श्रीमद्भास्कराचार्यविरचिता लीलावती

व्याख्यानम् ६: परिकर्माष्टकम्

K. Ramasubramanian
K. Mahesh

Cell for Indian Science & Technology in Sanskrit
IIT Bombay

AICTE Sponsored QIP program

(Understanding Classical Scientific Texts of India in an Immersive Sanskrit Environment)

IIT Indore

September 14–October 2, 2020

Questions passed on pertaining to Lecture 5 (copied as it is from mail)

Question:

1. Explanation of अपवर्तनम् in Friday's session was simple and clear. My one cent suggestion and request is to repeat the explanation of calculations alone in English for the second time. I am sure this would help most of the group members too.

Answer:

राश्योरन्योन्यहरणे शेषः स्यादपवर्तनम् ।
तेन तौ विहृतौ राशी दृढाख्यावपवर्तितौ ॥

In the process of mutual division of the two *rāśis*, whatever remains is *apavartana*. [The results obtained] by dividing the two *rāśis* by that *apavartana* are called the *dṛḍhas*.

Squaring: Another example

Result	$\rightarrow$	**8**	**8**	**6**	**8**	**4**	**8**	**4**	**(abcd)^2**
8^2	$=$						6	4	d^2
$2 \times 7 \times 8$	$=$				1	1	2		$2cd$
7^2	$=$				4	9			c^2
$2 \times 9 \times 8$	$=$			1	4	4			$2bd$
$2 \times 9 \times 7$	$=$		1	2	6				$2bc$
9^2	$=$		8	1					b^2
$2 \times 2 \times 8$	$=$			3	2				$2ad$
$2 \times 2 \times 7$	$=$		2	8					$2ac$
$2 \times 2 \times 9$	$=$	3	6						$2ab$
2^2	$=$	4	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	a^2
		2	9	7	8				
Discard *antya* and slide	$\rightarrow$			9	7	8			
Discard *antya* and slide	$\rightarrow$					7	8		
Discard *antya* and slide	$\rightarrow$							8	

त्यक्त्वान्त्याद्विषमात् कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमाल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत् ।
पङ्क्त्यां पङ्क्तिहृते समेऽन्यविषमात् त्यक्त्वाऽप्तवर्गं फलं पङ्क्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पङ्क्तेर्दलं स्यात् पदम् ॥२२॥

		8	8	2	0	9	*Paṅkti*			Steps	General *Paṅkti*
Subtract 2^2	−	4					4			$-a^2$	$2a$
Divide by	4)	4	8	(9							
	−	3	6							$-2ab$	
		1	2	2							
Subtract 9^2	−		8	1			1	8		$-b^2$	$2b$
Divide by		58)	4	1	0	(7	5	8			$2 \times (10a + b)$
	−		4	0	6					$-(2ac + 2bc)$	
					4	9					
Subtract 7^2	−				4	9		1	4	$-c^2$	$2c$
						0	5	9	4		$2 \times (100a + 10b + c)$
Square Root	=						2	9	7		$abc = \mathbf{100a + 10b + c}$

द्विकरणी — Evaluation of $\sqrt{2}$ (sent by one of the participants Dr. V. Ramesh)

	1 - 1 - 1 - 1 - 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0	Pankti	Steps	General Pankti
$-1^2 (a^2)$	1	2	$-a^2$	$2a$
	2) 10 (4 (b) -8 20		$-2ab$	
$-4^2 (b^2)$ $\div 28$	-16 28) 40 (1 (c)	$\frac{8}{28}$	$-b^2$	$\frac{2b}{2\times(10a+b)}$
	-28 120		$-2(ac+bc)$	
$-1^2 (c^2)$ $\div 282$	-1 282) 1190 (4 (d)	$\frac{2}{282}$	$-c^2$	$\frac{2c}{2\times(100a+10b+c)}$
	-1128 620		$-2(ad+bd+cd)$	
$-4^2 (d^2)$ $\div 2828$	16 2828) 6040 (2 (e)	$\frac{8}{2828}$	$-d^2$	$\frac{2d}{2\times(1000a+100b+10c+d)}$
	5656 3840		$-2(ae+be+ce+de)$	
$-2^2 (e^2)$	-4 3836	$\frac{4}{28284}$	$-e^2$	$2e$

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2,00,00,00,00,00}}{10^4} \simeq \frac{14142}{10000} \simeq 1.4142$$

द्विकरणी – Evaluation of $\sqrt{2}$ (sent by one of the participants Dr. Hari Jain)

		1	0	1	0	1	0	1	0	1					
BHAJYA	**STEP**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**PANKTI**				
	$-a^2$	-1									2a=2				
		1	0												
b=4	-2a*b (-8 = -2*1*4)	-	8						4			2b=8			
			2	0											
	$-b^2$	-	1	6											
				4	0										
	- 2(10a+b) *C		-	2	8										
				1	2	0									
c=1	$-c^2$				-	1							2c=2		
				1	1	9	0								
	-2(100a+10b+c)*d		-	1	1	2	8							2d=8	
d=4						6	2	0							
	$-d^2$					-	1	6							
						6	0	4	0						2e=4
e=2	-2(1000a+100b+10c +d)*e				-	5	6	5	6						
							3	8	4	0					
	$-e^2$								-	4					
							3	8	3	6					
											2	**8**	**2**	**8**	**4**
										Result :	**1**	**4**	**1**	**4**	**2**

How did *Śulbakāras* specify the value of $\sqrt{2}$?

- The following *sūtra* gives an approximation to $\sqrt{2}$:
  प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्, तच्चतुर्थेन, आत्मचतुस्त्रिंशोनोनेन, सविशेषः । *[BSS 2.12]*

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}\left(1-\frac{1}{34}\right) \qquad (1)\\ &= \frac{577}{408}\\ &= 1.414215686\end{aligned}$$

- The above value is correct to 6 decimal places.
- The expression should have probably been arrived by a geometrical construction.
- What is noteworthy here is the use of the word सविशेषः in the *sūtra*, which literally means 'that which has some speciality' (speciality $\equiv$ being approximate)

वर्गमूलस्य उपपत्तिः — Rationale behind the square root process

For understanding the rationale behind the technique, first the terms that appear in the square of a number has to be understood. Let's say we want to find $(abcde)^2$.

- वर्गाङ्के एकादिस्थानानि वर्गावर्गस्थानत्वेन विषमसमत्वरूपेणाङ्कितानि।
- तत्र अन्त्यविषमे मूलान्त्यवर्गत्वात् यदङ्कस्य वर्गः शुद्धः स एव मूलान्त्याङ्कः।
- अवशिष्टाङ्कस्तु अन्त्योपान्त्यघातः समस्थाने द्विघ्नः। अतो द्विघ्नान्त्येन समो भक्तः, फलं मूलोपान्त्यः।
- अन्त्याद्वितीयविषमे उपान्त्यवर्ग इति फलवर्गशोधनं तद्वितीयविषमे।
- ततोऽवशिष्टाङ्कः समो द्विगुणान्त्यगुणितोपोपान्त्य-द्विगुणोपान्त्यगुणितोपोपान्त्ययोः स्थानान्तरत्वेन योगतुल्यः। स [समः] तु मूलान्त्योपान्त्यपङ्क्त्यात्मकाङ्क-उपोपान्त्यघातो द्विगुणः पर्यवसन्नः।

a^2		b^2		c^2		d^2		e^2
	$2a.b$	$2a.c$	$2a.d$	$2a.e$				
			$2b.c$	$2b.d$	$2b.e$			
					$2c.d$	$2c.e$		
							$2d.e$	
a^2	$2a.b$	$b^2+2a.c$	$2a.d+2b.c$	$c^2+2b.d+2a.e$	$2b.e+2c.d$	$d^2+2c.e$	$2d.e$	e^2

Why does this process prescribed work?

a^2		b^2		c^2		d^2		e^2
	$2a.b$	$2a.c$	$2a.d$	$2a.e$				
			$2b.c$	$2b.d$	$2b.e$			
					$2c.d$	$2c.e$		
							$2d.e$	
a^2	$2a.b$	$b^2+2a.c$	$2a.d+2b.c$	$c^2+2b.d+2a.e$	$2b.e+2c.d$	$d^2+2c.e$	$2d.e$	e^2

- The rationale behind the process outlined in the text for the extraction of square root can be understood with the help of the table above.
- The table essentially presents the various terms – products and squares of digits – that are there in the square of a given number having five digits say *abcde*.

वर्गमूलस्य उदेशकः — Bhāskarācārya example for finding वर्गमूलम्

मूलं चतुर्णां च तथा नवानां पूर्वं कृतानां च सखे कृतीनाम् ।
पृथक् पृथग्वर्गपदानि विद्धि बुद्धेर्विवृद्धिर्यदि तेऽत्र जाता ॥२३॥ । उपजातिः ।

Friend, tell me the square roots of each of four, nine, and of those squares which were calculated earlier if your intellect is developed in this mathematics.

- In addition to 4 and 9, here we also need to determine the square roots of 81, 196, 88209, and 100100025.
- The method for calculating the square root of 88209 was illustrated earlier.
- Learners may attempt the solution for the square roots of the other numbers by themselves.
- The method outlined here may be extend to find out the square roots of non-square numbers too. The decimal places can be determined by adding sufficient zeros.

		1	**8**	**1**	**.0**	**0**	**0**	**0**			*Paṅkti*			
Subtract 1^2	−	1									2			
Divide by	2)	0	8	(3										
	−	0	6											
			2	1										
Subtract 3^2	−		0	9							2	6		
Divide by		26)	1	2	0	(4								
	−		1	0	4									
				1	6	0								
Subtract 4^2	−			0	1	6					2	6	8	
Divide by			268)	1	4	4	(5							
				1	3	4	0							
					1	0	0	0						
Subtract 5^2	−						2	5			2	6	9	0
Divide by					2690)	9	2	5	0	(3				
						8	0	7	0					
						8	0	7	0					
Square Root	=										1	3	.4	5

घनपरिकर्म – Process of obtaining cubes

समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः स्थाप्यो घनोऽन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्गः ।
आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्गः त्र्यन्त्याहतोऽथाऽऽदिघनश्च सर्वे ॥२४॥
स्थानान्तरत्वेन युता घनः स्यात् प्रकल्प्य तत्खण्डयुगं ततोऽन्त्यम् ।
एवं मुहुर्वर्गघनप्रसिद्धौ आद्याङ्कतो वा विधिरेष कार्यः ॥२५॥ । उपजातिः ।
खण्डाभ्यां वा हतो राशिः त्रिघ्नः खण्डघनैक्ययुक् ।
वर्गमूलघनः स्वघ्नो वर्गराशेर्घनो भवेत् ॥२६॥ । अनुष्टुभ् ।

The product of three equal quantities is called a cube. [Considering the last digit as the *antya*, and the penultimate digit as the *ādi*], the cube of the *antya*, thereafter, the square of the *antya* multiplied by *ādi* and three, thereafter, the square of the *ādi* multiplied by three and the *antya*, and then the cube of the *ādi* should be placed [above the operated digit]. All [these] added place-wise would become the cube [of the group of two digits considered]. Then, considering that pair of digits as *antya*, [and the next digit as *ādi*], repeat thus. Or, in determining squares and cubes, this instruction can be applied from the first digit. Or, thrice the number multiplied by [its two] parts, added with the sums of the cubes of the parts [also gives the cube]. The cube of the square root [of a square number], multiplied by itself, would be the cube of the square number.

घनपरिकर्म – Definition and Method 1 for obtaining cubes

- **Definition**: The mathematical operation that involves the multiplication of three equal quantities, which is the same as the multiplication of a given number by itself two times is *ghana*. That is,

$$x^3 = x \times x \times x$$

- **Method 1**: This method makes use of the following algebraic relation:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1^3	=	1						
$3 \times 1^2 \times 2$	=		6					
$3 \times 1 \times 2^2$	=		1	2				
2^3	=				8			
$\mathbf{12^3}$	=	**1**	**7**	**2**	**8**			
$3 \times 12^2 \times 5$	=		2	1	6	0		
$3 \times 12 \times 5^2$	=				9	0	0	
5^3	=					1	2	5
$\mathbf{125^3}$	=	**1**	**9**	**5**	**3**	**1**	**2**	**5**

घनः — Cube

समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः स्थाप्यो घनोऽन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्गः ।
आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्गः त्र्यन्त्याहतोऽथादिघनश्च सर्वे ॥ २४॥
स्थानान्तरत्वेन युता घनः स्यात् प्रकल्प्य तत्खण्डयुगं ततोऽन्त्यम् ।
एवं मुहुर्वर्गघनप्रसिद्धौ आद्याङ्कतो वा विधिरेष कार्यः ॥ २५॥ ।उपजातिः।

- समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः।
- अन्त्यस्य घनः स्थाप्यः। ततोऽन्त्यवर्गः आदित्रिनिघ्नः [स्थाप्यः] ।
- तत आदिवर्गः त्र्यन्त्याहतः [स्थाप्यः]। अथादिघनश्च [स्थाप्यः]।
- सर्वे स्थानान्तरत्वेन युताः। [तदा तयोरङ्कयोः] घनः स्यात्।
- ततः तत्खण्डयुगम् अन्त्यं प्रकल्प्य एवं मुहुः [कार्यम्, आद्याङ्कप्राप्तिपर्यन्तम्]।
- वर्गघनप्रसिद्धौ आद्याङ्कतो वा एषः विधिः कार्यः ॥

आर्यभटीयवाक्यम् —

सदृशत्रयसंवर्गो घनः तथा द्वादशाश्रिः स्यात्।

उदाहरणम् – घनसाधनं क्रमतः (अन्त्याङ्कात्)

अन्त्यघनः	1^3	$=$	1								याघ १
अन्त्यवर्गः आदित्रिनिघ्नः	$3 \times 1^2 \times 2$	$=$		6							यावका ३
आदिवर्गः त्र्यन्त्याहतः	$3 \times 1 \times 2^2$	$=$		1	2						याकाव ३
आदिघनः	2^3	$=$				8					काघ १
	$\mathbf{12^3}$	$=$	**1**	**7**	**2**	**8**					पीघ १
	$3 \times 12^2 \times 5$	$=$		2	1	6	0				पीवनी ३
	$3 \times 12 \times 5^2$	$=$				9	0	0			पीनीव ३
	5^3	$=$					1	2	5		नीघ १
	$\mathbf{125^3}$	$=$	**1**	**9**	**5**	**3**	**1**	**2**	**5**		

उदाहरणम् – घनसाधनम् उत्क्रमतः(आद्याङ्कतः)

आदिघनः	5^3	$=$					1	2	5	नीघ १
आदिवर्गः अन्त्यत्रिनिघ्नः	$3 \times 5^2 \times 2$	$=$				1	5	0		नीवका ३
अन्त्यवर्गः त्र्याद्याहतः	$3 \times 5 \times 2^2$	$=$				6	0			नीकाव ३
अन्त्यघनः	2^3	$=$				8				काघ १
	$\mathbf{25^3}$	$=$			**1**	**5**	**6**	**2**	**5**	लोघ १
	$3 \times 25^2 \times 1$	$=$		1	8	7	5			लोवया ३
	$3 \times 25 \times 1^2$	$=$		7	5					लोयाव ३
	1^3	$=$	1							याघ १
	$\mathbf{125^3}$	$=$	**1**	**9**	**5**	**3**	**1**	**2**	**5**	

घनसाधनप्रकारः

वर्गः (गुण्यः)			याव १	याका २	यानी २ काव १	कानी २	नीव १
मूलम् (गुणकः)					या १	का १	नी १
			यावनी १	याकानी २	यानीव २ कावनी १	कानीव २	नीघ १
		यावका १	याकाव २	याकानी २ काघ १	कावनी २	कानीव १	
	याघ १	यावका २	यावनी २ याकाव १	याकानी २	यानीव १		
घनफलम्	याघ १	यावका ३	यावनी ३ याकाव ३	याकानी ६ काघ १	यानीव ३ कावनी ३	कानीव ३	नीघ १

खण्डाभ्यां वा हतो राशिः त्रिघ्नः खण्डघनैक्ययुक्। ।अनुष्टुभ्।

$$
\begin{aligned}
27^3 &= (20+7)^3 \\
&= 20^3 + 7^3 + 3 \times 20 \times 7 \times (20+7) \\
&= 8000 + 343 + 11340 \\
&= 19683.
\end{aligned}
$$

राशिः २७। खण्डे २०, ७। आभ्यां हतः त्रिघ्नः ११३४०, खण्डघनैक्येन ८३४३ युतो जातो घनः १९६८३।

वर्गमूलघनः स्वघ्नो वर्गराशेर्घनो भवेत्॥ २६॥ ।अनुष्टुभ्।

वर्गस्य मूलं तस्य यो घनः स **स्वघ्नः** स्वगुणितः सन् वर्गराशेर्घनो भवेत् ।

$$(a^2)^3 = (\sqrt{a^2})^3 \times (\sqrt{a^2})^3 = (a^3)^2.$$

वर्गात्मकसंख्यायाः (9) घनसाधनम् –

$$\begin{aligned} 9^3 &= \sqrt{9}^3 \times \sqrt{9}^3 \\ &= 3^3 \times 3^3 \\ &= 27 \times 27 = 27^2 \\ &= 729. \end{aligned}$$

वर्गराशेर्घन एव मूलघनवर्ग इति फलितार्थः। तथा च मूलघनवर्गे मूलवर्गघनं चोभयथा षड्घातत्वाद्द्वयोः साम्यमिति भावः।

नवघनं त्रिघनस्य घनं तथा कथय पञ्चघनस्य घनं च मे ।
घनपदं च ततोऽपि घनात् सखे यदि घनेऽस्ति घना भवतो मतिः ॥२७॥ । द्रुतविलम्बितम् ।

Friend, tell me nine cube, the cube of three cube, the cube of five cube, and then also the cube root from the cube [obtained] if your intellect is strong in [the calculation of] cubes.

- Here, we are asked to determine the cubes of 9, 27, and 125.
- The viewers are encouraged to attempt solving these problems using all the different methods.
- In the same verse Bhāskara also challenges the student to determine the cube roots of the cubes thus obtained.
- The method to determine the cube root, are presented in the next verse.
-

खण्डेषु खण्डत्रयघातभेदयोगे रसघ्ने निजखण्डवर्गाः।
अन्योन्यखण्डैः गुणितास्तदैक्यं त्रिघ्नं युतं खण्डघनाश्च वा सः॥ ।इन्द्रवज्रा।

इति॥ खण्डद्वये "खण्डेषु खण्डत्रयघातभेदयोगे रसघ्ने" इत्यसम्भवात् शून्यं ज्ञेयम्। ततो "निजखण्डवर्गा" इत्यादिनैव घनसिद्धिः।

उदाहरणन्तु – राशिः ९। खण्डानि २, ३, ४। खण्डत्रयघातः २४। अत्रैक एव भेदः। अयमेव योगः षड्गुणितः १४४। खण्डानां वर्गाः ४, ९, १६। अन्योन्यखण्डैः गुणितः १२, १६, १८, ३६, ३२, ४८। एषामैक्ये १६२। त्रिगुणं ४८६ खण्डघन(८, २७, ६४)ऐक्येन ९९ युतं ५८५। इदं षड्गुणितयोगेन १४४ युतं ७२९ जातो घनः।

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+6(abc)+3[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)]$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 = {} & a^3+b^3+c^3+d^3 \\ & +3[a^2(b+c+d)+b^2(a+c+d)+ \\ & \ c^2(a+b+d)+d^2(a+b+c)] \\ & +6(abc+abd+acd+bcd).\end{aligned}$$

घनमूलम् - Cube-root

आद्यं घनस्थानमथाघने द्वे पुनस्तथान्त्याद्धनतो विशोध्य ।
घनं पृथक्स्थं पदमस्य कृत्या त्रिघ्न्या तदाद्यं विभजेत्फलं तु ॥२८॥
पङ्क्त्यां न्यसेत् तत्कृतिमन्त्यनिघ्नीं त्रिघ्नीं त्यजेत्तत्प्रथमात्फलस्य ।
घनं तदाद्याद्धनमूलमेवं पङ्क्तिर्भवेदेवमतः पुनश्च ॥२९॥ । उपजातिः ।

- आद्यं घनस्थानम् अथ अघने द्वे। पुनः तथा।
- अन्त्यात् घनतो घनं विशोध्य पदं पृथक्स्थम् [कार्यम्]।
- अस्य कृत्या त्रिघ्न्या [सशेषं] तदाद्यं विभजेत्। फलं तु पङ्क्त्यां न्यसेत्।
- तत्कृतिम् अन्त्यनिघ्नीं त्रिघ्नीं तत्प्रथमात् त्यजेत्। [न्यस्तस्य] फलस्य घनं तदाद्यात् [घनस्थानात्] [त्यजेत्]।
- एवं घनमूलम्। एवं पङ्क्तिर्भवेत्। अतः एवं पुनश्च [कार्यम्]।

		$\bar{1}$	$\vert 9$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\vert 3$	पङ्क्तिः	क्रमः	सामान्यपङ्क्तिः
शोधनम् : 2^3	−		8				2	$-a^3$	a
हरणम् : 3×2^2	12)	1	1	6	(7				
	−		8	4			27	$-3a^2b$	ab
			3	2	8				
शोधनम् : $3 \times 2 \times 7^2$	−		2	9	4			$-3ab^2$	
				3	4	3			
शोधनम् : 7^3	−			3	4	3		$-b^3$	
						0			
घनमूलम्	=						**27**		**ab**

Thanks!

THANK YOU !