல் $\frac{g}{2}$ உடன், Q ஐ நோக்கி செல்கின்றது. பேருந்து A ஆனது PQ இன் $\frac{1}{4}$ பங்கு தூரத்தை கடக்கும் கணத்தில் பேருந்து B ஆனது P இல் ஓய்வில் இருந்து புறப்பட்டு சீரான ஆர்முடுகலுடன் சென்று பேருந்து A ஐ P இல் இருந்து $2a$ தூரத்தில் கடந்து செல்லும் போது பேருந்து A ஆனது உடனடியாக தனது ஆர்முடுகலை அதிகரித்து சீரான ஆர்முடுகலுடன் சென்று பேருந்து B ஐ Q இல் கடந்து செல்கின்றது.

- i) பேருந்து A ஆனது Q இல் B ஐ கடந்து செல்லும் வரைக்கும் A, B இன் இயக்கங்களுக்கான வேக நேர வரைபை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.
- ii) பேருந்து B ஆனது இயங்கத்தொடங்கி எவ்வளவு நேரத்தின் பின் A ஐ கடக்கும்.
- iii) பேருந்து B இன் ஆர்முடுகல் $g(3 + 2\sqrt{2})$ எனக் காட்டுக.
- iv) A இயங்கத்தொடங்கி எவ்வளவு நேரத்தின் பின் B ஐ Q இல் கடந்து செல்லும்
- v) B ஆனது A ஐ கடந்த பின் A இன் ஆர்முடுகல்

(b) நேரான சமாந்தர கரைகளை உடைய ஆறு ஆனது v சீரான வேகத்துடன் பாய்கின்றது. A, B என்பன ஆற்றங்கரைகளில் நேர் எதிரே உள்ள இரு நிலைகள் ஆகும் ஆறு சார்பாக $2v$ சீரான கதியுடன் நீந்தத்தக்க மனிதன் A இல் இருந்த B ஐ அடைவதற்கு ஆற்றில் அவன் நீந்த வேண்டிய திசையை சார்பு வேக கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி வேகமுக்கோணி வரைவதன் மூலம் காண்க.

மனிதன் A இல் இருந்து B ஐ அடையும் வண்ணம் மேலே உள்ள கதியில் நீந்த தொடங்கும் கணத்தில் A இன் கரையில் ஆற்றோட்டத்தின் திசையில் A இல் இருந்து d தூரத்தில் ஆற்றங்கரையில் உள்ள படகு ஒன்று மனிதனை இடைமறிக்கம் நோக்குடன் ஆறு சார்பாக $2\sqrt{3}v$ கதியுடன் மனிதனை இடைமறிக்கும் நோக்குடன் செல்கின்றது. படகு மனிதனை இடைமறிப்பதற்கு படகு ஆற்றில் செல்ல வேண்டிய திசையை சார்புவேக கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி வேக முக்கோணி வரைவதன் மூலம் காண்க. படகு ஆனது எவ்வளவு நேரத்தில் மனிதனை இடைமறிக்கும் எனக் காண்க.

12. (a)



உருவில் சமபக்க முக்கோணி ABC ஆனது BC ஐ கொண்டுள்ள முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது இருக்குமாறு வைக்கப்பட்ட $6m$ திணிவு உடைய ஓர் ஒப்பான சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஊடான நிலைக்குத்து குறுக்குவெட்டாகும். AB, AC ஆகியன அவற்றை கொண்டுள்ள முகங்களின் அதி உயர் சரிவுகள் ஆகும். படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு முறையே திணிவுகள் $2m, m$ ஆகவுள்ள துணிக்கைகள் P, Q என்பன அவற்றின் முகங்கள் AB, AC இல் வைக்கப்பட்டு துணிக்கை P ஆனது இலேசான நீளா இழையின் நுனிக்கு இணைக்கப்பட்டு இழையானது உச்சி A இல் உள்ள இலேசான ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று A இன் கிடை மட்டத்தில் உள்ள புள்ளி D இன் இணைக்கப்பட்ட நிலையான இலேசான ஒப்பமான கப்பியின் ஊடு சென்று திணிவு $4m$ ஐ உடைய ஒப்பமான கப்பி R இன் கீழாகச் சென்று O உடன் மற்றய நுனி பிணைக்கப்பட்டு இழையின் பகுதிகள் இறுக்கமாக இருக்க தொகுதி மெதுவாக விடப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் ஆப்பு, துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகல்கள் இழையில் உள்ள இழுவை ஆகியவற்றை துணிவதற்கு போதிய சமன்பாடகளைப் பெறுக.

b) நிலைக்குத்தாக நிலைப்படுத்தப்பட்ட O ஐ மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு ஒப்பமான வளையத்தில் திணிவு m உடைய ஒப்பமான மணி P கோர்க்கப்பட்டு வளையத்தின் அதி தாழ் புள்ளி L இல் மணி ஓய்வில் உள்ள போது மணிக்கு கிடையாக u வேகம் கொடுக்கப்படுகின்றது. மணி P கீழ் முக நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தில் உள்ள போது அதன் கதி v எனில்

i) v^2 ஐ $gr(1 + 2\cos\theta)$ எனில் $u = \sqrt{3rg}$ எனக் காட்டுக.

ii) அக் கணத்தில் துணிக்கையில் தாக்கும் மறுதாக்கம் $R = mg(1 + 3\cos\theta)$ எனக் காட்டுக.

iii) P ஆனது கணநிலை ஓய்வடையும் கணத்தில் $\theta = \alpha$ எனில் α ஐ காண்க.

iv) மறுதாக்கம் R இனது திசை மாறும் போது $\theta = \beta$ எனின் β ஐ காண்க.

v) மேலே (iii), (iv) ஆகிய இரு சந்தப்பங்களிலும் L இல் இருந்து துணிக்கைகளின் உயரங்களுக்கு இடையிலான விகிதத்தைக் காண்க.

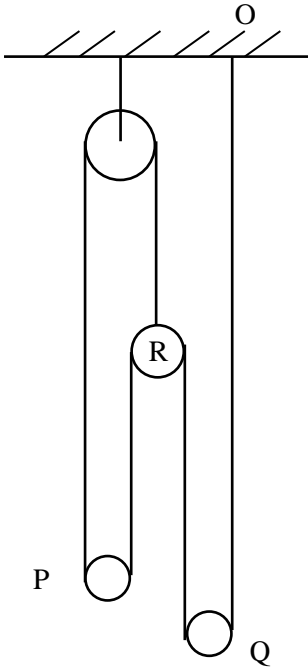
13. a) சம ஆரையுடைய முறையே $6m, 5m$ திணிவுகளை உடைய A, B ஆகிய இரு கோளங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசை மீது வைக்கப்பட்டு அவற்றிற்கு அவற்றின் மையமிணை கோட்டின் வழியே ஒரே திசையில் முறையே $5u, 3u$ வேகங்கள் கொடுக்கப்படுகின்றது. A, B ஆகிய இரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று நேரடியாக மோதுகின்றன மோதுகைக்கு சற்று பின் அவற்றின் வேகங்கள் A, B திசையில் முறையே v, kv ($k \neq 1$) ஆகும். A, B க்கு இடையிலான மீளமைவுக் குணகம் e எனில்

i) $\frac{45u}{5k+6} = \frac{2eu}{k-1}$ எனக் காட்டுக.

ii) k இன் சாத்தியமான அதி கூடிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

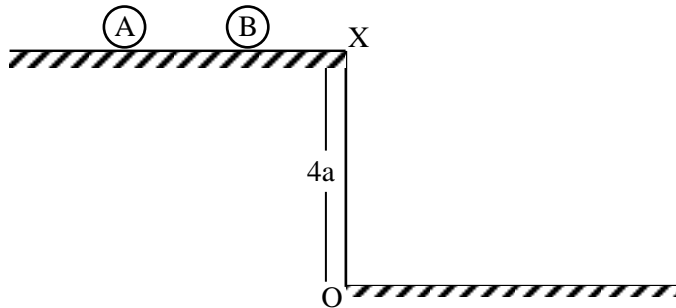
iii) $k = \frac{6}{5}$ ஆகும் போது e ஐயும் மோதலின் பின் A, B இன் வேகங்களையும் காண்க.

b)



படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு P, Q, R என்பன முறையே $2m, 5m, 3m$ திணிவுகளை உடைய ஒப்பமான கப்பிகள் ஆகும். ஒரு இலேசான நீள இழையின் ஒரு நுனி கப்பி R இற்கு இணைக்கப்பட்டு இழையானது ஒரு சீலிங்கிற்கு நிலைப்படுத்தப்பட்ட இலேசான ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு கப்பிகள் P, Q இற்கு கீழ்கவும் கப்பி R இற்கு மேலாகவும் சென்று இழையின் மற்றைய நுன Q இற்கு நேர் மேலே சீலிங்கிலுள்ள நிலைத்த புள்ளி ஒன்றுடன் இணைக்கப்பட்டு இழையின் பகுதிகள் இறுக்கமாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்க பிடிக்கப்பட்டு மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் இழையின் இழுவையையும் P, Q, R இன் ஆர்முடுகல்களையும் துணிவதற்கு போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக. இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

14.



A, B என்பன முறையே $2m, 3m$ திணிவுகளை உடைய இரு சிறிய கோளங்கள் அவை படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு கிடைத்தரையில் இருந்து $4a$ உயரத்தில் உள்ள ஒரு ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு A யிற்கு B ஐ நோக்கி ஒரு வேகம் $2\sqrt{2ag}$ கொடுக்கப்படுகின்றது. A, B இற்கு இடையிலான மீளமைவுக்குணகம் $\frac{1}{4}$ ஆகும்.

- i. A, B என்பவற்றுக்கு இடையிலான மோதுகைக்கு பின் B இன் வேகத்தைக் காண்க.
- ii. துணிக்கை B ஆனது O இல் இருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் தரையை அடிக்கும்.
- iii. துணிக்கை தரையை அடிக்கும் வேகத்தைக் காண்க.
- iv. X இல் இருந்து a தூரத்தில் A ஆனது B உடன் மோதும் எனில் துணிக்கை தரையை அடித்து எவ்வளவு நேரத்தின் பின் துணிக்கை A தரையை அடிக்கும்.
- v. B தரையை அடிக்கும் புள்ளியில் இருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் A தரையை அடிக்கும்.
- vi. B ஆனது தரையை அடிக்கும் புள்ளி O' என்க. O இல் இருந்து நிலைக்குத்து தளத்தில் $2\sqrt{ag}$ கதியில் எறியப்படும் துணிக்கை C ஆனது O' ஐ B ஆனது O' ஐ அடையும் கணத்தில் அடைகின்றது எனில் O இல் இருந்து எறியப்படும் துணிக்கை A, B மோதிய எவ்வளவு நேரத்தின் பின் எறியப்பட வேண்டும்.

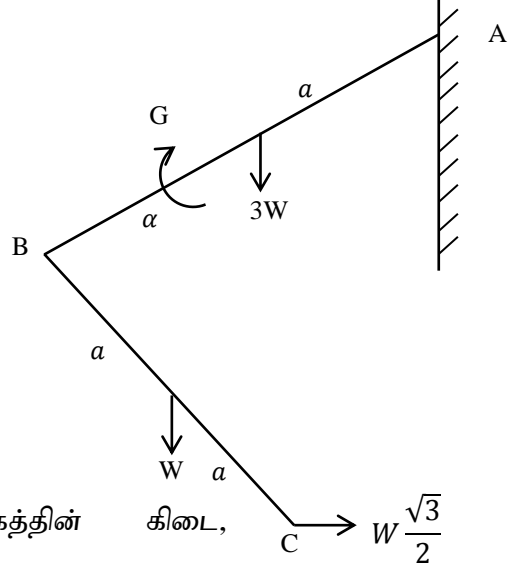
15. a) O என்ற புள்ளி குறித்து A, C என்ற புள்ளிகளின் தானக்காவி முறையே $\underline{a}, \underline{a} + \underline{b}$ ஆகும். C ஊடாக AO சமாந்தரமாக வரையும் கோடு, O ஊடாக AC க்கு சமாந்தரமாக வரையும் கோட்டை B இல் சந்திக்கிறது. OA இல் $ON : NA = 1 : 3$ ஆகுமாறு N உள்ளது. $OM : MC = 2 : 1$ ஆகுமாறு OC இல் M உள்ளது. நீட்டிய NM, CB ஐ D ல் சந்திக்கிறது. $MD = \lambda NM, DC = \mu BC$ ஆகும்.

- i. \overrightarrow{OB} ஐக் காண்க.
- ii. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{NM}$ என்பவற்றை $\underline{a}, \underline{b}$ இல் காண்க.
- iii. $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{DC}$ என்பவற்றை $\lambda, \mu, \underline{a}, \underline{b}$ சார்பாகக் காண்க.
- iv. பொருத்தமான காவிகூட்டலை பயன்படுத்தி λ, μ ஐக் காண்க.
- v. $NM : MD, BD : DC$ என்பவற்றைக் காண்க.

b) $ABCDE$ ஓர் ஐங்கோணி $AB = BC = AE = a$ $\hat{ABC} = \hat{BAE} = 120^\circ, \hat{ACD} = 90^\circ$ $\hat{CDA} = 30^\circ$ $9, 6, 4, \lambda\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2$ N விசைகள் முறையே $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ வழியே தாக்குகின்றன.

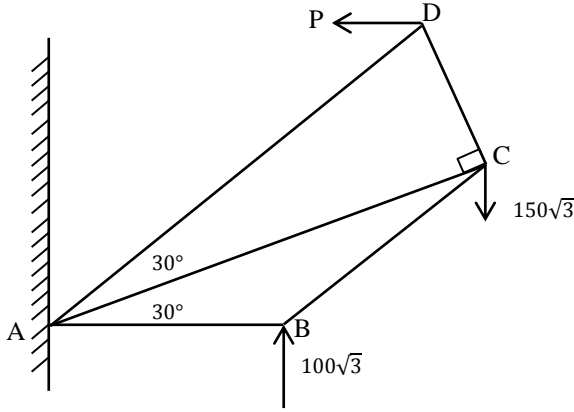
- i. விளையுள் AD க்கு செங்குத்து எனின் λ ஐக் காண்க.
- ii. விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.
- iii. விளையுளின் தாக்ககோடு AD ஐ A இலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் வெட்டும்
- iv. விளையுள் A ஊடாக செல்வதற்கு சேர்க்கப்பட வேண்டிய இணையைக் காண்க.
- v. இவ்விணை தொழிற்படும் போது \overrightarrow{DA} இல் தொழிற்படும் விசை P இனால் தொகுதியின் விளையுள் CA வழியே அமைகிறது. எனின் P ஐக் காண்க.

16. a) படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு AB, BC என்ற சம நீள கோல்கள் முறையே $3w$, w நிறையுடையன. B இல் மூடப்பட்டு முனை A ஒப்பமான சுவரில் பிணைக்கப்பட்டும் AB க்கு இணை G பிரயோகிக்கப்பட்டு C இல் கிடை விசை $w\frac{\sqrt{3}}{2}$ பிரயோகிக்கப்பட்டும் சமநிலை யிலுள்ளன. AB, BC என்பன முறையே நிலைக்குத்துடன் α , 2α கோணங்களை அமைக்கின்றன.



- G, α என்பவற்றைக் காண்க.
- மூட்டு Bயில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்துக்குக் கூறுகளைக் காண்க.

b)



AB, BC, CD, AC, AD என்ற நேரான கோல்கள் முனைகளில் படத்திலுள்ளவாறு மூட்டப்பட்டு மூட்டு A நிலைக் குத்து சுவருடன் பிணைக்கப்பட்டும் D ல் P என்ற கிடைவிசை பிரயோகிக்கப்படுவதுடன் B இல் $100\sqrt{3}$ தாங்கு விசையுடன் C இல் $150\sqrt{3}$ சுமையும் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. AB கிடையானது $AB = BC$

- போவின் குறியீட்டு முறையில் தகைப்பு வரிப்படம் வரைந்து கோவிலுள்ள உதைப்பு இழு விசைகளைக் காண்க.
- P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
- A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

17. 2a நீளமும் $2w$ நிறையும் உடைய சீரான கோல் AB இல் C என்ற ஒப்பமான லேசான சிறிய வளையும் வழக்க வல்லது $2a$ நீளமுள்ள நீளா இழை முனை A க்கு இணைக்கப்பட்டு மறுமுனை வளையம் C க்கு இணைக்கப்பட்டும் இழையானது ஒப்பமான முனை D மீது தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத் தானத்தில் இழை, கோல் என்பன நிலைக்குத்து தளத்திலுள்ளன D ஊடான இழையின் பகுதிகள் நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணங்கள் α, β ஆகும்.

- $\alpha = \beta$ எனக் காட்டுக.
- கோல் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் α எனக் காட்டுக.
- $\tan^3 \alpha + \tan \alpha - 1 = 0$ எனக் காட்டுக.
- வளையத்தின் மீதான மறுதாக்கம் யாது?