श्रीमद्भास्कराचार्यविरचिता लीलावती

व्याख्यानम् 8: शिष्ट-भिन्नपरिकर्माष्टकम् शून्यपरिकर्माष्टकञ्च

K. Ramasubramanian
K. Mahesh

Cell for Indian Science & Technology in Sanskrit
IIT Bombay

AICTE Sponsored QIP program
(Understanding Classical Scientific Texts of India in an Immersive Sanskrit Environment)

IIT Indore
September 14–October 2, 2020

जातिचतुष्टयम् – Four *jātīs*

It seems to use that the Indian way of denoting fractions was to simply place the denominator below the numerator without a horizontal separating line, as follows:

१	१
६३	१४

In this section, Bhāskara discusses different techniques of *savarṇana* or 'unification', by means of which he shows how to reduce different kinds of fractions to a standard form.
The four techniques discussed include:

- भागजातिः — determining the common denominator
- प्रभागजातिः — reducing fractions of fractions to a simple fraction
- भागानुबन्धः — appendment of fractions
- भागापवाहः — removal of fractions

योगोऽन्तरं तुल्यहरांशकानां, कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः । ३७ ।। ।इन्द्रवज्रा।

Addition and subtraction of numerators which have equal denominators [is carried out]. The denominator of a number without a denominator should be assumed to be one.

- तुल्यः हरः येषां ते तुल्यहराः। तुल्यहराणाम् अंशकानां योगः।
- यत्र हारो न वर्तते तत्र किं कर्तव्यमिति जिज्ञासायाम्, "अहारराशेः रूपं हारः कल्प्यः"।
- न विद्यते हारः यस्य सः अहारः। अहारः चासौ राशिः च अहारराशिः।

$$\frac{a_1}{b} \pm \frac{a_2}{b} \pm \cdots \pm \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n}{b} \tag{1}$$

पञ्चांशपादत्रिलवार्धषष्ठान् एकीकृतान् ब्रूहि सखे ममैतान् ।
एभिश्च भागैरथ वर्जितानां किं स्यात्त्रयाणां कथयाशु शेषम् ॥ ३८॥ ।इन्द्रवज्रा।

न्यासः – $\left|\begin{matrix}१\\५\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}१\\४\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}१\\३\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}१\\२\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}१\\६\end{matrix}\right|$ । ऐक्ये जातं $\begin{matrix}२९\\२०\end{matrix}$ ।

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{29}{20}}$$

- पञ्चांशस्य लवहरौ १, ५। स्वहरातिरिक्तान्यांशहरैः एतैः ४, ३, २, ६ गुणितौ $\begin{matrix}१४४\\७२०\end{matrix}$ ।
- एवं चतुर्थांशः अन्यहरैः ५, ३, २, ६ गुणितः $\begin{matrix}१८०\\७२०\end{matrix}$ । त्रिलवः अपि एतैः ५, ४, २, ६ गुणितः $\begin{matrix}२४०\\७२०\end{matrix}$ ।
- अर्धम् एतैः ५, ४, ३, ६ गुणितं $\begin{matrix}३६०\\७२०\end{matrix}$ । षडंशः एतैः ५, ४, ३, २ गुणितः $\begin{matrix}१२०\\७२०\end{matrix}$ ।
- एते सर्वे $\left|\begin{matrix}१४४\\७२०\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}१८०\\७२०\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}२४०\\७२०\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}३६०\\७२०\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}१२०\\७२०\end{matrix}\right|$ पञ्चांशादिरूपत्वेन अक्षताः अपि समांशत्वेन सजातीया इत्येषां योगः $\begin{matrix}१०४४\\७२०\end{matrix}$ ।
- षड्त्रिंशदपवर्तितः $\begin{matrix}२९\\२०\end{matrix}$ ।

व्यवकलितमुदाहरति —

अथ एतैः वर्जितानां त्रयाणां शेषम् $\boxed{\begin{matrix}३१\\२०\end{matrix}}$ ।

- एतैः भागैर्मिलितैः $\begin{matrix}२९\\२०\end{matrix}$ इत्यर्थः।
- त्रयाणामधः रूपं हरः $\begin{matrix}३\\१\end{matrix}$ ।
- एतौ विंशतिगुणितौ $\begin{matrix}६०\\२०\end{matrix}$ जातौ समच्छेदौ।
- अंशयोरन्तरं $\begin{matrix}३१\\२०\end{matrix}$ जातं व्यवकलनम् ॥

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{29}{20}} \qquad 3-\frac{29}{20}=\mathbf{\frac{31}{20}}.$$

अंशाहतिश्छेदवधेन भक्ता
लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात् ॥ ३९॥ ।इन्द्रवज्रा।

The product of numerators is divided by the product of denominators. The obtained would be the result in the multiplication of fractions.

- अंशानाम् आहतिः = अंशाहतिः।
- छेदानां वधः = छेदवधः।
- अंशाहतिः छेदवधेन भक्ता।
- लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात्।

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \cdots \times \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}{b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n}.$$

सत्र्यंशरूपद्वितयेन निघ्नं ससप्तमांशद्वितयं भवेत् किम् ।
अर्धं त्रिभागेन हतं च विद्धि दक्षोऽसि भिन्ने गुणनाविधौ चेत् ॥ ४०॥ । उपजातिः।

What would two with one-seventh be, being multiplied by two with one-third. Also, find the result when one-half is multiplied by one-third, if you are capable in the procedure of multiplication of fractions.

रूपशब्दः अत्र स्वरूपवाचकः।

$$\left(2+\frac{1}{7}\right)\times\left(2+\frac{1}{3}\right)=\frac{15}{7}\times\frac{7}{3}=5.$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

छेदं लवं च परिवर्त्य हरस्य, शेषः कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च॥ ४१॥ ।वसन्ततिलका।

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

गणेशः —

हरस्य हरो गुणः स्याद्गुणो हरः स्यादिति बालैरपि ज्ञायते ।

It is known even by children that the denominator of the divisior would be the multiplier.

मुनीश्वरः —

- भाज्यो रूपभक्तो भाज्य एव फलम्। द्व्यादिभक्तो भाज्यार्धत्र्यंशादिफलम्। एवम् अंशे भज्यशोंशद्व्यंशत्र्यंशादिफले।

  The dividend divided by one results in the dividend itself. Divided by two etc. would result in half, one-third, etc.

$$\frac{m}{1} = m; \qquad \frac{m}{2} = \frac{m}{2}; \qquad \frac{m}{3} = \frac{m}{3} \ldots$$

मुनीश्वरेण प्रदर्शिता उपपत्तिः

- तथा च हरापचये फलोपचयः इति रूपार्धभक्ते भाज्ये द्विगुणो भाज्यः फलम् । एवं रूपत्र्यंशादिहरे त्र्यादिगुणो भाज्यः फलम् ।
  As there is decrement in the divisor, [there is a corresponding] increment in the result, and thus, when the dividend is divided by one-half, twice the dividend is the result. Similarly, when the divisor is one-third etc., the dividend multiplied by three etc. is the result.

$$\frac{m}{\frac{1}{2}} = 2m; \qquad \frac{m}{\frac{1}{3}} = 3m; \qquad \frac{m}{\frac{1}{k}} = k \times m \ldots$$

- एवं अर्धादिहरे द्व्यादिगुणे कल्पिते पूर्वफलं द्व्यादिभक्तमेव फलम्, हरोपचये फलापचयात् ।
  When the divisor one-half etc. is assumed to be multiplied by two etc. the previous result divided by two etc. is indeed the result, since as divisor increases, result decreases.

$$\frac{m}{\frac{1}{2} \times 2} = \frac{2 \times m}{2}; \qquad \frac{m}{\frac{1}{3} \times 3} = \frac{3 \times m}{3}; \qquad \frac{m}{\frac{1}{k} \times k} = \frac{k \times m}{k} \ldots$$

- तेनांशात्मकहरे हरस्यांशेन भाज्यस्य भजनं हरस्य हरेण भाज्यस्य गुणनं पर्यवसन्नफलार्थः ।
  Hence, when the divisor is a fraction, the division of the dividend by the numerator of the divisor, and multiplication of the dividend by the denominator of the divisor [needs to be carried out]. Hence concluded.

सत्र्यंशरूपद्वितयेन पञ्च त्र्यंशेन षष्ठं वद मे विभज्य ।
दर्भीयगर्भाग्रसुतीक्ष्णबुद्धिः चेदस्ति ते भिन्नहृतौ समर्था ॥ ४२॥ ।इन्द्रवज्रा।

Having divided five by two and one-third, and a sixth by one-third, tell me [the result], if you have an intellect which is sharp like the inner tip of the *darbha* grass, capable in the division of fractions.

न्यासः — $\begin{array}{|c|c|}\hline ७ & ५ \\ \hline ३ & १ \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline १ & १ \\ \hline ३ & ६ \\ \hline\end{array}$। यथोक्तकरणेन लब्धे फले $\begin{array}{|c|}\hline २ \\ १ \\ ७ \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline १ \\ २ \\ \hline\end{array}$।

वर्गे कृती घनविधौ तु घनौ विधेयौ हारांशयोरथ पदे च पदप्रसिद्ध्यै ॥ ४३॥ ।वसन्ततिलका।

In squaring, the squares, and in cubing, the cubes, of the denominator and numerator should be determined. Also, for obtaining [square and cube] roots, the roots of the denominator and numerator should be determined.

उदाहरणप्रश्नः

सार्धत्रयाणां कथयाशु वर्गं वर्गात्ततो वर्गपदं च मित्र ।
घनं च मूलं च घनात्ततोऽपि जानासि चेद्वर्गघनौ विभिन्नौ ॥ ४४॥ ।उपजातिः।

Friend, tell quickly the square of three and one-half, and the square root from that square, and also the cube, and the [cube] root from that cube, if you know squaring and cubing of fractions.

न्यासः — $\frac{७}{२}$ । अस्य जातो वर्गः $\frac{४९}{४}$ । अतो लब्धं मूलं $\frac{७}{२}$ । अथवास्य जातो घनः $\frac{३४३}{८}$ । अतो लब्धं घनमूलम्।

शून्यपरिकर्माष्टकम्

Eight types of operations with ZERO

Verses 45 – 47

शून्यम् — Zero

One of the earliest occurrences of the word *śūnya* is found in the *Chandaḥśāstra* of Piṅgala (3 cent. BCE) in the context of doing mathematical operations connected with *pratyayas*:

- इदंप्रथमतया शून्यशब्दोपयोगः छन्दःशास्त्रे – रूपे शून्यम्। द्विःशून्ये।
- अत्र न संख्यात्वेन, अपि तु सङ्केतरूपेण।

The connotations of the word *śūnya* and its synonyms etc.:

- शून्यम् = अभावः।
- शून्यम् = खम्, वियत्, गगनम्, पूर्णम्
- एकादिस्थानस्थिताङ्कगणनायां यत्र अङ्काभावः तत्र अङ्काभावद्योतनार्थं शून्यं निवेश्यते।

शून्यपरिकर्मविधानम् — Fundamental arithmetic operations with zero

शून्यस्यापि संख्यात्वमवलम्ब्य तस्यापि सङ्कलिताद्यष्टकसंभवः अस्तीति विज्ञाय ब्रह्मगुप्तः तदेवं प्रत्यपादयत् –

धनयोर्धनमृणमृणयोः धनर्णयोरन्तरं समैक्यं खम् ।
ऋणमैक्यं च धनमृणधनशून्ययोः शून्ययोः शून्यम् ॥

$negative + zero \rightarrow negative$
$positive + zero \rightarrow positive$
$zero + zero \rightarrow zero$

ऊनमधिकाद्विशोध्यं धनं धनादृणमृणादधिकमूनात्।
व्यस्तं तदन्तरं स्यादृणं धनं धनमृणं भवति ॥
शून्यविहीनमृणमृणं धनं धनं भवति शून्यमाकाशम्।
शोध्यं यदा धनमृणादृणं धनाद्वा तदा क्षेप्यम् ॥

$negative - zero \rightarrow negative$
$positive - zero \rightarrow positive$
$zero - zero \rightarrow zero$

शून्यगुणनभाजने – Multiplication and division with zero

ऋणमृणधनयोर्घातो धनमृणयोर्धनवधो धनं भवति ॥
शून्यर्णयोः खधनयोः खशून्ययोर्वा वधः शून्यम्॥

negative $\times$ *zero* $\rightarrow$ *zero*
positive $\times$ *zero* $\rightarrow$ *zero*

zero $\times$ *zero* $\rightarrow$ *zero*

धनभक्तं धनमृणहृतमृणं धनं भवति खं खभक्तं खम् ।
भक्तमृणेन धनमृणं धनेन हृतमृणमृणं भवति ॥
खोद्धृतमृणं धनं वा तच्छेदं खमृणधनविभक्तं वा ।
ऋणधनयोर्वर्गः स्वं खं खस्य पदं कृतिर्यत् तत् ॥

zero $\div$ *zero* $\rightarrow$ *zero*
positive/negative $\div$ *zero* $\rightarrow$ *taccheda*
zero $\div$ *positive/negative* $\rightarrow$ *taccheda/zero*

Thanks!

धन्यवादाः !