श्रीमद्भास्कराचार्यविरचिता लीलावती

व्याख्यानम् ५: परिकर्माष्टकम्

K. Ramasubramanian
K. Mahesh

Cell for Indian Science & Technology in Sanskrit
IIT Bombay

AICTE Sponsored QIP program

(Understanding Classical Scientific Texts of India in an Immersive Sanskrit Environment)

IIT Indore

September 14–October 2, 2020

Questions passed on pertaining to Lecture 3 (copied as it is from mail)

Questions:

1. भास्कराचार्यस्य काले कृष्णफलकसुधाखण्डयोरिव मार्जनानुकूलो लेखनविधिः प्रचलितः किल (येन उत्सारणविधौ मार्जनक्रियाः सुलभा भवितुं शक्यन्ते)?
2. अपि च, भास्कराचार्येण दत्तेषु नाना विधिषु के के विना लेखनसाधनैः ("mental arithmetic" कर्तुम्) सरलाः भवन्ति, अस्मिन् विषये व्याख्याकाराणां काचिदपि मतिः उपलब्धा वा?
3. What is the reason for writing numbers in reverse order in words? eg 135 is written as panch tri ek (5 3 1 : reverse order)
4. वंश, हस्तः, अस्त्रम् refer to the same unit length?

Answers:

1. YES
2. We shall explain
3. पञ्चत्र्येकमिताः अङ्कानामेकादिस्थानक्रमेणोद्दिष्टानां वामगत्या पञ्चत्रिंशदधिकशतसङ्ख्याकाः। अभ्यर्हितस्थानसव्यक्रमपर्यवसिताः। न तु लघ्वार्यभट्टसिद्धान्तोक्तरीत्यैकत्रिंशदधिकपञ्चशतसङ्ख्याकाः अभिमताभावात्।
4. No

वर्गपरिकर्म – Process of squaring

Multiple methods of squaring are given by Bhāskarācārya in the following two verses:

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः ।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथाऽपरेऽङ्काः त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम् ॥१९॥ । उपजातिः ।
खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा ।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यात् इष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥२०॥ । इन्द्रवज्रा ।

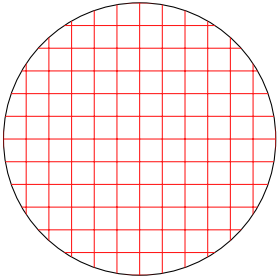
Āryabhaṭa's definition of वर्ग – वर्गः समचतुरश्रः फलं च सदृशद्वयस्य संवर्गः।

A few terminologies:

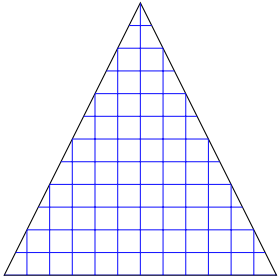
- वर्गः करणी कृतिः वर्गणा यावकरणमिति पर्यायाः। (कारणवाचकशब्दः कार्येऽपि प्रयुज्यते)
- तदुभयं करोति। करोति / करणी। (कर्मव्युत्पत्ति)
- कर्णभुजयोः समत्वं करोति यस्मात्ततः करणी।
- $\sqrt{2}$ = द्विकरणी (करणव्युत्पत्ति)
- कर्णभुजयोः वर्गयोगसमं फलं क्रियते अनेन इति करणी। (the sides corresponding to the hypotenuse)

वर्गपरिकर्म – Excerpts from Parameśvara's commentary

क्षेत्रफलसमुदायस्य वर्गसंज्ञा भवति। अभीष्टक्षेत्रस्य अन्तर्भागे हस्तमितैः चतुर्भिर्बाहुभिः निष्पन्नानि यानि समचतुरश्राणि तानि क्षेत्रफलानीत्युच्यन्ते। एवं त्रिकोणवृत्तादिक्षेत्रेष्वपि हस्तोन्मितचतुरश्रपरिकल्पनया ज्ञातानां चतुरश्रखण्डानां फलसंज्ञा भवतीति वेद्यम्। सदृशयोः परस्परतुल्ययोः संख्ययोः यस्संवर्गः परस्परहतिः वर्गसंज्ञा भवति।



88 full squares
and 32 fragmented squares



60 full squares
and 24 fragmented squares

वर्गपरिकर्म – Process of squaring

Multiple methods of squaring are given by Bhāskarācārya in the following two verses:

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः ।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथाऽपरेऽङ्काः त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम् ॥१९॥ । उपजातिः ।
खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा ।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यात् इष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥२०॥ । इन्द्रवज्रा ।

The product of two equal quantities is called a square (*kṛti*). Now, [to determine the square of a number] the square of the last digit should be placed [above itself], and the other digits multiplied by twice the last digit should be placed above each digit respectively [such that the units digit of the result is directly over the operated digit]. Having excluded the last digit, and sliding the given number [by one place], repeat [the above process, and add the results]. Or, [having split the given number into two convenient parts], the product of the two parts multiplied by two, added with the sum of the squares of those two parts, is the square [of the given number]. Or, the product of the difference and sum of the given number and a desired number, added with the square of the desired number, would be the square [of the given number].

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ सूस्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः ।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथाऽपरेऽङ्काः त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम् ॥१९॥ । उपजातिः ।
खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा ।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यात् इष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥२०॥ । इन्द्रवज्रा ।

Method 1:

$$ABC = 100a + 10b + c$$

Squaring both sides and expanding the right-hand side, we have

$$\begin{aligned}(ABC)^2 &= (100a + [10b + c])^2 \\ &= (100a)^2 + 2 \times (100a) \times (10b + c) + (10b + c)^2 \\ &= (100a)^2 + 2 \times 100a \times 10b + 2 \times 100a \times c \\ &\quad + (10b)^2 + 2 \times 10b \times c + c^2 \end{aligned} \tag{1}$$

वर्गपरिकर्म – Process of squaring

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः ।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथाऽपरेऽङ्काः त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम् ॥१९॥ । उपजातिः ।
खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा ।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यात् इष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥२०॥ । इन्द्रवज्रा ।

- तुल्यसङ्ख्याङ्कयोर्द्वयोर्घातः—एको गुण्यस्तदितरो गुणक इति प्रकल्प्य पूर्वोक्तरीत्या यद्गुणनफलं तद्रूपं—कृतिः वर्गापराख्या उच्यते अभिज्ञैरिति शेषः। एतेनाभिज्ञानां परिभाषा, नात्रोपपत्तिरिति स्पष्टीकृतम्। अनेकस्थानात्मकस्याङ्कस्य प्रकारान्तरेण वर्गमाह —
- अन्त्यस्य अन्त्यस्थानस्थिताङ्कस्य वर्गः स्थाप्यः स्वोपरिष्टात् यथास्थानम्। अनन्तरं द्विगुणो योऽन्त्यस्थानस्थितोऽङ्कस्तेन गुणिता अपरे उपान्तिमादयोऽङ्काः स्वस्वगुण्यस्य उपरिष्टात् ऊर्ध्वं यथास्थानक्रमं तथा स्थाप्याः।
- अनन्तरम् अन्त्यं अन्त्यस्थानस्थमङ्कं त्यक्त्वा सम्मार्ज्य राशिम् अवशिष्टाङ्कं यथास्थानं—स्थानान्तरक्रमेण सिद्धाङ्कानाम् आदिस्थानादादिस्थानस्य कल्पितस्याध एकस्थानस्थाङ्को यथा भवति तथा—उत्सार्य, पुनरवशिष्टाङ्केभ्यः "स्थाप्योऽन्त्यवर्ग" इत्यादि "त्यक्त्वान्त्यम्" इत्यन्तं कर्मोक्तं कार्यम्।
- क्रियोत्पन्नानामङ्कानां यथास्थानं योगो वर्गः स्यादित्यर्थः।

फलम्	$\rightarrow$	**8**	**8**	**2**	**0**	**9**	(या १ का १ नी १)^2
7^2	$=$				4	9	नीव १
$2 \times 9 \times 7$	$=$		1	2	6		कानी २
9^2	$=$		8	1			काव १
$2 \times 2 \times 7$	$=$		2	8			यानी २
$2 \times 2 \times 9$	$=$	3	6	$\uparrow$			याका २
2^2	$=$	4	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	याव १
		2	9	7			
उत्सारणम्	$\rightarrow$			9	7		
उत्सारणम्	$\rightarrow$					7	

Figure: वर्गसाधनम्

- स्थानगुणनेन अव्यक्तरीत्या स्थानत्रयस्थिताङ्कस्य वर्गे क्रियमाणे— शतस्थाने **या १**, दशकस्थाने **का १**, एकस्थाने **नी १**। एषां पङ्क्तिः **या १ का १ नी १**।
- "गुण्यः पृथग्गुणखण्डसमो निवेश्य" इत्यादिना जातो वर्गः **याव १ याकाभा २ यानीभा २ काव १ कानीभा २ नीव १**।

						नीव १
					कानी २	
				काव १		
				यानी २		
			याका २	↑		
		याव १	↑	↑	↑	↑
गुण्यः	→			या १	का १	नी १
गुणकः	→			या १		
गुणकः	→				का १	
गुणकः	→					नी १

- अत्र प्रथमस्थानेऽन्त्यवर्गः।
- द्वितीयतृतीयस्थानयोः द्विगुणान्त्यनिघ्नौ कालकनीलकौ। अतः "स्थाप्योन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः स्वस्वोपरिष्टाच्च तथापरेङ्काः" इति चतुर्थस्थाने कालकवर्गः।
- पञ्चमे द्विगुणकालकनिघ्नो नीलकः। षष्ठे नीलकवर्गः।
- अतोऽन्त्यं त्यक्त्वा पुनरेवमित्युक्तम्। स्थानगुणनेन कृतवर्गत्वात् यथास्थानयोगे कर्तव्ये राशिमुत्सार्य इत्युपपन्नम्।

स्थानगुणनम् अव्यक्तरीत्या

या १	का १	नी १	×	या १
या १	का १	नी १	×	का १
या १	का १	नी १	×	नी १

	10^4	10^3	10^2
याव १	याका १	यानी १	10^1
काया १	काव १	कानी १	10^0
नीया १	नीका १	नीव १	

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः ।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथाऽपरेऽङ्काः त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम् ॥१९॥ । उपजातिः ।
खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा ।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यात् इष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥२०॥ । इन्द्रवज्रा ।

Method 2:

The third method described described in the verse is the application of the algebraic expression

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

For example,

$$\begin{aligned} 14^2 &= (10+4)^2 \\ &= 2 \times 10 \times 4 + 10^2 + 4^2 \\ &= 80 + 100 + 16 \\ &= 196 \end{aligned}$$

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः ।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथाऽपरेऽङ्काः त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम् ॥१९॥ । उपजातिः ।
खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा ।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यात् इष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥२०॥ । इन्द्रवज्रा ।

Method 3: This method makes use of the basic rule

$$(a-b)\times(a+b)=a^2-b^2$$

Therefore,

$$(a-b)\times(a+b)+b^2=a^2-b^2+b^2=a^2$$

This method can be useful when the given number is close to a multiple of ten or hundred. For example:

$$\begin{aligned}297^2 &= (297-3)\times(297+3)+3^2\\ &= 294\times 300+9\\ &= 88200+9\\ &= 88209\end{aligned}$$

खण्डद्वयस्याभिहति-प्रकारः

गणेशः —

- एवं खण्डत्रयस्यापि योजनीयम्।
- तथाहि – खण्डत्रयस्य परस्परराशिहतीनां युतिः।
- तद्यथा – प्रथमद्वितीययोः प्रथमतृतीययोः द्वितीयतृतीययोश्च खण्डयोः घाताः।
- तेषां युतिर्द्विनिघ्नी, तेषां वर्गैक्येन युता कृतिः स्यात्।

$$
\begin{aligned}
234^2 &= (200+30+4)^2 \\
&= 2\times(200\times 30+200\times 4+30\times 4)+200^2+30^2+4^2 \\
&= 2(6000+800+120)+40000+900+16 \\
&= 13840+40916 \\
&= 54756.
\end{aligned}
$$

सखे नवानां च चतुर्दशानां ब्रूहि त्रिहीनस्य शतत्रयस्य ।
पञ्चोत्तरस्याप्ययुतस्य वर्गं जानासि चेद्वर्गविधानमार्गम् ॥ २१॥

- नवानाम् (9) इति स्थानस्थितपरमाङ्कत्वेन उद्देशात् एकस्थानस्थितानाम् इतरेषामपि प्रश्नः अर्थसिद्धः।
- चतुर्दशानाम् (14) इति एकदशस्थानात्मकैकसङ्ख्याबोधकाङ्कस्य प्रश्नः सूचितः।
- त्रिहीनस्य शतत्रयस्य (297) इत्येकादिस्थानत्रयात्मकैकसङ्ख्याबोधकाङ्कस्य प्रश्नः।
- उक्तस्थले अपरोऽपरौ इति अङ्कस्याङ्कयोः क्रमेण दर्शनात् अपरेऽङ्का इत्युक्तस्य नोदाहरणसिद्धिः।
- अतः पञ्चोत्तरस्य पञ्चाधिकस्य अयुतस्य (10005) पञ्चस्थानात्मकैकसङ्ख्याबोधकाङ्कस्य प्रश्नः।
- पञ्चाधिकत्वेन प्रश्नस्तु वर्गस्य कठिनत्वसूचनार्थम्, अन्यथा अयुतवर्गस्यार्बुदमितत्वेन हेलया मन्दावगम्यत्वेन प्रश्नचमत्कारानुपपत्तेः।

वर्गपरिकर्म – Example presented by Bhāskarācārya

सखे नवानां च चतुर्दशानां ब्रूहि त्रिहीनस्य शतत्रयस्य ।
पञ्चोत्तरस्याप्ययुतस्य वर्गं जानासि चेद्वर्गविधानमार्गम् ॥२१॥ । उपजातिः ।

Friend! Tell the squares of nine, fourteen, three hundred less three, and five more than ten thousand if you know the method of squares.

The squares of 297 and 14 have been already shown above using methods two and three respectively. The square of $10,005$ can be obtained using the fourth method. Adding and subtracting 5 from the given number, we have

$$\begin{aligned} 10005^2 &= (10005 - 5) \times (10005 + 5) + 5^2 \\ &= 10000 \times 10010 + 25 \\ &= 100100000 + 25 \\ &= \mathbf{100100025} \end{aligned}$$

वर्गमूलम् – पारिभाषिकपदानि (Terminology)

- आदिस्थानात् विषमाः समाः च अङ्कनीयाः।
- यस्याङ्कस्य मूलमन्विष्यते तस्याङ्कस्य प्रथमम् एकस्थानमारभ्यान्त्यस्थानपर्यन्तं प्रथमतृतीयादीनां विषमत्वात् द्वितीयचतुर्थादीनां समत्वाच्च, तयोः सङ्केतः कार्य इति विषमात् अन्त्यात् इति पदाभ्यां सूचितम्।
- वर्गस्थानम्, अवर्गस्थानम् इति आर्यभटीयपरिभाषा।
- मूलम्, पदम्
- समयोः तुल्ययोः द्वयोः घातः कृतिः।
- पङ्क्तिः
- आप्तम्

भागं हरेदवर्गात् नित्यं द्विगुणेन वर्गमूलेन ।
वर्गाद्वर्गे शुद्धे लब्धं स्थानान्तरे मूलम् ॥

- [अन्त्य]वर्गात् वर्गे शुद्धे [यत्] लब्धं [तत्] मूलम् (मूलस्य अन्त्याङ्कः)।
- नित्यं द्विगुणेन वर्गमूलेन अवर्गात् [स्थानात्] भागं हरेत्।
- [अग्रिमात्] वर्गात् [अव्यवहितपूर्वभागलब्धस्य] वर्गे शुद्धे [सति] [भागेन] लब्धं लब्धं स्थानान्तरे मूलम् [उपान्त्यम्]।

वर्गमूलम् – Obtaining square-root

त्यक्त्वान्त्याद्विषमात् कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते
त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमाल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत् ।
पङ्क्त्यां पङ्क्तिहृते समेऽन्यविषमात् त्यक्त्वाऽप्तवर्गं फलं
पङ्क्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पङ्क्तेर्दलं स्यात् पदम् ॥२२॥ । शार्दूलविक्रीडितम् ।

Having subtracted the square [of the highest possible number] from the last odd position, one should double the [corresponding] root [and place it on a line paṅkti]. Having subtracted the square of the quotient obtained when the even position is divided by that number, from the odd position preceding that, one should place twice the quotient on the line. [Again], having subtracted the square of the quotient obtained when the [next] even position is divided by the [number on the] line, from the other (next) odd position, one should place twice of that quotient on the line, and thus repeat [the process]. Half of [the number on] the line would be the square root [of the given number].

त्यक्त्वान्त्याद्विषमात् कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते
त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमाल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत् ।
पङ्क्त्यां पङ्क्तिहृते समेऽन्यविषमात् त्यक्त्वाऽप्तवर्गं फलं
पङ्क्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पङ्क्तेर्दलं स्यात् पदम् ॥२२॥ । शार्दूलविक्रीडितम् ।

अन्वयः –

- अन्त्याद्विषमात् कृतिं त्यक्त्वा मूलं द्विगुणयेत्।
- समे तद्धृते लब्धकृतिं तदाद्यविषमात् त्यक्त्वा लब्धं द्विनिघ्नं पङ्क्त्यां न्यसेत् ।
- समे पङ्क्तिहृते, आप्तवर्गम् अन्यविषमात् त्यक्त्वा [यत्] फलं [लभ्यते] तत् द्विगुणं पङ्क्त्यां न्यसेत् ।
- इति मुहुः [कृते] पङ्क्तेः दलं पदं स्यात्।

त्यक्त्वान्त्याद्विषमात् कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमाल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत् ।
पङ्क्त्यां पङ्क्तिहृते समेऽन्यविषमात् त्यक्त्वाऽप्तवर्गं फलं पङ्क्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पङ्क्तेर्दलं स्यात् पदम् ॥२२॥

							Pańkti			Steps	General *Pańkti*
		8	8	2	0	9					
Subtract 2^2	−	4					4			$-a^2$	$2a$
Divide by	4)	4	8	(9							
	−	3	6							$-2ab$	
		1	2	2							
Subtract 9^2	−		8	1			1	8		$-b^2$	$2b$
Divide by		58)	4	1	0	(7	5	8			$2 \times (10a + b)$
	−		4	0	6					$-(2ac + 2bc)$	
					4	9					
Subtract 7^2	−				4	9		1	4	$-c^2$	$2c$
						0	5	9	4		$2 \times (100a + 10b + c)$
Square Root	=						2	9	7		$ABC = \mathbf{100a + 10b + c}$

Thanks!

धन्यवादाः !