(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

NFWC

தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு
ஐந்தாம் தவணைப் பரீட்சை - 2023
National Field Work Centre, Thondaimanaru.
5^{th} Term Examination - 2023

இணைந்த கணிதம் - I (B)
Combined mathematics - I (B)

Gr -13 (2023) | 10 | T | I B

பகுதி - B

11) (a) $0 < k < 1$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $kx^2 + 2x + k = 0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

இம்மூலங்கள் $\alpha, \beta\ (< \alpha)$ எனக் கொள்வோம். α, β ஆகிய இரண்டும் மறையெனக் காட்டுக.

$(1+\alpha)(1+\beta)$ என்பதை k இற் கண்டு, $-1 < \alpha < 0$ எனவும் $\beta < -1$ எனவும் **உய்த்தறிக.**

$|1+\alpha| + |1+\beta| = \frac{2}{k}\sqrt{1-k^2}$ எனக் காட்டுக.

$|1+\alpha|,\ |1+\beta|$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $kx^2 - 2\sqrt{1-k^2}\,x + 2(1-k) = 0$ எனக் காட்டுக.

(b) $f(x)$ என்பது படி 2 இற்குச் சமனான அல்லது 2 இலும் கூடிய மெய்க் குணகங்களைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்பி எனக் கொள்வோம்.

$(x-r)^2$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி **ஆயின் ஆயின் மாத்திரம்** $f(r) = f'(r) = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு r ஒரு மெய்ம் மாறிலி ஆகும்.

(i) $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு a, b, c என்பன மெய்ம் மாறிலிகள் ஆகும்.

$a^2 < 3b$ எனின் பல்லுறுப்பி $g(x)$ இற்கு வடிவம் $(x-r)^2$ இல் காரணி எதுவும் இல்லை எனக் காட்டுக; இங்கு r ஒரு மெய்ம் மாறிலி ஆகும்.

(ii) $h(x) = x^3 - 3x + k$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு k ஒரு மெய்ம் மாறிலியாகும். $h(x)$ இற்கு வடிவம் $(x-r)^2$ இல் காரணி இருப்பின் $k = \pm 2$ எனக் காட்டுக; இங்கு r ஒரு மெய்ம் மாறிலி ஆகும்.

k இன் இப்பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் $h(x)$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

12) (a) ஆசிரியர் ஒருவரிடம் சர்வசமனான 5 தமிழ்ப் புத்தகங்களும் சர்வசமனான 4 ஆங்கிலப் புத்தகங்களும் உள்ளன. ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் குறைந்தபட்சம் ஒரு புத்தகம் கிடைக்கக் கூடியவாறு 9 புத்தகங்களையும் 8 மாணவர்களிடையே வழங்க வேண்டியுள்ளது.

(i) ஐந்து மாணவர்களுக்கு ஒரு தமிழ்ப் புத்தகம் வீதமும் எஞ்சிய மூன்று மாணவர்களில் ஒரு மாணவனுக்கு இரண்டு ஆங்கிலப் புத்தகங்களும் மற்றைய இரு மாணவர்களுக்கு ஒரு ஆங்கிலப் புத்தகம் வீதமும்

(ii) ஒரு மாணவனுக்கு இரண்டு தமிழ்ப் புத்தகங்களும் ஏனைய ஏழு மாணவர்களுக்கு ஏதாவது ஒரு புத்தகம் வீதமும்

வழங்கத்தக்க வெவ்வேறு விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தமிழ்ப் புத்தகங்கள் ஐந்தும் வெவ்வேறானதாக இருப்பின் (ii) இல் கூறியவாறு எத்தனை விதங்களில் 8 மாணவர்களுக்கு வழங்கலாம்?

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

(b) $r \in \boldsymbol{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{6r+7}{(3r-1)(3r+2)}\left(\frac{1}{3}\right)^r$ எனக் கொள்வோம்.

$r \in \boldsymbol{Z}^+$ இற்கு $\frac{6r+7}{(3r-1)(3r+2)} = \frac{A}{3r-1} + \frac{B}{3r+2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் காண்க.

$n \in \boldsymbol{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றதென **உய்த்தறிந்து**, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\sum_{r=1}^{\infty}(U_r + kU_{r+1}) = 1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக மெய்ம்மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

13) (a) $a, b \in \mathbb{R}$ எனவும் $z = a + ib$ எனவும் கொள்வோம். சிக்கலெண் z இன் உடன்புணரி $(\bar{z})$ ஐயும் மட்டு $(|z|)$ ஐயும் வரையறுக்க.

(i) $|z|^2 = z\bar{z}$ எனவும்

(ii) $z - \bar{z} = 2i\ \mathrm{Im}(z)$ எனவும்

காட்டுக.

$z_1,\ z_1 \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்.

$\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = \frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2} - i\,\frac{2\,Im\,(z_1\overline{z_2})}{|z_1-z_2|^2}$ எனக் காட்டுக.

$\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ இன் மெய்ப் பகுதியையும் கற்பனைப் பகுதியையும் எழுதுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $\frac{(3\lambda+5)+i(1+\lambda)}{(3\lambda-5)+i(1-\lambda)}$ என்பது ஒரு தூய கற்பனை எண் எனின் மெய்யெண் λ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ எனவும் $n \in \mathbb{Z}^+$ எனவும் கொள்வோம்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

(i) $z^7 - 1 = 0$ எனவும்

(ii) $z^n + z^{7-n} = 2\cos\frac{2n\pi}{7}$ எனவும்

காட்டுக.

$z^7 - 1$ ஐக் காரணிப்படுத்துவதன் மூலம் $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1$ எனக் காட்டுக.

$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ ஐ **உய்த்தறிக.**

14) (a) $x \neq 2$ இற்கு $f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq 2$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \frac{(x+2)}{(x-2)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

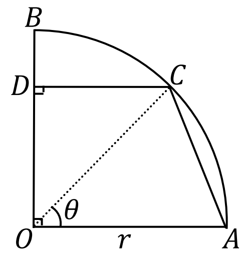
இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற ஆயிடைகளையும் குறைகின்ற ஆயிடையையும் காண்க. மேலும் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் அள்கூறுகளையும் காண்க.

$x \neq 2$ இற்கு $f(x)$ இன் இரண்டாம் பெறுதி $f''(x)$ ஆனது $f''(x) = -\frac{2(x+4)}{(x-2)^4}$ **எனத் தரப்பட்டுள்ளது.** $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப்புள்ளி, ஆள்கூற்று அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

$(-\infty, k]$ மீது $f(x)$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கும் k இன் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) உருவில் காட்டியவாறு r அரையுள்ள ஒரு கால்வட்டம் OAB இனுள் சரிவகம் $OACD$ வரையப்பட்டுள்ளது. $A\hat{O}C = \theta$ ஆகும். சரிவகத்தின் பரப்பளவு A ஆனது $A = \frac{1}{2}r^2(1 + \cos\theta)\sin\theta$ என்பதனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.



$\theta = \frac{\pi}{3}$ இல் A உயர்ந்தபட்சமாகும் எனக் காட்டி, A இன் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானத்தையும் காண்க.

15) (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும்

$$x^3 + 8x^2 + 19x + 16 = A(x+1)(x^2+4x+5) + B(x^2+4x+5) + (x+1)^2$$

ஆக இருக்கத்தக்கதாக மாறிலிகள் A, B இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\frac{x^3+8x^2+19x+16}{(x+1)^2(x^2+4x+5)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களில் எழுதி, $\int \frac{x^3+8x^2+19x+16}{(x+1)^2(x^2+4x+5)}dx$ ஐக் காண்க.

(b) $I = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ எனக் கொள்வோம்.

$x = \sin\theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\, dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $I = \frac{8}{15}$ எனக் காட்டுக.

$J = \int_0^1 x^4 \sin^{-1} x\, dx$ எனக் கொள்வோம்.

பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $J = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}I$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $J = \frac{15\pi - 16}{150}$ எனக் காட்டுக.

(c) a, b மாறிலிகளாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி,

$\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \ln\left(\tan x + \sqrt{3}\right)\, dx = \frac{\pi \ln 2}{18}$ எனக் காட்டுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

16) $A(2,3)$, $B(5,6)$ ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடு l எனக் கொள்வோம். l இன் சமன்பாடு $x-y+1=0$ எனக் காட்டுக.

புள்ளி $B(5,6)$ இனூடான l இற்குச் செங்குத்தான கோடு மீதுள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள்

$(5+t, 6-t)$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

புள்ளி $A(2,3)$ இனூடாகச் செல்வதும் கோடு l உடன் கோணம் $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ அமைப்பதுமான நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $l_1 \equiv 7x+y-17=0$, $l_2 \equiv x+7y-23=0$ எனக் காட்டுக.

கோடு l ஐ புள்ளி $B(5,6)$ இல் தொடுவதும் கோடு l_1 ஐயும் தொடுவதுமான வட்டம் s_1 எனவும் கோடு l ஐ புள்ளி $B(5,6)$ இல் தொடுவதும் கோடு l_2 ஐயும் தொடுவதுமான வட்டம் s_2 எனவும் கொள்வோம். வட்டங்கள் s_1, s_2 ஒவ்வொன்றினதும் ஆரைகள் $\frac{3}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக. s_1, s_2 இன் மையங்களின் ஆள்கூறுகளைக் கண்டு வட்டம் s_1 இன் சமன்பாடு $x^2+y^2-7x-15y+39=0$ எனக் காட்டுக. வட்டம் s_2 இன் சமன்பாட்டையும் காண்க.

17) (a) $\cos(A+B)$ ஐ $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ என்பதை **உய்த்தறிக.**

$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(b) $A+B+C=\pi$ எனக் கொள்வோம்.

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ எனக் காட்டி,

$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$ என்பதை **உய்த்தறிக.**

ABC ஒரு முக்கோணி எனவும் புள்ளி O ஆனது ABC இன் உள்ளே $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}A = \theta$ ஆக இருக்குமாறு உள்ளது எனவும் கொள்வோம்.

முக்கோணி OBC இற்கு **சைன் நெறியைப்** பிரயோகித்து, $OB = \frac{a\sin(C-\theta)}{\sin C}$ எனக் காட்டுக.

முக்கோணி OAB ஐ கருதுவதன் மூலம் OB இற்கு இன்னொரு தொடர்பைப் பெற்று $\frac{a\ \sin(C-\theta)}{\sin C} = \frac{c\sin\theta}{\sin B}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$ எனக் காட்டுக.

மேலே பெற்ற முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி $\mathrm{cosec}^2\theta = \mathrm{cosec}^2 A + \mathrm{cosec}^2 B + \mathrm{cosec}^2 C$ என்பதை **உய்த்தறிக.**

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) = \tan^{-1}(3)$ எனின், $y = \frac{x+3}{3x-1}$ எனக் காட்டுக.