



**தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு**  
**ஐந்தாம் தவணைப் பரீட்சை - 2024**  
**National Field Work Centre, Thondaimanaru.**  
**5<sup>th</sup> Term Examination - 2024**

**இணைந்த கணிதம் - I**  
**Combined mathematics - I**

**Gr -13 (2024)**

**10**

**T**

**B**

**பகுதி - B**

11.(a)  $k \in \mathbb{R}$  இற்கு  $f(x) = x^2 + kx + k$  எனவும் சமன்பாடு  $f(x) = 0$  இன் மூலங்கள்  $\alpha, \beta$  எனவும் கொள்வோம்.  $\alpha + \beta = -k$  எனவும்  $\alpha\beta = k$  எனவும் காட்டுக.

(i)  $k \leq 0$  அல்லது  $k \geq 4$  எனின்,  $\alpha, \beta$  என்பன மெய்யானவை எனக் காட்டுக.

(ii)  $k \geq 4$  எனின்,  $\alpha, \beta$  என்பன மறையானவை எனக் காட்டுக. மேலும்  $|\alpha|, |\beta|$  ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை  $k$  சார்பில் காண்க.

(iii)  $0 < k < 4$  எனின், சமன்பாடு  $f(x) = 0$  இற்கு மெய் மூலங்கள் இருக்காது எனக் காட்டி,  $\alpha, \beta$  ஆகியவற்றை  $a + ib$  வடிவில் எடுத்துரைக்க; இங்கு  $a, b$  என்பன  $k$  சார்பில் உள்ள மெய்யெண்கள்.

$\bar{\alpha} = \beta$  எனக் காட்டுக; இங்கு  $\bar{\alpha}$  என்பது சிக்கல் மூலம்  $\alpha$  இன் உடன்புணரியாகும். மேலும்  $|\alpha|, |\beta|$  ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு  $x^2 - 2\sqrt{k}x + k = 0$  எனக் காட்டுக.

(b) மீதித் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

ஒர் இரண்டாம் படியில் உள்ள பல்லுறுப்பி  $P(x)$  ஆனது முறையே  $(x - 1), (x - 2), (x - 3)$  ஆகியவற்றினால் வகுக்கப்படும்போது மீதிகள் முறையே 6, 2, 1 ஆகும்.  $(x - 1), (x - 2), (x - 3)$  என்பன  $Q(x) = x(x + 1)P(x) - 12$  இனால் தரப்படும் பல்லுறுப்பி  $Q(x)$  இன் காரணிகளெனக் காட்டுக. பல்லுறுப்பி  $Q(x)$  ஐக் காண்க.

12.(a) ஒரு பாடசாலையின் கணிதப் பிரிவில் தரம் 12 வகுப்பில் உள்ள 5 மாணவர்களில் 4 ஆண்களும் 1 பெண்ணும் உள்ளனர். தரம் 13 வகுப்பில் உள்ள 6 மாணவர்களில் 3 ஆண்களும் 3 பெண்களும் உள்ளனர். கணிதப் போட்டியொன்றிற்கு இப்பாடசாலையின் கணிதப் பிரிவில் இருந்து 4 மாணவர்களைக் கொண்ட குழுவொன்றைத் தெரிந்தெடுக்கவேண்டியுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் குழு தெரிந்தெடுக்கத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

- (i) இரு ஆண்களும் இரு பெண்களும் குழுவில் இருக்கவேண்டியபோது  
(ii) ஒவ்வொரு தரத்திலும் இருவர் வீதமும் இரு ஆண்களும் இரு பெண்களும் குழுவில் இருக்கவேண்டியபோது  
(iii) தரம் 13 இல் உள்ள பெண் மாணவிகள் எவரும் குழுவில் இடம்பெறாதபோது தரம் 12 இல் உள்ள பெண் மாணவியை குழுவிற்கு தெரிந்தெடுக்க முடியாதபோது

(b) எல்லா  $n \in \mathbb{Z}^+$  இற்கும்  $\sum_{r=1}^n U_r = 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}$  எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

எல்லா  $n \in \mathbb{Z}^+$  இற்கும்  $U_n = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$  எனக் காட்டுக.

எல்லா  $r \in \mathbb{Z}^+$  இற்கும்  $\frac{1}{U_r} = f(r) - f(r-1)$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக சார்பு  $f(r)$  ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து,  $n \in \mathbb{Z}^+$  இற்கு  $\sum_{r=1}^n \frac{1}{U_r} = \frac{1}{16} n(n+1)(n+2)(n+3)$  எனக் காட்டுக.

$n \in \mathbb{Z}^+$  இற்கு  $\sum_{r=1}^n \frac{(1+U_r)^2}{U_r}$  ஐக் காண்க.

$\sum_{r=1}^n \frac{U_n}{U_r} < 2024$  ஆக இருக்கத்தக்கதாக  $n$  இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

13. (a)  $z_1 = \frac{4}{1-\sqrt{3}i}$  எனவும்  $z_2 = \frac{2\sqrt{2}}{1+i}$  எனவும் கொள்வோம்.  $z_1, z_2$  ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் வடிவம்  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு  $r > 0$  உம்  $-\pi < \theta \leq \pi$  உம் ஆகும்.  $z_1, z_2, z_1 + z_2$  ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஆகண் வரிப்படமொன்றில் வகைகுறிக்க.  $\text{Arg}(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{24}$  எனக் காட்டுக.

$\tan \frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$  என்பதை உய்த்தறிக.

(b)  $\alpha - \beta$  ஆனது  $2\pi$  இன் நிறைவேண் மடங்காக இருந்தால்-இருந்தால் மாத்திரம்  $\cos \alpha + i \sin \alpha = \cos \beta + i \sin \beta$  எனக் காட்டுக.

$p, q \in \mathbb{Z}^+$  எனக் கொள்வோம். த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$4p - 3q$  ஆனது 24 இன் நிறைவேண் மடங்காக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம்

$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^p = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^q$  எனக் காட்டுக.

(c)  $z, w \in \mathbb{C}$  எனவும்  $z \neq -w$  எனவும் கொள்வோம்.

$\text{Re} \left( \frac{z-w}{z+w} \right) = \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z+w|^2}$  எனக் காட்டுக.

14. (a)  $x \neq 0$  இற்கு  $f(x) = 2 + \frac{9}{x} - \frac{9}{x^2}$  எனக் கொள்வோம்.

$x \neq 0$  இற்கு  $f'(x) = -\frac{9(x-2)}{x^3}$  எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,  $f(x)$  அதிகரிக்கின்ற ஆயிதையையும்  $f(x)$  குறைகின்ற ஆயிதையையும் காண்க.

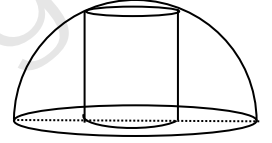
மேலும்  $f(x)$  இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$x \neq 0$  இற்கு  $f''(x) = \frac{18(x-3)}{x^4}$  எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$y = f(x)$  இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$y = f(x)$  இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

(b) ஆரை  $a$  ஐ உடைய திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றினுள் உருளை வடிவத் துவாரம் ஒன்று அமைக்கப்பட்டுள்ளது. உருளையின் அச்ச அரைக்கோளத்தின் அச்சில் உள்ளது. உருளையின் ஆரை  $x$  எனவும் உயரம்  $y$  எனவும் கொள்வோம்.



$x, y$  ஆகியவற்றிற்கு இடையே தொடர்பொன்றைப் பெறுக.

உருளையின் கனவளவு  $V$  ஆனது  $V = \pi y(a^2 - y^2)$  இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

$y = \frac{a}{\sqrt{3}}$  ஆகும்போது கனவளவு  $V$  உயர்வெனக் காட்டுக.

15. (a)  $k \in \mathbb{R}$  எனக் கொள்வோம்.  $\int \frac{1}{x(x-k)^2} dx$  ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து,  $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$  ஐயும்  $\int \frac{1}{x(x-2)^2} dx$  ஐயும் காண்க.

$$\int \frac{3-2x}{x(x-1)^2(x-2)^2} dx = \frac{3}{4} \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-2)} + c \text{ ஐ}$$

உய்த்தறிக்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி

$$\int_1^{e^\pi} x^n \sin(\ln x) dx = \frac{1}{n^2+2n+2} \{1 + e^{(n+1)\pi}\} \text{ எனக் காட்டுக; இங்கு } n \neq -1.$$

இதிலிருந்து,  $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x^{2n+1} \sin(2 \ln x) dx$  ஐப் பெறுமானங் கணிக்க; இங்கு  $n \neq -1$ .

(c)  $a$  ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம்  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$  ஐப்

பயன்படுத்தி,  $\int_0^\pi x \sin^5 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^5 x dx$  எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,  $\int_0^\pi x \sin^5 x dx = \frac{8\pi}{15}$  எனக் காட்டுக.

16. புள்ளி  $(x_1, y_1)$  இலிருந்து நேர்கோடு  $ax + by + c = 0$  இற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம்  $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  எனக் காட்டுக.

வட்டம்  $s \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$  இன் மையத்தையும் ஆரையையும் கண்டு,  $s = 0$  ஐ பரும்படியாக  $xy$  தளத்தில் வரைக.

புள்ளி  $A \equiv (2, 0)$  இனூடு செல்வதும் படித்திறன்  $m$  ஐ உடையதுமான நேர்கோடு  $l$  இன் சமன்பாட்டை  $m$  சார்பில் எழுதுக.

கோடு  $l$  ஆனது வட்டம்  $s = 0$  ஐ  $P, Q$  என்னும் இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றது எனத் தரப்பட்டுள்ளது.  $0 < m < \frac{4}{3}$  எனக் காட்டுக.

மேலும்  $0 < m < \frac{4}{3}$  ஆகுமாறு  $m$  மாறும்போது  $PQ$  இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு  $[(x, y)/x^2 + y^2 - 6x - y + 8 = 0 \text{ and } x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 < 0]$  இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

வட்டங்கள்  $s \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 6x - y + 8 = 0$  என்பன இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்வதும் வட்டம்  $s$  ஐ நிமிர்கோண முறையாக இடைவெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. (a)  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  இற்கு  $\cos 2x = \sin 3x$  ஐத் தீர்க்க.

இதிலிருந்து,  $1, \sin \frac{\pi}{10}, -\sin \frac{3\pi}{10}$  என்பன சமன்பாடு  $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$  இன் மூலங்கள் எனக் காட்டுக.  $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  ஐ உய்த்தறிக.

(b) முக்கோணி  $ABC$  இல் வழமையான குறியீடுகளுடன்  $\frac{a+b-c}{a+b+c} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$  எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,  $(a + b + c) \left( \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) = 2c \cot \frac{C}{2}$  எனக் காட்டுக.

(c)  $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$  எனக் காட்டுக.