№1

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\cdot\arcsin\frac{2}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{n+3} = 2 \neq 0$$ расходится

№2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-6}{n^3+3}$$ $\frac{1}{n^2}$ - сходится ($\alpha > 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-6}{n^3+3}\cdot n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-6n^2}{n^3+3} = 5\left(\begin{matrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{matrix}\right) \Rightarrow$$ ведут себя также

№3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\cdot 7^n}{(n+5)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot 7^n\cdot 7}{(n+5)!}\cdot\frac{7^n\cdot\cancel{(n+2)}}{(n+5)!}\cdot\frac{\cancel{(n+5)!}}{(n+\cancel{4})\cdot 7^n} = 7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+6)(n+2)}$$

$1/n$ - расходится

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+6)(n+2)}\cdot n = 1\left(\begin{matrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{matrix}\right)$$ - тоже расходится

№4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{\sqrt{3n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{3n+2}} = \ldots = \infty \Rightarrow$$ расходится

$$\frac{\sqrt5}{5} < \sqrt2 < 3\frac{\sqrt{11}}{11} \Rightarrow$$ расходится

№5

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n = |x-2| < 1 \quad \left[\begin{matrix}x<3\\ x>1\end{matrix}\right.$$

Ответ 3/2, 11/4, 13/5

№6

$$\sum_{n=1}^{\infty} |3q|^n$$

$|3q| < 1 \Rightarrow |q| < 1/3$

ответ $1/6$, $1/9$, $-2/9$

№7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{5-\alpha}}$$

$5-\alpha \leq 1$

$5-1 \leq \alpha$

$4 \leq \alpha \Rightarrow \alpha \geq 4$

ответ $13/2$, $13/3$, $9/2$

№8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+18)(n+10)} =$$

$$\frac{A}{2n+18} + \frac{B}{n+10} = \frac{1}{(2n+18)(n+8)}$$

$A(n+10) + B(2n+18) = 1$

$$\begin{cases} A + 2B & A = -2B \\ A + 18B = 1 & 10A - 9A = 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{22}\right) + \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{24}\right) + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{26}\right) + \ldots +$$

$$\left(\frac{1}{2(n-1)+16} - \frac{1}{2(n+1)+20}\right) + \left(\frac{1}{2n+18} - \frac{1}{2n+20}\right) =$$

$$= \frac{1}{20} - \frac{1}{2n+20}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2n+20}\right) = \frac{1}{20}$$

ДУ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2}{2^n(n+1)}$ Даламбер $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{9n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ - расходится

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3^n} \cdot \frac{5^n}{5(n+1)} = 1/5 < 1 \Rightarrow$ сходится

$\sum \frac{(-1)^n 3n}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{9n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ - расходится
$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{9n^2+1} = 0 \quad 3/5 > 6/17 > \frac{9}{37}$ - сходится условно

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n+1}{3n^3+2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^3+2n-1} \sim \frac{1}{n^2}$ - сходится абсолютно

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow$ расходится

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{n^2+4} = \frac{1}{n}$ - расходится ($\alpha \leq 1$) - расходится

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5n}{6n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{6n-1} = 5/6$ - расходится

№10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(5n^3+4)\cdot 3^n}$$

$$\lim \left| \frac{\cancel{(x+1)^n}(x+1)}{(5(n+1)^3+4)\cdot \cancel{3^n}\cdot 3} \cdot \frac{(5n^3+4)\cdot \cancel{3^n}}{\cancel{(x+1)^n}} \right| = \frac{|x+1|}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^3+4}{5(n+1)^3+4} \right) < 1$$

$|x+1| < 3$

$x+1 < 3 \Rightarrow x < 2$

$-x-1 < 3 \quad x > -3-1 \Rightarrow x > -4$

при $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{(5n^3+4)\cancel{3^n}}$$

ряд сходится $\alpha = 3 > 1$

при $x = -4$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{3^n}}{(5n^3+4)\cancel{3^n}}$$ из $(x=2) \Rightarrow$ сходится абсолютно

Ответ: $[-4; 2]$

№11

$$f(x) = \ln(2x+7) = \ln(3+2x+4) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{2(x+2)}{3}\right) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^n (x+2)^n}{n \cdot 3^n}$$

$-1 < \frac{2}{3}(x+2) \leq 1$

$-1,5 < x+2 \leq 1,5$

$-3,5 < x \leq -0,5 \quad x \in (-3,5; -0,5]$