(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

FWC

# தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு

## நான்காம் தவணைப் பரீட்சை - 2023

# National Field Work Centre, Thondaimanaru.

## 4th Term Examination - 2023

**தரம் :- 13 (2023)** | **இணைந்த கணிதம் I - B**

| சுட்டெண் | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|

**பகுதி – B**

11. (a) $f(x) = 2x^2 + kx + 2$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $k$ ஒரு மெய்ம் மாறிலி ஆகும்.

(i) சமன்பாடு $f(x) = 0$ ஆனது மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் $k \leq -4$ அல்லது $k \geq 4$ எனக் காட்டுக.

(ii) சமன்பாடு $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் $\alpha, \beta$ எனக் கொள்வோம். $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$ ஆகியவற்றை $k$ சார்பில் எழுதுக.

$(\alpha^2 - 4) + (\beta^2 - 4) = \frac{1}{4}(k^2 - 40)$ எனவும் $(\alpha^2 - 4)(\beta^2 - 4) = 25 - k^2$ எனவும் காட்டுக. **இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக** சமன்பாடு $f(x) = 0$ ஆனது மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதுடன் அவை $-2$ இற்கும் $2$ இற்கும் இடையிலும் இருப்பின் மாறிலி $k$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $f(x)$ என்பது படி 3 இல் உள்ள $x$ இலான ஒரு பல்லுறுப்பியாகும். $f(x)$ ஆனது $x^2 - 4x - 21,\ \ x^2 - 6x - 7$ ஆகியவற்றினால் வகுக்கப்படும்போது மீதிகள் முறையே $11x - 10,\ 9x + c$ ஆகும். மாறிலி $c$ இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $f(x)$ ஐ $x^2 + 4x + 3$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $19x + 14$ எனக் காட்டுக.
மேலும், $f(x)$ ஐ $x - 1$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $1$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஐக் காண்க.

12. (a) பின்வருவனவற்றின் எல்லைகளைக் காண்க.

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$,

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{m(x^n-1)-n(x^m-1)}{x^m-x^n}$; இங்கு $m, n$ என்பன சமனில்லாத நிறைவெண்களாகும்,

(iii) $\lim_{x\to -\infty}\{\sqrt{x^2+x} - x\}$.

(b) $y = x\sin mx$ எனின் $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (m^2x^2 + 2)y = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு $m$ ஒரு மெய்ம் மாறிலி ஆகும்.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

(c) $x = 1 - \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3}\sec^4\theta \operatorname{cosec}\theta$ எனக் காட்டுக. மேலும் $\theta = \frac{\pi}{4}$ இல் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும் காண்க.

13. (a) $x \neq -1$ இற்கு $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}$ எனக் கொள்வோம்.

$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq -1$ இற்கு $f'(x) = -\frac{x(x-2)}{(x+1)^4}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து,** $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடையையும் குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

அத்துடன், $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$x \neq -1$ இற்கு $f''(x) = -\frac{2(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x+1)^5}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளிகளின் $x-$ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளிகள், விபத்திப் புள்ளிகளின் $x-$ஆள்கூறுகள் ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

$[k, \infty)$ மீது $f(x)$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கும் $k$ இன் மிகச்சிறிய பெறுமானத்தை காண்க. $k$ இன் இப்பெறுமானத்திற்கு $[k, \infty)$ என்னும் ஆட்சியில் சார்பு $f(x)$ இன் வீச்சையும் காண்க.

(b) திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பொன்றின் ஆரை $r\,cm$ உம் குத்துயரம் $h\,cm$ உம் சாயுயரம் $5\sqrt{3}\,cm$ உம் ஆகும். கூம்பின் கனவளவு $V\,cm^3$ ஆனது $0 < h < 5\sqrt{3}$ இற்கு $V = \frac{1}{3}\pi h(75 - h^2)$ என்னும் தொடர்பால் தரப்படும் எனக் காட்டுக. $V$ உயர்வாக இருக்கும் $h$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. மேலும் திண்மக் செவ்வட்டக் கூம்பின் உயர் கனவளவையும் காண்க.

14. (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $4x^3 + 6x \equiv A(x+1)(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + cx(x^2-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $A, B, C$ ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

**இதிலிருந்து,** $\frac{4x^3+6x}{(x^2-1)(x^2+4)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களில் எழுதி, $\int \frac{4x^3+6x}{(x^2-1)(x^2+4)}dx$ ஐக் காண்க.

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$ எனக் காட்டுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

$\cos x = \lambda(\cos x + \sin x) + \mu(-\sin x + \cos x)$ ஆகுமாறு $\lambda$, $\mu$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

**இதிலிருந்து,** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$ எனக் காட்டுக.

மேலே உள்ள முடிவையும் பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையையும் பயன்படுத்தி,

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\,dx = -\frac{\pi}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}\,dx$ எனக் காட்டுக.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln 2$ என்பதை **உய்த்தறிக.**

(c) $t = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி, $\int_0^{26} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{4}{3}}}\,dx$ ஐக் காண்க.

15. $P \equiv (x_0,\ y_0)$ எனவும் $l \equiv ax + by + c = 0$ எனவும் கொள்வோம்.

கோடு $l$ இற்குச் செங்குத்தாக, புள்ளி $P$ இனூடாகச் செல்லும் கோடு மீதுள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள் $(x_0 + at,\ y_0 + bt)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

**இதிலிருந்து,** $P$ இலிருந்து $l$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி $N$ எனின் $N$ இன் ஆள்கூறுகள் $(x_0 + at_0,\ y_0 + bt_0)$ ஆகுமென நிறுவுக; இங்கு $t_0 = -\left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)$ ஆகும்.

$l_1 \equiv x - y + 5 = 0,\ l_2 \equiv 2x + y - 9 = 0$ எனவும் $A \equiv (1,\ 2)$ எனவும் கொள்வோம்.

முக்கோணி $ABC$ இன் கோணங்கள் $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ ஆகியவற்றின் இருகூறாக்கிகள் முறையே $l_1$, $l_2$ உம் $A$ யிலிருந்து $l_1$, $l_2$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிகள் முறையே $D$, $E$ உம் ஆகும்.

$D, E$ இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

நீட்டப்பட்ட $AD$, $AE$ என்பன $BC$ ஐ முறையே $F, G$ இல் சந்திக்கின்றன.

ஏன் $AD = DF$, $AE = EG$ என விளக்குக.

$F \equiv (-3,\ 6)$ எனவும் $G \equiv (5,\ 4)$ எனவும் காட்டுக.

மேலும் முக்கோணி $ABC$ இன் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

16. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ ஆகிய வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று நிமிர்கோண முறையாக வெட்டும் **ஆயின் - ஆயின் மாத்திரம்** $2gg' + 2ff' = c + c'$ எனக் காட்டுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

$S_1 \equiv x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0,\ S_2 \equiv x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ ஆகிய வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடும் எனக் காட்டுக.

தொடுகைப் புள்ளி $P$ ஆயின் $P$ இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

தொடுகைப் புள்ளியில் உள்ள பொதுத் தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாடு $4x - 3y - 1 = 0$ எனக் காட்டுக.

புள்ளி $Q \equiv (-2, -3)$ ஆனது இத்தொடலிக்கோட்டில் இருக்கின்றதெனக் காட்டி, புள்ளி $Q \equiv (-2, -3)$ இலிருந்து $S_1, S_2$ இற்கு வரையப்பட்ட மற்றைய இரு தொடலிகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

புள்ளி $Q \equiv (-2, -3)$ இனூடாகச் செல்வதும் வட்டங்கள் $S_1, S_2$ ஐ நிமிர்கோண முறையாக வெட்டுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு $5x^2 + 5y^2 + 2x + 6y - 43 = 0$ எனக் காட்டுக.

17 (a) $\sin(A+B)$ ஐ $\sin A, \sin B, \cos A, \cos B$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக.

**இதிலிருந்து,** $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ எனக் காட்டுக.

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2$ இன் விரிவைக் கருதுவதன் மூலம் $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta$ எனக் காட்டுக.

$f(\theta) = \sin\theta\,(\sin^3\theta + 1) + \cos\theta\,(\cos^3\theta + 1) + \frac{1}{2}\sin^2 2\theta + 1$ எனக் கொள்வோம்.

$f(\theta)$ ஐ வடிவம் $A\cos(\theta - \alpha) + B$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $A(> 0), B, \alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்.

**இதிலிருந்து,** சமன்பாடு $f(\theta) = \frac{\sqrt{2}+4}{2}$ ஐத் தீர்க்க.

(b) வழமையான குறியீடுகளுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி $ABC$ யிற்கு **சைன் நெறியைக்** கூறுக.

முக்கோணி $ABC$ யின் பக்கம் $BC$ இல் $D, E$ என்னும் புள்ளிகள் $BD = DE = EC$ ஆகுமாறு உள்ளன. $B\hat{A}D = \alpha,\ D\hat{A}E = \beta,\ E\hat{A}C = \gamma$ ஆகும். முக்கோணி $ABE$ இற்கு சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி $AE = \frac{2a\sin B}{3\sin(\alpha+\beta)}$ எனக் காட்டுக.

$AE$ இற்கு மற்றுமோர் தொடர்பைப் பெற்று $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} = \frac{2b}{c}$ எனக் காட்டுக.

$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}$ இற்கும் ஓர் ஒத்த கோவையை எழுதி, $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\sin\gamma$ எனக் காட்டுக.

(c) தொடர்புடைய எல்லாக் கோணங்களும் கூர்ங்கோணங்களாயின் $\sin(\tan^{-1}(\cos(\tan^{-1}x))) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ எனக் காட்டுக.