श्रीमद्भास्कराचार्यविरचिता लीलावती

व्याख्यानम् ७: भिन्नपरिकर्माष्टकम्

K. Ramasubramanian
K. Mahesh

Cell for Indian Science & Technology in Sanskrit
IIT Bombay

AICTE Sponsored QIP program

(Understanding Classical Scientific Texts of India in an Immersive Sanskrit Environment)

IIT Indore

September 14–October 2, 2020

Questions/Comments/Request pertaining to Lecture 6

Question:

In both *varga* and *ghana parikarma*, *utsāraṇa* of result obtained by previous procedure is very confusing as to by how many places we should do *utsāraṇa*. Be it right to left or reverse. Can you go over?

Answer:

- Multiple approaches – as paths to a building in a big university – can always be confusing (no doubt)!!
- However, the confusion can be easily resolved once we understand the principle behind the *utsāraṇa* in its general form.
- We shall try to explain this once more with examples.

घनपरिकर्म – Process of obtaining cubes

समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः स्थाप्यो घनोऽन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्गः ।
आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्गः त्र्यन्त्याहतोऽथाऽऽदिघनश्च सर्वे ॥२४॥
स्थानान्तरत्वेन युता घनः स्यात् प्रकल्प्य तत्खण्डयुगं ततोऽन्त्यम् ।
एवं मुहुर्वर्गघनप्रसिद्धौ आद्याङ्कतो वा विधिरेष कार्यः ॥२५॥ । उपजातिः ।

The product of three equal quantities is called a cube. [Considering the last digit as the *antya*, and the penultimate digit as the *ādi*], the cube of the *antya*, thereafter, the square of the *antya* multiplied by *ādi* and three, thereafter, the square of the *ādi* multiplied by three and the *antya*, and then the cube of the *ādi* should be placed [above the operated digit]. All [these] added place-wise would become the cube [of the group of two digits considered]. Then, considering that pair of digits as *antya*, [and the next digit as *ādi*], repeat thus.

अन्त्यघनः	1^3	$=$	1							याघ १
अन्त्यवर्गः आदित्रिनिघ्नः	$3 \times 1^2 \times 2$	$=$		6						यावका ३
आदिवर्गः त्र्यन्त्याहतः	$3 \times 1 \times 2^2$	$=$		1	2					याकाव ३
आदिघनः	2^3	$=$				8				काघ १
	$\mathbf{12^3}$	$=$	**1**	**7**	**2**	**8**				पीघ १
	$3 \times 12^2 \times 5$	$=$		2	1	6	0			पीवनी ३
	$3 \times 12 \times 5^2$	$=$				9	0	0		पीनीव ३
	5^3	$=$					1	2	5	नीघ १
	$\mathbf{125^3}$	$=$	**1**	**9**	**5**	**3**	**1**	**2**	**5**	

उदाहरणम् – घनसाधनम् (आद्याङ्कतः)

आदिघनः	5^3	$=$				1	2	5		नीघ १
आदिवर्गः अन्त्यत्रिनिघ्नः	$3 \times 5^2 \times 2$	$=$			1	5	0			नीवका ३
अन्त्यवर्गः त्र्याद्याहतः	$3 \times 5 \times 2^2$	$=$			6	0				नीकाव ३
अन्त्यघनः	2^3	$=$			8					काघ १
	$\mathbf{25^3}$	$=$		**1**	**5**	**6**	**2**	**5**		लोघ १
	$3 \times 25^2 \times 1$	$=$	1	8	7	5				लोवया ३
	$3 \times 25 \times 1^2$	$=$	7	5						लोयाव ३
	1^3	$=$ 1								याघ १
	$\mathbf{125^3}$	$=$ **1**	**9**	**5**	**3**	**1**	**2**	**5**		

आद्यं घनस्थानमथाघने द्वे पुनस्तथान्त्याद्घनतो विशोध्य ।
घनं पृथक्स्थं पदमस्य कृत्या त्रिघ्न्या तदाद्यं विभजेत्फलं तु ॥२८॥
पङ्क्त्यां न्यसेत् तत्कृतिमन्त्यनिघ्नीं त्रिघ्नीं त्यजेत्तत् प्रथमात्फलस्य ।
घनं तदाद्याद्घनमूलमेवं पङ्क्तिर्भवेदेवमतः पुनश्च ॥२९॥ । उपजातिः ।

[In a given number whose cube root is desired] the first (units) digit is [called] *ghana*, and the next two [digits] are [called] *aghana*. Again, like that [mark the subsequent digits as *ghana* and *aghaana*]. Having subtracted the [highest possible] cube from the last *ghana*, the cube root [of that number] is placed separately. [Next], one should divide the digit preceding that [*ghana* digit], by three times the square of this [root]. One should place the quotient [thus obtained] on the *paṅkti*. One should subtract three times the product of the square of that [quotient] and the *antya* (previous result on the answer line) from the digit preceding that [*aghana* digit], and the cube of the quotient from the next [*ghana* position]. Thus, the *paṅkti* would be the cube root. Thereafter, repeat like this [on further digits].

		$\bar{\mathbf{1}}$	$\overset{\vert}{\mathbf{9}}$	$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{\mathbf{8}}$	$\overset{\vert}{\mathbf{3}}$	पङ्क्तिः	क्रमः	सामान्यपङ्क्तिः
शोधनम् : 2^3	–		8				2	$-a^3$	a
हरणम् : 3×2^2	12)	1	1	6	(7				
	–		8	4			27	$-3a^2b$	ab
			3	2	8				
शोधनम् : $3 \times 2 \times 7^2$	–		2	9	4			$-3ab^2$	
				3	4	3			
शोधनम् : 7^3	–			3	4	3		$-b^3$	
						0			
घनमूलम्	=						**27**		**ab**

		—	|	—	—	|	—	—	|				
		7	**3**	**5**	**6**	**0**	**0**	**5**	**9**	*Paṅkti*			Operation
Subtract 4^3	$-$	6	4							4			$(-)\ a^3$
Divide by 3.4^2	48)		9	5	(1					4	1		$(\div)\ 3a^2$
	$-$		4	8									
			4	7	6								
Subtract $3.4.1^2$	$-$			1	2								$(-)\ 3ab^2$
			4	6	4	0							
Subtract 1^3	$-$					1							$(-)\ b^3$
Divide by 3.41^2	5043)		4	6	3	9	0	(9		4	1	9	$(\div)\ 3(a+b)^2$
			4	5	3	8	7						
				1	0	0	3	5					
Subtract $3.41.9^2$	$-$				9	9	6	3					$(-)\ 3(a+b)c^2$
							7	2	9				
Subtract 9^3	$-$						7	2	9				$(-)\ c^3$
							0	0	0				
Cube root	$=$									4	1	9	

Algorithm for finding the cube root

- The algorithm for obtaining the cube root is presented by Āryabhaṭa in the following *āryā*:

  अघनात् भजेत् द्वितीयात् त्रिगुणेन घनस्य मूलवर्गेण ।
  वर्गास्त्रिपूर्वगुणितः शोध्यः प्रथमात् घनश्च घनात् ॥

- A few observations before we explain the verse above:
  1. If a number has n digits, the number of digits in the cube of that number will be $\geq 3n - 2$ and $\leq 3n$.
  2. With this in mind Āryabhaṭa prescribes to group the number of digits—starting from the unit's place of the given number whose cube root is to be found—into three.
  3. The groups of the three notational places are called
     - *Ghana* (G)
     - *Prathama-aghana* (A_1)
     - *Dvitīya-aghana* (A_2)

Algorithm for finding the cube root

The verse and its translation

अघनात् भजेत् द्वितीयात् त्रिगुणेन घनस्य मूलवर्गेण ।
वर्गास्त्रिपूर्वगुणितः शोध्यः प्रथमात् घनश्च घनात् ॥

Having subtracted the greatest possible cube from the last cube place and then having written down the cube root of the number subtracted in the line of the cube root], divide the second non-cube place (standing on the right of the last cube place) by thrice the square of the cube root [already obtained]; (then) subtract from the first non-cube place (standing on the right of the second non-cube place) the square of the quotient multiplied by thrice the previous (cube-root); and (then subtract) the cube (of the quotient) from the cube place (standing on the right of the first non-cube place) [and write down the quotient on the right of the previous cube root in the line of the cube root, and treat this as the new cube root. Repeat the process if there are still digits on the right.

Algorithm for finding the cube root

The algorithm presented by Āryabhaṭa essentially consists of four steps:

1. Starting from the unit's place, having grouped the digits of the given number into three, from the remaining (1, 2 or 3) most significant digit(s), which constitutes *ghana-sthāna*, subtract the cube of the max. digit that is possible. This digit forms the first (most significant) digit of the cube root to be determined.
2. Then, along with the remainder bring down the next digit from the *dvitīya-aghana* place. This has to be divided by thrice the square of the *ghana-mūla* obtained so far. The quotient forms the next digit of the cube root.
3. Along with the remainder bring down the next digit in the prathama-aghana place, and subtract from it the square of the previous quotient multiplied by 3 and the *pūrva*, the cube root determined previously, that is till now (वर्गस्त्रिपूर्वगुणितः).
4. Then from the successive *ghana* place we have to subtract the cube of the quotient that was determined previously (second step), and the whole process has to be repeated.

		G	A_2	A_1	G	A_2	A_1	G	121
		1	7	7	1	5	6	1	(line of cube root)
Subtract 1^3		1							
Divide by 3.1^2	3)	0	7	(2					
		0	6						
			1	7					
Subtract $3.1.2^2$			1	2					
				5	1				
Subtract 2^3				0	8				
Divide by 3.12^2	432)			4	3	5	(1		
				4	3	2			
						3	6		
Subtract $3.12.1^2$						3	6		
							0	1	
Subtract 1^3								1	
								0	

Rationale behind Āryabhaṭa's cube root algorithm

- Any three digit number may be represented as,

$$ax^2 + bx + c, \qquad \text{where } a, b, c \text{ are integers } \& \ x = 10$$

- The cube of this number may be expressed as:

terms	operation	significance of it
$x^6(a^3)$	$(-)\ \ a^3$	cube of max. digit
$+x^5(3a^2b)$	$(\div)\ \ 3a^2$	to get the value of b
$+x^4(3a^2c + 3ab^2)$	$(-)\ \ 3ab^2$	
$+x^3(6abc + b^3)$	$(-)\ \ b^3$	we are left with $3c(a+b)^2$
$+x^2(3b^2c + 3ac^2)$	$(\div)\ \ 3(a+b)^2$	to get the value of c
$+x^1(3bc^2)$	$(-)\ \ 3(a+b)c^2$	
$+x^0(c^3)$	$(-)\ \ c^3$	remainder zero $\Rightarrow$ perfect cube.

- The algorithm presumes (i) a thorough understanding of decimal place value system, and (ii) skill in algebraic manipulation.

भिन्नपरिकर्माष्टकम्

Eight types of operations with fractions

Verses 30 – 44

जातिचतुष्टयम् – Four *jātīs*

Indian way of denoting fractions was to simply place the denominator below the numerator without a separating line, as follows:

१	१
६३	१४

In this section, Bhāskara discusses different techniques of *savarṇana* or 'unification', by means of which he shows how to reduce different kinds of fractions to a standard form.
The four techniques discussed include:

- भागजातिः — determining the common denominator
- प्रभागजातिः — reducing fractions of fractions to a simple fraction
- भागानुबन्धः — appendment of fractions
- भागापवाहः — removal of fractions

भिन्नपरिकर्मणि भागजातिः

का जातिः?

- यत्सत्तया पदार्थेषु एकाकारा बुद्धिः जन्यते।
- पदार्थानां मध्ये अनुगत-एकाकार-बुद्धिजनिका जातिः। तद्व्यापारश्च।
- विभिन्नवर्णानां भागानां एकत्वसम्पादिका जातिः।

अंशासवर्णनम्

मुनीश्वरः –

- अंशयोरंशानां वा एकीकरणम्, अखण्डितसङ्ख्या तदेकीकरणं वा सवर्णनम्।

गणेशः –

- भेदं प्राप्तः भिन्नः। अतः अर्धांशयुतो रहितो वा राशिर्भिन्न इत्युच्यते।
- विसदृशच्छेदानाम् अंशानां सदृशच्छेदकरणं भागजातिः इत्युच्यते।

अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्योः समच्छेदविधानमेवम् ।
मिथो हराभ्यामपवर्तिताभ्यां यद्वा हरांशौ सुधियात्र गुण्यौ ॥ ३० ॥ ।उपजातिः।

The denominator and numerator of the numbers (fractions) are multiplied by the denominators of each other. Thus is the method for obtaining a common denominator. Or, the denominator and numerator should be multiplied by the denominators of each other reduced by a common factor, by the intelligent person.

- योऽङ्को विभागनिमित्तं येन केन भाज्यते सोऽङ्कोऽधो हरः, तदूर्ध्वरसंज्ञः अंशः स्यात्। तत्र भाज्यस्यांशत्वमेव पूर्वैः सङ्केतितम्।
- अपवर्तनाङ्कोपस्थिताविदं लाघवम्। अनुपस्थितौ पूर्वमिव कार्यम्। विचारेणापवर्तनाङ्कोपस्थितिर्गौरवमेव, विलम्बात् ॥

रूपत्रयं पञ्चलवस्त्रिभागो योगार्थमेतान् वद तुल्यहारान् ।
त्रिषष्टिभागश्च चतुर्दशांशः समच्छिदौ मित्र वियोजनार्थम् ॥ ३१॥ ।उपजातिः।

अंशः	अन्यहरौ	सवर्णनम्
$\frac{3}{1}$	5, 3	$\frac{3\times5\times3}{1\times5\times3}=\frac{45}{15}$
$\frac{1}{5}$	1, 3	$\frac{1\times1\times3}{5\times1\times3}=\frac{3}{15}$
$\frac{1}{3}$	1, 5	$\frac{1\times1\times5}{3\times1\times5}=\frac{5}{15}$

अंशः	अन्यहरः	अपवर्तितहरः	सवर्णनम्
$\frac{1}{63}$	14	2	$\frac{1\times2}{63\times2}=\frac{2}{126}$
$\frac{1}{14}$	63	9	$\frac{1\times9}{14\times9}=\frac{9}{126}$

न्यासः — | १/६३ | १/१४ |। एतौ हरांशौ सप्तापवर्तितहराभ्यां ९, २ अन्योन्यं गुणितौ जातौ समच्छेदौ | २/१२६ | ९/१२६ |। अनयोरन्तरे कृते जातम् ७/१२६ ।

भागस्य भागः प्रभागः। तयोस्तेषां वा एकीकरणं प्रभागजातिः।

लवा लवघ्नाश्च हरा हरघ्ना भागप्रभागेषु सवर्णनं स्यात् ॥३२॥ ।उपजातिः।

$$\frac{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}{b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n}. \tag{1}$$

एकसंख्याभाज्यत्वे

- अर्द्धस्य चतुर्थांश इत्युक्ते यस्यार्धं तस्याष्टमांशः पर्यवसन्न इत्यागोपालानुभवसिद्धम्।
- एतत्तु चतुर्थांशद्व्यंशयोः हरघातादुपपन्नम्।

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 4}$$

एकसंख्येतरभाज्यत्वे

- एवं त्रिचतुर्थांशस्य द्वितृतीयांश इत्युक्ते त्रयाणां द्वादशांशो द्विगुण इति षण्णां द्वादशांशोऽर्द्धरूपत्वेन सर्वजनानुभवसिद्धः। इदं च अंशयोः भाज्यघातस्य हरघातांशरूपम् उपपन्नम्। अतो लवा लवघ्नाश्च हरा हरघ्ना इति सवर्णनं युक्तमुक्तम् ॥

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{12} \times 2 = \frac{6}{12}$$

द्रम्मार्धत्रिलवद्वयस्य सुमते पादत्रयं यद्भवेत्
तत्पञ्चांशकषोडशांशचरणः सम्प्रार्थितेनार्थिने ।
दत्तो येन वराटकाः कति कदर्येणार्पितास्तेन मे
ब्रूहि त्वं यदि वेत्सि वत्स गणिते जातिं प्रभागाभिधाम् ॥३३॥ ।शार्दूलविक्रीडितम्।

- सुमते! द्रम्मार्धत्रिलवद्वयस्य पादत्रयं यद्भवेत् तत्पञ्चांशकषोडशांशचरणः सम्प्रार्थितेन अर्थिने येन दत्तः, तेन कदर्येण कति वराटकाः अर्पिताः? वत्स! त्वं मे ब्रूहि यदि गणिते प्रभागाभिधां जातिं वेत्सि ।

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} \times = \frac{6}{7680}$$
$$= \frac{1}{1280} \text{ द्रम्माः}$$
$$= 1 \text{ वराटकः}$$

1 काकिणी	=	20 वराटकाः
1 पणः	=	4 काकिण्यः
1 द्रम्मः	=	16 पणाः
1 निष्कः	=	16 द्रम्माः

आत्मानं धर्मकृत्यञ्च पुत्रदारांश्च पीडयेत्। लोभाद्यश्च पितॄन् भृत्यान् स कदर्य इति स्मृतः ॥

अखण्डसङ्ख्याः एकस्य भागैः अधिकोनकाः तदा –

छेदघ्नरूपेषु लवा धनर्णम् एकस्य भागा अधिकोनकाश्चेत् ।

$$p \pm \frac{1}{q} = \frac{p \times q \pm 1}{q}. \tag{2}$$

एकस्य कस्यचित् रूपस्य भागैः इति गृहीते

$$p \pm \frac{r}{q} = \frac{p \times q \pm r}{q}. \tag{3}$$

यदा राशिः स्वांशाधिकोनः तदा –

स्वांशाधिकोनः खलु यत्र तत्र भागानुबन्धे च लवापवाहे ।
तलस्थहारेण हरं निहन्यात् स्वांशाधिकोनेन तु तेन भागान् ॥३४॥ ।उपजातिः।

$$\frac{p}{q} \pm \left(\frac{c}{d} \times \frac{p}{q}\right) = \frac{p \times (d \pm c)}{q \times d}. \tag{4}$$

साङ्घ्रि द्वयं त्रयं व्यङ्घ्रि कीदृग्ब्रूहि सवर्णितम् ।
जानास्यंशानुबन्धं चेत् तथा भागापवाहनम् ॥ ३५॥ ।अनुष्टुभ्।

न्यासः —

२	३
१	१̇
४	४

। सवर्णिते जातम्

९	११
४	४

$$2+\frac{1}{4}=\frac{2\times 4+1}{4}=\frac{9}{4} \qquad 3-\frac{1}{4}=\frac{3\times 4-1}{4}=\frac{11}{4}.$$

छेदघ्नरूपेषु लवा धनर्णम् एकस्य भागा अधिकोनकाश्चेत् ।

उदाहरणम् - २

अङ्घ्रिः स्वत्र्यंशयुक्तः स निजदलयुतः कीदृशः कीदृशौ च
त्र्यंशौ स्वाष्टांशहीनौ तदनु च रहितौ तौ त्रिभिः सप्तभागैः ।
अर्धं स्वाष्टांशहीनं नवभिरथ युतं सप्तमांशैः स्वकीयैः
कीदृक्स्याद्ब्रूहि वेत्सि त्वमिह यदि सखेऽशानुबन्धापवाहौ ॥३६॥ ।स्रग्धरा।

अङ्घ्रिः स्वत्र्यंशयुक्तः। स निजदलयुतः कीदृशः [भवेत्]?

$$\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)\right]+\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)\right]$$

त्र्यंशौ स्वाष्टांशहीनौ, तदनु च तौ त्रिभिः सप्तभागैः रहितौ कीदृशौ च?

$$\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{3}{7}\times\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\right)\right]$$

अर्धं स्वाष्टांशहीनं, अथ नवभिः स्वकीयैः सप्तमांशैः युतं कीदृक् स्यात्?

$$\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{9}{7}\times\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right)\right]$$

न्यासः —

१	२	१
४	३	२
१	१̇	१̇
३	८	८
१	३̇	९
२	७	७

सवर्णिते जातं क्रमेण

१	१	१
२	३	१

प्रश्नाः समाधानं च

$$\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)\right]+\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)\right] \qquad \text{(i)}$$

$$\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\right)\right]+\frac{1}{2}\times\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\right)\right] \qquad \text{(ii)}$$

$$\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{9}{7}\times\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right)\right] \qquad \text{(iii)}$$

$$\left\{\begin{array}{cc} & \frac{1}{2} \\ - & \frac{1}{8}\end{array}\right\} = \frac{1\times(8-1)}{2\times 8} = \frac{7}{16} \qquad \left\{\begin{array}{cc} & \frac{7}{16} \\ + & \frac{9}{7}\end{array}\right\} = \frac{7\times(7+9)}{16\times 7} = 1.$$

Thanks!

धन्यवादाः !