श्रीमद्भास्कराचार्यविरचिता लीलावती

व्याख्यानम् 9: शून्यपरिकर्माष्टकम्

K. Ramasubramanian
K. Mahesh

Cell for Indian Science & Technology in Sanskrit
IIT Bombay

AICTE Sponsored QIP program
(Understanding Classical Scientific Texts of India in an Immersive Sanskrit Environment)

IIT Indore
September 14–October 2, 2020

Questions (copied as it is from the mail)

1. I have a small doubt that In Bakshali Manuscript "+" is used to represent negative quantities, and it was supposed to the deformed version of the character 'ऋ'. Then the interpretation of the word "धनयोर्धनम् ऋणमृणयोः" will entirely be changed in the shloka 30 of Brahmasphuṭa-Sidhānta. It is quite confusing when the positive and negative quantities recognised as 'धन' is positive' and 'ऋण' as negative?
2. Also, is anything on the square root of negative numbers mentioned in Bhāskara-II-Līlāvatī.
3. Please comment on attached word doc quote by L.C, Jain in the book "Tiloyapannati ka Ganit"
4. The "Pūrṇa" in the shanti mantra of Īśāvāsya refers to zero?
5. Pūrṇa in Īśāvāsya refers to infinity. Infinity is *khahara*, i.e., any number divided by zero.
6. भारतवर्षे प्राचीनगणितज्ञानां दृष्टौ (वर्णने च) परिकर्माष्टके गुणनं मात्रं कथं विशेषतया हिंसातुल्यं भूतम् ?
7. गुणनकर्मणा शून्यस्य न स्वरूपहानिः, परन्तु शून्येतरसङ्ख्यानां स्वरूपहानिर्भूत्वा ताः शून्यत्वं यान्ति, इति परीक्ष्य अपि गुणनस्य हिंसोपमा उचिता भाति, इति वक्तुं (अथवा स्मर्तुं) शक्नुमः वा?

शून्यपरिकर्माष्टकम्

Eight types of operations with ZERO

Verses 45 – 47

शून्यम् — Zero

One of the earliest occurrences of the word *śūnya* is found in the *Chandaḥśāstra* of Piṅgala (3 cent. BCE) in the context of doing mathematical operations connected with *pratyayas*:

- इदंप्रथमतया शून्यशब्दोपयोगः छन्दःशास्त्रे – रूपे शून्यम्। द्विःशून्ये।
- अत्र न संख्यात्वेन, अपि तु सङ्केतरूपेण।

The connotations of the word *śūnya* and its synonyms etc.:

- शून्यम् = अभावः।
- शून्यम् = खम्, वियत्, गगनम्, पूर्णम्
- एकादिस्थानस्थिताङ्कगणनायां यत्र अङ्काभावः तत्र अङ्काभावद्योतनार्थं शून्यं निवेश्यते।

शून्यपरिकर्मविधानम् — Fundamental arithmetic operations with zero

शून्यस्यापि संख्यात्वमवलम्ब्य तस्यापि सङ्कलिताद्यष्टकसंभवः अस्तीति विज्ञाय ब्रह्मगुप्तः तदेवं प्रत्यपादयत् –

धनयोर्धनमृणमृणयोः धनर्णयोरन्तरं समैक्यं खम् ।
ऋणमैक्यं च धनमृणधनशून्ययोः शून्ययोः शून्यम् ॥

$negative + zero \rightarrow negative$
$positive + zero \rightarrow positive$
$zero + zero \rightarrow zero$

ऊनमधिकाद्विशोध्यं धनं धनादृणमृणादधिकमूनात्।
व्यस्तं तदन्तरं स्यादृणं धनं धनमृणं भवति ॥
शून्यविहीनमृणमृणं धनं धनं भवति शून्यमाकाशम्।
शोध्यं यदा धनमृणादृणं धनाद्वा तदा क्षेप्यम् ॥

$negative - zero \rightarrow negative$
$positive - zero \rightarrow positive$
$zero - zero \rightarrow zero$

शून्यगुणनभाजने – Multiplication and division with zero

ऋणमृणधनयोर्घातो धनमृणयोर्धनवधो धनं भवति ॥
शून्यर्णयोः खधनयोः खशून्ययोर्वा वधः शून्यम्॥

negative × *zero* → *zero*
positive × *zero* → *zero*

zero × *zero* → *zero*

धनभक्तं धनमृणहृतमृणं धनं भवति खं खभक्तं खम् ।
भक्तमृणेन धनमृणं धनेन हृतमृणमृणं भवति ॥
खोद्धृतमृणं धनं वा तच्छेदं खमृणधनविभक्तं वा ।
ऋणधनयोर्वर्गः स्वं खं खस्य पदं कृतिर्यत् तत् ॥

zero ÷ *zero* → *zero*
positive/negative ÷ *zero* → *taccheda*
zero ÷ *positive/negative* → *taccheda/zero*

योगे खं क्षेपसमं वर्गादौ खं खभाजितो राशिः ।
खहरस्स्यात् खगुणः खं खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ ॥ ४५॥ । आर्या ।

In addition, zero becomes equal to the additive. In squaring etc., [zero gives] zero. Any quantity divided by zero would become *khahara* [zero-denominator]; multiplied by zero would become zero, and should [instead] be considered *kh-aguṇa* [zero-multiplied] in case of any remaining operation.

- [शून्येन सह अन्यस्य] योगे खं क्षेपसमम्।

$$0 + a = a. \tag{1}$$

- क्षिप्यते असौ इति क्षेपः।
- [खं] वर्गादौ खम्। वर्ग-वर्गमूल-घन-घनमूलेषु शून्यमेव।

$$0^2 = 0 \tag{2}$$

$$0^3 = 0 \tag{3}$$

$$\sqrt{0} = 0 \tag{4}$$

$$\sqrt[3]{0} = 0 \tag{5}$$

शून्यस्य भागहारः — Division of zero

योगे खं क्षेपसमं वर्गादौ खं खभाजितो राशिः ।
खहरस्स्यात् खगुणः खं खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ ॥ ४५॥ । आर्या ।

खभाजितो राशिः खम् । अत्र "खम्" इति अनुवृत्तिः।

$$0 \div x = \frac{0}{x} = 0. \tag{6}$$

- खं भाजितं येनासौ खभाजितराशिः खं स्यात्।
- भाज्यस्य परमापचये शून्यमितभाज्ये अङ्केन हृते फलाभावात् शून्यं फलम्।
  As and when the dividend is very small, which its measure is almost zero, when it is divided by a number, the result is zero because of the absence of the quotient.

शून्येन भागहारः — Division by zero

खभाजितो राशिः खहरः स्यात्।

$$x \div 0 = \frac{x}{0} = khahara \tag{7}$$

- शून्येन भक्तः सङ्ख्यात्मको राशिः खहरः खं हरो यस्य इत्येतादृशः अनियतफलकः स्यात्, "भाज्याद्धरः शुद्ध्यति" इत्यादिना न तत्फलसिद्धेः।
- बीजगणिते अयं खहरः अनन्तः राशिः इत्युच्यते।

एवं हरापचये फलोपचयात् परमहरापचये शून्यमितहरे फलपरमत्वम्। इयत्तायां परमत्त्वव्याघातः, ततोऽप्याधिक्यसम्भवात्। अत एवानन्तफलज्ञापनार्थं खहरत्वमुक्तम्।

Since when the divisor decreases, the result increases, there result would be maximum for that denominator which is equal to zero, which happens to be the divisor decreased to the maximum. [Assigning] a specific value would harm the largeness, since it is possible to have a higher value than that. Therefore, *khahara* has been stated [by Bhāskara] to indicate the infinite result.

शून्यगुणनम्

योगे खं क्षेपसमं वर्गादौ खं खभाजितो राशिः ।
खहरस्स्यात् खगुणः खं खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ ॥ ४५॥ । आर्या ।

- खं गुणः यस्य सः (राशिः गुण्यः)
- खस्य गुणः खगुणः (राशिः गुणकः)

$$0 \times x = 0 \tag{8}$$

$$x \times 0 = 0 \tag{9}$$

शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत् पुनस्तदा राशिः ।
अविकृत एव ज्ञेयस्तथैव खेनोनितश्च युतः ॥४६॥ । आर्या ।

When zero happens to be the multiplier, and again zero is the divisor, then the quantity should be known to be unchanged only. Similarly, a quantity deducted and added by zero [should be known to be unchanged.]

$$\frac{x \times 0}{0} = x \tag{10}$$

खेनोनितश्च युतः अविकृतः।

$$x - 0 = x \tag{11}$$

$$x + 0 = x \tag{12}$$

खं पञ्चयुक् भवति किं वद खस्य वर्गं
मूलं घनं घनपदं खगुणाश्च पञ्च ॥
खेनोद्धृता दश च कः खगुणो निजार्ध-
युक्तस्त्रिभिश्च गुणितः खहृतस्त्रिषष्टिः ॥४७॥ । वसन्ततिलका ।

What would zero be with five? Tell the square, square root, cube, cube root of zero, five multiplied by zero, and ten divided by zero. What [quantity] would become sixty-three being multiplied by zero, [the result] added with half of itself, multiplied by three and divided by zero.

1. $0 + 5 = 5$,
2. $0^2 = 0$,
3. $\sqrt{0} = 0$,
4. $0^3 = 0$,
5. $\sqrt[3]{0} = 0$,
6. $0 \times 5 = 0$,
7. $10 \div 0 = \frac{10}{0}$ (*khahara*)
8. $[(x \times 0) + \frac{1}{2} \times (x \times 0)] \times \frac{3}{0} = 63$.

उदाहरणम्

कः खगुणो निजार्धयुक्तः त्रिभिश्च गुणितः खहृतः त्रिषष्टिः?

Find x, where $\left[(x\times 0)+\frac{1}{2}\times(x\times 0)\right]\times\frac{3}{0}=63.$

$$\left[(x\times 0)+\frac{1}{2}\times(x\times 0)\right]\times\frac{3}{0}=63$$

$$(x\times 0)+\frac{1}{2}\times(x\times 0)=\frac{63\times 0}{3}$$

$$x\times 0=\frac{63\times 0}{3}-\frac{1}{2+1}\times\frac{63\times 0}{3}$$

$$x\times 0=\frac{2}{3}\times\frac{63\times 0}{3}$$

$$x=\frac{14\times 0}{0}$$

$$\therefore x=14.$$

खगुणखहरयोः जीवन्मुक्तदृष्टान्तः — Invoking *jīvanmukta* to explain operations with zero

शून्याभ्यासवशात् खतामुपगतो राशिः पुनः खोद्धृतोऽ
प्यावृत्तिं पुनरेति तन्मयतया न प्राक्तनीं गच्छति ।
आत्माभ्यासवशादनन्यममलं चिद्रूपमानन्ददं
प्राप्य ब्रह्मपदं न संसृतिपदं योगी गरीयानिव ॥

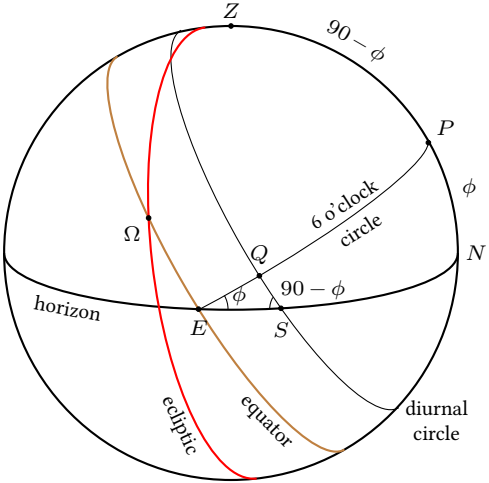
The activities described in the above verse may be denoted as:

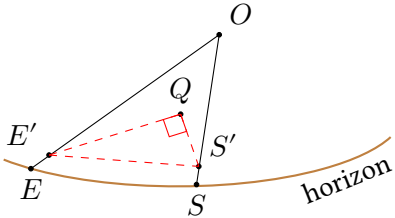
	राशिः	पुरुषः
स्वस्थितेः प्रच्युतिः	शून्याभ्यासनम्	निःसारवस्त्वनुधावनम्
स्वस्थितौ पुनरागमनम्	खोद्धरणम्	आत्माभ्यसनम्

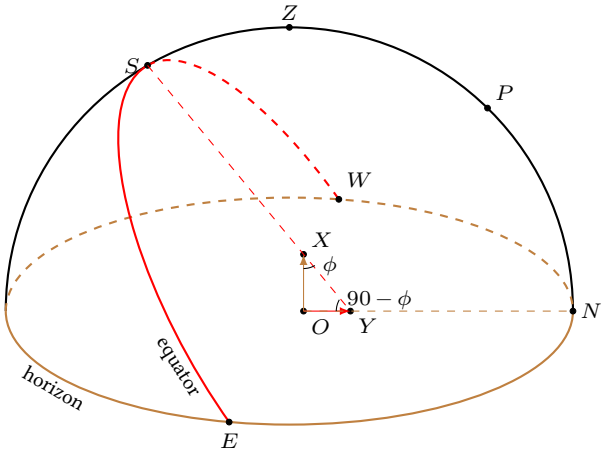
The result of performing those activities are:

	राशिः	पुरुषः
स्वस्थितेः प्रच्युतिः	खतोपगमनम्	निर्विण्णतापादनम्
स्वस्थितौ पुनरागमनम्	स्वपरिमितिप्राप्तिः	ब्रह्मानन्दावाप्तिः

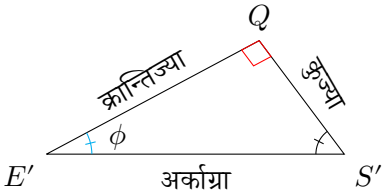
अर्काग्रत्र्यस्रम्

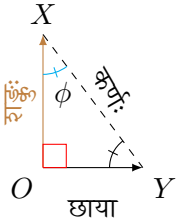






$$OX = \textit{śaṅku}$$
$$OY = \textit{chāyā}$$
$$XY = \textit{palakarṇa}$$





Since the two traingles are similar,

$$\frac{E'S'}{XY} = \frac{QS'}{OY} = \frac{OE'}{OX} \qquad XY = \frac{E'S' \times OX}{OE'}$$

$$\text{पलकर्णः} = \frac{\text{१२} \times \text{अर्काग्रा}}{\text{क्रान्तिज्या}} \qquad = \frac{12 \times \dfrac{\sin\delta}{\cos\phi}}{\sin\delta}$$

प्रकीर्णकम्

Miscellaneous operations

Verses 48 – 89

प्रकीर्णकान्तर्गताः विषयाः — Topics in Miscellaneous operations

क्रमः	विषयः	अर्थः
1	व्यस्तविधिः	Inverse operations
2	इष्टकर्म	Operations with assumed numbers
3	सङ्क्रमणं विषमकर्म च	Operations with sums and differences
4	वर्गकर्म	Operations with squares of numbers
5	गुणकर्म	Operations with additions to squares
6	त्रैराशिकादिः	Rules of three etc.
7	भाण्डप्रतिभाण्डकम्	Barter of commodities

व्यस्तविधिः — Inverting a mathematical process

When the result of performing a series of arithmetical operations on an unknown quantity *rāśi* is known, the series of operations that have to be performed to find that unknown *rāśi* is given in the verse below –

> छेदं गुणं गुणं छेदं वर्गं मूलं पदं कृतिम् ।
> ऋणं स्वं स्वमृणं कुर्यात् दृश्ये राशिप्रसिद्धये ॥ ४८॥ । अनुष्टुभ् ।

> To obtain the *rāśi*, one should make the divisor the multiplier, the multiplier the divisor, the square as square root, the square root as square, subtraction as addition, and addition as subtraction in the *dṛśya*.

Symbolically the content of the above verse can be denoted as:

Process		Its inverse
$\div$	$\longrightarrow$	$\times$
$()^2$	$\longrightarrow$	$\sqrt{()}$
$-$	$\longrightarrow$	$+$

Process		Its inverse
$\times$	$\longrightarrow$	$\div$
$\sqrt{()}$	$\longrightarrow$	$()^2$
$+$	$\longrightarrow$	$-$

अथ स्वांशाधिकोने तु लवाढ्योनो हरो हरः ।
अंशस्त्वविकृतस्तत्र विलोमे शेषमुक्तवत् ॥ ४९॥ । अनुष्टुभ् ।

Now, in the case where the *rāśi* has been increased or decreased by a part of itself, the denominator [of the fraction by which the *dṛśya* has to be modified] is the denominator [of the fraction of the *rāśi*] increased or decreased by the numerator [of the fraction of the *rāśi*]. The numerator [of the fraction by which the *dṛśya* has to be modified] remains unchanged [from the numerator of the fraction of the *rāśi*] there. Rest [of the operations] are [carried out] as stated earlier in the reverse process.

$$x \pm \frac{a}{b} \times x = k,$$

In those instances where we add a part of it to itself, General solution:

$$\frac{x \times (b \pm a)}{b} = k$$

$$x = \frac{b}{b \pm a} \times k.$$

यस्त्रिघ्नस्त्रिभिरन्वितः स्वचरणैः भक्तस्ततः सप्तभिः
स्वत्र्यंशेन विवर्जितस्स्वगुणितो हीनो द्विपञ्चाशता ।
तन्मूलेऽष्टयुते हृते च दशभिः जातं द्वयं ब्रूहि तं
राशिं वेत्सि हि चञ्चलाक्षि विमलां बाले विलोमक्रियाम् ॥ ५०॥

। शार्दूलविक्रीडितम् ।

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{3x+\frac{3}{4}\times 3x}{7}-\left(\frac{1}{3}\times\frac{3x+\frac{3}{4}\times 3x}{7}\right)\right]^2-52+8}}{10}=2.$$

न्यासः — गु ३। युतः $\boxed{\begin{matrix}३\\४\end{matrix}}$। भागः ७। स्वत्र्यंशरहितः $\boxed{\begin{matrix}१\\३\end{matrix}}$। वर्गः। हीनः ५२। तन्मूलयुतः ८। भागः १०। जातं दृश्यम् २। लब्धो राशिः २८।

Thanks!

धन्यवादाः!